풍산자

유형기본서

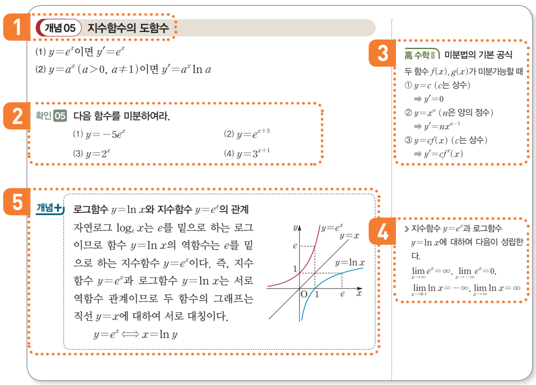
미적분

구성과 특징

1 개념과 유형이 일목요연하게 정리
2 유형별 문항 학습으로 실전에 강함
3 친절하고 명쾌한 설명으로 혼자서도 학습 가능

개념

1 수학의 기본 개념을 구조적으로 정리
2 개념 확립에 도움이 되는 확인 문제
3 학습할 개념의 바탕이 되는 이전 개념
4 실전 적용에 활용 가능한 내용
5 원리, 심화 개념, 공식 등 연구



1 개념 05 지수함수의 도함수

(1) $y=e^x$이면 $y'=e^x$

(2) $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=a^x \ln a$

2 확인 05 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=-5e^x$ (2) $y=e^{x+3}$

(3) $y=2^x$ (4) $y=3^{x+1}$

3 高 수학Ⅱ 미분법의 기본 공식

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

① $y=c$ (c는 상수) ➡ $y'=0$

② $y=x^n$ (n은 양의 정수) ➡ $y'=nx^{n-1}$

③ $y=cf(x)$ (c는 상수) ➡ $y'=cf'(x)$

5 개념+ 로그함수 $y=\ln x$와 지수함수 $y=e^x$의 관계

자연로그 $\log_e x$는 e를 밑으로 하는 로그이므로 함수 $y=\ln x$의 역함수는 e를 밑으로 하는 지수함수 $y=e^x$이다. 즉, 지수함수 $y=e^x$과 로그함수 $y=\ln x$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

$y=e^x \Longleftrightarrow x=\ln y$

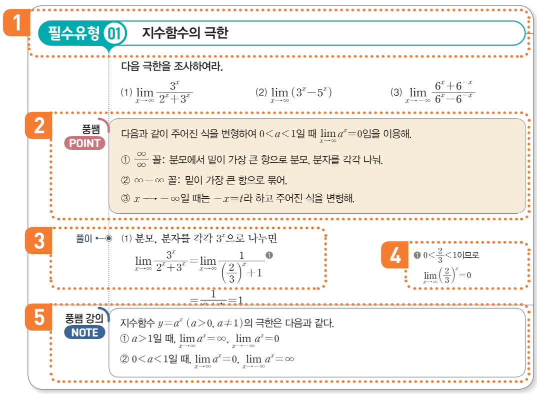
4 지수함수 $y=e^x$과 로그함수 $y=\ln x$에 대하여 다음이 성립한다.

$\lim_{x\to\infty} e^x=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$,

$\lim_{x\to 0+} \ln x=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} \ln x=\infty$

대표 유형

1 반드시 알아할 유형을 필수유형과 발전유형으로 제시
2 문제 해결을 위한 핵심 전략
3 단계별 해결 방법 확인
4 풀이 과정에 적용된 개념, 원리, 방법 등을 바로 확인
5 연관 개념, 문제 풀이 비법, 보충 설명 등 제공



1 필수유형 01 지수함수의 극한

다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{2^x+3^x}$ (2) $\lim_{x\to\infty}(3^x-5^x)$ (3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{6^x+6^{-x}}{6^x-6^{-x}}$

2 풍쌤 POINT

다음과 같이 주어진 식을 변형하여 $0<a<1$일 때 $\lim_{x\to\infty} a^x=0$임을 이용해.

① $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴: 분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 각각 나눠.

