필수 개념 연계 문항들로 빠르게 끝내는 **단기 완성서**

풍산자 라이트

확률과 통계

구성과 특징

쉽고 가벼운
단기 개념 완성서

필수 개념 연계 문제와
기출 문제를 한번에 잡는
개념 완성 비법서

기본 개념의
문제 적용력 **up!!**
실전 문제 해결력 **up!!**

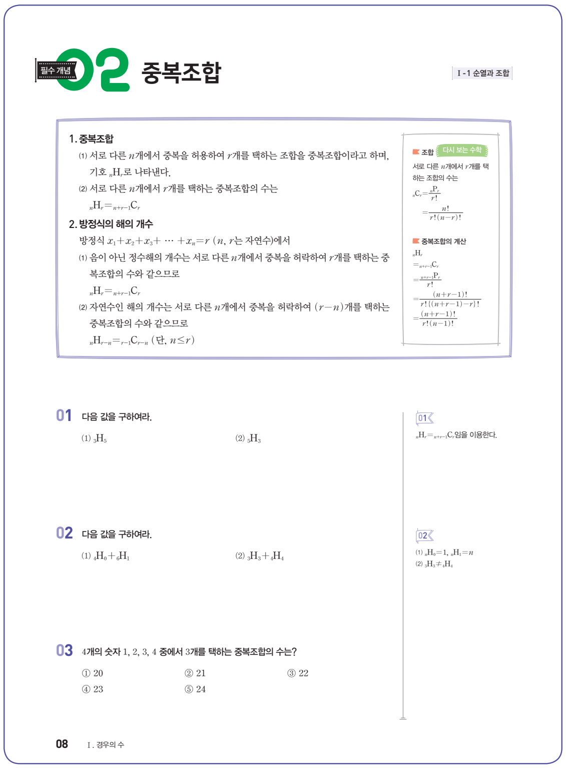
1

필수 개념과 연계 문제 학습

• 확률과 통계를 학습하는 데 꼭 필요한 개념을 선별하고 문제 풀이에 도움이 되는 내용을 참고로 제시

• 다시 보는 수학 을 표시하여 선수 과목의 내용을 복습

• 필수 개념과 연계한 문제를 소개하고, 문제 풀이에 좀 더 쉽게 다가가기 위한 TIP 제공



필수 개념 02 중복조합

I-1 순열과 조합

1. 중복조합

(1) 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라고 하며, 기호 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$로 나타낸다.

(2) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$

2. 방정식의 해의 개수

방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$ (n, r는 자연수)에서

(1) 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$

(2) 자연수인 해의 개수는 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 $(r-n)$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{n}\mathrm{H}_{r-n}={}_{r-1}\mathrm{C}_{r-n}$ (단, $n\le r$)

조합 다시 보는 수학

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

중복조합의 계산

${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}=\frac{{}_{n+r-1}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\frac{(n+r-1)!}{r!\{(n+r-1)-r\}!}=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

01 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_{3}\mathrm{H}_{5}$　(2) ${}_{5}\mathrm{H}_{3}$

01 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$임을 이용한다.

02 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_{4}\mathrm{H}_{0}+{}_{6}\mathrm{H}_{1}$　(2) ${}_{3}\mathrm{H}_{3}+{}_{4}\mathrm{H}_{4}$

02 (1) ${}_{n}\mathrm{H}_{0}=1$, ${}_{n}\mathrm{H}_{1}=n$
(2) ${}_{3}\mathrm{H}_{3}\neq{}_{4}\mathrm{H}_{4}$

03 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수는?

