풍산자 필수유형

정답과 풀이

공통 수학2

I 도형의 방정식

01 평면좌표

001

(1) $\overline{AB}=|3-2|=1$

(2) $\overline{AB}=|-4+1|=3$

(3) $\overline{AB}=|-7-0|=7$

정답_ (1) 1 (2) 3 (3) 7

002

(1) $\overline{AB}=\sqrt{(-4+1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{25}=5$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(7-3)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

(3) $\overline{OA}=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

정답_ (1) 5 (2) $4\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{10}$

003

$\overline{AB}=\sqrt{\{4-(-1)\}^2+(1-3)^2}=\sqrt{29}$

따라서 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$(\sqrt{29})^2=29$

정답_ 29

004

$\overline{AB}=\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{\{5-(a-1)\}^2+(a-4-4)^2}=\sqrt{10}$

양변을 제곱하면

$(6-a)^2+(a-8)^2=10$

$2a^2-28a+90=0,\ a^2-14a+45=0$

$(a-5)(a-9)=0\qquad \therefore a=5$ 또는 $a=9$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$5+9=14$

정답_ 14

005

$2\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$2\sqrt{(1+1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{(5-1)^2+(k-5)^2}$

양변을 제곱하면

$52=(k-5)^2+16,\ 52=k^2-10k+41$

$k^2-10k-11=0,\ (k+1)(k-11)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=11$

그런데 k는 양수이므로 $k=11$

정답_ ④

006

$\overline{AB}=\sqrt{(1-a)^2+(a+3)^2}=\sqrt{2a^2+4a+10}=\sqrt{2(a+1)^2+8}$

따라서 $a=-1$일 때, 선분 AB의 길이가 최소가 된다.

정답_ -1

007

점 C는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 점 C의 좌표를

$(a,\ 2a)\ (a>0)$이라고 하자.

이때 삼각형 ABC가 선분 AB를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

$6^2+(-2)^2=\{a^2+(2a-2)^2\}+\{(a-6)^2+(2a)^2\}$

$10a^2-20a+40=40,\ a^2-2a=0$

$a(a-2)=0\qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

$\therefore C(2,\ 4)$

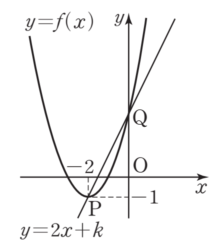
$\therefore \overline{BC}=\sqrt{(6-2)^2+4^2}=4\sqrt{2},\ \overline{CA}=\sqrt{2^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=8$

정답_ 8

008



$f(x)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점 P의 좌표는 $(-2,\ -1)$이다. 직선 $y=2x+k$가 점 $P(-2,\ -1)$을 지나므로

$-1=2\times(-2)+k\qquad \therefore k=3$

이차함수 $f(x)=x^2+4x+3$의 그래프와 직선 $y=2x+3$의 교점의 x좌표는

$x^2+4x+3=2x+3$에서

$x^2+2x=0,\ x(x+2)=0\qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0,\ 3)$이므로 선분 PQ의 길이는

$\sqrt{(0+2)^2+(3+1)^2}=2\sqrt{5}$

정답_ ②

009

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+1)^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b-3)^2$

$a^2+2a+b^2-4b+5=a^2-4a+b^2-6b+13$

$6a+2b=8\qquad \therefore 3a+b=4$ …… ㉠

또, $\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a-2)^2+(b-3)^2=(a-1)^2+(b-1)^2$

$a^2-4a+b^2-6b+13=a^2-2a+b^2-2b+2$

$-2a-4b=-11\qquad \therefore 2a+4b=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

정답_ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

010

점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+1)^2+(0+1)^2=(a-1)^2+(0-3)^2$

$a^2+2a+2=a^2-2a+10,\ 4a=8\qquad \therefore a=2$

$\therefore P(2,\ 0)$

점 Q의 좌표를 $(0,\ b)$라고 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(0+1)^2+(b+1)^2=(0-1)^2+(b-3)^2$

$b^2+2b+2=b^2-6b+10,\ 8b=8\qquad \therefore b=1$

$\therefore$ Q$(0, 1)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(0-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$

정답_ ⑤

011

점 P가 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, 2a+1)$로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(a+1)^2+(2a)^2=(a-2)^2+(2a+1)^2$

$5a^2+2a+1=5a^2+5,\ 2a=4 \qquad \therefore a=2$

따라서 P$(2, 5)$이므로 $b=5$

$\therefore a+b=2+5=7$

정답_ ④

012

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(a-5)^2+b^2=(a-9)^2+b^2$

$a^2-10a+25+b^2=a^2-18a+81+b^2$

$8a=56 \qquad \therefore a=7$

한편, $\overline{\mathrm{OP}}=10$에서 $\overline{\mathrm{OP}}^2=100$이므로

$a^2+b^2=100$

위의 식에 $a=7$을 대입하면

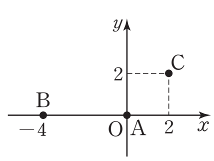
$49+b^2=100 \qquad \therefore b^2=51$

$\therefore b^2-a^2=51-49=2$

정답_ ②

013

오른쪽 그림과 같이 대리점 A가 원점, 대리점 B가 x축 위에 오도록 좌표평면을 잡으면 A$(0, 0)$, B$(-4, 0)$, C$(2, 2)$로 놓을 수 있다.



물류창고를 지으려는 지점을 P(a, b)라고 하면

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+4)^2+b^2,\ a^2+b^2=a^2+8a+16+b^2$

$8a=-16 \qquad \therefore a=-2$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-2)^2+(b-2)^2$

$a^2+b^2=a^2-4a+b^2-4b+8,\ 4b=-4a+8$

$\therefore b=-a+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $a=-2$를 대입하면 $b=4$

즉, P$(-2, 4)$이므로

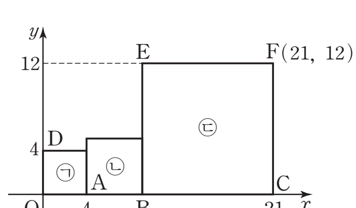
$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 거리는 $2\sqrt{5}$ km이다.

정답_ ①

014

오른쪽 그림과 같이 세 정사각형을 각각 ㉠, ㉡, ㉢이라고 하면 D$(0, 4)$이므로 정사각형 ㉠의 한 변의 길이는 4



F$(21, 12)$이므로 정사각형 ㉢의 한 변의 길이는 12

정사각형 ㉡의 한 변의 길이는

$21-4-12=5$

따라서 A$(4, 0)$, E$(9, 12)$이므로

$\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{(9-4)^2+(12-0)^2}=13$

정답_ ③

015

O$(0, 0)$, P(a, b), Q$(3, -2)$라고 하면

$\sqrt{a^2+b^2}=\overline{\mathrm{OP}},\ \sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}=\overline{\mathrm{PQ}}$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}&=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}\\&\geq\overline{\mathrm{OQ}}\\&=\sqrt{3^2+(-2)^2}\\&=\sqrt{13}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{13}$이다.

정답_ ⑤

016

P$(2, -1)$, Q(x, y), R$(-2, k)$라고 하면

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\overline{\mathrm{PQ}},\ \sqrt{(x+2)^2+(y-k)^2}=\overline{\mathrm{QR}}$

$$\begin{aligned}&\therefore \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-k)^2}\\&\quad=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}\\&\quad\geq\overline{\mathrm{PR}}\\&\quad=\sqrt{(-2-2)^2+(k+1)^2}\\&\quad=\sqrt{k^2+2k+17}\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{k^2+2k+17}=2\sqrt{5}$이므로 양변을 제곱하면

$k^2+2k+17=20,\ k^2+2k-3=0$

$(k+3)(k-1)=0 \qquad \therefore k=1\ (\because k>0)$

정답_ 1

017

$\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$

$\sqrt{x^2+y^2-6x-8y+25}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$

이므로 P$(1, -2)$, Q(x, y), R$(3, 4)$라고 하면

$\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\overline{\mathrm{PQ}}$

$\sqrt{x^2+y^2-6x-8y+25}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\overline{\mathrm{QR}}$

$$\begin{aligned}&\therefore \sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}+\sqrt{x^2+y^2-6x-8y+25}\\&\quad=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}\\&\quad\geq\overline{\mathrm{PR}}\\&\quad=\sqrt{(3-1)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{10}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{10}$이다.

정답_ $2\sqrt{10}$

018

점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2&=\{(a-1)^2+(-5)^2\}+\{(a-9)^2+(-3)^2\}\\&=2a^2-20a+116=2(a-5)^2+66\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 $a=5$일 때 최솟값 66을 갖는다.

정답_ ③

019

점 P의 좌표를 $(0, a)$라고 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2^2+(a-4)^2+k^2+(a-6)^2$
$=2a^2-20a+k^2+56$
$=2(a-5)^2+k^2+6$
따라서 $a=5$일 때 최솟값 k^2+6을 갖는다.
즉, $k^2+6=22$이므로 $k^2=16$
이때 점 B가 제1사분면 위의 점이므로 $k>0$
$\therefore k=4$

정답_ ④

020

점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면
$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(x^2+y^2)+\{(x-3)^2+y^2\}+\{x^2+(y-6)^2\}$
$=3x^2-6x+3y^2-12y+45$
$=3(x-1)^2+3(y-2)^2+30$
따라서 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $x=1$, $y=2$일 때, 최솟값 30을 갖는다.

정답_ ⑤

021

점 P가 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 점 P의 좌표를 $(a, a+1)$이라고 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$
$=(a-1)^2+(a+3)^2+(a-3)^2+a^2+(a+2)^2+(a-2)^2$
$=6a^2-2a+27=6\left(a-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{161}{6}$
따라서 $a=\frac{1}{6}$일 때 주어진 식이 최솟값을 가지므로 구하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right)$

정답_ $\left(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right)$

022

$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로
$(a+1)^2+(3-4)^2=(a-2)^2+(3-5)^2$
$a^2+2a+2=a^2-4a+8$
$6a=6$ $\therefore a=1$

정답_ ③

023

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$
$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로
$(3+3)^2+(1+1)^2=(a+3)^2+(b+1)^2$
$a^2+6a+b^2+2b=30$ …… ㉠
$\overline{AB}=\overline{CA}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$이므로
$(3+3)^2+(1+1)^2=(a-3)^2+(b-1)^2$
$a^2-6a+b^2-2b=30$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 정리하면 $12a+4b=0$ $\therefore b=-3a$
이것을 ㉠에 대입하면
$a^2+6a+9a^2-6a=30$, $a^2=3$
$\therefore a=-\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3}$
따라서 $a=-\sqrt{3}$, $b=3\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3}$, $b=-3\sqrt{3}$이므로
$ab=-9$

정답_ ①

024

$\overline{AB}=\sqrt{(2-5)^2+(4+1)^2}=\sqrt{34}$
$\overline{BC}=\sqrt{(-3-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{34}$
$\overline{CA}=\sqrt{(5+3)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{17}$
$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$
따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$이고, $\angle B=90°$인 직각이등변삼각형이다.

정답_ ④

025

$\overline{AB}^2=(2-a)^2+(-1-3)^2=a^2-4a+20$
$\overline{BC}^2=(8-2)^2+(1+1)^2=40$
$\overline{CA}^2=(8-a)^2+(1-3)^2=a^2-16a+68$
삼각형 ABC가 $\angle A>90°$인 둔각삼각형이 되려면
$\overline{BC}^2>\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$이어야 하므로
$40>(a^2-4a+20)+(a^2-16a+68)$
$a^2-10a+24<0$, $(a-4)(a-6)<0$
$\therefore 4<a<6$

정답_ $4<a<6$

참고 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형 ABC에서 가장 긴 변의 길이가 c일 때
① $a^2+b^2=c^2$ ⇨ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형
② $a^2+b^2>c^2$ ⇨ 예각삼각형
③ $a^2+b^2<c^2$ ⇨ 둔각삼각형

026

$\overline{AB}=\sqrt{(1-2)^2+(4+4)^2}=\sqrt{65}$
$\overline{BC}=\sqrt{(-2-1)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$
$\overline{CA}=\sqrt{(2+2)^2+(-4+2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
$\therefore \overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$
따라서 삼각형 ABC는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이므로
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}=15$

정답_ 15

027

직선 BC를 x축, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 $\boxed{\text{(가) 원점}}$이다.
이때 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 (a, b), $(c, 0)$이라고 하면 꼭짓점 B의 좌표는 $(\boxed{\text{(나) } -c}, 0)$이므로
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2$
$=2a^2+2b^2+2c^2$
$=2(\boxed{\text{(다) } a^2+b^2+c^2})$
또, $\overline{AM}^2=a^2+b^2$, $\overline{BM}^2=c^2$이므로
$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=\boxed{\text{(다) } a^2+b^2+c^2}$
$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$
$\therefore$ (가) 원점 (나) $-c$ (다) $a^2+b^2+c^2$

정답_ (가) **원점** (나) $-c$ (다) $a^2+b^2+c^2$

참고 이와 같은 삼각형의 성질을 파푸스(Pappus) 정리 또는 중선 정리라고 한다.

028

직선 BC를 x축으로 하고, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 $\boxed{(가)\ 원점}$이다.
직사각형 ABCD에서 $A(0,\ b)$, $C(a,\ 0)$이므로
$D(\boxed{(나)\ a},\ \boxed{(다)\ b})$
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면
$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=x^2+(y-b)^2+(x-a)^2+y^2$
$=\boxed{(라)\ x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$
$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\boxed{(라)\ x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$
$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$
$\therefore$ (가) 원점 (나) a (다) b (라) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$

정답_ (가) **원점** (나) a (다) b (라) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$

029

수직선 위의 두 점 $A(-5)$, $B(1)$을 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는
$\frac{3\times1+1\times(-5)}{3+1}=-\frac{1}{2}$

정답_ ②

030

점 A는 선분 PQ의 중점,
점 B는 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점,
점 C는 선분 PQ를 $1:3$으로 내분하는 점
이므로 세 점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.

따라서 왼쪽에 있는 것부터 순서대로 나열하면 C, B, A이다.

정답_ ⑤

031

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(a,\ b)$이므로
$a=\frac{2\times5+1\times(-4)}{2+1}=2,\ b=\frac{2\times3+1\times0}{2+1}=2$
$\therefore\ a+b=2+2=4$

정답_ ④

032

선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점이 P이므로
$\frac{1\times9+3\times1}{1+3}=3,\ \frac{1\times(-1)+3\times(-5)}{1+3}=-4$
$\therefore\ P(3,\ -4)$
따라서 선분 OP의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ -2\right)$

정답_ $\left(\frac{3}{2},\ -2\right)$

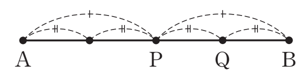
033

점 $P(a,\ b)$는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이므로
$a=\frac{1\times12+2\times6}{1+2}=8,\ b=\frac{1\times(-16)+2\times5}{1+2}=-2$
점 $Q(c,\ d)$는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로
$c=\frac{2\times12+1\times6}{2+1}=10,\ d=\frac{2\times(-16)+1\times5}{2+1}=-9$
$\therefore\ ac+bd=8\times10+(-2)\times(-9)=98$

정답_ ⑤

034

선분 AB의 중점을 P, 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점을 Q라고 하면 점 Q는 선분 PB의 중점이므로 선분 AB 위에 두 점 P, Q를 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{PB}=2\times2\overline{PQ}=4\overline{PQ}$ …… ㉠
이때 두 점 $P(1,\ 2)$, $Q(4,\ 3)$ 사이의 거리는
$\overline{PQ}=\sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$
이므로 ㉠에 의하여 $\overline{AB}=4\overline{PQ}=4\sqrt{10}$
$\therefore\ \overline{AB}^2=(4\sqrt{10})^2=160$

정답_ 160

035

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(2,\ b)$이므로
$\frac{1\times10+2\times a}{1+2}=2,\ \frac{1\times3+2\times(-6)}{1+2}=b$
$2a+10=6,\ b=-3$
따라서 $a=-2,\ b=-3$이므로
$a+b=-2+(-3)=-5$

정답_ ⑤

036

선분 PQ를 $2:k$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{2\times2+k\times(-3)}{2+k},\ \frac{2\times4+k\times(-1)}{2+k}\right)$
$\therefore\ \left(\frac{4-3k}{2+k},\ \frac{8-k}{2+k}\right)$
이 점이 직선 $x+2y=1$ 위에 있으므로
$\frac{4-3k}{2+k}+2\times\frac{8-k}{2+k}=1,\ 20-5k=2+k$
$\therefore\ k=3$

정답_ 3

037

선분 AB를 $4:3$으로 내분하는 점이 x축 위에 있으므로 내분점의 y좌표는 0이다.
즉, $\frac{4\times a+3\times4}{4+3}=0$이므로
$4a+12=0\qquad\therefore\ a=-3$

정답_ ③

038

선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{t\times(-6)+(1-t)\times2}{t+1-t},\ \frac{t\times5+(1-t)\times(-4)}{t+1-t}\right)$

$\therefore (-8t+2,\ 9t-4)$ …… ㉠

㉠이 제3사분면 위의 점이므로

$-8t+2<0,\ 9t-4<0 \qquad \therefore \frac{1}{4}<t<\frac{4}{9}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4},\ \beta=\frac{4}{9}$이므로

$\alpha\beta=\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$

정답_ $\frac{1}{9}$

039

선분 AB를 $(4-t):t$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{(4-t)\times1+t\times a}{4-t+t},\ \frac{(4-t)\times6+t\times(-3)}{4-t+t}\right)$

$\therefore \left(\frac{(a-1)t+4}{4},\ \frac{-9t+24}{4}\right)$

이 점이 점 $(2,\ 3)$과 일치하므로

$\frac{(a-1)t+4}{4}=2,\ \frac{-9t+24}{4}=3$

$\frac{-9t+24}{4}=3$에서 $-9t+24=12$

$\therefore t=\frac{4}{3}$

$\frac{(a-1)t+4}{4}=2$에서 $(a-1)t+4=8$

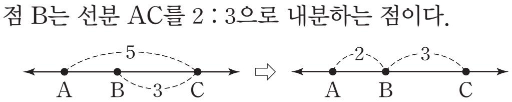
$(a-1)t=4,\ \frac{4}{3}(a-1)=4$

$a-1=3 \qquad \therefore a=4$

정답_ ①

040

$3\overline{AC}=5\overline{BC}$에서 $a<3$이고 $\overline{AC}:\overline{BC}=5:3$이므로 다음 그림과 같이 점 B는 선분 AC를 $2:3$으로 내분하는 점이다.



따라서 점 B의 좌표는

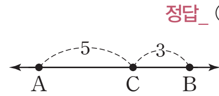
$\left(\frac{2\times3+3\times(-1)}{2+3},\ \frac{2\times1+3\times(-2)}{2+3}\right) \qquad \therefore \left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$

즉, $a=\frac{3}{5},\ b=-\frac{4}{5}$이므로

$a+b=\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{1}{5}$

정답_ ②

참고 세 점 A, B, C의 위치가 오른쪽 그림과 같을 때에도 $\overline{AC}:\overline{BC}=5:3$이지만 $a>3$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

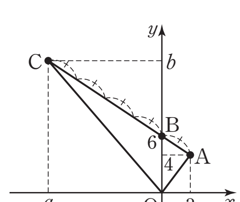


041

삼각형 OAC의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 5배이므로

$\overline{AC}:\overline{AB}=5:1$

이때 $a<0$이므로 점 B는 오른쪽 그림과 같이 선분 AC를 $1:4$로 내분하는 점이다.



즉, $\frac{1\times a+4\times3}{1+4}=0,\ \frac{1\times b+4\times4}{1+4}=6$이므로

$\frac{a+12}{5}=0,\ \frac{b+16}{5}=6 \qquad \therefore a=-12,\ b=14$

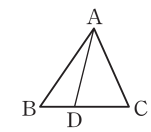
$\therefore a+b=-12+14=2$

정답_ ①

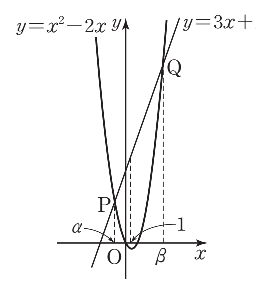
참고 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비

오른쪽 그림에서 $\triangle ABD$와 $\triangle ADC$는 각각 $\overline{BD}$와 $\overline{CD}$를 밑변으로 하고 높이가 같은 삼각형이므로

$\triangle ABD:\triangle ADC=\overline{BD}:\overline{CD}$



042



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라고 하면 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $x^2-2x=3x+k$, 즉 $x^2-5x-k=0$의 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$ …… ㉠

$\alpha\beta=-k$ …… ㉡

선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점의 x좌표가 1이므로

$\frac{1\times\beta+2\times\alpha}{1+2}=1$

$\therefore 2\alpha+\beta=3$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=-2,\ \beta=7$

㉡에서 $-k=\alpha\beta=-2\times7=-14$이므로

$k=14$

정답_ 14

043

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{-6m+an}{m+n},\ \frac{6m+bn}{m+n}\right)$

이 점이 y축 위에 있으므로

$\frac{-6m+an}{m+n}=0,\ -6m+an=0$

$\therefore m=\frac{1}{6}an$ …… ㉠

선분 AC를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2m+an}{m+n},\ \frac{-2m+bn}{m+n}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로

$\frac{-2m+bn}{m+n}=0,\ -2m+bn=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}bn$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{6}an=\frac{1}{2}bn$

$\therefore a=3b\ (\because n>0)$

이때 $a,\ b$는 10 이하의 자연수이므로 점 A는 $(3,\ 1),\ (6,\ 2),\ (9,\ 3)$의 3개이고 만들 수 있는 삼각형 ABC의 개수도 3이다.