② $\infty-\infty$ 꼴: 밑이 가장 큰 항으로 묶어.

③ $x \longrightarrow -\infty$일 때는 $-x=t$라 하고 주어진 식을 변형해.

3 풀이 (1) 분모, 분자를 각각 3^x으로 나누면

$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{2^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}$ ❶

$=\frac{1}{\ldots}=1$

4 ❶ $0<\frac{2}{3}<1$이므로 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$

5 풍쌤 강의 NOTE

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 극한은 다음과 같다.

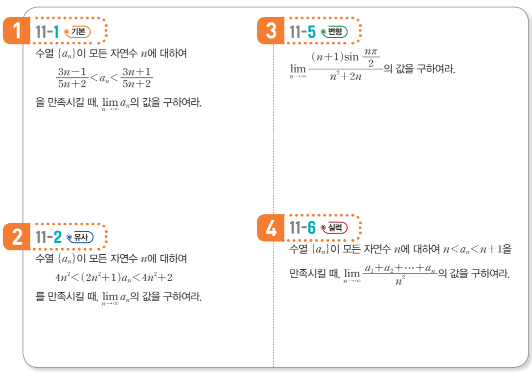
① $a>1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x=0$

② $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x=0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x=\infty$

유사/변형/실력

1 대표유형보다 낮은 난이도, 동일 출제 원리를 담은 문제
2 대표유형과 동일 난이도, 동일 출제 원리를 담은 문제
3 대표유형과 동일 난이도이지만 표현 방법을 바꾼 문제
4 대표유형과 동일 출제 원리이지만 응용개념을 담은 문제

기출 수능/평가원/교육청 기출문제



1 11-1 기본

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{3n-1}{5n+2}<a_n<\frac{3n+1}{5n+2}$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

2 11-2 유사

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$4n^2<(2n^2+1)a_n<4n^2+2$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

3 11-5 변형

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2+2n}$의 값을 구하여라.

4 11-6 실력

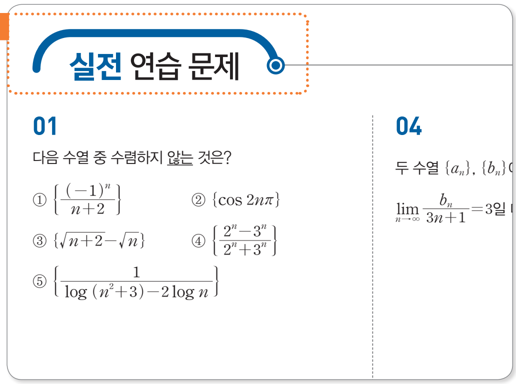
수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n<a_n<n+1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^2}$의 값을 구하여라.

실전 연습

1 각 중단원별로 반드시 풀어야 할 문제를 수록하여 시험에 대비

서술형 서술형으로 출제 가능성이 높은 문항

기출 수능/평가원/교육청 기출문제


1

실전 연습 문제

01

다음 수열 중 수렴하지 않는 것은?

① $\left\{\frac{(-1)^n}{n+2}\right\}$ ② $\{\cos 2n\pi\}$

③ $\{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\}$ ④ $\left\{\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}\right\}$

⑤ $\left\{\frac{1}{\log(n^2+3)-2\log n}\right\}$

04

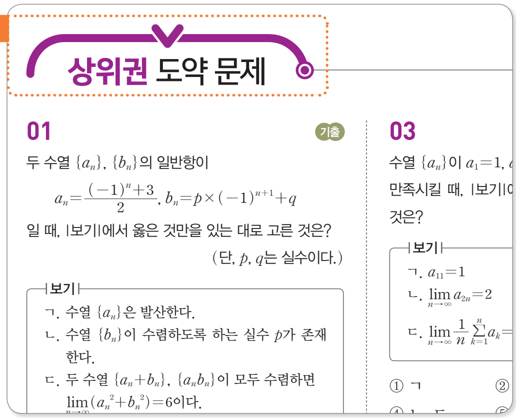
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3n+1}=3$일

상위권 도약

1 각 중단원별로 상위권 실력을 완성할 수 있도록 난이도가 높은 문제를 구성

기출 수능/평가원/교육청 기출문제


1

상위권 도약 문제

01 기출

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이

$$a_n=\frac{(-1)^n+3}{2},\ b_n=p\times(-1)^{n+1}+q$$

일 때, |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, p, q는 실수이다.)

|보기|

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 실수 p가 존재한다.

