풍산자

일등급 유형

수학Ⅱ

구성과 특징

1 일등급 실력 완성을 위한 집중 학습

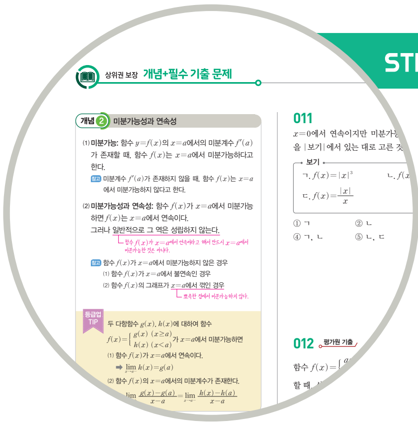
학교 시험과 수능에서 일등급 실력을 완성하기 위한 문항 대비 집중서로 중상위 수준의 다양한 문제 풀이를 통해 중위권 학생들은 상위권 실력으로 향상될 수 있고, 상위권 학생들은 상위권 실력을 유지할 수 있도록 구성하였습니다.

2 다양한 유형의 문항으로 학교시험 & 학력평가 대비

학교 시험과 수능/모의고사/학력평가를 분석하여 출제 빈도가 높고 반드시 알아야 할 유형, 다양한 문제 해결력이 필요한 유형을 체계적으로 수록하여 학교 시험과 수능을 동시에 대비할 수 있습니다. 또한 최신 기출 문제를 연습하고 실전에 대비할 수 있도록 신경향 문제를 수록하였습니다.

3 점진적 학습이 가능한 단계별 문제 구성

실전 개념이 문제에 어떻게 활용되는지를 정리하였고, 중 수준, 상 수준, 최상위 수준의 문제를 단계별로 수록하여 문제를 풀면서 일등급 실력에 도달할 수 있도록 구성하였습니다

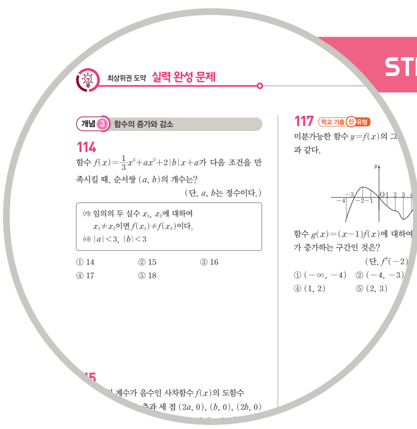


STEP A | 상위권 보장 개념+필수 기출 문제

- 학교 시험/평가원/교육청 기출 문제를 체계적으로 분석하여 실전 개념을 정리하였고, 출제 가능성이 높은 유형으로 구성하였습니다.
- **등급업 TIP** 실전에 자주 이용되는 개념, 공식, 비법 등을 제시하였습니다.
- STEP A, STEP B에서는 실제 시험에 출제되는 문제를 수록하여 실전 감각을 기를 수 있습니다.

평가원 기출 **교육청 기출** 평가원/ 교육청 기출 문제 중에서 중요한 유형의 문제입니다.

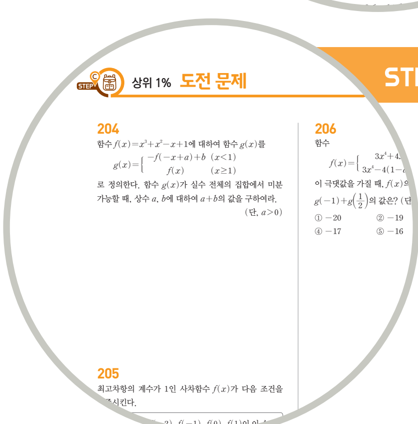
학교 기출 신 유형 최신 학교 시험 기출 문제 중에서 새로운 유형의 문제로 정답과 풀이에서 접근 방법을 확인할 수 있습니다.