① 20　② 21　③ 22
④ 23　⑤ 24

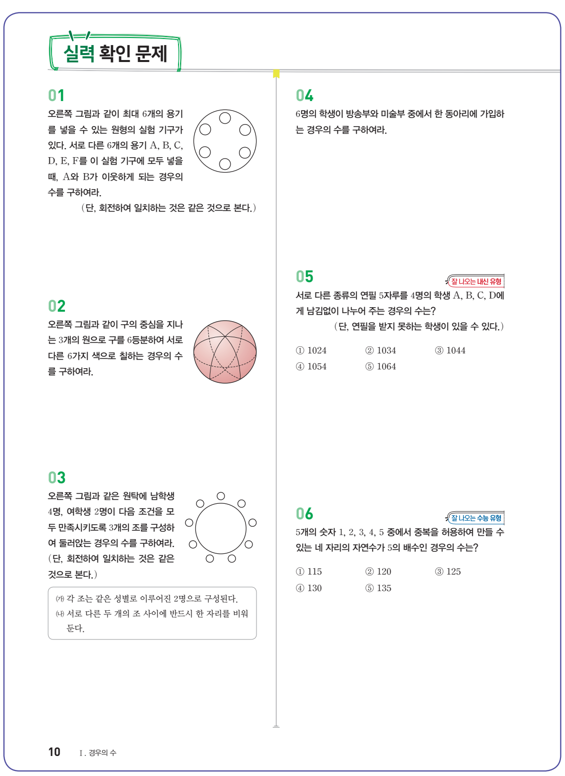
08 Ⅰ. 경우의 수

2

실력 확인 문제

• 잘 나오는 내신 유형, 잘 틀리는 내신 유형 을 표시하여 내신을 대비할 수 있는 문제를 수록

• 잘 나오는 수능 유형, 잘 틀리는 수능 유형 을 표시하여 학력평가, 평가원, 수능 기출 문제를 연습



실력 확인 문제

01 오른쪽 그림과 같이 최대 6개의 용기를 넣을 수 있는 원형의 실험 기구가 있다. 서로 다른 6개의 용기 A, B, C, D, E, F를 이 실험 기구에 모두 넣을 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수를 구하여라.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

02 오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 지나는 3개의 원으로 구를 6등분하여 서로 다른 6가지 색으로 칠하는 경우의 수를 구하여라.

03 오른쪽 그림과 같은 원탁에 남학생 4명, 여학생 2명이 다음 조건을 모두 만족시키도록 3개의 조를 구성하여 둘러앉는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

(가) 각 조는 같은 성별로 이루어진 2명으로 구성된다.
(나) 서로 다른 두 개의 조 사이에 반드시 한 자리를 비워 둔다.

04 6명의 학생이 방송부와 미술부 중에서 한 동아리에 가입하는 경우의 수를 구하여라.

05 잘 나오는 내신 유형
서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?
(단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)
① 1024 ② 1034 ③ 1044 ④ 1054 ⑤ 1064

06 잘 나오는 수능 유형
5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수가 5의 배수인 경우의 수는?
① 115 ② 120 ③ 125 ④ 130 ⑤ 135

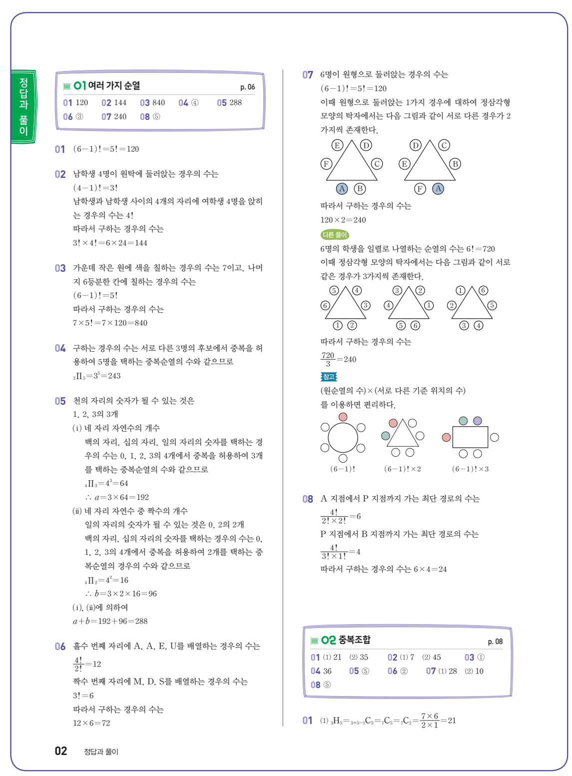
10 I. 경우의 수

3

정답과 풀이

• 다른 풀이, 참고 를 제시하여 다양한 방법으로 문제 풀이에 접근

• 풀이를 단계별로 나누어 체계적으로 과정을 사고



정답과 풀이

01 여러 가지 순열 p. 06
01 120 02 144 03 840 04 ④ 05 288
06 ③ 07 240 08 ⑤

01 $(6-1)!=5!=120$

02 남학생 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!$
남학생과 남학생 사이의 4개의 자리에 여학생 4명을 앉히는 경우의 수는 $4!$
따라서 구하는 경우의 수는
$3!\times 4!=6\times 24=144$

03 가운데 작은 원에 색을 칠하는 경우의 수는 7이고, 나머지 6등분한 칸에 칠하는 경우의 수는
$(6-1)!=5!$
따라서 구하는 경우의 수는
$7\times 5!=7\times 120=840$

04 구하는 경우의 수는 서로 다른 3명의 후보에서 중복을 허용하여 5명을 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_5=3^5=243$

05 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
1, 2, 3의 3개
(i) 네 자리 자연수의 개수
백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3=4^3=64$
$\therefore a=3\times 64=192$
(ii) 네 자리 자연수 중 짝수의 개수
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 0, 2의 2개
백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 경우의 수와 같으므로
${}_4\Pi_2=4^2=16$
$\therefore b=3\times 2\times 16=96$
(i), (ii)에 의하여
$a+b=192+96=288$

06 홀수 번째 자리에 A, A, E, U를 배열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$
짝수 번째 자리에 M, D, S를 배열하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$12\times 6=72$