ㄷ. 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 모두 수렴하면 $\lim(a_n^2+b_n^2)=6$이다.

03

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$,

만족시킬 때, |보기|에

것은?

|보기|

ㄱ. $a_{11}=1$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=2$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=$

① ㄱ ②

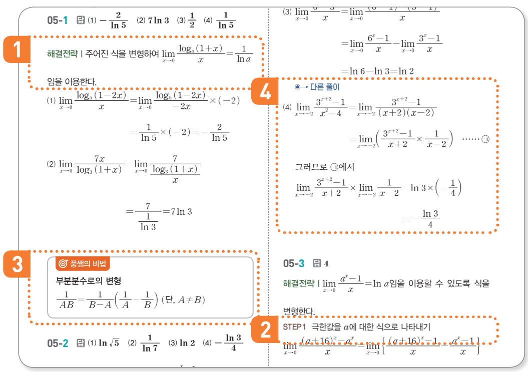
정답과 풀이

1 문제를 해결하는 데 필요한 핵심 아이디어

2 답을 구하는 데 필요한 단계적 사고 과정

3 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 확장 원리, 개념, 공식

4 실전에 도움이 되는 다양한 풀이


05-1 답 (1) $-\frac{2}{\ln 5}$ (2) $7\ln 3$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{\ln 5}$

1 해결전략 | 주어진 식을 변형하여 $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$임을 이용한다.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\log_5(1-2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log_5(1-2x)}{-2x}\times(-2)$

$=\frac{1}{\ln 5}\times(-2)=-\frac{2}{\ln 5}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{7x}{\log_3(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{7}{\frac{\log_3(1+x)}{x}}$

$=\frac{7}{\frac{1}{\ln 3}}=7\ln 3$

3 풍쌤의 비법

부분분수로의 변형

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

05-2 답 (1) $\ln\sqrt{5}$ (2) $\frac{1}{\ln 7}$ (3) $\ln 2$ (4) $-\frac{\ln 3}{4}$

$=\lim_{x\to0}\frac{6^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}$

$=\ln 6-\ln 3=\ln 2$

4 다른 풀이

(4) $\lim_{x\to-2}\frac{3^{x+2}-1}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{3^{x+2}-1}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to-2}\left(\frac{3^{x+2}-1}{x+2}\times\frac{1}{x-2}\right)$ ……㉠

그러므로 ㉠에서

$\lim_{x\to-2}\frac{3^{x+2}-1}{x+2}\times\lim_{x\to-2}\frac{1}{x-2}=\ln 3\times\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=-\frac{\ln 3}{4}$

05-3 답 4

해결전략 | $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$임을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

2 STEP1 극한값을 a에 대한 식으로 나타내기

$\lim_{x\to0}\frac{(a+16)^x-a^x}{x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{(a+16)^x-1}{x}-\frac{a^x-1}{x}\right\}$

미적분

차례

I

수열의 극한

II

미분법

III

적분법

01 수열의 극한

유형의 이해에 따라 ☐ 안에 ○, ✕ 표시를 하고 반복하여 학습합니다.