STEP B | 최상위권 도약 실력 완성 문제

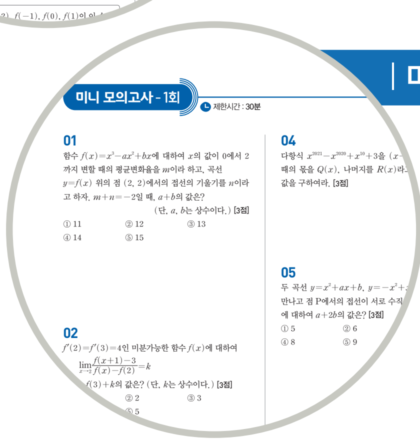
- 개념별로 상 수준의 문제를 구성하여 탄탄한 상위권 실력을 완성할 수 있도록 하였습니다.

다빈출 출제 비중이 높은 유형의 문제입니다.



STEP C | 상위 1% 도전 문제

- 대단원별 최고난도 문항으로 일등급 대비와 최상위 실력을 기를 수 있도록 하였습니다.



| 미니 모의고사

- 대단원별로 실력을 점검할 수 있는 문항을 엄선하여 구성하였습니다.

차례

풍산자가 제안하는 상위권으로의 지름길

일등급유형

어제는 역사이고

내일은 미래이며,

그리고 오늘은 선물입니다.

그렇기에 우리는

현재(present)를 선물(present)이라고 말합니다.

명석한 두뇌도 뛰어난 체력도 타고난 재능도 끝없는 노력을 이길 순 없다.

아무 것도 변하지 않을지라도 내가 변하면 모든 것이 변한다.

풍산자 일등급유형과 함께 까다로운 문제를 정복해 볼까요?

_계산 실수와 개념의 잘못된 적용을 유도하는 문제

_개념은 단순한데 사고의 전환이 필요한 신경향 문제

_익숙한 문제인데 풀이 방법은 다른 접근이 필요한 문제

_여러 가지 개념의 응용을 해야 하는데 적용에 실패하는 문제

_문제 해결을 위한 조건과 추론 과정에서 변형과 해석을 요구하는 문제

I

함수의 극한과 연속

STEP A 상위권 보장 개념+필수 기출 문제

개념 1 함수의 극한

(1) **함수의 수렴:** 함수 $f(x)$에서 x가 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하고, α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 극한 또는 극한값이라고 한다.

$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$ 또는 $\underbrace{x \to a}_{x \neq a\text{이면서 } x\text{가 } a\text{에 한없이 가까워짐을 나타내는 기호}}$일 때 $f(x) \to \alpha$

(2) **함수의 발산:** 함수 $f(x)$에서 x가 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 수렴하지 않으면 함수 $f(x)$는 발산한다고 한다.

① 양의 무한대로 발산

$\lim_{x \to a} f(x)=\underbrace{\infty}_{\text{한없이 커지는 상태를 나타내는 기호}}$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to \infty$

② 음의 무한대로 발산

$\lim_{x \to a} f(x)=-\infty$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to -\infty$

(3) **좌극한과 우극한:** 함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 존재하고 그 값이 α로 일치하면 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 극한값은 α이다.

$\underbrace{\lim_{x \to a-} f(x)}_{\text{좌극한}}=\underbrace{\lim_{x \to a+} f(x)}_{\text{우극한}}=\alpha \iff \lim_{x \to a} f(x)=\alpha$

주의 좌극한과 우극한이 모두 존재하더라도 그 값이 서로 다르면 극한값은 존재하지 않는다.

등급업 TIP 함수 $f(x)$에서 $x=a$에서의 함숫값이 존재하지 않더라도 $x \to a$일 때의 극한값은 존재할 수 있으며, $x=a$에서의 함숫값과 $x \to a$일 때의 극한값은 서로 다를 수 있다.

001

출제율

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+1}{x-2}$의 값은?