07 6명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
이때 원형으로 둘러앉는 1가지 경우에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.
따라서 구하는 경우의 수는
$120\times 2=240$
다른 풀이
6명의 학생을 일렬로 나열하는 순열의 수는 $6!=720$
이때 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 같은 경우가 3가지씩 존재한다.
따라서 구하는 경우의 수는
$\frac{720}{3}=240$
참고
(원순열의 수)×(서로 다른 기준 위치의 수)
를 이용하면 편리하다.
$(6-1)!$ $(6-1)!\times 2$ $(6-1)!\times 3$

08 A 지점에서 P 지점까지 가는 최단 경로의 수는
$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$
P 지점에서 B 지점까지 가는 최단 경로의 수는
$\frac{4!}{3!\times 1!}=4$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times 4=24$

02 중복조합 p. 08
01 (1) 21 (2) 35 02 (1) 7 (2) 45 03 ①
04 36 05 ⑤ 06 ② 07 (1) 28 (2) 10
08 ⑤

01 (1) ${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$

02 정답과 풀이

차례

I 경우의 수

II 확률

Ⅲ 통계

필수 개념 01

여러 가지 순열

1. 원순열

(1) 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라고 한다.

(2) 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

2. 중복순열

(1) 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 순열을 중복순열이라고 하며, 기호 ${}_n\Pi_r$로 나타낸다.

(2) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_n\Pi_r=\underbrace{n\times n\times \cdots \times n}_{r\text{개}}=n^r$$

3. 같은 것이 있는 순열

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, 이 n개를 일렬로 배열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!\times q!\times \cdots \times r!}\ (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

서로 다른 n개에서 $r(n\ge r)$개를 택한 후 원형으로 배열하는 순열의 수는 $\frac{{}_nP_r}{r}$

순열과 함수의 개수

두 집합 X, Y에 대하여 $n(X)=r$, $n(Y)=n$일 때

① X에서 Y로의 함수의 개수: ${}_n\Pi_r$

② X에서 Y로의 일대일함수의 개수: ${}_nP_r$

서로 다른 n개 중에서 특정한 r개의 순서가 일정하게 정해졌을 때, n개를 배열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{r!}$

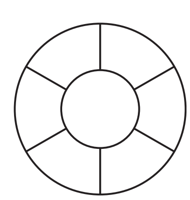
01 서로 다른 6개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

01 원순열의 수를 이용한다.

02 남학생 4명과 여학생 4명이 원탁에 둘러앉을 때, 남학생과 여학생이 교대로 앉는 경우의 수를 구하여라.

02 남학생 또는 여학생을 먼저 원탁에 앉힌 다음 생각한다.

03 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 오른쪽 그림과 같은 큰 원 내부의 7칸을 칠하는 경우의 수를 구하여라.



03 먼저 가운데 원에 색을 칠한 후, 원순열을 이용하여 나머지 부분을 칠하면 된다.

정답과 풀이 p.02

04 5명의 선거인이 3명의 후보자에게 기명투표하는 경우의 수는? (단, 무효나 기권은 없다.)

① 21 ② 60 ③ 125
④ 243 ⑤ 280

04 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

05 4개의 숫자 0, 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수를 a, 네 자리 자연수 중 짝수의 개수를 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

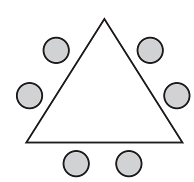
05 네 자리 자연수이므로 천의 자리에 0이 오지 않도록 한다.

06 AMADEUS에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 홀수 번째 자리에 모음이 오게 나열하는 경우의 수는?

① 48 ② 64 ③ 72
④ 96 ⑤ 112

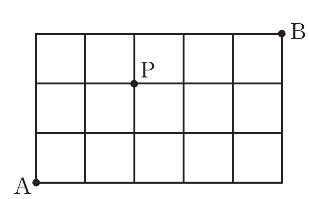
06 먼저 AMADEUS에 있는 모음을 홀수 번째에 배열한다. 이때 A가 2개 있으므로 같은 것이 있는 순열을 이용한다.

07 오른쪽 그림과 같은 정삼각형 모양의 탁자에 6명의 학생이 둘러앉는 경우의 수를 구하여라.



07 (다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수)
=(원순열의 수)×(서로 다른 기준 위치의 수)

08 오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 가는 최단 경로의 수는?



① 16 ② 18
③ 20 ④ 22
⑤ 24

08 A→P, P→B로 가는 경우의 수를 각각 구하여 곱한다.

02 중복조합

1. 중복조합

(1) 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라고 하며, 기호 ${}_n\mathrm{H}_r$로 나타낸다.