		1st	2nd
필수유형 01	수열의 수렴과 발산	☐	☐
필수유형 02	수열의 극한에 대한 기본 성질	☐	☐
필수유형 03	$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$의 이용	☐	☐
필수유형 04	$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한	☐	☐
필수유형 05	$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 – 합 또는 곱이 있는 식	☐	☐
필수유형 06	$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 – 미정계수의 결정	☐	☐
필수유형 07	$\infty-\infty$ 꼴의 극한	☐	☐
필수유형 08	$\infty-\infty$ 꼴의 극한 – 분수 꼴	☐	☐
필수유형 09	$\infty-\infty$ 꼴의 극한 – 미정계수의 결정	☐	☐
필수유형 10	일반항 a_n을 포함한 식의 극한값	☐	☐
필수유형 11	수열의 극한의 대소 관계	☐	☐
필수유형 12	수열의 극한에 대한 참, 거짓 판별	☐	☐
필수유형 13	등비수열의 극한	☐	☐
필수유형 14	등비수열의 극한 – a_n, S_n이 있는 경우	☐	☐
필수유형 15	등비수열의 수렴 조건	☐	☐
필수유형 16	r^n을 포함한 수열의 극한	☐	☐
발전유형 17	x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수	☐	☐
필수유형 18	수열의 극한의 활용	☐	☐

01 수열의 극한

개념 01 수열의 수렴과 발산

(1) **수열의 수렴:** 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 일정한 값 α에 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한 또는 극한값이라 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ 또는 $n \longrightarrow \infty$일 때 $a_n \longrightarrow \alpha$

(2) **수열의 발산:** 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때, 수열 $\{a_n\}$은 발산한다고 한다.

① 양의 무한대로 발산: $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ 또는 $n \longrightarrow \infty$일 때 $a_n \longrightarrow \infty$

② 음의 무한대로 발산: $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$ 또는 $n \longrightarrow \infty$일 때 $a_n \longrightarrow -\infty$

③ 진동: 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는 경우

주의 $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$는 극한값이 ∞, $-\infty$라는 뜻이 아니다. 이 경우에는 극한값이 없다고 한다.

> 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = c$ (c는 상수)일 때, $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c = c$

高 수학Ⅱ ∞

∞는 한없이 커지는 상태를 나타내고 '무한대'라고 읽는다. ∞는 어떤 숫자 값을 나타내지 않는다.

확인 01 **다음 수열의 수렴, 발산을 그래프를 이용하여 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.**

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

(2) $3, 3, 3, \cdots, 3, \cdots$

(3) $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

(4) $-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$

개념 02 수열의 극한에 대한 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \to \infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{n \to \infty} ka_n = k\lim_{n \to \infty} a_n = k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{n \to \infty}(a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n = \alpha + \beta$

(3) $\lim_{n \to \infty}(a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n = \alpha - \beta$

(4) $\lim_{n \to \infty} a_n b_n = \lim_{n \to \infty} a_n \times \lim_{n \to \infty} b_n = \alpha\beta$

(5) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} a_n}{\lim_{n \to \infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

> 수열의 극한에 대한 기본 성질은 두 수열이 모두 수렴하는 경우에만 성립한다.

확인 02 **두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} a_n = 3$, $\lim_{n \to \infty} b_n = -2$일 때, 다음 극한값을 구하여라.**

(1) $\lim_{n \to \infty}(2a_n + b_n)$

(2) $\lim_{n \to \infty}(a_n - 3b_n)$

(3) $\lim_{n \to \infty} a_n b_n$

(4) $\lim_{n \to \infty} \frac{4a_n}{b_n + 1}$

개념 03 수열의 극한값의 계산

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ **꼴의 극한**: 분모, 분자가 다항식인 경우 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나누어서 극한값을 구한다.

① (분모의 차수)=(분자의 차수): 극한값은 $\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$

② (분모의 차수)>(분자의 차수): 극한값은 0

③ (분모의 차수)<(분자의 차수): ∞ 또는 $-\infty$로 발산

(2) $\infty-\infty$ **꼴의 극한**

① 다항식의 극한: 최고차항으로 묶는다.

② 무리식의 극한: $\infty-\infty$ 꼴을 유리화한다.

> 분모의 최고차항으로 분자와 분모를 각각 나눈 후 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$임을 이용하여 계산한다.

> ∞, $-\infty$로 발산하는 극한을 포함하는 계산은 다음과 같이 생각하면 된다.
> ① $\infty\pm(\text{상수})=\infty$
> ② $\infty+\infty=\infty$
> ③ $\infty\times\infty=\infty$
> ④ $\begin{cases} a\times\infty=\infty\ (a>0) \\ a\times\infty=-\infty\ (a<0) \end{cases}$
> (단, a는 상수)

확인 03 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^2-5}$

(3) $\lim_{n\to\infty}(n^2-n)$　　(4) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

개념 04 수열의 극한의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.