정답_ ①

044

(1) $G\left(\frac{2+1+3}{3}, \frac{3-2+2}{3}\right)$ $\qquad\therefore G(2, 1)$

(2) $G\left(\frac{2-5+6}{3}, \frac{3+2+1}{3}\right)$ $\qquad\therefore G(1, 2)$

정답_ (1) (2, 1) (2) (1, 2)

045

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (1, 4)이므로

$\frac{a-1+3}{3}=1$, $\frac{2+4+b}{3}=4$

$\frac{a+2}{3}=1$, $\frac{6+b}{3}=4$ $\qquad\therefore a=1, b=6$

$\therefore ab=1\times6=6$

정답_ ④

046

점 B의 좌표를 (c, d)라고 하면 선분 AB의 중점의 좌표가 (2, 1)이므로

$\frac{1+c}{2}=2$, $\frac{2+d}{2}=1$ $\qquad\therefore c=3, d=0$

A(1, 2), B(3, 0), C(a, b)를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (3, 2)이므로

$\frac{1+3+a}{3}=3$, $\frac{2+0+b}{3}=2$

$\frac{4+a}{3}=3$, $\frac{2+b}{3}=2$ $\qquad\therefore a=5, b=4$

$\therefore a+b=5+4=9$

정답_ ⑤

다른 풀이

삼각형의 무게중심은 세 중선을 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 내분하는 점이다.

따라서 선분 AB의 중점을 M, 삼각형 ABC의 무게중심을 G라고 하면 점 G는 $\overline{CM}$을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\frac{2\times2+1\times a}{2+1}=3$, $\frac{2\times1+1\times b}{2+1}=2$ $\qquad\therefore a=5, b=4$

$\therefore a+b=5+4=9$

047

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라고 하면

$\overline{AB}$의 중점의 좌표가 (−3, 2)이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=-3$ …… ㉠

$\frac{y_1+y_2}{2}=2$ …… ㉡

$\overline{BC}$의 중점의 좌표가 (2, −4)이므로

$\frac{x_2+x_3}{2}=2$ …… ㉢

$\frac{y_2+y_3}{2}=-4$ …… ㉣

$\overline{CA}$의 중점의 좌표가 (4, 5)이므로

$\frac{x_3+x_1}{2}=4$ …… ㉤

$\frac{y_3+y_1}{2}=5$ …… ㉥

㉠+㉢+㉤을 하면 $x_1+x_2+x_3=3$

㉡+㉣+㉥을 하면 $y_1+y_2+y_3=3$

$\therefore \frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{3}{3}=1$, $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=\frac{3}{3}=1$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 (1, 1)

정답_ ④

다른 풀이

삼각형 ABC의 무게중심은 세 변 AB, BC, CA의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-3+2+4}{3}, \frac{2+(-4)+5}{3}\right)$ $\qquad\therefore (1, 1)$

참고 삼각형의 무게중심의 성질

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 각각 P, Q, R라고 하면 삼각형 PQR의 무게중심과 삼각형 ABC의 무게중심은 일치한다.

048

$\overline{OA}$를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times3+1\times0}{2+1}, \frac{2\times4+1\times0}{2+1}\right)$ $\qquad\therefore P\left(2, \frac{8}{3}\right)$

$\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2\times6+1\times3}{2+1}, \frac{2\times(-1)+1\times4}{2+1}\right)$ $\qquad\therefore Q\left(5, \frac{2}{3}\right)$

$\overline{BO}$를 2 : 1로 내분하는 점 R의 좌표는

$\left(\frac{2\times0+1\times6}{2+1}, \frac{2\times0+1\times(-1)}{2+1}\right)$ $\qquad\therefore R\left(2, -\frac{1}{3}\right)$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+5+2}{3}, \frac{\frac{8}{3}+\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)}{3}\right)$ $\qquad\therefore (3, 1)$

정답_ ②

다른 풀이

삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 OAB의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+3+6}{3}, \frac{0+4+(-1)}{3}\right)$ $\qquad\therefore (3, 1)$

049

곡선 $y=x^2-8x+1$과 직선 $y=2x+6$의 두 교점 A, B의 좌표를 각각 $(\alpha, 2\alpha+6)$, $(\beta, 2\beta+6)$이라고 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-8x+1=2x+6$, 즉 $x^2-10x-5=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=10$

점 (a, b)가 삼각형 OAB의 무게중심이므로

$a=\frac{0+\alpha+\beta}{3}=\frac{\alpha+\beta}{3}$

$b=\frac{0+(2\alpha+6)+(2\beta+6)}{3}=\frac{2\alpha+2\beta+12}{3}$

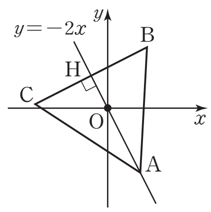
$\therefore a+b=\frac{\alpha+\beta}{3}+\frac{2\alpha+2\beta+12}{3}=\frac{3\alpha+3\beta+12}{3}$

$=\alpha+\beta+4$

$=10+4=14$

정답_ 14

050



점 A가 직선 $y=-2x$ 위에 있고 삼각형 ABC의 무게중심이 원점이므로 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a $(a>0)$라고 하면 넓이가 $\frac{45}{4}\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{45}{4}\sqrt{3}$, $a^2=45$ $\quad\therefore a=3\sqrt{5}$ $(\because a>0)$

점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3\sqrt{5}=\frac{3}{2}\sqrt{15}$이므로

$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AH}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\sqrt{15}=\sqrt{15}$

$A(k,\ -2k)$ $(k>0)$라고 하면 $\sqrt{k^2+(-2k)^2}=\sqrt{15}$

$5k^2=15$, $k^2=3$ $\quad\therefore k=\sqrt{3}$ $(\because k>0)$

점 A의 좌표는 $(\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$이므로 x좌표와 y좌표의 곱은

$\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3})=-6$

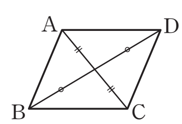
정답_ -6

참고 정삼각형의 높이와 넓이

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이를 h, 넓이를 S라고 하면

(1) $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ $\qquad$ (2) $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

051



평행사변형의 성질에 의하여 두 대각선 AC의 BD의 중점이 일치하므로

$\frac{1+2}{2}=\frac{-3+a}{2}$, $\frac{2+(-6)}{2}=\frac{1+b}{2}$

따라서 $a=6$, $b=-5$이므로

$a-b=6-(-5)=11$

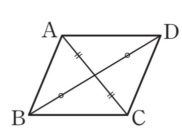
정답_ ④

참고 평행사변형의 성질

① 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.

② 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.
즉, 두 대각선의 중점이 일치한다.

052



평행사변형의 성질에 의하여 대각선 AC의 중점 $\left(\frac{a-2}{2},\ \frac{b-4}{2}\right)$와 대각선 BD의 중점 $\left(\frac{c+1}{2},\ -1\right)$이 일치하므로

$\frac{a+(-2)}{2}=\frac{c+1}{2}$, $\frac{b+(-4)}{2}=\frac{3+(-5)}{2}$

$\therefore a=c+3$, $b=2$

또, 평행사변형의 두 대각선의 교점, 즉 두 대각선 AC의 중점과 BD의 중점이 각각 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

$\frac{b-4}{2}=-\frac{a-2}{2}$, $\frac{3-5}{2}=-\frac{c+1}{2}$

$\therefore a+b=6$, $c=1$

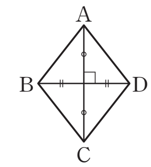
$b=2$를 $a+b=6$에 대입하면 $a=4$

따라서 $a=4$, $b=2$, $c=1$이므로

$abc=4\times2\times1=8$

정답_ ④

053



마름모의 성질에 의하여 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로 중점의 x좌표에서

$\frac{-1+b}{2}=\frac{a+2}{2}$ $\quad\therefore b=a+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $\overline{AB}=\overline{AD}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$이므로

$(a+1)^2+(4-1)^2=(2+1)^2+(-2-1)^2$

$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=2$ $(\because a>0)$

㉠에 $a=2$를 대입하면 $b=5$

$\therefore a+b=2+5=7$

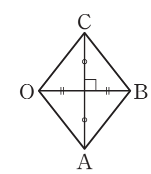
정답_ 7

참고 마름모의 성질

① 네 변의 길이가 모두 같다.

② 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.
즉, 두 대각선의 중점이 일치한다.

054



마름모의 성질에 의하여 두 대각선 OB와 AC의 중점이 일치하므로

$\frac{0+b}{2}=\frac{a+1}{2}$, $\frac{0+4}{2}=\frac{1+c}{2}$

$\therefore b=a+1$, $c=3$

또, $\overline{OA}=\overline{OC}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{OC}^2$이므로

$a^2+1=1+c^2$, $a^2=c^2$

$\therefore a=-c$ 또는 $a=c$

$\therefore a=3$ $(\because a>0)$

$a=3$을 $b=a+1$에 대입하면

$b=3+1=4$

따라서 $a=3$, $b=4$, $c=3$이므로

$a+b+c=3+4+3=10$

정답_ ④

055

두 대각선 AC, BD의 교점 $(4,\ 2)$는 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 각각의 중점이다.

$C(x_1,\ y_1)$이라고 하면 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+x_1}{2},\ \frac{3+y_1}{2}\right)$이므로

$\frac{1+x_1}{2}=4$, $\frac{3+y_1}{2}=2$ $\quad\therefore x_1=7$, $y_1=1$

$\therefore C(7,\ 1)$

또, $D(x_2,\ y_2)$라고 하면 $\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+x_2}{2},\ \frac{-3+y_2}{2}\right)$이므로

$\frac{-1+x_2}{2}=4$, $\frac{-3+y_2}{2}=2$ $\quad\therefore x_2=9$, $y_2=7$

$\therefore D(9,\ 7)$

정답_ **점 C의 좌표:** $(7,\ 1)$, **점 D의 좌표:** $(9,\ 7)$

056

점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $\left(4,\ \frac{8}{3}\right)$이므로

$\frac{-1+5+a}{3}=4$, $\frac{4+0+b}{3}=\frac{8}{3}$

$\therefore a=8$, $b=4$

$\therefore$ C$(8,\ 4)$

점 D의 좌표를 $(c,\ d)$라고 하면 평행사변형 ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\dfrac{-1+8}{2}=\dfrac{5+c}{2},\ \dfrac{4+4}{2}=\dfrac{0+d}{2}$

$\therefore c=2,\ d=8$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 $(2,\ 8)$이다.

정답_ $(2,\ 8)$

057

$\overline{\mathrm{AD}}$는 $\angle$A의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-3-3)^2+(-3-5)^2}=10,$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(7-3)^2+(2-5)^2}=5$

이므로 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=10:5=2:1$

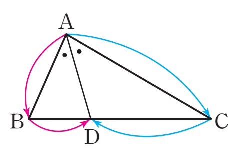
따라서 점 D는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times7+1\times(-3)}{2+1},\ \dfrac{2\times2+1\times(-3)}{2+1}\right)\qquad\therefore\left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

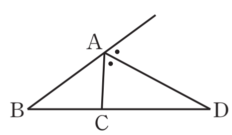
정답_ $\left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

참고 각의 이등분선의 성질

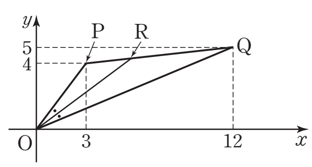
① 삼각형 ABC에서 $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 하면
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$
⇨ 점 D는 선분 BC를 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}$로 내분하는 점이다.



② 삼각형 ABC에서 $\angle$A의 외각의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 하면
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$
⇨ 점 C는 선분 BD를 $(\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AC}}):\overline{\mathrm{AC}}$로 내분하는 점이다.



058



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3^2+4^2}=5,$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

이므로 $\angle$POQ의 이등분선과 선분 PQ와의 교점을 R라고 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{PR}}:\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OQ}}=5:13$

즉, 점 R는 선분 PQ를 $5:13$으로 내분하는 점이므로 점 R의 x좌표는 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{5\times12+13\times3}{5+13}=\dfrac{11}{2}$

따라서 $a=2,\ b=11$이므로

$a+b=2+11=13$

정답_ 13

059

삼각형 ABC에서 $\angle$ABC의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지나므로 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이다.

세 점 A$(0,\ a)$, B$(-3,\ 0)$, C$(1,\ 0)$에서

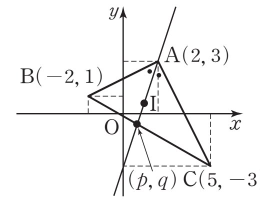
$\overline{\mathrm{BA}}=\sqrt{(0+3)^2+a^2}=\sqrt{9+a^2},\ \overline{\mathrm{BC}}=4$

$\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{BA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$9+a^2=16,\ a^2=7\qquad\therefore a=\sqrt{7}\ (\because a>0)$

정답_ ③

060



점 I가 삼각형 ABC의 내심이므로 삼각형 ABC에서 직선 AI는 $\angle$BAC의 이등분선이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2+2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5},$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(2-5)^2+(3+3)^2}=3\sqrt{5}$

이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{5}:3\sqrt{5}=2:3$

따라서 각의 이등분선의 성질에 의하여 점 P$(p,\ q)$는 선분 BC를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

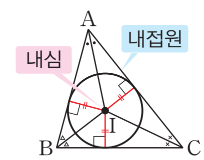
$p=\dfrac{2\times5+3\times(-2)}{2+3}=\dfrac{4}{5},\ q=\dfrac{2\times(-3)+3\times1}{2+3}=-\dfrac{3}{5}$

$\therefore p+q=\dfrac{4}{5}+\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{1}{5}$

정답_ $\dfrac{1}{5}$

참고 삼각형의 내심

삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이고, 삼각형의 내심에서 세 변까지의 거리는 내접원의 반지름으로 그 길이가 모두 같다.



061

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면 $\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{PB}}^2=6$이므로

$(x-1)^2+(y+2)^2-\{(x-4)^2+(y-2)^2\}=6$

$x^2-2x+y^2+4y+5-(x^2-8x+y^2-4y+20)=6$

$\therefore 6x+8y-21=0$

정답_ $6x+8y-21=0$

062

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(x+1)^2+(y-3)^2=(x-2)^2+(y-5)^2$

$x^2+2x+y^2-6y+10=x^2-4x+y^2-10y+29$

$\therefore 6x+4y-19=0$

정답_ $6x+4y-19=0$

063

점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고, $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면 $x=\dfrac{2\times3+1\times a}{2+1},\ y=\dfrac{2\times2+1\times b}{2+1}$

$\therefore a=3x-6,\ b=3y-4$ …… ㉠

이때 점 A는 직선 $y=2x+3$ 위의 점이므로

$b=2a+3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $3y-4=2(3x-6)+3$

$-6x+3y+5=0\qquad\therefore 6x-3y-5=0$

정답_ ④

064

P$(a,\ b)$가 삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$ ……………… ❶

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(a-4)^2+(b-1)^2=(a+3)^2+b^2$

$a^2-8a+b^2-2b+17=a^2+6a+b^2+9$

$14a+2b=8$ $\quad\therefore 7a+b=4$ ...... ㉠

또, $\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a+3)^2+b^2=(a-6)^2+(b+3)^2$

$a^2+6a+b^2+9=a^2-12a+b^2+6b+45$

$18a-6b=36$ $\quad\therefore 3a-b=6$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$ ························ ❷

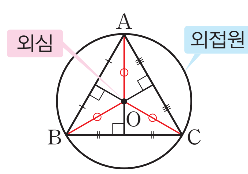
$\therefore ab=1\times(-3)=-3$ ························ ❸

정답_ -3

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$임을 알기	30 %
❷ a, b의 값 구하기	50 %
❸ ab의 값 구하기	20 %

참고 삼각형의 외심

삼각형의 외심은 세 변의 수직이등분선의 교점이고, 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 외접원의 반지름으로 그 길이가 모두 같다.



065

$\overline{AP}+\overline{PB}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 $\overline{AB}$ 위에 있을 때이므로 ························ ❶

$\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(6+2)^2}=4\sqrt{5}$

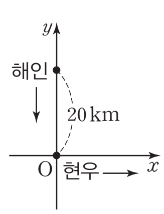
따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{5}$이다. ························ ❷

정답_ $4\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값이 최소일 때 점 P의 위치 알기	40 %
❷ $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값 구하기	60 %

066

오른쪽 그림과 같이 처음 현우의 위치를 원점, 현우의 진행방향을 x축, 해인이의 진행방향을 y축으로 놓자.



해인이와 현우의 위치를 각각 P, Q라고 하면 두 사람이 출발한 지 t시간 후의 두 점 P, Q의 좌표는

P$(0, 20-2t)$, Q$(4t, 0)$ ························ ❶

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(4t)^2+(-20+2t)^2}$

$=\sqrt{20t^2-80t+400}$

$=\sqrt{20(t-2)^2+320}$ ························ ❷

따라서 해인이와 현우 사이의 거리의 최솟값은 $8\sqrt{5}$ km이다. ······ ❸

정답_ $8\sqrt{5}$ km

채점 기준	비율
❶ 해인이와 현우의 t초 후의 위치를 좌표로 나타내기	30 %
❷ 두 사람 사이의 거리를 t에 대한 식으로 나타내기	50 %
❸ 두 사람 사이의 거리의 최솟값 구하기	20 %

067

선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 P라고 하면

$P\left(\dfrac{2\times(-4)+3\times3}{2+3}, \dfrac{2\times5+3\times2}{2+3}\right)$ $\quad\therefore P\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$ ·········· ❶

점 $P\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$이 직선 $y=mx+2$ 위에 있으므로

$\dfrac{16}{5}=\dfrac{1}{5}m+2$, $\dfrac{1}{5}m=\dfrac{6}{5}$ ························ ❷

$\therefore m=6$ ························ ❸

정답_ 6

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 $2:3$으로 내분하는 점 P의 좌표 구하기	50 %
❷ 점 P의 좌표를 직선의 방정식에 대입하기	30 %
❸ m의 값 구하기	20 %

068

선분 BC의 중점을 M이라고 하면 M$(-1, -1)$

점 A의 좌표를 (x, y)라고 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로 ························ ❶

$\dfrac{2\times(-1)+1\times x}{2+1}=0$, $\dfrac{2\times(-1)+1\times y}{2+1}=1$

$\therefore x=2$, $y=5$

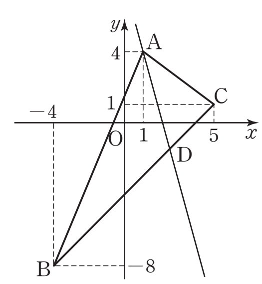
따라서 점 A의 좌표는 $(2, 5)$이다. ························ ❷

정답_ $(2, 5)$

채점 기준	비율
❶ 삼각형 ABC의 무게중심이 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점임을 알기	20 %
❷ 점 A의 좌표 구하기	80 %

069

삼각형 ABD와 삼각형 ACD의 밑변을 각각 $\overline{BD}$, $\overline{CD}$라고 할 때, 높이가 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비 $\overline{BD}:\overline{CD}$와 같다. ········ ❶



그런데 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점이 D이므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$가 성립한다. ························ ❷

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-1)^2+(-8-4)^2}=13$,

$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(1-4)^2}=5$ ························ ❸

이므로 $\triangle ABD:\triangle ACD=\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=13:5$

따라서 $m=13$, $n=5$이므로

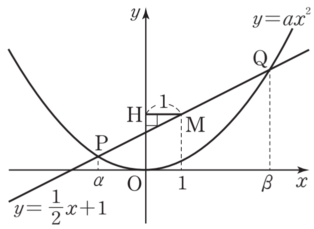
$m+n=13+5=18$ ························ ❹

정답_ 18

채점 기준	비율
❶ $\triangle ABD:\triangle ACD=\overline{BD}:\overline{CD}$임을 알기	30 %
❷ $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$임을 알기	30 %
❸ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 길이 구하기	20 %
❹ $m+n$의 값 구하기	20 %

070

이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$의 교점의 x좌표를 구하면 $ax^2=\frac{1}{2}x+1$에서



$2ax^2-x-2=0$

두 점 P, Q의 좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 α, β는 이차방정식 $2ax^2-x-2=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{1}{2a}$ …… ㉠

$\alpha\beta=-\frac{1}{a}$ …… ㉡

한편, $\overline{\mathrm{MH}}=1$이므로 점 M의 x좌표는 1이고, 점 M은 두 점 P, Q의 중점이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=1 \quad \therefore \alpha+\beta=2$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하면 $2=\frac{1}{2a} \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

$a=\frac{1}{4}$을 ㉡에 대입하면 $\alpha\beta=-\frac{1}{a}=-4$

따라서 두 점 P, Q의 좌표가 $\mathrm{P}\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\alpha+1\right)$, $\mathrm{Q}\left(\beta,\ \frac{1}{2}\beta+1\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\left\{\left(\frac{1}{2}\beta+1\right)-\left(\frac{1}{2}\alpha+1\right)\right\}^2}$$

$$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}$$

$$=\sqrt{\frac{5}{4}\{2^2-4\times(-4)\}}=5$$

정답_ ③

071

이차함수 $y=-(x+k)^2+4$의 그래프와 직선 $y=-5$가 만나는 점의 x좌표는 $-(x+k)^2+4=-5$에서

$(x+k)^2=9$

$x+k=-3$ 또는 $x+k=3$

$\therefore x=-k-3$ 또는 $x=-k+3$

이때 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작으므로

$\mathrm{A}(-k-3,\ -5)$, $\mathrm{B}(-k+3,\ -5)$

△ABC가 이등변삼각형이 되려면

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$ 또는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$ 또는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$

이어야 한다.