① 0 ② 5 ③ 10
④ 15 ⑤ 20

002

출제율

극한값이 존재하는 것만을 |보기|에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{x \to 0}(x^2-2x)$ ㄴ. $\lim_{x \to 2}\frac{1}{|x-2|}$

ㄷ. $\lim_{x \to \infty}\sqrt{5x+1}$ ㄹ. $\lim_{x \to 0}\frac{x}{x+3}$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

003 평가원 기출

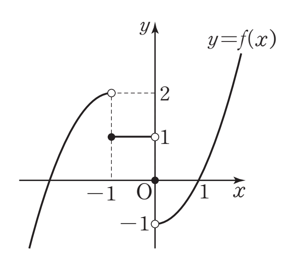
출제율

$\lim_{x \to 1}\frac{x+1}{x^2+ax+1}=\frac{1}{9}$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

004

출제율

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x)+\lim_{x \to 0+} f(x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

005

출제율

함수 $f(x)=\begin{cases} 1-3x^2 & (x<0) \\ 2x+5 & (0\le x<3) \\ -6 & (x\ge 3) \end{cases}$에 대하여

$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 3+} f(x)$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0

④ 5 ⑤ 10

006

출제율

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x-k & (x<1) \\ x^2+x-4 & (x\ge 1) \end{cases}$에 대하여 $\lim_{x\to 1} f(x)$

의 값이 존재하도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

007

출제율

함수 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2|-2}{\sqrt{x}-2}$에 대하여

$\lim_{x\to 4+} f(x)+\lim_{x\to 4-} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

개념 2 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에서 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재할 때

(1) $\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)$ (단, c는 상수이다.)

(2) $\lim_{x\to a} \{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$

(복부호동순)

(3) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)$

(4) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ (단, $g(x)\neq 0$, $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$)

참고 함수의 극한에 대한 성질은 극한값이 존재할 때에만 성립하고, $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$일 때에도 성립한다.

등급업 TIP

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} \{f(x)-g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)

가 주어졌을 때

➡ $f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면 두 함수 $f(x)$, $h(x)$는 수렴하므로, 극한값을 구하려는 함수를 $f(x)$와 $h(x)$로 나타낸 후 함수의 극한에 대한 성질을 이용한다.

008

출제율

함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}=-2$$

일 때, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^4-2f(x)}{4x+3f(x)}$의 값은?

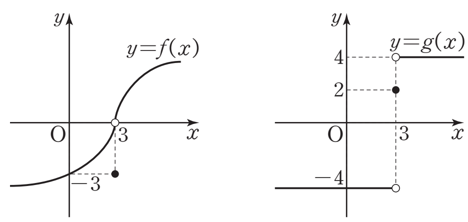
① -5 ② -4 ③ -3

④ -2 ⑤ -1

009

출제율

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\lim_{x \to 3}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]$의 값은?



① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

010

출제율

두 함수

$f(x)=|x-1|$, $g(x)=[x]$

에 대하여 $x \to 1$일 때, 극한값이 존재하는 것만을 |보기|에서 있는 대로 고른 것은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

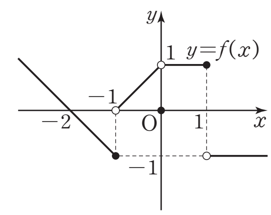
ㄱ. $f(x)$ ㄴ. $g(x)$
ㄷ. $f(x)g(x)$ ㄹ. $g(f(x))$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

011

출제율

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x)f(2+x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

012

출제율

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}=5$일 때,

$\lim_{x \to 0}\frac{2x+f(x)}{3x^2+2f(x)}$의 값을 구하여라.

013

출제율

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to 2}f(x)=3,\ \lim_{x \to 2}\frac{g(x)}{f(x)}=5$$

일 때, $\lim_{x \to 3}\frac{2x-3}{g(x-1)}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

정답과 풀이 002쪽

개념 3 극한값의 계산

(1) $\dfrac{0}{0}$ 꼴: 분자, 분모가 모두 다항식이면 분자, 분모를 각각 인수분해한 후 약분하고, 분자, 분모 중 무리식이 있으면 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴: 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 나눈다.
① (분자의 차수)$=$(분모의 차수)이면 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.
② (분자의 차수)$<$(분모의 차수)이면 극한값은 0이다.
③ (분자의 차수)$>$(분모의 차수)이면 극한값은 없다.