(2) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$

2. 방정식의 해의 개수

방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$ (n, r는 자연수)에서

(1) 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$

(2) 자연수인 해의 개수는 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 $(r-n)$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_n\mathrm{H}_{r-n} = {}_{r-1}\mathrm{C}_{r-n}$ (단, $n \le r$)

조합 다시 보는 수학

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

중복조합의 계산

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r = \frac{{}_{n+r-1}\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{(n+r-1)!}{r!\{(n+r-1)-r\}!} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

01 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_3\mathrm{H}_5$

(2) ${}_5\mathrm{H}_3$

01 ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$임을 이용한다.

02 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_4\mathrm{H}_0 + {}_6\mathrm{H}_1$

(2) ${}_3\mathrm{H}_3 + {}_4\mathrm{H}_4$

02
(1) ${}_n\mathrm{H}_0=1$, ${}_n\mathrm{H}_1=n$
(2) ${}_3\mathrm{H}_3 \ne {}_4\mathrm{H}_4$

03 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수는?

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

04 야구공, 테니스공, 탁구공 중에서 7개의 공을 택하는 경우의 수를 구하여라.
(단, 야구공, 테니스공, 탁구공은 7개 이상씩 있다.)

04
서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수를 생각한다.

05 $(a+b+c+d)^5$의 전개식에서 생기는 서로 다른 항의 개수는?

① 24 ② 32 ③ 40
④ 48 ⑤ 56

05
4개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 곱하면 항이 만들어진다.

06 같은 모양의 구슬 10개를 세 명의 학생에게 모두 나누어 주려고 한다. 각 학생이 적어도 2개 이상은 가지도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

06
학생들에게 2개씩 나누어 주고 나머지 구슬을 나누어 주면 된다.

07 방정식 $x+y+z=6$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) x, y, z가 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수
(2) x, y, z가 모두 자연수인 해의 개수

07
(2) $x=1+a$, $y=1+b$, $z=1+c$로 놓으면 a, b, c는 모두 음이 아닌 정수이다.

08 부등식 $3\le a+b+c\le 5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는?

① 42 ② 43 ③ 44
④ 45 ⑤ 46

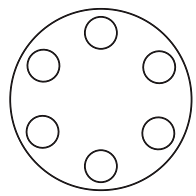
08
$a+b+c=3$, $a+b+c=4$, $a+b+c=5$인 경우로 나누어 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 각각 구한다.

실력 확인 문제

01

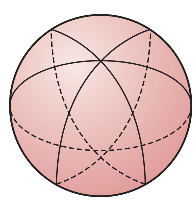
오른쪽 그림과 같이 최대 6개의 용기를 넣을 수 있는 원형의 실험 기구가 있다. 서로 다른 6개의 용기 A, B, C, D, E, F를 이 실험 기구에 모두 넣을 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수를 구하여라.

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



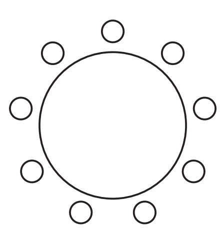
02

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 지나는 3개의 원으로 구를 6등분하여 서로 다른 6가지 색으로 칠하는 경우의 수를 구하여라.



03

오른쪽 그림과 같은 원탁에 남학생 4명, 여학생 2명이 다음 조건을 모두 만족시키도록 3개의 조를 구성하여 둘러앉는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



> (가) 각 조는 같은 성별로 이루어진 2명으로 구성된다.
> (나) 서로 다른 두 개의 조 사이에 반드시 한 자리를 비워 둔다.

04

6명의 학생이 방송부와 미술부 중에서 한 동아리에 가입하는 경우의 수를 구하여라.

05

잘 나오는 내신 유형

서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?

(단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

① 1024 ② 1034 ③ 1044 ④ 1054 ⑤ 1064

06

잘 나오는 수능 유형

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수가 5의 배수인 경우의 수는?

① 115 ② 120 ③ 125 ④ 130 ⑤ 135

정답과 풀이 p.03

07

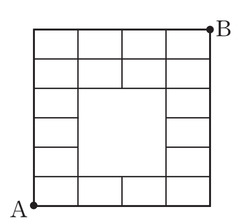
1에서 999까지의 자연수 중에서 0을 한 개 포함하는 자연수의 개수를 a, 0을 두 개 포함하는 자연수의 개수를 b라고 할 때, $\frac{a}{b}$의 값을 구하여라.

08

두 집합 $X=\{2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 집합 X에서 Y로의 함수의 개수를 a, 일대일함수의 개수를 b라고 할 때, $a-b$의 값을 구하여라.

09

오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A 지점에서 B 지점까지 가는 최단 경로의 수를 구하여라.



10

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 4를 모두 사용하여 일렬로 배열할 때, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$의 순서대로 배열하는 경우의 수를 구하여라.

11

8단으로 된 계단을 한 걸음에 1단 또는 2단씩 올라갈 때, 이 8단의 계단을 오르는 경우의 수를 구하여라.

12

3통의 편지를 A, B 두 우체통에 넣는 경우의 수를 구하여라. (단, 편지는 구분하지 않는다.)