(i) $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, $\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$\{1-(-k-3)\}^2+\{0-(-5)\}^2$

$=\{1-(-k+3)\}^2+\{0-(-5)\}^2$

$12k=-12 \quad \therefore k=-1$

(ii) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로

$\{(-k+3)-(-k-3)\}^2=\{1-(-k-3)\}^2+\{0-(-5)\}^2$

$k^2+8k+5=0$

$\therefore k=-4+\sqrt{11}$ 또는 $k=-4-\sqrt{11}$

(iii) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$\{(-k+3)-(-k-3)\}^2=\{1-(-k+3)\}^2+\{0-(-5)\}^2$

$k^2-4k-7=0$

$\therefore k=2+\sqrt{11}$ 또는 $k=2-\sqrt{11}$

(i)~(iii)에서 삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 k의 값은 -1, $-4\pm\sqrt{11}$, $2\pm\sqrt{11}$이므로 모든 k의 값의 곱은

$(-1)(-4+\sqrt{11})(-4-\sqrt{11})(2+\sqrt{11})(2-\sqrt{11})=35$

정답_ 35

072

$xy+x-2y-7=0$에서

$x(y+1)-2(y+1)-5=0$

$\therefore (x-2)(y+1)=5$ …… ㉠

x, y는 정수이므로 ㉠을 만족시키는 정수 x, y는

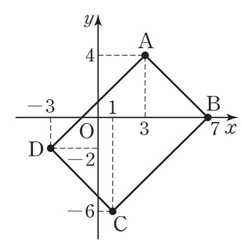
$x-2=1$, $y+1=5$에서 $x=3$, $y=4$

$x-2=5$, $y+1=1$에서 $x=7$, $y=0$

$x-2=-1$, $y+1=-5$에서 $x=1$, $y=-6$

$x-2=-5$, $y+1=-1$에서 $x=-3$, $y=-2$

즉, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(3,\ 4)$, $(7,\ 0)$, $(1,\ -6)$, $(-3,\ -2)$이므로 네 점을 $\mathrm{A}(3,\ 4)$, $\mathrm{B}(7,\ 0)$, $\mathrm{C}(1,\ -6)$, $\mathrm{D}(-3,\ -2)$라고 하면 사각형 ABCD는 오른쪽 그림과 같다. 이때



$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(7-3)^2+(0-4)^2}=4\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(1-7)^2+(-6-0)^2}=6\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{(-3-1)^2+\{-2-(-6)\}^2}=4\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{DA}}=\sqrt{\{3-(-3)\}^2+\{4-(-2)\}^2}=6\sqrt{2}$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DA}}$이고

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(1-3)^2+(-6-4)^2}=2\sqrt{26}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2$

즉, $\angle\mathrm{B}=90^\circ$이므로 사각형 ABCD는 직사각형이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$4\sqrt{2}\times6\sqrt{2}=48$

정답_ ④

073

$\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(1,\ 4)$, $\mathrm{R}(6,\ -2)$, $\mathrm{S}(3,\ -2)$라고 하면

$\sqrt{a^2+b^2}=\overline{\mathrm{OP}}$,

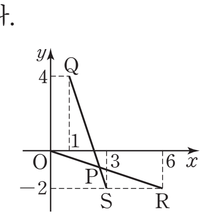
$\sqrt{(a-1)^2+(b-4)^2}=\overline{\mathrm{PQ}}$,

$\sqrt{(a-6)^2+(b+2)^2}=\overline{\mathrm{PR}}$,

$\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}=\overline{\mathrm{PS}}$

이므로 주어진 식은 $\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{PS}}$이다.

이때 $\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{PS}}$의 값이 최소이려면 오른쪽 그림과 같이 점 P가 $\overline{\mathrm{OR}}$ 위에 있으면서 $\overline{\mathrm{QS}}$ 위에 있어야 한다. 즉, 점 P가 두 직선 OR과 QS의 교점일 때 최소이므로



$\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{PS}}$

$\geq\overline{\mathrm{OR}}+\overline{\mathrm{QS}}$

$=\sqrt{6^2+(-2)^2}+\sqrt{(3-1)^2+(-2-4)^2}$

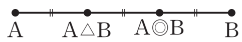
$=2\sqrt{10}+2\sqrt{10}=4\sqrt{10}$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{10}$이다.

정답_ $4\sqrt{10}$

주의 점 P가 두 점을 이은 선분 위에 있을 때 점 P로부터 두 점까지의 거리의 합이 최소임을 이용하여 점 P의 위치를 찾아야 한다.

074



선분 AB의 삼등분점은 오른쪽과 같으므로 A△B는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이고, A◎B는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다.
두 점 A(4, 2), B(−2, 5)를 이은 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 A△B의 좌표는

$\left(\frac{1\times(-2)+2\times4}{1+2}, \frac{1\times5+2\times2}{1+2}\right)$ $\quad\therefore (2, 3)$

두 점 C(1, −4), B(−2, 5)를 이은 선분 CB를 1 : 2로 내분하는 점 C△B의 좌표는

$\left(\frac{1\times(-2)+2\times1}{1+2}, \frac{1\times5+2\times(-4)}{1+2}\right)$ $\quad\therefore (0, -1)$

두 점 (2, 3), (0, −1)을 이은 선분을 2 : 1로 내분하는 점 (A△B)◎(C△B)의 좌표는

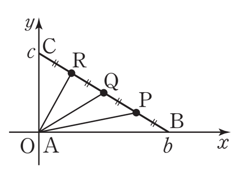
$\left(\frac{2\times0+1\times2}{2+1}, \frac{2\times(-1)+1\times3}{2+1}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

따라서 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$이므로

$a+b=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$

정답_ ②

075



오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x축으로 하고, 직선 AC를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 A는 원점이다.
△ABC의 두 꼭짓점 B, C의 좌표를 각각 $(b, 0)$, $(0, c)$라고 하면 점 P는 $\overline{BC}$를 1 : 3으로 내분하는 점이므로

$P\left(\frac{1\times0+3\times b}{1+3}, \frac{1\times c+3\times0}{1+3}\right)$ $\quad\therefore P\left(\frac{3b}{4}, \frac{c}{4}\right)$

또, 점 Q는 $\overline{BC}$를 1 : 1로 내분하는 점, 즉 $\overline{BC}$의 중점이므로

$Q\left(\frac{0+b}{2}, \frac{c+0}{2}\right)$ $\quad\therefore Q\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

또, 점 R는 $\overline{BC}$를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$R\left(\frac{3\times0+1\times b}{3+1}, \frac{3\times c+1\times0}{3+1}\right)$ $\quad\therefore R\left(\frac{b}{4}, \frac{3c}{4}\right)$

$\therefore l=\overline{AB}^2+\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2+\overline{AR}^2+\overline{AC}^2$

$=b^2+\left\{\left(\frac{3b}{4}\right)^2+\left(\frac{c}{4}\right)^2\right\}+\left\{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2\right\}+\left\{\left(\frac{b}{4}\right)^2+\left(\frac{3c}{4}\right)^2\right\}+c^2$

$=\frac{15}{8}(b^2+c^2)$

$\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2}=4$이므로

$b^2+c^2=16$

$\therefore l=\frac{15}{8}\times16=30$

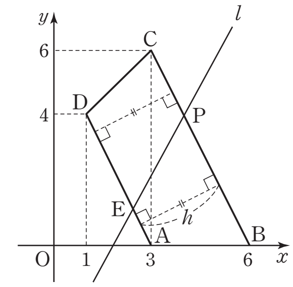
정답_ 30

076

직선 AD의 기울기는 $\frac{4-0}{1-3}=-2$,

직선 BC의 기울기는 $\frac{6-0}{3-6}=-2$

따라서 두 직선 AD, BC는 서로 평행하므로 사각형 ABCD는 사다리꼴이다.



오른쪽 그림과 같이 선분 AD를 1 : 3으로 내분하는 점을 E라 하고 직선 l이 선분 BC와 만나는 점을 P라고 하면 직선 l이 사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 두 사다리꼴 ABPE와 CDEP의 넓이는 같다.
이때 직선 AD와 선분 BC 사이의 거리를 h라고 하면 h는 두 사다리꼴 ABPE와 CDEP의 높이이므로

$\square ABPE=\frac{1}{2}(\overline{AE}+\overline{BP})h$, $\square CDEP=\frac{1}{2}(\overline{DE}+\overline{CP})h$에서

$\frac{1}{2}(\overline{AE}+\overline{BP})h=\frac{1}{2}(\overline{DE}+\overline{CP})h$

$\therefore \overline{AE}+\overline{BP}=\overline{DE}+\overline{CP}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, $\overline{AD}=\sqrt{(1-3)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$이므로

$\overline{AE}=\frac{1}{4}\overline{AD}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\overline{DE}=\frac{3}{4}\overline{AD}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

또, $\overline{BC}=\sqrt{(3-6)^2+(6-0)^2}=3\sqrt{5}$이고

$\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{CP}$, 즉 $\overline{BP}=\overline{BC}-\overline{CP}=3\sqrt{5}-\overline{CP}$이므로 ㉠에서

$\frac{\sqrt{5}}{2}+3\sqrt{5}-\overline{CP}=\frac{3\sqrt{5}}{2}+\overline{CP}$

$2\sqrt{5}=2\overline{CP}$ $\quad\therefore \overline{CP}=\sqrt{5}$

이때 $\overline{BP}=3\sqrt{5}-\overline{CP}=2\sqrt{5}$이므로

$\therefore \overline{BP} : \overline{CP}=2\sqrt{5} : \sqrt{5}=2 : 1$

즉, 점 P는 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이다.
따라서 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times3+1\times6}{2+1}, \frac{2\times6+1\times0}{2+1}\right)$ $\quad\therefore P(4, 4)$

즉, $a=4$, $b=4$이므로

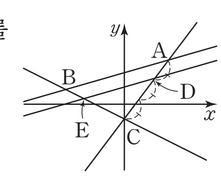
$a+b=4+4=8$

정답_ ④

077

직선 AB와 직선 DE가 평행하고 두 직선 AC, BC가 점 C에서 만나므로 △CAB∽△CDE (AA 닮음)
이때 △ABC와 △CDE의 넓이의 비가 9 : 4이므로
$\overline{AC} : \overline{DC}=3 : 2$

(i) 점 D가 $\overline{AC}$ 위의 점일 때

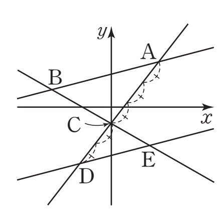


점 D는 오른쪽 그림과 같이 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$D\left(\frac{1\times0+2\times3}{1+2}, \frac{1\times(-1)+2\times3}{1+2}\right)$

$\therefore D\left(2, \frac{5}{3}\right)$

(ii) 점 D가 $\overline{AC}$의 연장선 위의 점일 때



점 C는 오른쪽 그림과 같이 선분 AD를 3 : 2로 내분하는 점이므로 $D(a, b)$라고 하면

$\frac{3\times a+2\times3}{3+2}=0$, $\frac{3\times b+2\times3}{3+2}=-1$

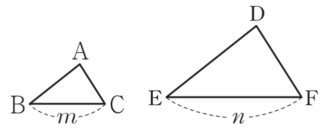
$3a+6=0$, $3b+6=-5$

$\therefore a=-2$, $b=-\frac{11}{3}$ $\quad\therefore D\left(-2, -\frac{11}{3}\right)$

(i), (ii)에서 모든 점 D의 x좌표의 곱은 $2\times(-2)=-4$

정답_ -4

참고 닮은 평면도형의 넓이의 비
닮은 평면도형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱과 같다. 즉, 두 평면도형의 닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.



078

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라고 하면 변 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(-4, 4)$이므로

$\dfrac{x_2+2x_1}{1+2}=-4$, $\dfrac{y_2+2y_1}{1+2}=4$

$\therefore x_2+2x_1=-12$ …… ㉠

$y_2+2y_1=12$ …… ㉡

변 BC를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표가 $(8, 10)$이므로

$\dfrac{x_3+3x_2}{1+3}=8$, $\dfrac{y_3+3y_2}{1+3}=10$

$\therefore x_3+3x_2=32$ …… ㉢

$y_3+3y_2=40$ …… ㉣

변 CA를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표가 $(12, 4)$이므로

$\dfrac{2x_1+3x_3}{2+3}=12$, $\dfrac{2y_1+3y_3}{2+3}=4$

$\therefore 2x_1+3x_3=60$ …… ㉤

$2y_1+3y_3=20$ …… ㉥

㉠, ㉢, ㉤과 ㉡, ㉣, ㉥의 각 변을 각각 더하면

$4(x_1+x_2+x_3)=80$, $4(y_1+y_2+y_3)=72$

$x_1+x_2+x_3=20$, $y_1+y_2+y_3=18$

$\therefore \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=\dfrac{20}{3}$, $\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=\dfrac{18}{3}=6$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\dfrac{20}{3}, 6\right)$이므로

$a=\dfrac{20}{3}$, $b=6$

$\therefore ab=\dfrac{20}{3}\times 6=40$

정답_ 40

079

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $P(x, y)$라고 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$
$\quad+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2$

$=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1^2+x_2^2+x_3^2$
$\quad+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+y_1^2+y_2^2+y_3^2$

$=3\left(x-\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2$
$\quad+x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2$
$\quad-\dfrac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\dfrac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}$

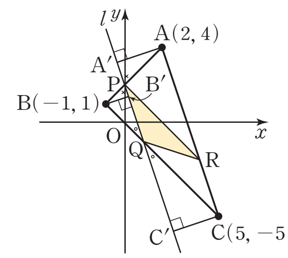
따라서 $x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$일 때 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소이다. 즉, 점 P의 좌표가 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$일 때 최소이므로 이때의 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

정답_ ③

참고 삼각형 ABC에서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되는 점 P는 △ABC의 무게중심이다.

080

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라고 하자.



△APA′과 △BPB′에서
∠AA′P=∠BB′P=90°,
∠APA′=∠BPB′ (∵ 맞꼭지각)
이므로
△APA′∽△BPB′ (AA 닮음)
이때 $\overline{AA'}=2\overline{BB'}$이므로 닮음비는 $2:1$이다.
즉, $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로
점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이다.
따라서 점 P의 좌표는

$P\left(\dfrac{2\times(-1)+1\times 2}{2+1}, \dfrac{2\times 1+1\times 4}{2+1}\right)$ $\quad\therefore P(0, 2)$

마찬가지로 점 Q는 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$Q\left(\dfrac{1\times 5+2\times(-1)}{1+2}, \dfrac{1\times(-5)+2\times 1}{1+2}\right)$ $\quad\therefore Q(1, -1)$

한편, 점 R는 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$R\left(\dfrac{2\times 5+1\times 2}{2+1}, \dfrac{2\times(-5)+1\times 4}{2+1}\right)$ $\quad\therefore R(4, -2)$

△PQR의 무게중심의 좌표가 (a, b)이므로

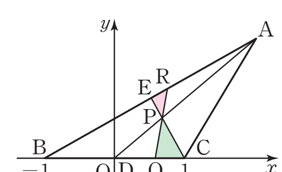
$a=\dfrac{0+1+4}{3}=\dfrac{5}{3}$, $b=\dfrac{2+(-1)+(-2)}{3}=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore a-b=\dfrac{5}{3}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2$

정답_ ⑤

081

오른쪽 그림과 같이 점 D가 원점, 직선 BC가 x축이 되도록 좌표평면을 잡으면 $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$이다.



$A(p, q)$라고 하면
$\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{AD}=\sqrt{7}$에서
$\overline{AB}^2=12$, $\overline{AD}^2=7$이므로
$(p+1)^2+q^2=12$, $p^2+q^2=7$
$\therefore p^2+2p+1+q^2=12$, $p^2+q^2=7$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$2p+8=12$ $\quad\therefore p=2$, $q=\sqrt{3}$ ($\because q>0$)
$\therefore A(2, \sqrt{3})$
이때 $\overline{AC}=\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이고, 이등변삼각형의 성질에 의하여 선분 CE는 선분 AB의 수직이등분선이다.
따라서 $E\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이고 점 P는 두 중선 AD와 CE의 교점이므로 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.
$\overline{AD}=\sqrt{7}$, $\overline{AP}:\overline{PD}=2:1$이므로

$\overline{AP}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$, $\overline{PD}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

마찬가지로 $\overline{CE}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$이고 $\overline{CP}:\overline{PE}=2:1$이

므로

$\overline{\mathrm{CP}}=\frac{2}{3}$, $\overline{\mathrm{PE}}=\frac{1}{3}$

삼각형 EPA에서 선분 PR가 각 APE의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{AR}}:\overline{\mathrm{ER}}=\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PE}}=\frac{2\sqrt{7}}{3}:\frac{1}{3}=2\sqrt{7}:1$

삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면 삼각형 EPA의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$이므로

$S_1=S\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2\sqrt{7}+1}=\frac{S}{6(2\sqrt{7}+1)}$

한편, 선분 PQ가 각 CPD의 이등분선이므로 같은 방법으로 삼각형 CPD에서

$\overline{\mathrm{DQ}}:\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{PD}}:\overline{\mathrm{PC}}=\frac{\sqrt{7}}{3}:\frac{2}{3}=\sqrt{7}:2$

삼각형 CPD의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$이므로

$S_2=S\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{\sqrt{7}+2}=\frac{S}{3(\sqrt{7}+2)}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{S_2}{S_1}&=\frac{\frac{S}{3(\sqrt{7}+2)}}{\frac{S}{6(2\sqrt{7}+1)}}=\frac{2(2\sqrt{7}+1)}{\sqrt{7}+2}\\&=\frac{2(2\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)}=\frac{24-6\sqrt{7}}{3}\\&=8-2\sqrt{7}\end{aligned}$$

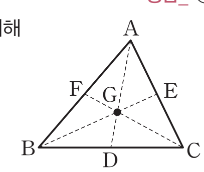
따라서 $a=8$, $b=-2$이므로

$\therefore ab=8\times(-2)=-16$

정답_ ①

참고 삼각형의 무게중심을 지나는 세 중선에 의해 나누어진 6개의 삼각형의 넓이는 모두 같다.
즉, 점 G가 삼각형 ABC의 무게중심일 때

$\frac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{AFG}=\triangle\mathrm{AEG}=\triangle\mathrm{BFG}$
$=\triangle\mathrm{BDG}=\triangle\mathrm{CDG}=\triangle\mathrm{CEG}$



082

B$(1, 4a)$, C$(1, a)$이므로 두 직선 l, m의 기울기는 각각

$\frac{4a}{1}=4a$, $\frac{a}{1}=a$이다.