(3) $\infty-\infty$ 꼴: 다항식은 최고차항으로 묶고, 무리식은 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

(4) $\infty\times 0$ 꼴: $\infty\times c$, $\dfrac{c}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.
(단, c는 상수이다.)

014 평가원 기출

출제율

$\displaystyle\lim_{x\to7}\frac{(x-7)(x+3)}{x-7}$의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

015

출제율

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+2x+6}}{x-3}$의 값을 구하여라.

016

출제율

함수 $f(x)=x^2+2ax$가 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=6$을 만족시킬 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

017

출제율

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{12x-5}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{4x^2-2x-1}}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

018

출제율

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{x+2}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

019

출제율

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+3}+x+2}$의 값은?

① -1 ② $-\frac{2}{7}$ ③ $\frac{2}{7}$

④ 1 ⑤ $\frac{12}{7}$

020

출제율

다음 중 옳지 않은 것은?

① $\lim_{x \to 2}(x^2-4x+2)=-2$

② $\lim_{x \to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=2$

③ $\lim_{x \to \infty}\frac{(x+1)(4x-1)}{x^2-x+1}=4$

④ $\lim_{x \to 3}\frac{6}{x-3}\left(x-\frac{6}{x-1}\right)=10$

⑤ $\lim_{x \to 2}\frac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}=8$

021

출제율

$\lim_{x \to \infty} x\left(3-\frac{\sqrt{9x-3}}{\sqrt{x+1}}\right)$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

022 학교 기출 신유형

출제율

$\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+ax}-bx-1)=3$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11

④ 13 ⑤ 15

023

출제율

함수 $f(x)=x^2-2x+3$일 때,

$\lim_{t \to \infty} t^2\left\{f\left(\frac{1}{t}-2\right)-f(-2)\right\}^2$의 값을 구하여라.

024 학교 기출 신유형

출제율

음수 k에 대하여 이차방정식 $kx^2-6x+18=0$의 서로 다른 두 실근 중 작은 근을 α라고 할 때, $\lim_{k \to 0-}\alpha$의 값을 구하여라.

정답과 풀이 004쪽

개념 4 미정계수의 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이다.

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이고 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이다.

참고 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 극한값

(1) $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=k$ $(k\neq0)$이면 극한값은 없다.

(2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=k$ $(k\neq0)$이면 극한값은 0이다.

등급업 TIP

$x\to\infty$일 때 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to\alpha$ (α는 0이 아닌 실수), 즉 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$의 차수는 같고, α는 $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 계수의 비이다.

025 교육청 기출

출제율

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2-9}=3$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -33　② -30　③ -27
④ -24　⑤ -21

026

출제율

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+a}-b}{x-3}=\dfrac{1}{2}$일 때, 상수 a, b에 대하여 $\dfrac{a}{b}$의 값은?

① -2　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{2}$
④ 1　⑤ 2

027

출제율

$\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{x+a}-5}{\sqrt{x+9}-2}=b$일 때, $a-5b$의 값을 구하여라.

(단, a, b는 상수이다.)

028

출제율

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}+ax}{x+2}=b$가 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+4b$의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

029

출제율

상수 a, b에 대하여 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^3-ax^2-b}=-1$일 때, $a+b$의 값은?

① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

030

출제율

함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=5$가 성립할 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

031

출제율

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-2x}=5,\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=20$$

을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은?

① 20 ② 30 ③ 40
④ 50 ⑤ 60

032

출제율

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{f(x)}=\frac{1}{3},\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{f(x)}=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

개념 5 함수의 극한의 대소 관계

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에서

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)

일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x)\le g(x)$이면 $\alpha\le\beta$이다.