13

검정색 볼펜 5자루, 파란색 볼펜 5자루, 빨간색 볼펜 5자루가 들어 있는 필통에서 볼펜 5자루를 꺼내는 경우의 수는?

(단, 색이 같은 볼펜은 구분하지 않는다.)

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

14

빨간색 공, 노란색 공, 파란색 공이 각각 5개씩 들어 있는 주머니에서 6개의 공을 꺼낼 때, 각 색깔의 공이 적어도 1개씩은 포함되도록 꺼내는 경우의 수는?

(단, 색깔이 같은 공은 구분하지 않는다.)

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

15

같은 종류의 사탕 12개를 4명의 아이에게 모두 나누어 줄 때, 1개도 받지 못하는 아이가 없이 나누어 주는 경우의 수는?

① 150 ② 155 ③ 160
④ 165 ⑤ 170

16

잘 나오는 수능 유형

같은 종류의 주스 4병, 같은 종류의 생수 2병, 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?

(단, 1병도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)

① 330 ② 315 ③ 300
④ 285 ⑤ 270

17

잘 나오는 수능 유형

사과, 감, 배, 귤 네 종류의 과일 중에서 8개를 선택하려고 한다. 사과는 1개 이하를 선택하고, 감, 배, 귤은 각각 1개 이상을 선택하는 경우의 수를 구하여라.

(단, 각 종류의 과일은 8개 이상씩 있다.)

18

세 정수 a, b, c에 대하여

$$1 \le |a| \le |b| \le |c| \le 5$$

를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는?

① 360 ② 320 ③ 280
④ 240 ⑤ 200

정답과 풀이 p.05

19

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow X$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 f의 개수는?

(가) $f(4)=4$
(나) X의 임의의 두 원소 x_i, x_j에 대하여 $x_i<x_j$이면 $f(x_i) \le f(x_j)$

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

20

잘 틀리는 수능 유형

같은 종류의 사탕 5개를 3명의 아이에게 1개 이상씩 나누어 주고, 같은 종류의 초콜릿 5개를 1개의 사탕을 받은 아이에게만 1개 이상씩 나누어 주려고 한다. 사탕과 초콜릿을 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?

① 27 ② 24 ③ 21
④ 18 ⑤ 15

21

방정식 $x+y+2z=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

22

잘 나오는 수능 유형

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하여라.

(가) $a+b+c=7$
(나) $2^a \times 4^b$은 8의 배수이다.

23

잘 나오는 수능 유형

각 자리의 수가 0이 아닌 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7인 모든 자연수의 개수는?

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 28

필수 개념 03 이항정리

1. 이항정리

(1) n이 자연수일 때, 다항식 $(a+b)^n$을 전개하면 다음과 같다.

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$$

이 전개식을 이항정리라 하고, ${}_nC_ra^{n-r}b^r$을 $(a+b)^n$의 전개식의 일반항이라고 한다.

(2) n이 자연수일 때, $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

${}_nC_0$, ${}_nC_1$, ${}_nC_2$, $\cdots$, ${}_nC_r$, $\cdots$, ${}_nC_n$을 이항계수라고 한다.

참고

(ⅰ) $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$를 전개하면 a^2b는 오른쪽과 같이 3번 나타난다.
이때 aab, aba, baa는 a, a, b를 일렬로 나열한 경우이므로

$$\frac{3!}{2!\times1!}=3$$

$$\begin{array}{ccccc} (a+b) & & (a+b) & & (a+b) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & \times & a & \times & b=a^2b \\ a & \times & b & \times & a=a^2b \\ b & \times & a & \times & a=a^2b \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} 3a^2b$$

(ⅱ) 일반적으로 $(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{개}}$를 전개하면

a^pb^q항 $(p+q=n)$은 a를 p개, b를 q개 나열한 경우와 같으므로 $\dfrac{n!}{p!\times q!}$번 나타난다.

즉, a^pb^q의 계수는 $\dfrac{n!}{p!\times q!}$이다.

따라서 $a^{n-r}b^r$의 계수는 $\dfrac{n!}{(n-r)!\times r!}={}_nC_r$이다.

$a\neq0$, $b\neq0$일 때, $a^0=1$, $b^0=1$로 정한다.

자연수 n에 대하여 $(a+b+c)^n$의 전개식의 일반항은

$$\frac{n!}{p!\times q!\times r!}a^pb^qc^r$$

(단, $p+q+r=n$, $p\geq0$, $q\geq0$, $r\geq0$)

01 $(a+b)^{10}$의 전개식에서 a^7b^3의 계수를 구하여라.

01 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수는 n개의 인수 $(a+b)$ 중에서 r개의 b를 택하는 조합의 수인 ${}_nC_r$와 같다.