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 곱은

$4a\times a=4a^2$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{1+16a^2}$이고 직선 OC가 $\angle$AOB의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}$

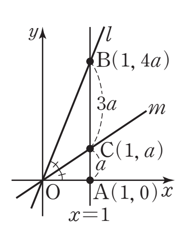
$1:\sqrt{1+16a^2}=a:3a=1:3$ ($\because$ $a>0$)

즉, $\sqrt{1+16a^2}=3$이므로

$1+16a^2=9$ $\quad\therefore a^2=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 두 직선 l, m의 기울기의 곱은

$4a^2=4\times\frac{1}{2}=2$



정답_ 2

02 직선의 방정식

083

점 (3, 9)를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y-9=2(x-3)$ $\quad\therefore y=2x+3$

따라서 y절편은 3이다.

정답_ ①

084

두 점 $(-2, 5)$, $(4, -1)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+(-1)}{2}\right)$ $\quad\therefore (1, 2)$

따라서 점 (1, 2)를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y-2=3(x-1)$ $\quad\therefore y=3x-1$

정답_ $y=3x-1$

085

직선 $2x-3y-1=0$, 즉 $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$의 기울기는 $\frac{2}{3}$이므로

점 (1, 2)를 지나고 기울기가 $\frac{2}{3}$인 직선의 방정식은

$y-2=\frac{2}{3}(x-1)$ $\quad\therefore 2x-3y+4=0$

따라서 $a=2$, $b=-3$이므로

$ab=2\times(-3)=-6$

정답_ ①

086

직선 $ax+by-1=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°이므로 기울기는 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이다.

점 $(\sqrt{3}, 2)$를 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y-2=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$ $\quad\therefore \sqrt{3}x-y-1=0$

따라서 $a=\sqrt{3}$, $b=-1$이므로

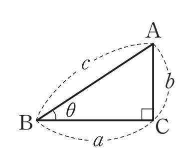
$a^2+b^2=(\sqrt{3})^2+1^2=4$

정답_ ②

참고 삼각비 $\tan\theta$의 값

(1) 직각삼각형 ABC에서 $\tan\theta=\frac{b}{a}$

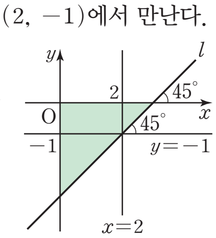
(2) $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan 45^\circ=1$, $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$



087

두 직선 $x=2$, $y=-1$은 서로 수직이고 점 $(2, -1)$에서 만난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°이므로 직선 l의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이고 점 $(2, -1)$을 지난다.



따라서 직선 l의 방정식은

$y-(-1)=1\times(x-2)$ $\quad\therefore y=x-3$

이때 직선 l의 x절편, y절편이 각각 3, -3이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

정답_ ④

088

(1) $y-2=\frac{6-2}{3-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=2x$

(2) $y-1=\frac{4-1}{-4-2}(x-2)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x+2$

정답_ (1) $y=2x$ (2) $y=-\frac{1}{2}x+2$

089

두 점 $(-3,\ 1)$, $(2,\ -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{-4-1}{2-(-3)}\{x-(-3)\}$ $\quad\therefore y=-x-2$

직선 $y=-x-2$가 두 점 $(a,\ -1)$, $(4,\ b)$를 지나므로

$-1=-a-2$, $b=-4-2$ $\quad\therefore a=-1$, $b=-6$

$\therefore a-b=-1-(-6)=5$

정답_ ③

090

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times1+2\times6}{3+2},\ \frac{3\times2+2\times(-3)}{3+2}\right)$ $\quad\therefore (3,\ 0)$

따라서 두 점 $(3,\ 0)$, $(5,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{2-0}{5-3}(x-3)$ $\quad\therefore y=x-3$

따라서 구하는 x절편은 3이다.

정답_ ③

091

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{-1+3+4}{3},\ \frac{2+5+2}{3}\right)$ $\quad\therefore (2,\ 3)$

따라서 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{G}(2,\ 3)$을 지나는 직선 AG의 방정식은

$y-2=\frac{3-2}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$ $\quad\therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$

정답_ $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$

092

두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(6,\ 3)$을 지나는 직선 OB의 방정식은

$y=\frac{3-0}{6-0}x$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

두 점 $\mathrm{A}(4,\ -3)$, $\mathrm{C}(0,\ 5)$를 지나는 직선 AC의 방정식은

$y-5=\frac{5-(-3)}{0-4}x$ $\quad\therefore y=-2x+5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=1$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.

정답_ ①

093

x절편이 -3, y절편이 4인 직선의 방정식은

$\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$ $\quad\therefore -\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

정답_ $-\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

094

x절편이 -2, y절편이 6인 직선의 방정식은

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{6}=1$

이 직선이 점 $(a,\ -2a+1)$을 지나므로

$\frac{a}{-2}+\frac{-2a+1}{6}=1$, $\frac{-5a+1}{6}=1$

$-5a+1=6$, $-5a=5$ $\quad\therefore a=-1$

정답_ ②

095

$3x+2y-6=0$에 $y=0$을 대입하면

$3x-6=0$ $\quad\therefore x=2$

$2x-y-5=0$에 $x=0$을 대입하면

$-y-5=0$ $\quad\therefore y=-5$

따라서 직선 l의 x절편은 2, y절편은 -5이므로 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1$

정답_ $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1$

096

x절편을 $a\,(a\neq0)$라고 하면 y절편은 $2a$이므로 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1$

이 직선이 점 $(4,\ -2)$를 지나므로

$\frac{4}{a}+\frac{-2}{2a}=1$, $\frac{3}{a}=1$ $\quad\therefore a=3$

즉, 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$

따라서 직선 l의 x절편, y절편이 각각 3, 6이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times6=9$

정답_ ③

097

$2x+ay=2a$에서 $\frac{x}{a}+\frac{y}{2}=1$ $(\because\ a>0)$

이 직선의 x절편, y절편이 각각 a, 2이므로

$\sqrt{a^2+2^2}=\sqrt{5}$, $a^2+4=5$

$a^2=1$, $(a+1)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

이때 a는 양수이므로 $a=1$

정답_ ①

098

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{1-a}{1-(-1)}=\frac{-7-1}{a-1}$, $\frac{1-a}{2}=-\frac{8}{a-1}$

$(a-1)^2=16$, $a^2-2a-15=0$

$(a+3)(a-5)=0$ $\quad\therefore a=-3$ 또는 $a=5$

이때 a는 양수이므로 $a=5$

정답_ ①

099

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 BC와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{1-5}{1-(2a-3)}=\frac{1-(-a)}{1-(-1)}$, $\frac{2}{a-2}=\frac{a+1}{2}$

$(a+1)(a-2)=4$, $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

이때 $a>0$이므로 $a=3$이고 구하는 직선의 방정식은 기울기가

$\frac{-3-1}{-1-1}=2$이고 점 C$(1, 1)$을 지나므로

$y-1=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x-1$

정답_ $y=2x-1$

100

세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

즉, 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{k-4}{4-2}=\frac{8-4}{k-2}$, $\frac{k-4}{2}=\frac{4}{k-2}$

$(k-2)(k-4)=8$, $k^2-6k=0$

$k(k-6)=0$ $\quad\therefore k=0$ 또는 $k=6$

따라서 모든 k의 값의 합은

$0+6=6$

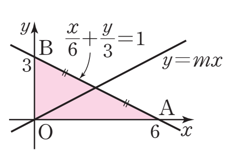
정답_ ④

101

직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라고 하면

A$(6, 0)$, B$(0, 3)$

직선 $y=mx$가 직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점을 지나야 한다.



이때 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right)$ $\quad\therefore \left(3, \frac{3}{2}\right)$

직선 $y=mx$가 점 $\left(3, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{3}{2}=3m$ $\quad\therefore m=\frac{1}{2}$

정답_ ②

102

꼭짓점 A를 지나는 직선 l이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 선분 BC의 중점을 지나야 한다.

이때 선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$ $\quad\therefore (1, 3)$

따라서 직선 l은 두 점 $(-2, 0)$, $(1, 3)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y=\frac{3-0}{1-(-2)}\{x-(-2)\}$ $\quad\therefore y=x+2$

직선 l이 점 $(-4, a)$를 지나므로

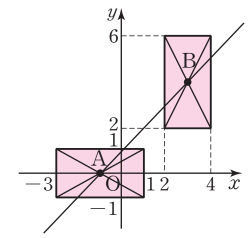
$a=-4+2=-2$

정답_ -2

103

두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다.

오른쪽 그림과 같이 두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표를 각각 A, B라고 하면



A$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{-1+1}{2}\right)$ $\quad\therefore$ A$(-1, 0)$

B$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$ $\quad\therefore$ B$(3, 4)$

두 점 A$(-1, 0)$, B$(3, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{4-0}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$ $\quad\therefore y=x+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

④ $x=1$을 ㉠에 대입하면 $y=1+1=2$

따라서 직선 $y=x+1$이 지나지 않는 점은 ④이다.

정답_ ④

104

$\triangle$ABD : $\triangle$ADC$=2:1$이고 두 삼각형의 높이가 같으므로

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=2:1$

즉, 점 D는 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$\left(\frac{2\times4+1\times(-5)}{2+1}, \frac{2\times(-1)+1\times(-4)}{2+1}\right)$ $\quad\therefore (1, -2)$

따라서 두 점 A$(-2, 4)$, D$(1, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{1-(-2)}\{x-(-2)\}$ $\quad\therefore y=-2x$

정답_ $y=-2x$

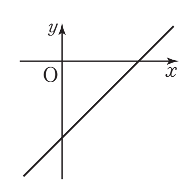
105

$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

$ac<0$, $bc>0$에서 a, b의 부호는 서로 다르고 b, c의 부호는 서로 같으므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



정답_ ③

106

$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

주어진 그림에서 이 직선의 기울기는 음수, y절편은 양수이므로

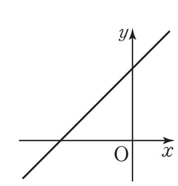
$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$ $\quad\therefore ab>0$, $bc<0$

즉, a, b의 부호는 서로 같고 c는 a, b와 부호가 서로 다르다.

$bx+cy+a=0$에서 $c\neq0$이므로 $y=-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$

이때 $-\frac{b}{c}>0$, $-\frac{a}{c}>0$이므로 이 직선의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $bx+cy+a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같고 이 직선은 제4사분면을 지나지 않는다.

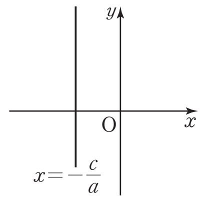


정답_ ④

107

ㄱ. $b=0$이면 $ax+c=0$에서 $x=-\frac{c}{a}$

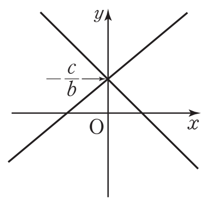
이때 $ac>0$이면 $-\frac{c}{a}<0$이므로 오른쪽 그림과 같이 주어진 직선은 제2사분면과 제3사분면을 지난다. (참)



ㄴ. $bc<0$이면 $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $-\frac{c}{b}>0$이므로 주어진 직선의 y절편은 양수이다.

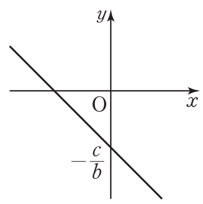
즉, 주어진 직선은 오른쪽 그림의 두 가지 경우가 있고 두 경우 모두 제1사분면을 지난다. (참)



ㄷ. $ab>0$, $bc>0$이면 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}<0$이므로 주어진 직선의 기울기와 y절편은 모두 음수이다.

즉, 주어진 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지난다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ③

108

(1) 주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y+4=0$, $x-y-1=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-1$, $y=-2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-1,\ -2)$이다.

(2) 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x-4y-7)k+2x+3y-3=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-4y-7=0$, $2x+3y-3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3,\ -1)$이다.

정답_ (1) $(-1,\ -2)$ (2) $(3,\ -1)$

109

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+3y-5)k-x-2y+4=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+3y-5=0$, $-x-2y+4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=3$ $\quad\therefore$ $P(-2,\ 3)$

따라서 점 $P(-2,\ 3)$과 원점 사이의 거리는

$\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$

정답_ $\sqrt{13}$

110

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x+2y-10)k+x-3y+a=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 점 $(b,\ 2)$를 지나므로

점 $(b,\ 2)$는 두 직선 $3x+2y-10=0$, $x-3y+a=0$의 교점이다.

즉, $3b+4-10=0$, $b-6+a=0$이므로

$a=4$, $b=2$

$\therefore\ a+b=4+2=6$

정답_ ④

111

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x-y-2)k+x+2y-3=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$3x-y-2=0$, $x+2y-3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=1$ $\quad\therefore$ $P(1,\ 1)$

따라서 기울기가 -3이고 점 $P(1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=-3(x-1)$ $\quad\therefore\ 3x+y-4=0$

정답_ ①

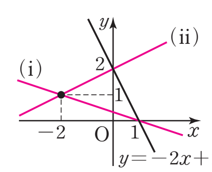
112

$mx-y+2m+1=0$에서

$(x+2)m+(-y+1)=0$ …… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 1)$을 지난다.

한편, $2x+y-2=0$에서 $y=-2x+2$이므로 오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(1,\ 0)$을 지날 때

$3m+1=0$ $\quad\therefore\ m=-\frac{1}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때

$2m-1=0$ $\quad\therefore\ m=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-\frac{1}{3}<m<\frac{1}{2}$

정답_ $-\frac{1}{3}<m<\frac{1}{2}$

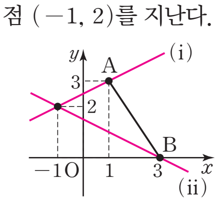
113

$y=mx+m+2$에서

$(x+1)m-(y-2)=0$ …… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 2)$를 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $A(1,\ 3)$을 지날 때

$2m-1=0$ $\quad\therefore\ m=\frac{1}{2}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $B(3,\ 0)$을 지날 때

$4m+2=0$ $\quad\therefore\ m=-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는 $-\frac{1}{2}\leq m\leq\frac{1}{2}$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$

정답_ ③

114

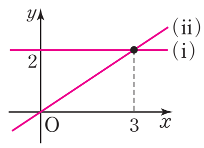
$3mx-(2m-3)y-5m-6=0$에서

$(3x-2y-5)m+3(y-2)=0$ …… ㉠

$3x-2y-5=0$, $3(y-2)=0$에서

$x=3$, $y=2$

즉, 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 2)$를 지나므로 오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(0, 2)$를 지날 때

$-9m=0$ $\quad\therefore m=0$

(ii) 직선 ㉠이 원점을 지날 때

$-5m-6=0$ $\quad\therefore m=-\frac{6}{5}$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는 $-\frac{6}{5}\le m\le 0$이므로 모두 정수 m의 값의 합은 $-1+0=-1$

정답_ -1

115

$(k+2)x+(k-1)y+k+5=0$에서

$(x+y+1)k+2x-y+5=0$ …… ㉠

이므로

$x+y+1=0$, $2x-y+5=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=1$

즉, 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $A(-2, 1)$을 지난다.

이때 직선 ㉠이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 선분 BC의 중점을 지나야 한다.

두 점 $B(1, 4)$, $C(3, 2)$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$ $\quad\therefore (2, 3)$

따라서 점 $(2, 3)$이 직선 ㉠ 위에 있으므로

$6k+6=0$ $\quad\therefore k=-1$

정답_ ②

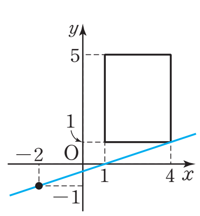
116

$mx-y+2m-1=0$에서

$(x+2)m-(y+1)=0$ …… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -1)$을 지난다.

이때 직선 ㉠의 기울기가 m이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 점 $(4, 1)$을 지날 때 m의 값이 최소이다.



㉠에 $x=4$, $y=1$을 대입하면

$6m-2=0$ $\quad\therefore m=\frac{1}{3}$

따라서 m의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

정답_ ①

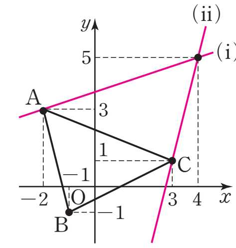
117

$mx-y-4m+5=0$에서

$m(x-4)+(-y+5)=0$ …… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(4, 5)$를 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $A(-2, 3)$을 지날 때

$-6m+2=0$ $\quad\therefore m=\frac{1}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $C(3, 1)$을 지날 때

$-m+4=0$ $\quad\therefore m=4$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$m<\frac{1}{3}$ 또는 $m>4$이다.

정답_ $m<\frac{1}{3}$ 또는 $m>4$

118

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-2y+2+k(2x+y-6)=0$ (k는 실수) …… ㉠

이라고 하면 이 직선이 점 $(4, 0)$을 지나므로

$6+2k=0$ $\quad\therefore k=-3$

이것을 ㉠에 대입하면

$x-2y+2-3(2x+y-6)=0$ $\quad\therefore x+y-4=0$

따라서 이 직선의 y절편은 4이다.

정답_ ④

119

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x-y-3+k(x+3y-4)=0$ (k는 실수) …… ㉠

이라고 하면 이 직선이 점 $(1, 3)$을 지나므로

$-4+6k=0$ $\quad\therefore k=\frac{2}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$2x-y-3+\frac{2}{3}(x+3y-4)=0$ $\quad\therefore 8x+3y-17=0$

따라서 $a=8$, $b=3$이므로

$a-2b=8-2\times 3=2$

정답_ ③

120

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x+2y-5+k(x+4y+5)=0$ (k는 실수) …… ㉠

이라고 하면 이 직선이 점 $(2, -1)$을 지나므로

$-1+3k=0$ $\quad\therefore k=\frac{1}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$3x+2y-5+\frac{1}{3}(x+4y+5)=0$ $\quad\therefore x+y-1=0$

이 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(1, 0)$, $(0, 1)$이므로 좌표축에 의하여 잘린 선분의 길이는

$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

정답_ $\sqrt{2}$

121

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$(3a-1)x+ay+3+k\{(2a+1)x-2ay-1\}=0$ (k는 실수) …… ㉠

이라고 하면 이 직선이 원점을 지나므로

$3-k=0 \quad \therefore k=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$(3a-1)x+ay+3+3\{(2a+1)x-2ay-1\}=0$

$\therefore (9a+2)x-5ay=0$

이 직선의 기울기가 2이므로

$\frac{9a+2}{5a}=2,\ 9a+2=10a$

$\therefore a=2$

정답_ ②

122

(1) 평행한 두 직선의 기울기는 같으므로

$2=3a-1 \quad \therefore a=1$

(2) 수직인 두 직선의 곱은 -1이므로

$2(3a-1)=-1,\ 3a-1=-\frac{1}{2} \quad \therefore a=\frac{1}{6}$

정답_ (1) 1 (2) $\frac{1}{6}$

123

(1) 두 직선이 평행하므로

$\frac{a}{1}=\frac{-3}{-(a-2)}\neq\frac{5}{-5}$

$\frac{a}{1}=\frac{-3}{-(a-2)}$에서 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \quad \therefore a=-1$ 또는 $a=3$

이때 $\frac{a}{1}\neq\frac{5}{-5}$에서 $a\neq-1$이므로

$a=3$

(2) 두 직선이 서로 수직이므로

$a\times1+(-3)\times\{-(a-2)\}=0$

$4a-6=0 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$

정답_ (1) 3 (2) $\frac{3}{2}$

124

두 직선 $x+ky-1=0,\ kx+(2k+3)y-3=0$이 평행하려면

$\frac{1}{k}=\frac{k}{2k+3}\neq\frac{-1}{-3}$

$\frac{1}{k}=\frac{k}{2k+3}$에서 $k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0 \quad \therefore k=-1$ 또는 $k=3$

이때 $\frac{1}{k}\neq\frac{-1}{-3}$에서 $k\neq3$이므로

$k=-1$ …… ㉠

한편, 두 직선 $x+ky-1=0,\ kx+(2k+3)y-3=0$이 수직이 되려면

$1\times k+k(2k+3)=0$

$2k^2+4k=0,\ 2k(k+2)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=-2$

이때 $k\neq0$이므로

$k=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha=-1,\ \beta=-2$이므로

$\alpha+\beta=-1+(-2)=-3$

정답_ -3

125

직선 $2x+ay-1=0$이 점 $(-4,\ 3)$을 지나므로

$-8+3a-1=0 \quad \therefore a=3$

직선 $bx+cy-18=0$도 점 $(-4,\ 3)$을 지나므로

$-4b+3c-18=0$ …… ㉠

두 직선 $2x+3y-1=0,\ bx+cy-18=0$이 수직이므로

$2\times b+3\times c=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$b=-3,\ c=2$