(2) $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$이다.

참고 함수의 극한의 대소 관계는 $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$일 때에도 성립한다.

등급업 TIP a에 가까운 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$인 경우도 있다.

033

출제율

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$x^2-9\le f(x)\le 2x^2-6x$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}$의 값을 구하여라.

034 학교 기출 신유형

출제율

$\lim_{x\to0}x^3\left[\frac{1}{4x^3}\right]$의 극한값은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{1}{32}$

정답과 풀이 006쪽

개념 6 함수의 극한의 활용

$a \to \triangle$일 때, 그래프에서 선분의 길이 또는 도형의 넓이의 극한을 구하는 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.

(i) 그래프 위의 점의 좌표를 이용하여 구하려는 선분의 길이 또는 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) 함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

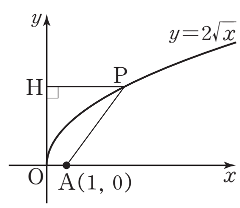
참고 교점의 좌표, 교점의 개수 등의 극한값을 구하는 경우에도 주어진 조건을 이용하여 교점의 좌표, 개수 등을 주어진 문자로 나타낸 후, 함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

035

출제율

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2\sqrt{t})$와 x축 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$이 있다. 점 P에서 y축 위에 내린 수선의 발을 H라고 할 때,

$\lim\limits_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PH}})$의 값은?



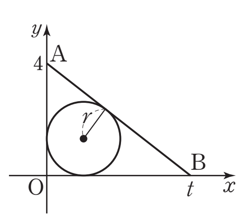
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

036

출제율

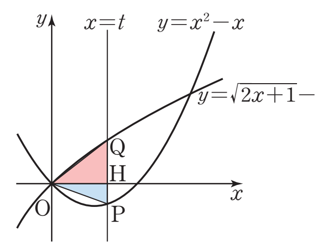
오른쪽 그림과 같이 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ 4)$, $\mathrm{B}(t,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB와 그 삼각형에 내접하는 반지름의 길이가 r인 원이 있다. $\lim\limits_{t\to0+}\frac{r}{t}$의 값을 구하여라.



037 교육청 기출

출제율

다음 그림과 같이 두 곡선 $y=x^2-x$, $y=\sqrt{2x+1}-1$이 직선 $x=t$ $(0<t<1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 $x=t$가 x축과 만나는 점을 H라고 하자. 원점 O에 대하여 두 삼각형 OPH, OHQ의 넓이를 각각 $A(t)$, $B(t)$라고 할 때, $\lim\limits_{t\to0+}\frac{B(t)}{A(t)}$의 값은?



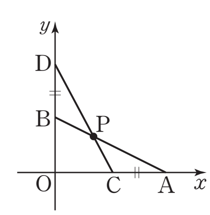
① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

038

출제율

오른쪽 그림에서 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$이고 두 점 C, D는 각각 x축, y축 위의 점이다. 점 P가 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$의 교점이고, 두 점 C, D가 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}$를 만족시키면서 두 점 A, B에 각각 가까워질 때, 점 P는 점 $(a,\ b)$에 가까워진다. $a+b$의 값을 구하여라.



STEP B 최상위권 도약 **실력 완성 문제**

개념 1 함수의 극한

039

$a>1$일 때, $\lim_{x\to2}\frac{|x-2a|-2(a-1)}{x-2}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

040 학교 기출 신유형

함수 $f(x)=\frac{[x]^2+x}{[x]}$에 대하여 $\lim_{x\to n}f(x)$의 값이 존재할 때, 정수 n의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이고, $n>1$이다.)

041

함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{|x-1|} & (x\neq1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$에 대하여 |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ ㄴ. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$
ㄷ. $\lim_{x\to1}f(x)=2$ ㄹ. $\lim_{x\to2}f(x)=3$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄹ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

042

$\lim_{x\to1}\frac{[x-2]}{[x-1]-1}+\lim_{x\to-1}[x^2+2x+1]$의 값은?