02 $(x+ay)^7$의 전개식에서 x^4y^3의 계수가 -280일 때, 실수 a의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1
④ -2 ⑤ -1

02 x를 4번, ay를 3번 곱한 경우이다. 이때 계수가 ${}_7C_3$인 것으로 착각하지 않도록 주의한다.

03 이항정리를 이용하여 $(2x-1)^4$을 전개하여라.

03

$(2x-1)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r(2x)^{4-r}(-1)^r$

04 $\left(x+\dfrac{1}{3x}\right)^6$의 전개식에서 x^2의 계수는?

① $\dfrac{4}{3}$　② $\dfrac{13}{9}$　③ $\dfrac{14}{9}$

④ $\dfrac{5}{3}$　⑤ $\dfrac{16}{9}$

04

$\left(x+\dfrac{1}{3x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}\left(\dfrac{1}{3x}\right)^r$

05 $(x+2)^n$의 전개식에서 상수항이 16일 때, x의 계수는?

① 32　② 36　③ 40

④ 44　⑤ 48

05

$(x+2)^n$의 전개식에서 상수항이 16인 것을 이용하여 n의 값을 먼저 구한다.

06 $\left(x+\dfrac{a}{x}\right)^7$의 전개식에서 x^3의 계수가 84일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

06

$\left(x+\dfrac{a}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7\mathrm{C}_r x^{7-r}\left(\dfrac{a}{x}\right)^r=a^r\times{}_7\mathrm{C}_r\dfrac{x^{7-r}}{x^r}$

07 $(a+b+c)^5$의 전개식에서 ab^2c^2의 계수를 구하여라.

07

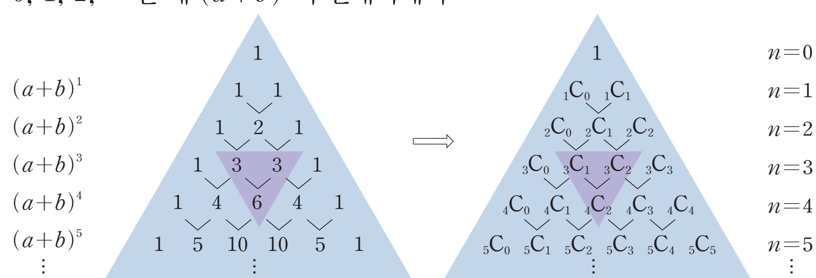
다항식 $(a+b+c)^n$의 전개식의 일반항은 $\dfrac{n!}{p!\times q!\times r!}a^pb^qc^r$

(단, $p+q+r=n$, $p\geq0$, $q\geq0$, $r\geq0$)

필수 개념 04 이항계수의 성질

1. 파스칼의 삼각형

$n=0, 1, 2, \cdots$일 때 $(a+b)^n$의 전개식에서



위와 같은 이항계수의 배열을 파스칼의 삼각형이라고 한다.

2. 이항계수의 성질

(1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

(2) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(3) n이 홀수일 때

$${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$$

(4) n이 짝수일 때

$${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$$

파스칼의 삼각형에서 다음을 알 수 있다.
(1) ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$
(2) ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

n이 홀수일 때
${}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots+n{}_nC_n=n\times2^{n-1}$

이항계수의 성질 (3), (4)는
$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$
에서 $x=1$, $x=-1$을 대입한 두 식을 더하고 빼면 성립함을 알 수 있다.

01 다음을 계산하여라.

(1) ${}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_6C_6$

(2) ${}_7C_0-{}_7C_1+{}_7C_2-\cdots+{}_7C_6-{}_7C_7$

02 ${}_nC_4={}_{n-1}C_4+{}_{n-1}C_5$를 만족시키는 n의 값을 구하여라.

01 $(1+x)^n$의 전개식에 $x=1$, $x=-1$을 대입하면 이항계수에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

02 파스칼의 삼각형에서 ${}_3C_1+{}_3C_2={}_4C_2$이다. 즉, ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$가 성립한다.

03 다음 중 ${}_{2}C_{0}+{}_{3}C_{1}+{}_{4}C_{2}+{}_{5}C_{3}+\cdots+{}_{10}C_{8}$의 값과 같은 것은?

① ${}_{11}C_{2}$ ② ${}_{11}C_{3}$ ③ ${}_{11}C_{4}$
④ ${}_{11}C_{6}$ ⑤ ${}_{11}C_{7}$

03
자연수 n에 대하여
${}_{1}C_{0}={}_{2}C_{0}=\cdots={}_{n}C_{0}$

04 다음 중 ${}_{3}C_{3}+{}_{4}C_{3}+{}_{5}C_{3}+{}_{6}C_{3}+\cdots+{}_{10}C_{3}$의 값과 같은 것은?