$\therefore a-b+c=3-(-3)+2=8$

정답_ ⑤

126

두 직선 $x+ay+1=0,\ 3x-by+1=0$이 수직이므로

$1\times3+a\times(-b)=0 \quad \therefore ab=3$

두 직선 $x+ay+1=0,\ x-(b+3)y-1=0$이 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b+3)}\neq\frac{1}{-1}$

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b+3)}$에서 $a=-b-3 \quad \therefore a+b=-3$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(-3)^3-3\times3\times(-3)=0$

정답_ 0

127

두 직선 $ax+2y-b=0,\ bx-4y+3a=0$이 만나지 않으려면 평행해야 하므로

$\frac{a}{b}=\frac{2}{-4}\neq\frac{-b}{3a} \quad \therefore b=-2a$

이것을 $ax+by=0$에 대입하면

$ax-2ay=0 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x\ (\because a\neq0)$

따라서 구하는 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

정답_ ④

128

ㄱ. $a=0$이면 직선 l의 방정식은 $y=1$이고 직선 m의 방정식은 $x=1$이다.
따라서 두 직선 $l,\ m$은 각각 x축, y축에 평행하므로 서로 수직이다. (참)

ㄴ. ㄱ에 의하여 $a=0$이면 두 직선 $l,\ m$은 서로 수직이므로 $a\neq0$일 때 두 직선 $l,\ m$이 평행하려면

$\frac{a}{1}=\frac{-1}{-a}\neq\frac{-2a+1}{2a-1}$

$\frac{a}{1}=\frac{-1}{-a}$에서 $a^2=1$

$(a-1)(a+1)=0 \quad \therefore a=-1$ 또는 $a=1$ …… ㉠

이때 $\frac{a}{1}\neq\frac{-2a+1}{2a-1}$에서 $2a^2+a-1=0$

$(a+1)(2a-1)\neq0 \quad \therefore a\neq-1$ 또는 $a\neq\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$

따라서 두 직선 $l,\ m$이 평행하도록 하는 a의 값은 1개이다. (거짓)

ㄷ. $ax-y-2a+1=0$에서 $(x-2)a+(-y+1)=0$이므로 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 1)$을 지난다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ④

129

$3x-y+3=0$에서 $y=3x+3$
이 직선의 기울기가 3이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기는 3이다.
따라서 점 $(3, 2)$를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은
$y-2=3(x-3)$ $\quad\therefore y=3x-7$

정답_ $y=3x-7$

130

직선 $y=5x+4$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{5}$이므로 점 $(2, 0)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{5}$인 직선의 방정식은
$y=-\frac{1}{5}(x-2)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
따라서 $a=-\frac{1}{5}$, $b=\frac{2}{5}$이므로
$b-a=\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}$

정답_ ⑤

131

$4x-2y+1=0$에서 $y=2x+\frac{1}{2}$
이 직선과 평행한 직선의 기울기는 2이므로 점 $(1, a)$를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은
$y-a=2(x-1)$ $\quad\therefore 2x-y+a-2=0$
즉, $2=b$, $a-2=5$이므로 $a=7$, $b=2$
$\therefore ab=7\times2=14$

정답_ ⑤

132

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1-(-2)}{5-(-1)}=\frac{1}{2}$이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.
한편, 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\times5+2\times(-1)}{1+2}, \frac{1\times1+2\times(-2)}{1+2}\right)$ $\quad\therefore (1, -1)$
따라서 기울기가 -2이고 점 $(1, -1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-(-1)=-2(x-1)$ $\quad\therefore y=-2x+1$

정답_ $y=-2x+1$

133

두 직선 $3x-y+3=0$, $x+y-2=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$3x-y+3+k(x+y-2)=0$ (k는 실수)
이라고 하면
$(k+3)x+(k-1)y-2k+3=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이 직선이 직선 $x-3y+1=0$과 평행하므로
$\frac{k+3}{1}=\frac{k-1}{-3}\neq\frac{-2k+3}{1}$
$\frac{k+3}{1}=\frac{k-1}{-3}$에서 $k-1=-3(k+3)$
$4k=-8$ $\quad\therefore k=-2$
이것을 ㉠에 대입하면
$x-3y+7=0$
이 직선이 점 $(-1, a)$를 지나므로
$-1-3a+7=0$ $\quad\therefore a=2$

정답_ ⑤

다른 풀이
$3x-y+3=0$, $x+y-2=0$을 연립하여 풀면
$x=-\frac{1}{4}$, $y=\frac{9}{4}$
즉, 두 직선 $3x-y+3=0$, $x+y-2=0$의 교점은 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$
직선 $x-3y+1=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로
이 직선과 평행한 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.
따라서 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-\frac{9}{4}=\frac{1}{3}\left\{x-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}$ $\quad\therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$
이 직선이 점 $(-1, a)$를 지나므로
$a=-\frac{1}{3}+\frac{7}{3}=2$

134

$\angle ABO=\angle BCO$에서
$\angle ABC=\angle ABO+\angle OBC=\angle BCO+\angle OBC=90^\circ$
이므로 두 직선 l, m은 서로 수직이다.
이때 직선 l의 기울기는 $\frac{0-8}{-10-0}=\frac{4}{5}$이므로 직선 m의 기울기는 $-\frac{5}{4}$이다.
따라서 점 $B(-10, 0)$을 지나고 기울기가 $-\frac{5}{4}$인 직선 m의 방정식은
$y=-\frac{5}{4}\{x-(-10)\}$ $\quad\therefore y=-\frac{5}{4}x-\frac{25}{2}$

정답_ $y=-\frac{5}{4}x-\frac{25}{2}$

135

직선 $2x-y-5=0$, 즉 $y=2x-5$의 기울기가 2이므로 직선 AH의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.
따라서 직선 AH의 방정식은
$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$ $\quad\therefore x+2y-5=0$
이때 점 H는 직선 AH와 직선 $2x-y-5=0$의 교점이므로
$x+2y-5=0$과 $2x-y-5=0$을 연립하여 풀면
$x=3$, $y=1$
따라서 $a=3$, $b=1$이므로
$ab=3\times1=3$

정답_ ①

136

주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $ax+2y-2=0$이 두 직선 $x-3y-3=0$, $2x-y+4=0$의 교점을 지나야 한다.

$x-3y-3=0$, $2x-y+4=0$을 연립하여 풀면

$x=-3$, $y=-2$

직선 $ax+2y-2=0$이 점 $(-3,\ -2)$를 지나므로

$-3a-4-2=0 \qquad \therefore a=-2$

정답_ ②

137

두 직선 $x-y-1=0$, $2x+y-5=0$이 평행하지 않으므로 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $x-y-1=0$, $ax-y+2=0$이 평행한 경우

$\frac{1}{a}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{-1}{2}$이므로 $a=1$

(ii) 두 직선 $2x+y-5=0$, $ax-y+2=0$이 평행한 경우

$\frac{2}{a}=\frac{1}{-1}\neq\frac{-5}{2}$이므로 $a=-2$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$x-y-1=0$, $2x+y-5=0$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=1$

따라서 직선 $ax-y+2=0$이 점 $(2,\ 1)$을 지나야 하므로

$2a-1+2=0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

(i)~(iii)에서 모든 상수 a의 값의 합은

$1+(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

정답_ ④

138

주어진 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개가 되려면 세 직선 중에서 두 직선이 평행해야 한다.

두 직선 $4x-y+5=0$, $2x-3y-1=0$이 한 점에서 만나므로 직선 $ax+y-7=0$이 두 직선 $4x-y+5=0$, $2x-3y-1=0$ 중 하나와 평행해야 한다.

(i) 두 직선 $4x-y+5=0$, $ax+y-7=0$이 평행한 경우

$\frac{4}{a}=\frac{-1}{1}\neq\frac{5}{-7}$이므로 $a=-4$

(ii) 두 직선 $2x-3y-1=0$, $ax+y-7=0$이 평행한 경우

$\frac{2}{a}=\frac{-3}{1}\neq\frac{-1}{-7}$이므로 $a=-\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 곱은

$-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}$

정답_ $\frac{8}{3}$

139

두 직선 $2x+y-7=0$, $3x-4y+5=0$은 수직이 아니므로 주어진 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 직선 $x+ay+1=0$이 두 직선 $2x+y-7=0$, $3x-4y+5=0$ 중 하나와 수직이어야 한다.

(i) 두 직선 $2x+y-7=0$, $x+ay+1=0$이 수직인 경우

$2\times1+1\times a=0 \qquad \therefore a=-2$

(ii) 두 직선 $3x-4y+5=0$, $x+ay+1=0$이 수직인 경우

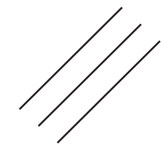
$3\times1+(-4)\times a=0 \qquad \therefore a=\frac{3}{4}$

(i), (ii)에서 정수 a의 값은 -2이다.

정답_ ④

140

서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행해야 한다.



두 직선 $ax-2y+2=0$, $2x-y+5=0$이 평행하므로

$\frac{a}{2}=\frac{-2}{-1}\neq\frac{2}{5} \qquad \therefore a=4$

또, 두 직선 $x-by+3=0$, $2x-y+5=0$이 평행하므로

$\frac{1}{2}=\frac{-b}{-1}\neq\frac{3}{5} \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

정답_ $\frac{9}{2}$

141

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+2}{2},\ \frac{-4+(-3)}{2}\right) \qquad \therefore \left(\frac{3}{2},\ -\frac{7}{2}\right)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{-3-(-4)}{2-1}=1$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 -1이고 점 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{7}{2}\right)$을 지나므로 그 방정식은

$y-\left(-\frac{7}{2}\right)=-\left(x-\frac{3}{2}\right) \qquad \therefore x+y+2=0$

정답_ ③

142

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+(-2)}{2},\ \frac{5+(-5)}{2}\right) \qquad \therefore \left(\frac{a-2}{2},\ 0\right)$

직선 $2x+by-1=0$이 이 점을 지나므로

$2\times\frac{a-2}{2}+b\times0-1=0$

$a-2-1=0 \qquad \therefore a=3$ ······ ㉠

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

한편, 직선 AB의 기울기는 $\frac{-5-5}{-2-a}=2$ ($\because$ ㉠)

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 2이고 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지나므로 그 방정식은

$y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore 2x+4y-1=0$

따라서 $b=4$이므로

$a-b=3-4=-1$

정답_ ④

143

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+(-5)}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) \quad \therefore (-1, -1)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{-3-1}{-5-3}=\frac{1}{2}$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 -2이고 점 $(-1, -1)$을 지나므로 그 방정식은

$y-(-1)=-2\{x-(-1)\} \quad \therefore y=-2x-3$ …… ㉠

선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+(-6)}{2}, \frac{1+4}{2}\right) \quad \therefore \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

직선 AC의 기울기는 $\frac{4-1}{-6-3}=-\frac{1}{3}$

따라서 선분 AC의 수직이등분선은 기울기가 3이고 점 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$를 지나므로 그 방정식은

$y-\frac{5}{2}=3\left\{x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\} \quad \therefore y=3x+7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=1$

따라서 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표는 $(-2, 1)$이다.

정답_ ③

참고 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만나고 이 점은 이 삼각형의 외심이다. 즉, 두 변의 수직이등분선의 교점을 구해도 된다.

144

$\overline{AC}=10$이므로 $\sqrt{a^2+(-1-5)^2}=10$

양변을 제곱하면 $a^2+36=100$

$a^2=64 \quad \therefore a=8 \ (\because a>0)$

$\therefore$ C$(8, -1)$

사각형 ABCD가 마름모이므로 직선 l은 선분 AC의 수직이등분선이다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+8}{2}, \frac{5+(-1)}{2}\right) \quad \therefore (4, 2)$

직선 AC의 기울기는 $\frac{-1-5}{8-0}=-\frac{3}{4}$

따라서 직선 l은 기울기가 $\frac{4}{3}$이고 점 $(4, 2)$를 지나므로 그 방정식은

$y-2=\frac{4}{3}(x-4) \quad \therefore 4x-3y-10=0$

정답_ $4x-3y-10=0$

145

(1) $\frac{|3\times(-5)+4\times3+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}$

(2) $y=\frac{1}{3}x+2$에서 $x-3y+6=0$

따라서 구하는 거리는

$\frac{|1\times1-3\times(-1)+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

(3) $\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

정답_ (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\sqrt{10}$ (3) $\sqrt{5}$

146

$y=\sqrt{3}x+n$에서 $\sqrt{3}x-y+n=0$

점 $(\sqrt{3}, 1)$과 이 직선 사이의 거리가 3이므로

$\frac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1+n|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{n+2}{2}=3$

$n+2=6 \quad \therefore n=4$

정답_ ④

147

직선 l의 기울기를 m이라고 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x-2) \quad \therefore mx-y-2m=0$

점 $(0, -3)$과 직선 l 사이의 거리가 $\sqrt{13}$이므로

$\frac{|-(-3)-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{13}$, $|2m-3|=\sqrt{13(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$9m^2+12m+4=0$, $(3m+2)^2=0 \quad \therefore m=-\frac{2}{3}$

따라서 직선 l의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이다.

정답_ ①

148

$(2+k)x+(k-2)y-4k=0$을 k에 대하여 정리하면

$2x-2y+k(x+y-4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x-2y=0$, $x+y-4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=2 \quad \therefore$ A$(2, 2)$

따라서 점 A$(2, 2)$와 직선 $x+2y+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2+2\times2+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

정답_ $2\sqrt{5}$

149

점 $(0, k)$에서 두 직선 $3x+4y-1=0$, $4x-3y-6=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|3\times0+4\times k-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|4\times0-3\times k-6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$, $|4k-1|=|3k+6|$

$4k-1=3k+6$ 또는 $4k-1=-(3k+6)$

$\therefore k=-\frac{5}{7}$ 또는 $k=7$

이때 $k>0$이므로 $k=7$

정답_ ④

150

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+y+2+k(x-y-4)=0$ (k는 실수)이라고 하면

$(k+1)x-(k-1)y-4k+2=0$ …… ㉠

점 $(-1, -2)$와 이 직선 사이의 거리가 2이므로

$\frac{|-(k+1)+2(k-1)-4k+2|}{\sqrt{(k+1)^2+\{-(k-1)\}^2}}=2$, $|-3k-1|=2\sqrt{2k^2+2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$k^2+6k-7=0$, $(k+7)(k-1)=0$

$\therefore\ k=-7$ 또는 $k=1$

이것을 각각 ㉠에 대입하면

$-6x+8y+30=0$ 또는 $2x-2=0$

$\therefore\ 3x-4y-15=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $3x-4y-15=0$이므로

$a=3$, $b=-15$

$\therefore\ a-b=3-(-15)=18$

정답_ 18

151

$3x+y-4+k(x+y)=0$에서 $(k+3)x+(k+1)y-4=0$이므로

$$f(k)=\frac{|-4|}{\sqrt{(k+3)^2+(k+1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2k^2+8k+10}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2(k+2)^2+2}}$$

따라서 $f(k)$는 $\sqrt{2(k+2)^2+2}$의 값이 최소일 때, 즉 $k=-2$일 때 최대이므로 $f(k)$의 최댓값은

$$f(-2)=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

정답_ ③

152

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+3y-1+k(2x-y-2)=0$ (k는 실수)이라고 하면

$(2k+1)x-(k-3)y-2k-1=0$

점 $(3,\ 4)$와 이 직선 사이의 거리를 $f(k)$라고 하면

$$f(k)=\frac{|3(2k+1)-4(k-3)-2k-1|}{\sqrt{(2k+1)^2+\{-(k-3)\}^2}}$$

$$=\frac{14}{\sqrt{5k^2-2k+10}}$$

$$=\frac{14}{\sqrt{5\left(k-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}}$$

따라서 $f(k)$는 $\sqrt{5\left(k-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}$의 값이 최소일 때, 즉 $k=\frac{1}{5}$일 때 최대이므로 $f(k)$의 최댓값은

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{14}{\sqrt{\frac{49}{5}}}=2\sqrt{5}$$

정답_ ⑤

153

$\overline{BC}=\sqrt{(3-2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$

직선 BC의 방정식은

$y-1=\frac{3-1}{3-2}(x-2)\qquad \therefore\ 2x-y-3=0$

점 $A(-1,\ 2)$와 직선 BC 사이의 거리는

$$\frac{|2\times(-1)-1\times2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{7\sqrt{5}}{5}=\frac{7}{2}$

정답_ $\frac{7}{2}$

154

$\overline{AC}=\sqrt{\{-3-(-1)\}^2+(-1-5)^2}=2\sqrt{10}$

직선 AC의 방정식은

$y-5=\frac{-1-5}{-3-(-1)}\{x-(-1)\}\qquad \therefore\ 3x-y+8=0$

점 $B(a,\ 1)$과 직선 AC 사이의 거리는

$$\frac{|3a-1+8|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|3a+7|}{\sqrt{10}}$$

삼각형 ABC의 넓이가 13이므로

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times\frac{|3a+7|}{\sqrt{10}}=13$, $|3a+7|=13$

$3a+7=13$ 또는 $3a+7=-13$

$\therefore\ a=2$ ($\because$ a는 정수)

정답_ ③

155

$\overline{AC}=\sqrt{(1-3)^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{13}$

직선 AC의 방정식은

$y-(-1)=\frac{2-(-1)}{1-3}(x-3)\qquad \therefore\ 3x+2y-7=0$

점 $O(0,\ 0)$과 직선 AC 사이의 거리는

$$\frac{|-7|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{7}{\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{13}}{13}$$

$\therefore\ \triangle OAC=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\frac{7\sqrt{13}}{13}=\frac{7}{2}$

이때 $\triangle OAC=\triangle ABC$이므로

$\square OABC=2\triangle OAC=7$

정답_ ②

156

$x+y+2=0$ …… ㉠

$x-7y+18=0$ …… ㉡

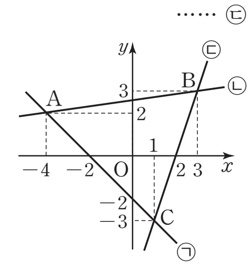
$3x-y-6=0$ …… ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-4$, $y=2$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=3$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-3$

세 직선의 교점을 $A(-4,\ 2)$, $B(3,\ 3)$, $C(1,\ -3)$이라고 하면



$\overline{AC}=\sqrt{\{1-(-4)\}^2+(-3-2)^2}$

$=5\sqrt{2}$

점 $B(3,\ 3)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|3+3+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=20$

정답_ ③

157

평행한 두 직선 $x+y-4=0$, $x+y+2=0$ 사이의 거리는 직선 $x+y-4=0$ 위의 점 $(4,\ 0)$과 직선 $x+y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1\times4+1\times0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

정답_ ⑤

158

주어진 두 직선이 평행하므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 두 직선 사이의 거리와 같다.

즉, 직선 $7x-y+4=0$ 위의 점 $(0,\ 4)$와 직선 $7x-y+9=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|7\times0-1\times4+9|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

정답_ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

159

평행한 두 직선 $2x+y+1=0$, $2x+y+k=0$ 사이의 거리는 직선 $2x+y+1=0$ 위의 점 $(0,\ -1)$과 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2\times0+1\times(-1)+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5},\ |k-1|=5$$

$k-1=5$ 또는 $k-1=-5$

$\therefore k=6\ (\because k>0)$

정답_ ③

160

주어진 두 직선이 평행하므로

$$\frac{a}{1}=\frac{3}{a+2}\neq\frac{-6}{-6}$$

$\frac{a}{1}=\frac{3}{a+2}$에서 $a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0\qquad\therefore a=-3$ 또는 $a=1$

이때 $\frac{a}{1}\neq\frac{-6}{-6}$에서 $a\neq1$이므로 $a=-3$

따라서 주어진 두 직선의 방정식은 $-3x+3y-6=0$, $x-y-6=0$, 즉 $x-y+2=0$, $x-y-6=0$이므로 직선 $x-y+2=0$ 위의 점 $(0,\ 2)$와 직선 $x-y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\times0-1\times2-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

정답_ ⑤

161

주어진 두 직선이 평행하므로 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 두 직선 사이의 거리와 같다.

직선 $ax-y+1=0$ 위의 점 $(0,\ 1)$과 직선 $ax-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a\times0-1\times1-1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{a^2+1}}$$

정사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{2}{5}$이므로

$$\left(\frac{2}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2=\frac{2}{5},\ a^2=9$$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

정답_ ③

162

P$(x,\ y)$라고 하면 점 P는 주어진 두 직선으로부터 같은 거리에 있으므로

$$\frac{|x-2y+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2x-y-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}},\ |x-2y+2|=|2x-y-2|$$

$x-2y+2=2x-y-2$ 또는 $x-2y+2=-(2x-y-2)$

$\therefore x-y=0$ 또는 $x+y-4=0$

정답_ $x-y=0$ **또는** $x+y-4=0$

163

주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 P$(x,\ y)$라고 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x-y-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|x+3y-4|}{\sqrt{1^2+3^2}},\ |3x-y-2|=|x+3y-4|$$

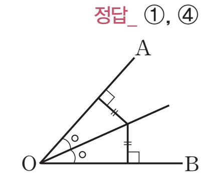
$3x-y-2=x+3y-4$ 또는 $3x-y-2=-(x+3y-4)$

$\therefore x-2y+1=0$ 또는 $2x+y-3=0$

따라서 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선의 방정식은 ①, ④이다.