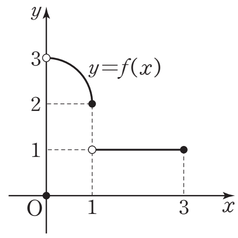
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

043 다빈출

정의역이 $\{x|-3\le x\le3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $0\le x\le3$에서 다음 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

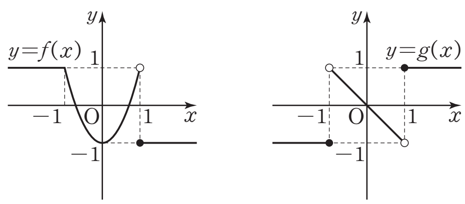
$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to3-}f(x)+f(-3)$의 값은?



① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

044

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $\lim_{x\to-1+} f(g(x))=1$

ㄴ. $\lim_{x\to-1-} f(x)g(x)=1$

ㄷ. $\lim_{x\to1+} f(f(x))=\lim_{x\to1-} f(g(x))$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

045

함수 $f(x)=\begin{cases} 3 & (x<2) \\ x^2-7 & (x\ge2) \end{cases}$ 에 대하여 |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{x\to2} f(x)=3$

ㄴ. $\lim_{x\to2-} f(f(x))=2$

ㄷ. $\lim_{x\to3+} f(f(x))=-3$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ

④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

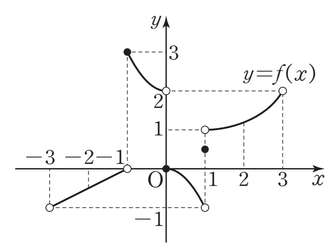
046

실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=|x^2-4|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라고 할 때,

$\lim_{t\to4-} f(t)+\lim_{t\to4+} f(f(t))$의 값을 구하여라.

047 교육청 기출

$-3<x<3$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



부등식 $\lim_{x\to a-} f(x)>\lim_{x\to a+} f(x)$를 만족시키는 상수 a의 값은? (단, $-3<a<3$)

① -2　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 2

개념 2 함수의 극한에 대한 성질

048

함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to2}(x+2)f(x)=2$를 만족시킬 때,

$\lim_{x\to3}(3x^2-1)f(x-1)$의 값을 구하여라.

049

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x-3)}{x-3}=2$일 때,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{x\{x+2f(x)\}}=a,\ \lim_{x\to 0}\frac{4xf(x)}{\{f(x)\}^2-3x^2}=b$$

이다. $5a-b$의 값은?

① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

050 다빈출

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 |보기|에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.)

보기

ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값도 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$의 값이 존재하면 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값도 존재한다.

ㄷ. $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재하면 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값이 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

051

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

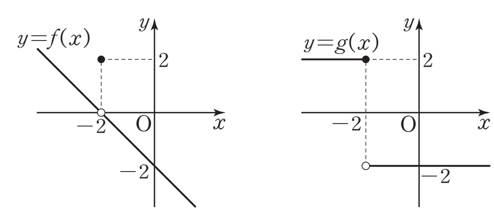
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\{4f(x)-g(x)\}=2$$

일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-4g(x)}{f(x)+3g(x)}$의 값은?

① -5　② -4　③ -3
④ -2　⑤ -1

052 다빈출

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



극한값이 존재하는 것만을 |보기|에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{x\to -2}f(x)g(x)$

ㄴ. $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{g(x)}$

ㄷ. $\lim_{x\to -2}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

053

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)\{g(x)-2\}=x\{g(x)+2\}$
> (나) $\lim_{x\to0} g(x)=4$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-3x}{f(x)+x^2}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

개념 3 극한값의 계산

054 다빈출

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}=a$, $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2-\sqrt{3+x}}=b$라고 할 때, ab의 값은?