> **주의** 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이어도 반드시 $\alpha<\beta$인 것은 아니다. $\alpha=\beta$인 경우가 있다.

> 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 발산할 때 모든 자연수 n에 대하여
> ① $a_n\le b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$
> ② $a_n\le b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$

확인 04 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $-\frac{1}{n}\le a_n\le\frac{1}{n}$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

개념 05 등비수열의 수렴과 발산

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산은 r의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(1) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$ (수렴)

(3) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$ (수렴)

(4) $r\le-1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

> 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 조건은 $-1<r\le1$이다.

> 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하기 위한 조건은 $a=0$ 또는 $-1<r\le1$이다.

> r^n을 포함한 수열의 극한값을 구할 때는 r의 값의 범위를 $|r|<1$, $r=1$, $|r|>1$, $r=-1$로 나누어 구한다.

확인 05 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\{0.2^n\}$　　(2) $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$　　(3) $\left\{\left(\frac{6}{5}\right)^n\right\}$

필수유형 01 수열의 수렴과 발산

다음 수열 $\{a_n\}$의 수렴과 발산을 그래프를 이용하여 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\{3n-1\}$ (2) $\{1^n+(-1)^n\}$

(3) $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ (4) $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

풍쌤 POINT

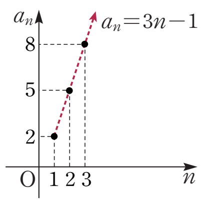
수열 $\{a_n\}$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 a_n의 값의 변화를 그래프로 나타내었을 때 a_n의 값이 일정한 수에 가까워지면 수렴하고, 그렇지 않으면 발산해.

풀이

(1) 오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, $3n-1$의 값은

$2, 5, 8, \cdots$

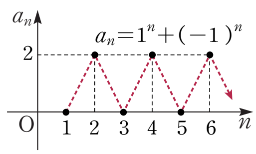
과 같이 한없이 커지므로 수열 $\{3n-1\}$은 양의 무한대로 발산한다.



(2) 오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, $1^n+(-1)^n$의 값은

$0, 2, 0, 2, \cdots$

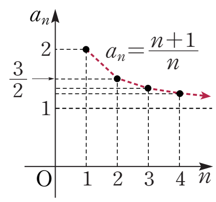
와 같이 0과 2가 반복되므로 수열 $\{1^n+(-1)^n\}$은 발산(진동)한다.❶



(3) 오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, $\dfrac{n+1}{n}=1+\dfrac{1}{n}$❷의 값은

$2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, \cdots$

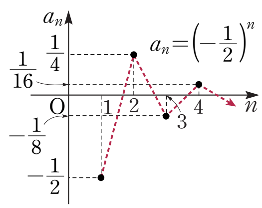
와 같이 1에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$은 1에 수렴한다.



(4) 오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$의 값은

$-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \cdots$

과 같이 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$은 0에 수렴한다.



❶ 일정한 수에 수렴하지도 않고, 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하지도 않는다.

❷ $a_n=1+\dfrac{1}{n}$의 그래프에서 점근선은 직선 $a_n=1$이다.

답 (1) 발산 (2) 발산(진동) (3) 수렴, 1 (4) 수렴, 0

풍쌤 강의 NOTE

① 수열 $\{a_n\}$이 수렴 ➡ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 상수)

② 수열 $\{a_n\}$이 발산
- 양의 무한대로 발산 ➡ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$
- 음의 무한대로 발산 ➡ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$
- 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지 않는 경우(진동)

01-1 유사

다음 수열 $\{a_n\}$의 수렴과 발산을 그래프를 이용하여 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\{1-2^n\}$

(2) $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

(3) $\left\{\dfrac{n^2-1}{n}\right\}$

(4) $\{\log n\}$

(5) $\{(-1)^n \times n^2\}$

01-2 변형

다음 수열 중 발산하는 것은?