정답_ ①, ④

참고 각 AOB의 이등분선 위의 점에서 두 직선 OA, OB에 이르는 거리는 같다.



164

주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 P$(x,\ y)$라고 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2x+3y-1|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|3x-2y+a|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}},\ |2x+3y-1|=|3x-2y+a|$$

$2x+3y-1=3x-2y+a$ 또는 $2x+3y-1=-(3x-2y+a)$

$\therefore x-5y+a+1=0$ 또는 $5x+y+a-1=0$

이때 이 직선이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$-1-10+a+1=0$에서 $a=10$

$-5+2+a-1=0$에서 $a=4$

따라서 두 각의 이등분선의 방정식은

$x-5y+11=0$ 또는 $5x+y+3=0$

$\therefore y=\frac{1}{5}x+\frac{11}{5}$ 또는 $y=-5x-3$

두 직선의 y절편이 각각 $\frac{11}{5}$, -3이므로 그 합은

$$\frac{11}{5}-3=-\frac{4}{5}$$

정답_ ①

165

P$(x,\ y)$라고 하면 $3d_1=2d_2$이므로

$$3\times\frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2\times\frac{|4x+3y-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

$3|3x-4y+1|=2|4x+3y-1|$

$3(3x-4y+1)=2(4x+3y-1)$ 또는 $3(3x-4y+1)=-2(4x+3y-1)$

$\therefore x-18y+5=0$ 또는 $17x-6y+1=0$

정답_ $x-18y+5=0$ **또는** $17x-6y+1=0$

166

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+1+4}{3},\ \frac{3+(-2)+5}{3}\right)\qquad\therefore (1,\ 2)$ ······ ❶

따라서 점 (1, 2)를 지나고 기울기가 -2인 직선 l의 방정식은

$y-2=-2(x-1)$ $\quad\therefore y=-2x+4$ ········· ❷

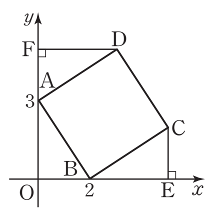
이때 직선 l의 x절편, y절편이 각각 2, 4이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times4=4$ ········· ❸

정답_ 4

채점 기준	비율
❶ 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표 구하기	40 %
❷ 직선 l의 방정식 구하기	40 %
❸ 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기	20 %

167



오른쪽 그림과 같이 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 F라고 하면

$\triangle AOB\equiv\triangle BEC\equiv\triangle DFA$ (RHA 합동)

즉, $\overline{BE}=\overline{DF}=\overline{AO}=3$,

$\overline{CE}=\overline{AF}=\overline{BO}=2$이므로

$C(2+3,\ 2)$, $D(3,\ 3+2)$ $\quad\therefore C(5,\ 2)$, $D(3,\ 5)$ ········· ❶

따라서 직선 CD의 방정식은

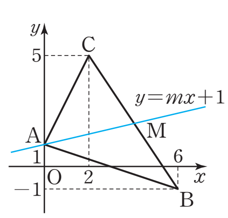
$y-2=\frac{5-2}{3-5}(x-5)$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{19}{2}$ ········· ❷

이므로 y절편은 $\frac{19}{2}$이다. ········· ❸

정답_ $\frac{19}{2}$

채점 기준	비율
❶ 두 점 C, D의 좌표 구하기	50 %
❷ 직선 CD의 방정식 구하기	30 %
❸ 직선 CD의 y절편 구하기	20 %

168



직선 $y=mx+1$은 m의 값에 관계없이 점 A(0, 1)을 지나므로 이 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 지나야 한다. ········· ❶

이때 선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{6+2}{2},\ \frac{-1+5}{2}\right)$ $\quad\therefore (4,\ 2)$ ········· ❷

직선 $y=mx+1$이 점 (4, 2)를 지나므로

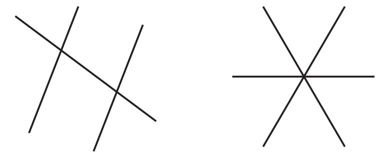
$2=4m+1$ $\quad\therefore m=\frac{1}{4}$ ········· ❸

정답_ $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ 직선 $y=mx+1$이 선분 BC의 중점을 지나야 함을 알기	50 %
❷ 선분 BC의 중점의 좌표 구하기	25 %
❸ m의 값 구하기	25 %

169

서로 다른 세 직선이 좌표평면을 여섯 부분으로 나누려면 다음 그림과 같이 두 직선만 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

 ········· ❶

두 직선 $x-2y-5=0$, $3x+y-1=0$이 한 점에서 만나므로 주어진 세 직선에 의하여 좌표평면이 여섯 부분으로 나누어지는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $x-2y-5=0$, $ax-y+6=0$이 평행한 경우

$\frac{1}{a}=\frac{-2}{-1}\neq\frac{-5}{6}$이므로 $a=\frac{1}{2}$

(ii) 두 직선 $3x+y-1=0$, $ax-y+6=0$이 평행한 경우

$\frac{3}{a}=\frac{1}{-1}\neq\frac{-1}{6}$이므로 $a=-3$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$x-2y-5=0$, $3x+y-1=0$을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=-2$

직선 $ax-y+6=0$이 점 $(1,\ -2)$를 지나야 하므로

$a-(-2)+6=0$ $\quad\therefore a=-8$ ········· ❷

(i)~(iii)에서 모든 상수 a의 값의 곱은

$\frac{1}{2}\times(-3)\times(-8)=12$ ········· ❸

정답_ 12

채점 기준	비율
❶ 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 여섯 부분으로 나누는 경우 알기	30 %
❷ 각 경우를 만족시키는 a의 값 구하기	60 %
❸ 모든 상수 a의 값의 곱 구하기	10 %

170

직선 $3x+2y-5=0$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{2}{3}$이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=\frac{2}{3}x+k$, 즉

$2x-3y+3k=0$ (k는 실수)이라고 하자. ········· ❶

이때 이 직선이 제4사분면을 지나지 않아야 하므로 $k\ge0$ ········· ❷

원점과 직선 $2x-3y+3k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{13}$이므로

$\frac{|3k|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\sqrt{13}$, $|3k|=13$

$3k=13$ 또는 $3k=-13$ $\quad\therefore k=\frac{13}{3}$ ($\because k\ge0$) ········· ❸

따라서 구하는 직선의 방정식은

$2x-3y+13=0$ ········· ❹

정답_ $2x-3y+13=0$

채점 기준	비율
❶ 직선의 방정식 세우기	30 %
❷ y절편의 조건 확인하기	30 %
❸ k의 값 구하기	30 %
❹ 직선의 방정식 구하기	10 %

171

직선 OA와 직선 $x+3y-10=0$의 기울기가 $-\frac{1}{3}$로 같으므로

두 직선은 평행하다. ❶

따라서 삼각형 OAP에서 선분 OA를 밑변으로 생각하면 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 직선 $x+3y-10=0$ 사이의 거리가 높이가 된다. 이때

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

이고 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 직선 $x+3y-10=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$ ❷

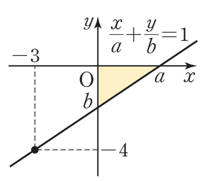
이므로 $\triangle\mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}=5$ ❸

정답_ 5

채점 기준	비율
❶ 주어진 직선과 직선 OA가 평행함을 알기	30 %
❷ 삼각형 OAP의 밑변의 길이와 높이 구하기	50 %
❸ 삼각형 OAP의 넓이 구하기	20 %

172

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 점 $(-3,\ -4)$를 지나고 제2사분면을 지나지 않으므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore\ a>0,\ b<0$

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 점 $(-3,\ -4)$를 지나므로

$\frac{-3}{a}+\frac{-4}{b}=1 \qquad \therefore\ 4a+3b+ab=0$ ...... ㉠

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 3이므로

$\frac{1}{2}\times a\times(-b)=3 \qquad \therefore\ b=-\frac{6}{a}$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$4a+3\times\left(-\frac{6}{a}\right)-6=0,\ 2a^2-3a-9=0$

$(a-3)(2a+3)=0 \qquad \therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

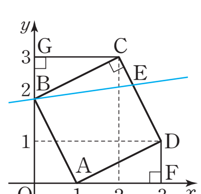
따라서 $b=-2$이므로

$a+b=3+(-2)=1$

정답_ ①

173

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 F, 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 G라고 하면



$\triangle\mathrm{OAB}\equiv\triangle\mathrm{GBC}\equiv\triangle\mathrm{FDA}$ (RHA합동)

즉, $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{GC}}=\overline{\mathrm{FA}}=2$,

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{GB}}=\overline{\mathrm{FD}}=1$이므로

$\mathrm{C}(2,\ 2+1),\ \mathrm{D}(1+2,\ 1) \qquad \therefore\ \mathrm{C}(2,\ 3),\ \mathrm{D}(3,\ 1)$

또, $\triangle\mathrm{BCE}:\square\mathrm{ABCD}=1:6$이고 $\triangle\mathrm{ABD}:\triangle\mathrm{BCD}=1:1$이므로

$\triangle\mathrm{BCE}:\triangle\mathrm{BCD}=1:3$

이때 두 삼각형 BCE, BCD의 밑변을 BC로 생각하면

$\triangle\mathrm{BCE}:\triangle\mathrm{BCD}=\overline{\mathrm{CE}}:\overline{\mathrm{CD}}=1:3$

즉, 점 E는 선분 CD를 $1:2$로 내분하는 점이므로 점 E의 좌표는

$\left(\frac{1\times3+2\times2}{1+2},\ \frac{1\times1+2\times3}{1+2}\right) \qquad \therefore\ \left(\frac{7}{3},\ \frac{7}{3}\right)$

따라서 직선 BE의 방정식은

$y=\frac{\frac{7}{3}-2}{\frac{7}{3}-0}x+2 \qquad \therefore\ y=\frac{1}{7}x+2$

이때 $0=\frac{1}{7}x+2$에서 $x=-14$이므로 직선 BE의 x절편은 -14이다.

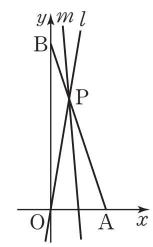
정답_ -14

174

조건 ㈎에서 직선 l이 삼각형 OAB의 꼭짓점 O를 지나므로 조건 ㈏, ㈐에서 점 P는 선분 AB를 $2:1$ 또는 $1:2$로 내분하는 점이다.

(i) 점 P가 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 경우

점 P의 좌표는



$\left(\frac{2\times0+1\times2}{2+1},\ \frac{2\times6+1\times0}{2+1}\right) \qquad \therefore\ \left(\frac{2}{3},\ 4\right)$

따라서 직선 l의 기울기는 $\frac{4}{\frac{2}{3}}=6$

또, 조건 ㈏, ㈐에서 직선 m은 점 P를 지나면서 삼각형 OAP의 넓이를 이등분하므로 선분 OA의 중점 $(1,\ 0)$을 지난다.

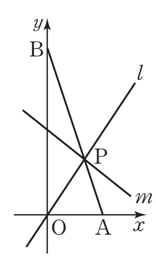
즉, 직선 m의 기울기는 $\frac{4-0}{\frac{2}{3}-1}=-12$

따라서 두 직선 $l,\ m$의 기울기의 합은

$6+(-12)=-6$

(ii) 점 P가 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 경우

점 P의 좌표는



$\left(\frac{1\times0+2\times2}{1+2},\ \frac{1\times6+2\times0}{1+2}\right) \qquad \therefore\ \left(\frac{4}{3},\ 2\right)$

따라서 직선 l의 기울기는 $\frac{2}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}$

또, 조건 ㈏, ㈐에서 직선 m은 점 P를 지나면서 삼각형 OPB의 넓이를 이등분하므로 선분 OB의 중점 $(0,\ 3)$을 지난다.

즉, 직선 m의 기울기는 $\frac{2-3}{\frac{4}{3}-0}=-\frac{3}{4}$

따라서 두 직선 $l,\ m$의 기울기의 합은

$\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$

(i), (ii)에서 두 직선 $l,\ m$의 기울기의 합의 최댓값은 $\frac{3}{4}$이다.

정답_ ①

175

직선 $y=mx-5m-2$가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 대각선 BD의 중점을 지나야 한다.

$\mathrm{D}(a,\ b)$라고 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+a}{2},\ \frac{-5+b}{2}\right)$

직선 $y=mx-5m-2$가 점 $\left(\frac{3+a}{2},\ \frac{-5+b}{2}\right)$를 지나야 하므로

$\dfrac{-5+b}{2}=m\times\dfrac{3+a}{2}-5m-2$

$-5+b=3m+am-10m-4 \qquad \therefore (a-7)m-(b-1)=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$a-7=0,\ b-1=0 \qquad \therefore a=7,\ b=1$

따라서 점 D의 좌표는 $(7,\ 1)$이다.

정답_ $(7,\ 1)$

176

점 $(a,\ b)$가 직선 $3x-y-1=0$ 위의 점이므로

$3a-b-1=0 \qquad \therefore b=3a-1$

$b=3a-1$을 $4ax+by+4=0$에 대입하면

$4ax+(3a-1)y+4=0$

이 식을 a에 대하여 정리하면

$(4x+3y)a-y+4=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$4x+3y=0,\ -y+4=0 \qquad \therefore x=-3,\ y=4$

따라서 직선 $4ax+by+4=0$은 항상 점 $(-3,\ 4)$를 지나므로

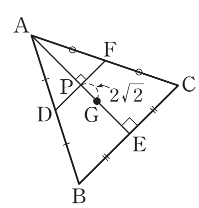
$p=-3,\ q=4$

$\therefore pq=-3\times4=-12$

정답_ ⑤

177

오른쪽 그림과 같이 두 직선 AE, DF의 교점을 P라고 하면 두 직선 DF, BC가 평행하고, 두 직선 AE, DF가 서로 수직이므로 두 직선 AE, BC도 수직이다. 즉, 직선 AE가 선분 BC의 수직이등분선이므로 점 P는 선분 DF의 중점이다.



따라서 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{1+7}{2},\ \dfrac{5+11}{2}\right) \qquad \therefore (4,\ 8)$

삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여 $\overline{AG}=2\overline{GE}$이고, $\overline{AP}=\overline{EP}$이므로

$\overline{AG}:\overline{GE}=(\overline{EP}+2\sqrt{2}):(\overline{EP}-2\sqrt{2})=2:1$

$\overline{EP}+2\sqrt{2}=2(\overline{EP}-2\sqrt{2}) \qquad \therefore \overline{EP}=6\sqrt{2}$

두 점 $E(a,\ b)$, $P(4,\ 8)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(a-4)^2+(b-8)^2}=6\sqrt{2}$

$\therefore (a-4)^2+(b-8)^2=72$ …… ㉠

한편, 직선 DF와 직선 EP는 서로 수직이므로

$\dfrac{11-5}{7-1}\times\dfrac{b-8}{a-4}=-1,\ \dfrac{b-8}{a-4}=-1$

$\therefore b=-a+12$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$a^2-8a-20=0,\ (a+2)(a-10)=0 \qquad \therefore a=10\ (\because a>0)$

따라서 $b=2$이므로

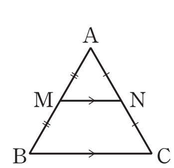
$a-b=10-2=8$

정답_ ④

참고 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질

삼각형 ABC에서 $\overline{AM}=\overline{MB}$, $\overline{AN}=\overline{NC}$이면

$\overline{MN}\,/\!/\,\overline{BC}$, $\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$



178

직선 AP의 기울기가 $\dfrac{0-1}{t-0}=-\dfrac{1}{t}$이므로 직선 l의 기울기는 t이다. 따라서 직선 l의 방정식은

$y=t(x-t) \qquad \therefore y=tx-t^2$ …… ㉠

ㄱ. $t=1$일 때, 직선 l의 기울기는 1이다. (참)

ㄴ. 직선 ㉠이 점 $(3,\ 2)$를 지나면

$2=3t-t^2,\ t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 점 $(3,\ 2)$를 지나는 직선 l은 $y=x-1$, $y=2x-4$의 2개이다. (참)

ㄷ. $y\le ax^2$에 ㉠을 대입하면

$tx-t^2\le ax^2 \qquad \therefore ax^2-tx+t^2\ge0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $a>0$이고, x에 대한 이차방정식 $ax^2-tx+t^2=0$의 판별식을 D라고 할 때, $D=(-t)^2-4at^2\le0$이어야 하므로

$t^2(1-4a)\le0,\ 1-4a\le0 \qquad \therefore a\ge\dfrac{1}{4}$

즉, 실수의 최솟값은 $\dfrac{1}{4}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

참고 이차부등식이 항상 성립할 조건

모든 실수 x에 대하여

(1) $ax^2+bx+c>0$이 성립 ⇨ $a>0,\ b^2-4ac<0$

(2) $ax^2+bx+c\ge0$이 성립 ⇨ $a>0,\ b^2-4ac\le0$

(3) $ax^2+bx+c<0$이 성립 ⇨ $a<0,\ b^2-4ac<0$

(4) $ax^2+bx+c\le0$이 성립 ⇨ $a<0,\ b^2-4ac\le0$

179

$x-2y+1=0$ …… ㉠

$x+y-2=0$ …… ㉡

$2x+5y-16=0$ …… ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=1$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-2,\ y=4$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=2$

$\therefore A(1,\ 1),\ B(-2,\ 4),\ C(3,\ 2)$

한편, 삼각형의 외심은 세 변의 수직이등분선의 교점이므로 두 변 AB, AC의 수직이등분선의 교점이다.

변 AB의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{1+(-2)}{2},\ \dfrac{1+4}{2}\right) \qquad \therefore \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

직선 AB의 기울기가 $\dfrac{4-1}{-2-1}=-1$이므로 변 AB의 수직이등분선의 기울기는 1이다.

따라서 변 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y-\dfrac{5}{2}=x-\left(-\dfrac{1}{2}\right) \qquad \therefore y=x+3$ …… ㉣

변 AC의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{1+3}{2},\ \dfrac{1+2}{2}\right) \qquad \therefore \left(2,\ \dfrac{3}{2}\right)$

직선 AC의 기울기가 $\dfrac{2-1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$이므로 변 AC의 수직이등분선의 기울기는 -2이다.

따라서 변 AC의 수직이등분선의 방정식은

$y-\frac{3}{2}=-2(x-2) \qquad \therefore y=-2x+\frac{11}{2}$ …… ㉤

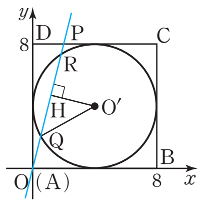
㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$x=\frac{5}{6}$, $y=\frac{23}{6}$

따라서 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 $\left(\frac{5}{6}, \frac{23}{6}\right)$이다.

정답_ $\left(\frac{5}{6}, \frac{23}{6}\right)$

180



오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x축, 직선 AD를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 A는 원점이고, $\overline{DP}:\overline{AD}=1:4$이므로 직선 AP의 방정식은 $y=4x$이다.

원의 중심을 O′이라고 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 8이므로

O′(4, 4)

점 O′에서 직선 $y=4x$, 즉 $4x-y=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{O'H}=\frac{|4\times4-1\times4|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{12}{\sqrt{17}}=\frac{12\sqrt{17}}{17}$

선분 O′Q는 내접원의 반지름이므로

$\overline{O'Q}=4$

직각삼각형 O′QH에서

$\overline{QH}=\sqrt{\overline{O'Q}^2-\overline{O'H}^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{12\sqrt{17}}{17}\right)^2}=\frac{8\sqrt{34}}{17}$

$\therefore \overline{QR}=2\overline{QH}=\frac{16\sqrt{34}}{17}$

정답_ $\frac{16\sqrt{34}}{17}$

181

두 점 P, R의 좌표가 각각 P$(-1, -3)$, R$(b, b-2)$이므로

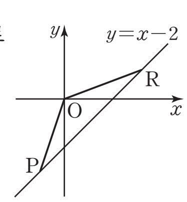
$\overline{PR}=\sqrt{\{b-(-1)\}^2+\{b-2-(-3)\}^2}$

$=\sqrt{(b+1)^2+(b+1)^2}$

$=\sqrt{2}|b+1|$

원점 O와 직선 $y=x-2$, 즉 $x-y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$



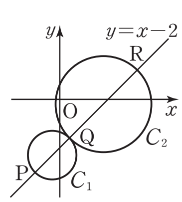
조건 ㈎에서 삼각형 OPR의 넓이가 $3\sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}|b+1|\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, $|b+1|=3\sqrt{2}$

$b+1=3\sqrt{2}$ 또는 $b+1=-3\sqrt{2}$

$\therefore b=3\sqrt{2}-1$ ($\because b>-1$)

$\therefore$ R$(3\sqrt{2}-1, 3\sqrt{2}-3)$



또, 조건 ㈏에서 두 원 C_1, C_2의 넓이의 비가 1 : 4이므로 두 원의 지름의 길이의 비는 1 : 2이다.