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

055

$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{x^2-2x+3}=a$, $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+4x-5}{3x^2-x}=b$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-3}{2x}=c$일 때, a, b, c의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<a<c$
④ $b<c<a$ ⑤ $c<a<b$

056

상수 a, b에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{2x^2-1}=3,\ \lim_{x\to2}\frac{a(x-2)}{x^2-4}=b$$

일 때, $a+2b$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

057

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$의 값이 0이 아닌 실수일 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2f(x)}{f(x)-6x^2}$의 값을 구하여라.

058

$\lim_{x \to \infty} \frac{\left[\frac{x}{3}\right]}{\frac{x}{5}}$의 값은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{5}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

059 학교 기출 신유형

함수 $f(x)=2x^3+x^2+x$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라고 할 때, $\lim_{x \to 0} \frac{f^{-1}(3x)}{2x}$의 값은?

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ $\frac{7}{4}$

060

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}+[1-9x]}{2x}$의 값을 구하여라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

061 교육청 기출

함수 $f(x)=a(x-1)^2+1$에 대하여

$$\lim_{x \to \infty} \{\sqrt{f(-x)}-\sqrt{f(x)}\}=6$$

일 때, 양수 a의 값은?

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 11

062

$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+\left[\frac{x}{2}\right]}-x\right)$의 값은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

063

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-2x\}=2$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{f(x)+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{f(x)}-\sqrt{2x+1}}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

개념 4 미정계수의 결정

064

상수 a, b, c에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1+x)^3}-(ax+b)}{x^2}=c$$

일 때, $2a+4b+8c$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

065

함수 $f(x)=x^4-x^3+2$가 $\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)\}^3-a}{x-1}=b$를 만족시킬 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

066

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(가) $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x^2}-3\right\}=0$
(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x^2-1}=-2$

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

067

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{f(x)}=p,\ \lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{x+3}=q$$

일 때, pq의 값은? (단, $p\neq 0$)

① -16 ② -8 ③ 0
④ 8 ⑤ 16

068 학교 기출 신 유형

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{f(x)}=2,$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f\left(\frac{2}{x}\right)}{2x^2+x-3}=\frac{12}{5}$$

를 만족시킬 때, $f(x)$의 최솟값은?

① -9 ② -8 ③ -7

④ -6 ⑤ -5

069

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to2a}\frac{f(x)-(x-2a)}{f(x)+(x-2a)}=\frac{3}{4}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 16 ② 25 ③ 36

④ 49 ⑤ 64

070

최고차항의 계수가 3인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-3)$의 값은?

(가) $\lim_{x\to\infty}\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)+2\right\}=0$

(나) $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}\times\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=24$

① -35 ② -34 ③ -33

④ -32 ⑤ -31

071

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^2f\left(\frac{1}{x}\right)-2}{x^3+2x}=4,$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+2x-3}=3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to-5}\frac{f(x)}{x^2+x-20}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

072

삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=5$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to-2}\frac{\{f(f(x))-2\}f(x+2)}{x^2-4}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

073

자연수 n에 대하여

$$\lim_{x\to0}\frac{a-x^n-\sqrt{a^2-x^3}}{x^3}=\frac{1}{3}$$

일 때, $n-a$의 최솟값은? (단, $a>0$)

① $\frac{19}{8}$　② $\frac{5}{2}$　③ $\frac{21}{8}$
④ $\frac{11}{4}$　⑤ $\frac{23}{8}$

074

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=-6$
> (나) $\lim_{x\to0}|x|\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}$의 값이 존재한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 A, B라고 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는?

① 1　② $\sqrt{3}$　③ 2
④ $2\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{3}$

075 평가원 기출

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

> $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=4$인 자연수 n이 존재한다.

① 12　② 13　③ 14
④ 15　⑤ 16

개념 5 함수의 극한의 대소 관계

076

다항함수 $f(x)$가 양의 실수 x에 대하여

$$3x^2-4x\le f(x)\le 3x^2+5,$$

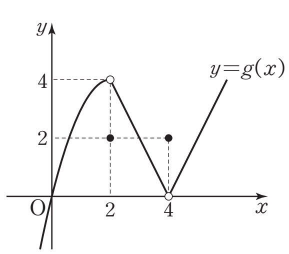
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2+x-6}=\frac{3}{5}$$

을 만족시킬 때, $f(5)$의 값은?