① ${}_{10}C_{4}$ ② ${}_{10}C_{5}$ ③ ${}_{11}C_{3}$
④ ${}_{11}C_{4}$ ⑤ ${}_{11}C_{5}$

04
자연수 n에 대하여
${}_{1}C_{1}={}_{2}C_{2}=\cdots={}_{n}C_{n}$

05 $200<{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{3}+\cdots+{}_{n}C_{n}<2000$을 만족시키는 자연수 n의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

05
${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}$
$=2^{n}$

06 ${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{4}+\cdots+{}_{n}C_{n}=128$을 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

06
2^{n}
$=2({}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{4}+\cdots+{}_{n}C_{n-1})$
$=2({}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{3}+{}_{n}C_{5}+\cdots+{}_{n}C_{n})$

07 ${}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{3}+\cdots+{}_{n}C_{n}$의 값이 3의 배수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 n의 개수를 구하여라.

07
$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 각각 대입하여 알아본다.

실력 확인 문제

01

$(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하여라.

02

잘 나오는 수능 유형

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$의 전개식에서 x^4의 계수는?

① 128 ② 124 ③ 120
④ 116 ⑤ 112

03

$(x+3)^n$의 전개식에서 상수항이 81일 때, x의 계수는?

① 108 ② 114 ③ 120
④ 126 ⑤ 132

04

$(1+i)^{16}$의 전개식을 이용하여

$${}_{16}C_0-{}_{16}C_2+{}_{16}C_4-{}_{16}C_6+\cdots-{}_{16}C_{14}+{}_{16}C_{16}$$

의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

05

${}_{10}C_1-{}_{10}C_2+{}_{10}C_3-\cdots+{}_{10}C_9$의 값은?

① -2 ② 2 ③ 2^9
④ 2^{10} ⑤ 2^{11}

06

$(x-2)^3(2x+1)^4$의 전개식에서 x의 계수는?

① -52 ② -28 ③ 24
④ 52 ⑤ 72

정답과 풀이 p.07

07

잘 틀리는 내신 유형

$$(1+x^2)+(1+x^2)^2+(1+x^2)^3+\cdots+(1+x^2)^{10}$$

의 전개식에서 x^4의 계수를 구하여라.

08

다음은 오른쪽 파스칼의 삼각형을 이용하여 수들의 합을 구한 것이다.

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\ 1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\ 1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \end{array}$$

$1+5+15=21$

$1+3+6+10=20$

이와 같은 방법으로 $1+5+15+A+70=B$가 성립할 때, $A+B$의 값을 구하여라.

09

${}_{10}C_0+2{}_{10}C_1+2^2{}_{10}C_2+\cdots+2^{10}{}_{10}C_{10}$의 값은?

① 3^9 ② 3^9+1 ③ $3^{10}-1$

④ 3^{10} ⑤ $3^{10}+1$

10

잘 나오는 수능 유형

다음은 x에 대한 다항식 $(x+a^2)^n$과 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 같게 되는 두 자연수 a와 $n(n\geq4)$의 값을 구하는 과정이다.

> $(x+a^2)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 a^2n이다.
> $(x^2-2a)(x+a)^n=x^2(x+a)^n-2a(x+a)^n$에서
> $x^2(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는
> $\boxed{(가)}\times a^3$이고, $2a(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $2a^2n$이다.
> 따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는
> $\boxed{(가)}\times a^3-2a^2n$이다.
> 그러므로 $a^2n=\boxed{(가)}\times a^3-2a^2n$이고, 이 식을 정리하여 a를 n에 관한 식으로 나타내면
> $a=\dfrac{18}{\boxed{(나)}}$
> 이다.
> 여기서 a는 자연수이고 n은 4 이상의 자연수이므로
> $n=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 k라고 할 때, $f(k)+g(k)$의 값은?

① 10 ② 16 ③ 22

④ 28 ⑤ 34

필수 개념 05

확률의 뜻

1. 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 확률이라고 하며, 기호 $\mathrm{P}(A)$로 나타낸다.

2. 수학적 확률

표본공간이 S인 어떤 시행에서 각 원소가 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때 사건 A가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

3. 통계적 확률

같은 시행을 n번 반복하여 사건 A가 일어날 횟수를 r_n이라 하자. n이 한없이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워질 때, 이 값 p를 사건 A의 통계적 확률이라고 한다.

시행: 같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의해 결정되는 실험이나 관찰
표본공간: 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합
사건: 표본공간의 부분집합

확률의 기본 성질

표본공간이 S인 어떤 시행에서 임의의 사건 A에 대하여
① $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$
② $A=S$이면 $\mathrm{P}(A)=1$
③ $A=\varnothing$이면 $\mathrm{P}(A)=0$

01 아래 표는 1993년의 주요 자동차 생산국들의 자동차 생산량을 나타낸 것이다. 이들 중 한 대를 택하였을 때, 그것이 한국에서 생산되었을 확률을 구하여라.

(단위: 천 대)

국명	일본	미국	독일	프랑스	한국	합계
생산량	11,000	10,000	4,000	3,000	2,000	30,000

(출처: 한국 자동차 공업 협회)

01
통계적 확률을 구할 때, 시행 횟수 n이 충분히 크면 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 통계적 확률로 생각한다.