① $\dfrac{2}{\sqrt{2}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{4}}, \cdots, \dfrac{2}{\sqrt{n+1}}, \cdots$

② $\dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{25}, \dfrac{3}{125}, \cdots, \dfrac{3}{5^n}, \cdots$

③ $\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{4}, \cdots, \dfrac{2n+1}{n+1}, \cdots$

④ $\sin \pi, \sin 2\pi, \sin 3\pi, \cdots, \sin n\pi, \cdots$

⑤ $\log 1, \log \dfrac{1}{4}, \log \dfrac{1}{9}, \cdots, \log \dfrac{1}{n^2}, \cdots$

01-3 변형

다음 |보기|의 수열 중에서 수렴하는 것만을 있는 대로 골라라.

|보기|

ㄱ. $\{2-4n\}$ ㄴ. $\{1-\tan n\pi\}$

ㄷ. $\{(-1)^{n+1}+(-1)^n\}$ ㄹ. $\left\{\dfrac{2n}{n^2+1}\right\}$

01-4 변형

다음 |보기|의 수열 중에서 발산하는 것만을 있는 대로 골라라.

|보기|

ㄱ. $\{\sqrt{n+3}\}$ ㄴ. $\left\{\sin \dfrac{n\pi}{2}\right\}$

ㄷ. $\left\{\dfrac{(-1)^n \times n}{n+1}\right\}$ ㄹ. $\left\{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

01-5 실력

수열 $\{\cos(2n+1)\pi\}$의 극한값을 a, 수열 $\left\{\log \dfrac{10n+1}{n}\right\}$의 극한값을 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

필수유형 02 수열의 극한에 대한 기본 성질

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=1$, $\lim_{n\to\infty} b_n=-2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_nb_n+4}$의 값을 구하여라.

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n^2}\right)$의 값을 구하여라.

(3) 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n^{\,2}$의 값을 구하여라.

풍쌤 POINT

수렴하는 두 수열의 합, 차, 곱, 몫의 극한은 수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 구할 수 있어.

풀이

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_nb_n+4}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n}{\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}4}$$
$$=\frac{1-(-2)}{1\times(-2)+4}=\frac{3}{2}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$
$$=2+3\times0=2$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}3-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} ❶$$
$$=3-2\times0=3$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n^2}\right)$$
$$=2\times3=6$$

❶ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$
$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\right)$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$
$=0\times0=0$

다른 풀이

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(6-\frac{4}{n^2}+\frac{9}{n}-\frac{6}{n^3}\right)=6$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-1)+1\} ❷$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n-1)+\lim_{n\to\infty}1$$
$$=2+1=3$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n^{\,2}=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}a_n$$
$$=3\times3=9$$

❷ $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=2$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 6 (3) 9

풍쌤 강의 NOTE

- 수열의 극한에 대한 기본 성질은 각각의 수열이 수렴하는 경우에만 성립한다.
- 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$, $\{a_nb_n\}$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ $(b_n\neq0,\ \lim_{n\to\infty}b_n\neq0)$은 각각 수렴한다.
- $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)이면 실수 p, q, r에 대하여
$$\lim_{n\to\infty}\frac{pa_n+qb_n}{ra_nb_n}=\frac{p\alpha+q\beta}{r\alpha\beta}\ (\text{단, } ra_nb_n\neq0,\ r\alpha\beta\neq0)$$

02-1 유사

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$, $\lim_{n\to\infty} b_n=-4$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)$ (2) $\lim_{n\to\infty}(-5a_nb_n)$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2-b_n{}^2)$ (4) $\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n}{4a_nb_n+2}$

02-2 유사

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$ (4) $\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)$

02-3 유사

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n+2)=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n(a_n-2)$의 값을 구하여라.

02-4 변형

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_n=\frac{2}{n^2}-4,\ b_n=\frac{2}{n+1}+3$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)$의 값을 구하여라.

02-5 변형

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=-1$, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=-6$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)$의 값을 구하여라.

02-6 실력

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)=3,\ \lim_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)=10$$

일 때, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$의 값을 구하여라.