① 28 ② 32 ③ 36
④ 40 ⑤ 44

077

함수 $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



$x\ge 2$에서 함수 $f(x)$가

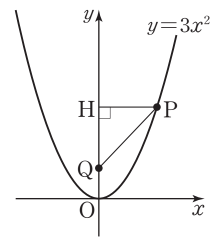
$$g\left(1+\frac{x}{1+x}\right)<f(x)<g\left(2+\frac{1}{1+x}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}f(x)$의 값을 구하여라.

개념 6 함수의 극한의 활용

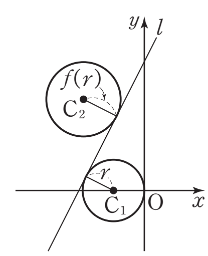
078 다빈출

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=3x^2$ 위의 제1사분면 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 OH를 1 : 2로 내분하는 점을 Q라 하자. 점 P의 x좌표의 값이 한없이 커질 때, $\overline{PQ}-\overline{QH}$의 극한값을 구하여라. (단, O는 원점이다.)



079

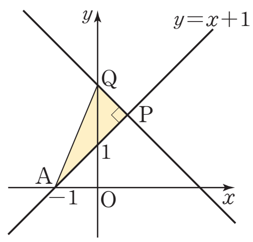
오른쪽 그림과 같이 점 $C_1(-1,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 C_1과 점 $C_2(-2,\ 3)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $f(r)$인 원 C_2가 있다. 두 원이 모두 기울기가 2인 직선 l에 접할 때, $\lim_{r\to 0+}f(r)$의 값은?



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

080 다빈출

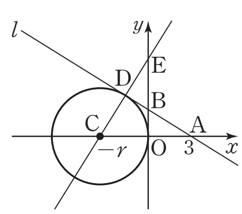
다음 그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{P}(t,\ t+1)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q, 삼각형 APQ의 넓이를 $S(t)$라고 할 때, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{S(t)}$의 값은? (단, $t>0$)



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

081

오른쪽 그림과 같이 중심이 $\mathrm{C}(-r,\ 0)$이고 반지름의 길이가 r인 원 C와 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$에서 원 C에 그은 접선 중 기울기가 음수인 접선 l이 있다. 직선 l이 y축과 만나는 점을 B, 원 C와의 접점을 D라 하고, 직선 CD가 y축과 만나는 점을 E라고 할 때, $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{OE}}}{\overline{\mathrm{OB}}}$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이고, $r>0$이다.)

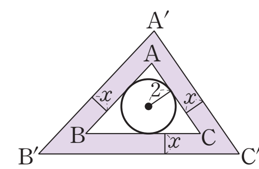


082

다음 그림과 같은 두 삼각형 ABC, A′B′C′에서

$\overline{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{A'B'}}$, $\overline{\mathrm{BC}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{B'C'}}$, $\overline{\mathrm{CA}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{C'A'}}$

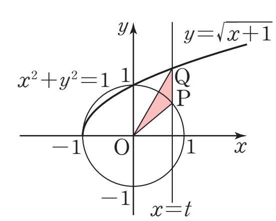
이고 평행한 두 변 사이의 거리는 모두 x이다. 삼각형 ABC에 대하여 그 둘레의 길이를 24, 내접원의 반지름의 길이를 2라 하고, 색칠한 부분의 넓이를 $S(x)$라고 할 때, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{S(x)}{x^2}$의 값은?



① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

083 교육청 기출

다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\sqrt{x+1}$이 직선 $x=t$ $(0<t<1)$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자. 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(t)$라고 할 때, $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{S(t)}{t^2}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{3}{8}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{5}{8}$