02 A, B를 포함한 5명을 일렬로 세울 때, A, B 두 사람이 이웃하여 서게 될 확률을 구하여라.

02
사건 A가 일어날 확률은
$\mathrm{P}(A)$
$=\dfrac{(\text{사건 } A\text{가 일어날 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$

03 10개의 과일 중 3개는 귤이고, 나머지는 사과이다. 이 중에서 2개의 과일을 고를 때, 모두 사과일 확률을 구하여라.

03 사과 7개 중 2개를 고르는 경우의 수는 조합의 수를 이용한다.

04 1부터 7까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어있는 상자에서 임의로 1개의 공을 꺼내는 시행을 반복할 때, 짝수가 적혀 있는 공을 모두 꺼내면 시행을 멈춘다. 5번째까지 시행을 한 후, 시행을 멈출 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{6}{35}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{8}{35}$
④ $\frac{9}{35}$ ⑤ $\frac{2}{7}$

04 4번까지의 시행에서 짝수가 두 번 나오고, 5번째 시행에서 짝수가 나와야 한다.

05 한 변의 길이가 2인 정사각형의 내부에 임의로 한 점 P를 잡을 때, $\overline{OP} \geq 1$일 확률은? (단, O는 정사각형의 두 대각선의 교점이다.)

① $\frac{8-\pi}{8}$ ② $\frac{4-\pi}{4}$ ③ $\frac{3-\pi}{3}$
④ $\frac{2-\pi}{2}$ ⑤ $4-\pi$

05 길이, 넓이, 부피, 시간 등 연속적으로 변하여 그 개수를 구할 수 없는 확률은 길이, 넓이, 부피, 시간 등의 비율로 확률을 구한다.

06 흰 공과 검은 공을 합하여 6개의 공이 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때, 2개 모두 흰 공이 나올 확률이 $\frac{2}{5}$이다. 흰 공의 개수를 구하여라.

06 주머니 속의 흰 공의 개수를 x로 놓고 식을 세운다.

07 주머니 속에 빨간 공, 흰 공이 모두 15개 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 보고 다시 넣는 시행을 여러 번 되풀이 시행하였더니 5번에 1번 꼴로 2개가 모두 빨간 공이었다고 한다. 이 주머니 속에는 몇 개의 빨간 공이 들어 있다고 할 수 있는지 구하여라.

07 15개의 공 중에서 2개를 꺼낼 때 5번에 1번 꼴로 2개 모두 빨간 공이므로, 2개 모두 빨간 공일 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

필수 개념

06 확률의 활용

1. 확률의 덧셈정리

표본공간이 S인 두 사건 A, B에 대하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

특히, 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

2. 여사건의 확률

사건 A의 여사건 A^C에 대하여

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

배반사건: 두 사건 A, B에 대하여 A와 B가 동시에 일어나지 않을 때 즉, $A\cap B=\varnothing$일 때 A와 B는 서로 배반이라 하고 두 사건을 배반사건이라고 한다.

여사건: 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고 기호로 A^C과 같이 나타낸다.

01 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{9}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{9}$일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{7}{18}$ ③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

01
$\mathrm{P}(A\cup B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

02 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값을 구하여라.

02
$\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$
를 이용한다.

03 두 사건 A, B가 일어날 확률이 각각 0.7, 0.5이고 A 또는 B가 일어날 확률이 0.9일 때, 두 사건 A, B가 모두 일어날 확률을 구하여라.

03
두 사건 A, B가 모두 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이다.

04 경희네 동아리에는 남학생 6명, 여학생 4명이 있다. 동아리방 청소 당번 2명을 뽑을 때, 2명 모두 남학생이거나 2명 모두 여학생일 확률을 구하여라.

04
청소 당번 2명이 모두 남학생이거나 모두 여학생일 사건은 서로 배반사건이다.

05 크기와 모양이 같은 흰 공이 3개, 빨간 공이 5개 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때, 2개 모두 같은 색의 공일 확률을 구하여라.

05
2개 모두 흰 공일 사건과 2개 모두 빨간 공일 사건은 서로 배반사건이다.

06 두 사건 A, B에 대하여 A^C과 B는 서로 배반사건이고 $\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{7}{20}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{3}{20}$

06
두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이다.

07 1발의 탄환이 표적에 명중할 확률은 $\frac{3}{4}$이다. 5발의 탄환을 발사하였을 때, 적어도 1발이 명중할 확률을 구하여라.

07
'적어도 ~인', '~ 이상인', '~ 이하인' 사건의 확률을 구할 때에는 여사건의 확률을 이용하면 편리하다.

08 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수인 해 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 이 순서쌍 (x, y, z)가 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

08
$(x-y)(y-z)(z-x)=0$일 확률을 구한 다음 여사건의 확률을 이용한다.