즉, $\overline{PQ}:\overline{QR}=1:2$이므로 점 Q는 선분 PR를 1 : 2로 내분하는 점이다.

따라서 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{1\times(3\sqrt{2}-1)+2\times(-1)}{1+2}, \frac{1\times(3\sqrt{2}-3)+2\times(-3)}{1+2}\right)$

$\therefore (\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-3)$

따라서 $a=\sqrt{2}-1$이므로

$a+b=\sqrt{2}-1+3\sqrt{2}-1=4\sqrt{2}-2$

정답_ ⑤

182

이차함수 $y=-x^2+6x-8$의 그래프에 접하고 직선 $y=2x+k$와 평행한 직선의 방정식을 $y=2x+a$ (a는 상수)라고 하자.

직선 $y=2x+a$가 이차함수 $y=-x^2+6x-8$에 접하므로 이차방정식 $-x^2+6x-8=2x+a$, 즉 $x^2-4x+a+8=0$이 중근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(a+8)=0 \qquad \therefore a=-4$

따라서 직선 $y=2x+k$와 평행하고 이차함수 $y=-x^2+6x-8$에 접하는 직선의 방정식은 $y=2x-4$이다.

두 직선 $y=2x+k$, $y=2x-4$는 평행하므로 직선 $y=2x-4$ 위의 점 $(2, 0)$과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이어야 한다.

$\frac{|2\times2-1\times0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$이므로 $|k+4|=10$

$k+4=10$ 또는 $k+4=-10$

$\therefore k=-14$ 또는 $k=6$

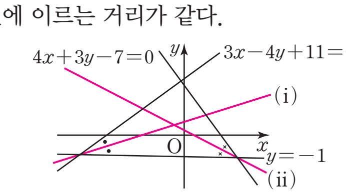
그런데 $k=-14$이면 이차함수 $y=-x^2+6x-8$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 만나므로 거리의 최솟값이 0이 된다.

$\therefore k=6$

정답_ ④

183

삼각형의 내심은 세 내각의 이등분선의 교점이므로 내심 (a, b)에서 세 직선에 이르는 거리가 같다.



즉, $\frac{|3a-4b+11|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|4a+3b-7|}{\sqrt{4^2+3^2}}=|b-(-1)|$이므로

$|3a-4b+11|=|4a+3b-7|=5|b+1|$

(i) $|3a-4b+11|=5|b+1|$일 때

$3a-4b+11=5(b+1)$ 또는 $3a-4b+11=-5(b+1)$

$\therefore a-3b+2=0$ 또는 $3a+b+16=0$

이때 위의 그림에서 각의 이등분선 (i)의 기울기가 양수이므로

$a-3b+2=0$ …… ㉠

(ii) $|4a+3b-7|=5|b+1|$일 때

$4a+3b-7=5(b+1)$ 또는 $4a+3b-7=-5(b+1)$

$\therefore 2a-b-6=0$ 또는 $2a+4b-1=0$

이때 위의 그림에서 각의 이등분선 (ii)의 기울기가 음수이므로

$2a+4b-1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$

정답_ ③

03 원의 방정식

184

(1) 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원의 방정식은

$x^2+y^2=25$

(2) 중심이 점 $(-1,\ 4)$이고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-4)^2=9$

정답_ (1) $x^2+y^2=25$ (2) $(x+1)^2+(y-4)^2=9$

185

$x^2+y^2-8x+6y=0$에서 $(x-4)^2+(y+3)^2=25$

즉, 주어진 원의 중심의 좌표가 $(4,\ -3)$이고 반지름의 길이가 5이므로 원의 넓이는

$\pi\times5^2=25\pi$ $\quad\therefore k=25$

정답_ 25

186

중심의 좌표가 $(4,\ 1)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-1)^2=4$

$\therefore x^2+y^2-8x-2y+13=0$

따라서 $a=-8,\ b=-2,\ k=13$이므로

$a+b+k=-8+(-2)+13=3$

정답_ ③

187

$x^2+y^2-4y+3=0$에서

$x^2+(y-2)^2=1$

주어진 원의 중심의 좌표가 $(0,\ 2)$이므로 구하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$x^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 $(-4,\ 5)$를 지나므로

$(-4)^2+(5-2)^2=r^2,\ r^2=25$

$\therefore r=5$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times5=10\pi$

정답_ ②

188

원의 중심의 좌표가 $(3,\ -2)$이므로 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$

$\therefore x^2+y^2-6x+4y+13-r^2=0$

이 식이 $x^2+y^2-ax+4y=0$과 일치하므로

$a=6$

$13-r^2=0$에서 $r^2=13$

따라서 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+2)^2=13$

이 원이 점 $(5,\ b)$를 지나므로

$(5-3)^2+(b+2)^2=13,\ b^2+4b-5=0$

$(b+5)(b-1)=0$ $\quad\therefore b=-5$ 또는 $b=1$

이때 b는 양수이므로 $b=1$

$\therefore a+b=6+1=7$

정답_ 7

189

원의 중심이 x축 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 0)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=r^2$

이 원이 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1),\ \mathrm{B}(3,\ 3)$을 지나므로

$(-1-a)^2+1^2=r^2,\ (3-a)^2+3^2=r^2$

$\therefore a^2+2a+2=r^2,\ a^2-6a+18=r^2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ r^2=10$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

정답_ ②

190

원의 중심의 좌표는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표와 같으므로

$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{4+0}{2}\right)$ $\quad\therefore (3,\ 2)$

$\overline{\mathrm{AB}}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(5-1)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=8$

정답_ ③

191

$x^2+y^2+6x-k-8=0$에서

$(x+3)^2+y^2=k+17$

즉, 주어진 원의 중심의 좌표는 $(-3,\ 0)$이고 이 점은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표와 같으므로

$\frac{0+a}{2}=-3,\ \frac{4+b}{2}=0$

$\therefore a=-6,\ b=-4$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-6-0)^2+(-4-4)^2}=5$

즉, $k+17=25$이므로 $k=8$

$\therefore \frac{ab}{k}=\frac{-6\times(-4)}{8}=3$

정답_ ④

192

$x^2+y^2+8x+6y+21=0$에서

$(x+4)^2+(y+3)^2=4$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 $(-4,\ -3)$이다.

또, $x^2+y^2-4x-10y+20=0$에서

$(x-2)^2+(y-5)^2=9$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 $(2,\ 5)$

두 점 $(-4,\ -3),\ (2,\ 5)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$ $\quad\therefore (-1, 1)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\sqrt{\{2-(-4)\}^2+\{5-(-3)\}^2}=5$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $r=5$이므로

$abr=-1\times1\times5=-5$

정답_ -5

193

중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, a-2)$라 하고 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-a+2)^2=r^2$

이 원이 두 점 $(0, 1)$, $(3, 4)$를 지나므로

$(-a)^2+(3-a)^2=r^2$, $(3-a)^2+(6-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-6a+9=r^2$, $2a^2-18a+45=r^2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $r^2=9$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 3이다.

정답_ ②

194

$y=x+1$에 $y=0$을 대입하면 $0=x+1$에서

$x=-1$

구하는 원의 중심의 좌표가 $(-1, 0)$이므로 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x+1)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$(1+1)^2+2^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=8$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+y^2=8$

정답_ $(x+1)^2+y^2=8$

195

중심이 직선 $y=-2x+3$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, -2a+3)$이라고 하자.

$x^2+y^2+2x-8y+13=0$에서 $(x+1)^2+(y-4)^2=4$이므로 이 원의 반지름의 길이가 2이다.

중심의 좌표가 $(a, -2a+3)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y+2a-3)^2=4$

이 원이 점 $(1, 3)$을 지나므로

$(1-a)^2+(2a)^2=4$, $5a^2-2a-3=0$

$(5a+3)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{5}$ 또는 $a=1$

(i) $a=-\frac{3}{5}$일 때

$-2a+3=-2\times\left(-\frac{3}{5}\right)+3=\frac{21}{5}$

(ii) $a=1$일 때

$-2a+3=-2\times1+3=1$

(i), (ii)에서 구하는 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{21}{5}\right)$ 또는 $(1, 1)$이다.

정답_ ②, ⑤

196

직선 AB의 기울기는

$\frac{a-1}{3-1}=\frac{a-1}{2}$

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+a}{2}\right)$ $\quad\therefore \left(2, \frac{1+a}{2}\right)$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{2}{a-1}$이고 점 $\left(2, \frac{1+a}{2}\right)$를 지나는 직선이므로

$y-\frac{1+a}{2}=-\frac{2}{a-1}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{2}{a-1}x+\frac{4}{a-1}+\frac{1+a}{2}$

이 수직이등분선이 원 $(x+2)^2+(y-5)^2=4$의 넓이를 이등분하고 원의 중심 $(-2, 5)$를 지나야 하므로

$5=-\frac{2}{a-1}\times(-2)+\frac{4}{a-1}+\frac{1+a}{2}$

$5=\frac{8}{a-1}+\frac{1+a}{2}$, $10(a-1)=16+(a+1)(a-1)$

$a^2-10a+25=0$, $(a-5)^2=0$

$\therefore a=5$

정답_ ①

197

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라고 하면 이 원이 원점을 지나므로 $C=0$

$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0$

이 원이 두 점 $(-3, 1)$, $(1, 3)$을 지나므로

$9+1-3A+B=0$, $1+9+A+3B=0$

$\therefore -3A+B=-10$, $A+3B=-10$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$A=2$, $B=-4$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2+2x-4y=0$

정답_ $x^2+y^2+2x-4y=0$

다른 풀이

원의 중심을 $P(a, b)$라 하고 $O(0, 0)$, $A(-3, 1)$, $B(1, 3)$이라고 하면

$\overline{PO}=\overline{PA}=\overline{PB}$

$\overline{PO}=\overline{PA}$에서 $\overline{PO}^2=\overline{PA}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+3)^2+(b-1)^2$

$\therefore 3a-b=-5$ …… ㉠

$\overline{PO}=\overline{PB}$에서 $\overline{PO}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-3)^2$

$\therefore a+3b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=2$

따라서 원의 중심의 좌표는 $P(-1, 2)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PO}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=5$

$\therefore x^2+y^2+2x-4y=0$

198

원의 중심을 O(a, b)라고 하면 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

$\overline{OA}=\overline{OB}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$이므로

$(a+1)^2+b^2=(a-2)^2+(b-1)^2$

$\therefore 3a+b=2$ ...... ㉠

$\overline{OB}=\overline{OC}$에서 $\overline{OB}^2=\overline{OC}^2$이므로

$(a-2)^2+(b-1)^2=(a-3)^2+(b+2)^2$

$\therefore a-3b=4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1$

$\therefore 10a+b=10\times1+(-1)=9$

정답_ ⑤

다른 풀이

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라고 하면 이 원이 세 점 A$(-1, 0)$, B$(2, 1)$, C$(3, -2)$를 지나므로

$1-A+C=0$ ...... ㉢

$4+1+2A+B+C=0$ ...... ㉣

$9+4+3A-2B+C=0$ ...... ㉤

㉢에서 $C=A-1$ ...... ㉥

㉣, ㉤에 각각 ㉥을 대입하여 정리하면

$3A+B=-4,\ 2A-B=-6$

두 식을 연립하여 풀면

$A=-2,\ B=2$

$A=-2$를 ㉥에 대입하면 $C=-3$

따라서 원의 방정식은

$x^2+y^2-2x+2y-3=0$

$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=5$

즉, 중심의 좌표가 $(1, -1)$이므로

$a=1,\ b=-1$

$\therefore 10a+b=10\times1-1=9$

199

원의 중심을 O(a, b)라고 하면 $\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}$

$\overline{OP}=\overline{OQ}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{OQ}^2$이므로

$(a-2)^2+b^2=a^2+(b+2)^2$

$\therefore a+b=0$ ...... ㉠

$\overline{OQ}=\overline{OR}$에서 $\overline{OQ}^2=\overline{OR}^2$이므로

$a^2+(b+2)^2=a^2+(b-4)^2$

$\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=-1$

즉, 원의 중심이 O$(-1, 1)$이므로 원의 반지름의 길이는

$\overline{OP}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(0-1)^2}=\sqrt{10}$

따라서 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=10$

점 S$(k, 2)$가 이 원 위에 있으므로

$(k+1)^2+(2-1)^2=10,\ k^2+2k-8=0$

$(k+4)(k-2)=0 \quad \therefore k=-4$ 또는 $k=2$

이때 k는 양수이므로 $k=2$

정답_ ②

200

학교, 도서관, 공원의 위치를 좌표로 나타내면

A$(0, -1)$, B$(-1, 2)$, C$(3, 0)$

지하철 역의 위치를 P(a, b)라고 하면 점 P는 세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심이므로

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+(b+1)^2=(a+1)^2+(b-2)^2$

$\therefore a-3b=-2$ ...... ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+1)^2+(b-2)^2=(a-3)^2+b^2$

$\therefore 2a-b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1$

따라서 지하철역의 위치를 좌표로 나타내면 $(1, 1)$이다.

정답_ ⑤

201

$x^2+y^2-2x+6y-k=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2=10+k$

이 방정식이 원을 나타내야 하므로

$10+k>0 \quad \therefore k>-10$

정답_ ③

202

① $x^2+y^2+2x+y+1=0$에서

$(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

② $x^2+y^2+2x+2y+1=0$에서

$(x+1)^2+(y+1)^2=1$

③ $x^2+y^2+3x+y+4=0$에서

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{2}$

④ $x^2+y^2+4x+y+4=0$에서

$(x+2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

⑤ $x^2+y^2+2x+4y+4=0$에서

$(x+1)^2+(y+2)^2=1$

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ③이다.

정답_ ③

203

$x^2+y^2+4x-2ky+4k=0$에서

$(x+2)^2+(y-k)^2=k^2-4k+4$

이 방정식이 반지름의 길이가 4 이하인 원을 나타내려면

$0<\sqrt{k^2-4k+4}\le4 \quad \therefore 0<k^2-4k+4\le16$

(i) $k^2-4k+4>0$에서

$(k-2)^2>0$

$k\ne2$인 모든 실수에서 성립한다.

(ii) $k^2-4k+4\le16$에서

$k^2-4k-12\le0,\ (k+2)(k-6)\le0$

$\therefore -2\le k\le6$

(i), (ii)에서 $-2\le k<2$ 또는 $2<k\le 6$이므로 조건을 만족시키는 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6의 8개이다.

정답_ 8

204

$x^2+y^2+8x-6y+10+k=0$에서

$(x+4)^2+(y-3)^2=15-k$

ㄱ. $(x+4)^2+(y-3)^2=15-k$이므로 중심의 좌표가 $(-4, 3)$인 원이다. (참)

ㄴ. $k=5$이면 $(x+4)^2+(y-3)^2=10$이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다. (거짓)

ㄷ. $k=10$이면 $(x+4)^2+(y-3)^2=5$이므로 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이다. (거짓)

ㄹ. $k=20$이면 $(x+4)^2+(y-3)^2=-5$이므로 이 방정식은 원의 방정식이 될 수 없다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

정답_ ③

205

(1) x축에 접하는 원의 반지름의 길이는

$|$중심의 y좌표$|=|-2|=2$

이므로 원의 방정식은

$(x-5)^2+(y+2)^2=4$

(2) y축에 접하는 원의 반지름의 길이는

$|$중심의 x좌표$|=|-3|=3$

이므로 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y+1)^2=9$

정답_ (1) $(x-5)^2+(y+2)^2=4$ (2) $(x+3)^2+(y+1)^2=9$

206

점 $(4, 0)$에서 x축에 접하므로 원의 중심의 좌표를 $(4, a)$로 놓으면 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-a)^2=a^2$

이 원이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$(0-4)^2+(2-a)^2=a^2$, $-4a+20=0$ $\therefore a=5$

$\therefore (x-4)^2+(y-5)^2=25$

정답_ $(x-4)^2+(y-5)^2=25$

207

y축에 접하는 원의 중심의 좌표를 (a, b)라고 하면

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

이 원이 두 점 $(2, 1)$, $(4, 3)$을 지나므로

$(2-a)^2+(1-b)^2=a^2$, $(4-a)^2+(3-b)^2=a^2$

$\therefore b^2-4a-2b+5=0$ …… ㉠

$b^2-8a-6b+25=0$ …… ㉡

$2\times$㉠$-$㉡을 하면

$b^2+2b-15=0$, $(b+5)(b-3)=0$

$\therefore b=-5$ 또는 $b=3$

즉, $a=10$, $b=-5$ 또는 $a=2$, $b=3$이므로 원의 반지름의 길이는 10 또는 2이다.

따라서 원의 반지름의 길이의 합은 $10+2=12$

정답_ 12

208

$x^2+y^2-2x-2ky-k^2+3k-1=0$에서

$(x-1)^2+(y-k)^2=2k^2-3k+2$

이 원이 x축에 접해야 하므로 원의 반지름의 길이는

$|$중심의 y좌표$|$이다.

즉, $|k|=\sqrt{2k^2-3k+2}$이므로 양변을 제곱하면

$k^2=2k^2-3k+2$, $k^2-3k+2=0$

$(k-1)(k-2)=0$ $\therefore k=1$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $1+2=3$

정답_ ③

209

$x^2+y^2-2ax-6y+b=0$에서

$(x-a)^2+(y-3)^2=a^2+9-b$ …… ㉠

원 ㉠이 y축에 접하므로 원의 반지름의 길이는 $|$중심의 x좌표$|$이다.

즉, $|a|=\sqrt{a^2+9-b}$이므로 양변을 제곱하면

$a^2=a^2+9-b$ $\therefore b=9$

또, 원 ㉠이 점 $(1, 4)$를 지나므로

$(1-a)^2+(4-3)^2=a^2+9-b$

$-2a+2=0$ $\therefore a=1$

$\therefore 2ab=2\times1\times9=18$

정답_ 18

210

중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, a+1)$이라고 하면 이 원이 y축에 접하므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-1)^2=a^2$

이 원이 점 $(3, 1)$을 지나므로

$(3-a)^2+(-a)^2=a^2$, $(3-a)^2=0$ $\therefore a=3$

따라서 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$이므로

$a=3$, $b=4$, $r=3$

$\therefore a+b+r=3+4+3=10$

정답_ ②

211

$x^2+y^2+kx-ky-k+3=0$에서

$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{2}+k-3$

이 원의 중심 $\left(-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$가 제2사분면 위에 있으므로

$-\frac{k}{2}<0$, $\frac{k}{2}>0$

$\therefore k>0$ …… ㉠

또, 이 원이 x축에 접하므로 원의 반지름의 길이는 $|$중심의 y좌표$|$이다.

즉, $\left|\frac{k}{2}\right|=\sqrt{\frac{k^2}{2}+k-3}$이므로 양변을 제곱하면

$\frac{k^2}{4}=\frac{k^2}{2}+k-3$, $k^2+4k-12=0$

$(k+6)(k-2)=0$ $\therefore k=-6$ 또는 $k=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $k=2$

정답_ ②

212

점 $(2,\ 1)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제1사분면 위에 있어야 하므로 이 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이다.
즉, 원의 방정식은
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$
이 원이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2,\ r^2-6r+5=0$
$(r-1)(r-5)=0 \qquad \therefore r=1$ 또는 $r=5$
따라서 두 원의 반지름의 길이가 1, 5이므로 원의 둘레의 길이의 합은 $2\pi\times1+2\pi\times5=12\pi$

정답_ 12π

213

원의 중심의 좌표가 $(-3,\ 3)$이고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-3)^2=9$
이 원이 점 $(-1,\ a)$를 지나므로
$(-1+3)^2+(a-3)^2=9 \qquad \therefore a^2-6a+4=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{4}{1}=4$

정답_ 4

참고 이차방정식 a^2-6a+4의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-4=5>0$이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

214

점 $(-2,\ 4)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제2사분면 위에 있어야 하므로 이 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이다.
즉, 원의 방정식은
$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$
이 원이 점 $(-2,\ 4)$를 지나므로
$(-2+r)^2+(4-r)^2=r^2,\ r^2-12r+20=0$
$(r-2)(r-10)=0 \qquad \therefore r=2$ 또는 $r=10$
따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(-2,\ 2)$, $(-10,\ 10)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{\{-10-(-2)\}^2+(10-2)^2}=8\sqrt{2}$

정답_ ②

215

$x^2+y^2-2ax-4y+3+b=0$에서
$(x-a)^2+(y-2)^2=a^2+1-b$
이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로
$|a|=2=\sqrt{a^2+1-b}$
$|a|=2$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$
$2=\sqrt{a^2+1-b}$에서 양변을 제곱하면
$4=a^2+1-b \qquad \therefore b=a^2-3=1$
따라서 $a=-2,\ b=1$ 또는 $a=2,\ b=1$이므로
$a^2+b^2=(\pm2)^2+1^2=5$

정답_ 5

216

x축과 y축에 동시에 접하고 중심이 제2사분면 위에 있는 원의 반지름을 r라고 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이다.
원의 중심이 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로
$r=(-r)^2-(-r)-1,\ r^2-1=0$
$(r+1)(r-1)=0 \qquad \therefore r=1\ (\because r>0)$
따라서 원의 중심의 좌표는 $(-1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1이므로 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y-1)^2=1$
$\therefore x^2+y^2+2x-2y+1=0$
즉, $a=2,\ b=-2,\ c=1$이므로
$a+b+c=2+(-2)+1=1$

정답_ 1

217

원점 $O(0,\ 0)$과 원의 중심 $(3,\ 4)$ 사이의 거리는
$\sqrt{3^2+4^2}=5$
이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 선분 OP의 길이의 최댓값은
$5+2=7$

정답_ 7

218

$x^2+y^2-4x+6y+12=0$에서
$(x-2)^2+(y+3)^2=1$
원의 중심 $(2,\ -3)$과 점 $A(a,\ 9)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(a-2)^2+\{9-(-3)\}^2}=\sqrt{a^2-4a+148}$
이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 선분 AP의 길이의 최솟값은
$\sqrt{a^2-4a+148}-1$
즉, $\sqrt{a^2-4a+148}-1=12$이므로
$\sqrt{a^2-4a+148}=13$
양변을 제곱하여 정리하면
$a^2-4a-21=0,\ (a+3)(a-7)=0$
$\therefore a=-3$ 또는 $a=7$
이때 a가 음수이므로 $a=-3$

정답_ ③

219

$x^2+y^2+8x-8y+28=0$에서
$(x+4)^2+(y-4)^2=4$
즉, 이 원의 중심의 좌표는 $(-4,\ 4)$이고 반지름의 길이는 2이다.
또, $x^2+y^2-4y=0$에서
$x^2+(y-2)^2=4$
즉, 이 원의 중심의 좌표는 $(0,\ 2)$이고 반지름의 길이는 2이다.
두 원의 중심 $(-4,\ 4)$와 $(0,\ 2)$ 사이의 거리는
$\sqrt{\{0-(-4)\}^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5}$
이때 두 원의 반지름의 길이가 모두 2이므로 두 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값은 $2\sqrt{5}+2+2=2\sqrt{5}+4$
최솟값은 $2\sqrt{5}-2-2=2\sqrt{5}-4$
따라서 최댓값과 최솟값의 곱은
$(2\sqrt{5}+4)(2\sqrt{5}-4)=20-16=4$

정답_ ②

220

$\sqrt{(a+2)^2+(b-1)^2}$의 값은 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=16$ 위의 점 $P(a,\ b)$와 점 $(-2,\ 1)$ 사이의 거리와 같다.

이때 점 $(-2,\ 1)$과 원의 중심 $(1,\ -3)$ 사이의 거리는

$\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(-3-1)^2}=5$

이때 원의 반지름의 길이가 4이므로 점 $P(a,\ b)$와 점 $(-2,\ 1)$ 사이의 거리의 최댓값은

$5+4=9$

따라서 $\sqrt{(a+2)^2+(b-1)^2}$의 최댓값은 9이다.

정답_ ⑤

221

두 원 $x^2+y^2+6x+4y+8=0$, $x^2+y^2+4x-2y=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+6x+4y+8-(x^2+y^2+4x-2y)=0$

$2x+6y+8=0 \qquad \therefore\ x+3y+4=0$

이 직선이 점 $(-1,\ k)$를 지나므로

$-1+3k+4=0 \qquad \therefore\ k=-1$

정답_ ①

222

$x^2+(y+a)^2=4$에서

$x^2+y^2+2ay+a^2-4=0$

$(x-1)^2+y^2=9$에서

$x^2+y^2-2x-8=0$

두 원 $x^2+y^2+2ay+a^2-4=0$, $x^2+y^2-2x-8=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2ay+a^2-4-(x^2+y^2-2x-8)=0$

$\therefore\ 2x+2ay+a^2+4=0$

이 직선이 직선 $2x-y+3=0$에 수직이므로

$2\times2+2a\times(-1)=0 \qquad \therefore\ a=2$

정답_ ②

223

원 $x^2+y^2+ax+2ay+3a=0$이 원 $x^2+y^2+6x-6y+9=0$의 둘레를 이등분하려면 두 원의 공통인 현이 원 $x^2+y^2+6x-6y+9=0$의 지름이어야 한다.

따라서 두 원의 공통인 현이 원 $x^2+y^2+6x-6y+9=0$, 즉 $(x+3)^2+(y-3)^2=9$의 중심 $(-3,\ 3)$을 지나야 한다.

두 원 $x^2+y^2+ax+2ay+3a=0$, $x^2+y^2+6x-6y+9=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+2ay+3a-(x^2+y^2+6x-6y+9)=0$

$\therefore\ (a-6)x+(2a+6)y+3a-9=0$

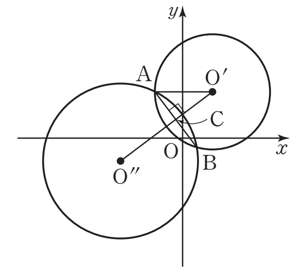
이 직선이 점 $(-3,\ 3)$을 지나야 하므로

$-3(a-6)+3(2a+6)+3a-9=0$

$6a+27=0 \qquad \therefore\ a=-\dfrac{9}{2}$

정답_ $-\dfrac{9}{2}$

224



오른쪽 그림과 같이 두 원

$x^2+y^2-4x-6y-1=0$,

$x^2+y^2+8x+3y-7=0$의 중심을 각각 O′, O″, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{O'O''}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라고 하면 두 원의 교점을 지나는 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-4x-6y-1-(x^2+y^2+8x+3y-7)=0$

$-12x-9y+6=0 \qquad \therefore\ 4x+3y-2=0$

원 $x^2+y^2-4x-6y-1=0$, 즉 $(x-2)^2+(y-3)^2=14$의 중심 $O'(2,\ 3)$과 공통인 현 AB 사이의 거리 $\overline{O'C}$는

$\overline{O'C}=\dfrac{|4\times2+3\times3-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$

직각삼각형 ACO′에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{O'A}^2-\overline{O'C}^2}=\sqrt{(\sqrt{14})^2-3^2}=\sqrt{5}$

따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AC}=2\sqrt{5}$

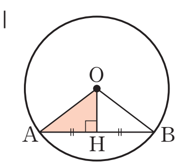
정답_ ②

참고 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분한다.

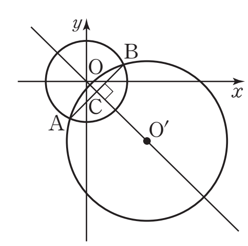
(1) $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이면 $\overline{AH}=\overline{BH}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}$

(2) 직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA}^2=\overline{AH}^2+\overline{OH}^2$



225



오른쪽 그림과 같이 두 원

$x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-6x+6y-k=0$

의 중심을 각각 O, O′, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라고 하면 원 $x^2+y^2-4=0$, 즉 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이는 2이므로

$\overline{OA}=2$

이때 공통인 현의 길이가 $\sqrt{14}$이므로

$\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

직각삼각형 ACO에서

$\overline{OC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

한편, 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-6x+6y-k)=0$

$\therefore\ 6x-6y+k-4=0$

원 $x^2+y^2=4$의 중심 $O(0,\ 0)$과 공통인 현 AB 사이의 거리 $\overline{OC}$는

$\overline{OC}=\dfrac{|6\times0-6\times0+k-4|}{\sqrt{6^2+(-6)^2}}=\dfrac{|k-4|}{6\sqrt{2}}$

즉, $\dfrac{|k-4|}{6\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$|k-4|=6$

$k-4=-6$ 또는 $k-4=6$

$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=10$

이때 $k<0$이므로 $k=-2$

정답_ ④

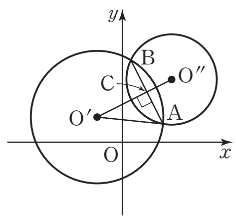
226

두 원의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소가 되려면 공통인 현이 그 원의 지름이어야 한다.

$x^2+y^2+2x-2y-5=0$에서

$(x+1)^2+(y-1)^2=7$

오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2+2x-2y-5=0$, $x^2+y^2-4x-5y+7=0$의 중심을 각각 O′, O″, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{O'O''}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라고 하면 두 원의 교점을 지나는 공통인 현의 방정식은



$x^2+y^2+2x-2y-5-(x^2+y^2-4x-5y+7)=0$

$6x+3y-12=0 \qquad \therefore 2x+y-4=0$

원 $(x+1)^2+(y-1)^2=7$의 중심 O′$(-1,\ 1)$과 공통인 현 AB 사이의 거리 $\overline{\mathrm{O'C}}$는

$$\overline{\mathrm{O'C}}=\frac{|2\times(-1)+1\times1-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$$

직각삼각형 ACO′에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{O'A}}^2-\overline{\mathrm{O'C}}^2}=\sqrt{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{2}$

따라서 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 구하는 원의 넓이는 $\pi\times(\sqrt{2})^2=2\pi$

정답_ 2π

227

$x^2+y^2=20$에서

$x^2+y^2-20=0$

$(x-a)^2+y^2=4$에서

$x^2+y^2-2ax+a^2-4=0$

두 원의 교점을 지나는 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-20-(x^2+y^2-2ax+a^2-4)=0$

$2ax-a^2-16=0 \qquad \therefore x=\dfrac{a^2+16}{2a}$

공통인 현의 길이가 최대가 되려면 공통인 현이 작은 원의 지름과 같아야 한다.

즉, 공통인 현이 작은 원의 중심을 지나야 한다.

이때 작은 원 $(x-a)^2+y^2=4$의 중심의 좌표가 $(a,\ 0)$이므로

$a=\dfrac{a^2+16}{2a}$, $a^2=16$

이때 $a>0$이므로 $a=4$

정답_ 4

228

두 원 $x^2+y^2-6x-6y+8=0$, $x^2+y^2-4=0$의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x-6y+8+k(x^2+y^2-4)=0$ (단, $k\neq-1$) …… ㉠

이 원이 점 $(2,\ 2)$를 지나므로

$4+4-12-12+8+k(4+4-4)=0$

$4k-8=0 \qquad \therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-6x-6y+8+2(x^2+y^2-4)=0$

$3x^2+3y^2-6x-6y=0 \qquad \therefore (x-1)^2+(y-1)^2=2$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.

정답_ $(1,\ 1)$

229

$x^2+y^2=1$에서

$x^2+y^2-1=0$

두 원 $x^2+y^2+ax+4y+3=0$, $x^2+y^2-1=0$의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+ax+4y+3+k(x^2+y^2-1)=0$ (단, $k\neq-1$) …… ㉠

이 원이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$9+12+3+k(9-1)=0$

$8k+24=0 \qquad \therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+ax+4y+3-3(x^2+y^2-1)=0$

$-2x^2-2y^2+ax+4y+6=0$

$x^2+y^2-\dfrac{a}{2}x-2y-3=0$

$\therefore \left(x-\dfrac{a}{4}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{a^2}{16}+4$

이 원의 넓이가 5π이므로 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이어야 한다.

즉, $\sqrt{\dfrac{a^2}{16}+4}=\sqrt{5}$에서 양변을 제곱하면

$\dfrac{a^2}{16}+4=5$, $a^2=16$

$(a+4)(a-4)=0 \qquad \therefore a=-4$ 또는 $a=4$

이때 $a>0$이므로 $a=4$

정답_ ②

230

두 원 $x^2+y^2+6x+6y-1=0$, $x^2+y^2-2x+2y-5=0$의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+6x+6y-1+k(x^2+y^2-2x+2y-5)=0$ (단, $k\neq-1$)

$(k+1)x^2+(k+1)y^2-2(k-3)x+2(k+3)y-5k-1=0$

$\therefore x^2+y^2-\dfrac{2(k-3)}{k+1}x+\dfrac{2(k+3)}{k+1}y-\dfrac{5k+1}{k+1}=0$ …… ㉠

이 원의 중심이 y축 위에 있으므로 중심의 x좌표가 0이어야 한다.

즉, ㉠에서 x의 계수가 0이어야 하므로

$-\dfrac{2(k-3)}{k+1}=0 \qquad \therefore k=3$

$k=3$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2+3y-4=0$

$\therefore x^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$

따라서 원의 반지름의 길이가 $\dfrac{5}{2}$이므로 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times\dfrac{5}{2}=5\pi$

정답_ 5π

231

원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=2x-k$, 즉 $2x-y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}<2$, $|k|<2\sqrt{5}$

$\therefore\ -2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 k는 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4의 9개이다.

정답_ ②

다른 풀이

$x^2+y^2=4$에 $y=2x-k$를 대입하면

$x^2+(2x-k)^2=4$　　$\therefore\ 5x^2-4kx+k^2-4=0$

이차방정식 $5x^2-4kx+k^2-4=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-4)>0$

$-k^2+20>0$, $k^2-20<0$, $(k+2\sqrt{5})(k-2\sqrt{5})<0$

$\therefore\ -2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 k는 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4의 9개이다.

232

원 $x^2+(y-1)^2=1$의 중심 $(0, 1)$과 직선 $y=mx+3$, 즉 $mx-y+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-1+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}<1$, $\sqrt{m^2+1}>2$

양변을 제곱하면

$m^2+1>4$, $m^2-3>0$, $(m+\sqrt{3})(m-\sqrt{3})>0$

$\therefore\ m<-\sqrt{3}$ 또는 $m>\sqrt{3}$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 2이다.

정답_ ②

233

$x^2+y^2+4x-6y+9=k$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2=k+4$

원의 중심 $(-2, 3)$과 직선 $y=-2x+2$, 즉 $2x+y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4+3-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{k+4}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{3}{\sqrt{5}}<\sqrt{k+4}$

양변을 제곱하면

$\frac{9}{5}<k+4$　　$\therefore\ k>-\frac{11}{5}$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 k의 최솟값은 -2이다.

정답_ ②

234

원 $x^2+y^2=8$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x-ay+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4|}{\sqrt{1+(-a)^2}}=\frac{4}{\sqrt{1+a^2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{4}{\sqrt{1+a^2}}=2\sqrt{2}$, $2=\sqrt{2+2a^2}$

양변을 제곱하면

$4=2+2a^2$, $a^2=1$, $(a+1)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 $-1\times1=-1$

정답_ ⑤

다른 풀이

$x-ay+4=0$에서 $x=ay-4$

$x^2+y^2=8$에 $x=ay-4$를 대입하면

$(ay-4)^2+y^2=8$　　$\therefore\ (a^2+1)y^2-8ay+8=0$

이차방정식 $(a^2+1)y^2-8ay+8=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-4a)^2-8(a^2+1)=0$

$8a^2-8=0$, $a^2=1$, $(a+1)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 -1이다.

235

원의 중심 $(4, 1)$과 직선 $x+2y+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4+2+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$

원과 직선이 접하므로 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-1)^2=20$

정답_ $(x-4)^2+(y-1)^2=20$

236

두 점 $(-3, 0)$, $(1, 0)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$　　$\therefore\ (-1, 0)$

원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\sqrt{\{1-(-3)\}^2}=2$

원과 직선이 접해야 하므로 원의 중심 $(-1, 0)$과 직선 $kx+y-2=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같아야 한다.

즉, $\frac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1^2}}=2$이어야 하므로

$\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$, $|k+2|=2\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면

$k^2+4k+4=4k^2+4$, $3k^2-4k=0$

$k(3k-4)=0$　　$\therefore\ k=0$ 또는 $k=\frac{4}{3}$

이때 k는 양수이므로 $k=\frac{4}{3}$

정답_ ④

237

원의 중심이 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a,\ 2a+1)\ (a>0)$이라고 하면 원의 중심과 직선 $3x-4y-16=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3a-4(2a+1)-16|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-5a-20|}{5}=|a+4|$$

원이 x축에 접하므로 원의 반지름의 길이는

$|$중심의 y좌표$|=2a+1$

즉, 원의 반지름의 길이가 $2a+1$이고 원과 직선이 접해야 하므로

$|a+4|=2a+1$

$\therefore\ a+4=2a+1$ 또는 $a+4=-(2a+1)$

(i) $a+4=2a+1$일 때

$a=3$

(ii) $a+4=-2a-1$일 때

$3a=-5 \qquad \therefore\ a=-\frac{5}{3}$

(i), (ii)에서 $a=3\ (\because\ a>0)$

따라서 원의 반지름의 길이는

$2a+1=2\times3+1=7$

정답_ ⑤

238

x축, y축에 동시에 접하고 중심이 제1사분면 위에 있는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이다.

즉, 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

원의 중심과 직선 $12x-5y+6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12r-5r+6|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{|7r+6|}{13}$$

원과 직선이 접해야 하므로

$\frac{|7r+6|}{13}=r,\ |7r+6|=13r$

$\therefore\ 7r+6=13r$ 또는 $7r+6=-13r$

(i) $7r+6=13r$일 때

$6r=6 \qquad \therefore\ r=1$

(ii) $7r+6=-13r$일 때

$20r=-6 \qquad \therefore\ r=-\frac{3}{10}$

(i), (ii)에서 $r=1\ (\because\ r>0)$

따라서 원의 반지름의 길이가 1이므로 구하는 원의 넓이는

$\pi\times1^2=\pi$

정답_ ①

239

원의 중심이 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a,\ a^2)$으로 놓을 수 있다.

원의 중심 $(a,\ a^2)$과 직선 $3x+2y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3a+2a^2+4|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|2a^2+3a+4|}{\sqrt{13}}$$

또, 원의 중심 $(a,\ a^2)$과 직선 $2x-3y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2a-3a^2+2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|-3a^2+2a+2|}{\sqrt{13}}$$

두 직선이 모두 원에 접해야 하므로

$$\frac{|2a^2+3a+4|}{\sqrt{13}}=\frac{|-3a^2+2a+2|}{\sqrt{13}}$$

$|2a^2+3a+4|=|-3a^2+2a+2|$

$\therefore\ 2a^2+3a+4=-3a^2+2a+2$ 또는

$2a^2+3a+4=-(-3a^2+2a+2)$

(i) $2a^2+3a+4=-3a^2+2a+2$일 때

$5a^2+a+2=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=1^2-4\times5\times2=-39<0$

따라서 주어진 식을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $2a^2+3a+4=-(-3a^2+2a+2)$일 때

$a^2-5a-6=0,\ (a+1)(a-6)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=6$

(i), (ii)에서 $a=-1\ (\because\ a<0)$이므로 $b=(-1)^2=1$

$\therefore\ a^2+b^2=(-1)^2+1^2=2$

정답_ ①

240

원 $(x-1)^2+y^2=1$의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 $y=mx+4$, 즉 $mx-y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|m+4|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|m+4|}{\sqrt{m^2+1}}>1,\ |m+4|>\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$m^2+8m+16>m^2+1,\ 8m>-15$

$\therefore\ m>-\frac{15}{8}$

따라서 구하는 정수 m의 최솟값은 -1이다.

정답_ ②

241

$x^2+y^2-2kx+k^2-k+1=0$에서

$(x-k)^2+y^2=k-1$

원 $x^2+y^2-2kx+k^2-k+1=0$의 중심 $(k,\ 0)$과 직선 $y=-x+1$, 즉 $x+y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{k-1}\ (k>1)$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|k-1|}{\sqrt{2}}>\sqrt{k-1},\ |k-1|>\sqrt{2k-2}$

양변을 제곱하면

$k^2-2k+1>2k-2,\ k^2-4k+3>0$

$(k-1)(k-3)>0 \qquad \therefore\ k<1$ 또는 $k>3$

따라서 $k>3\ (\because\ k>1)$이므로

$\alpha=3$

정답_ ③

242

$x^2+y^2-4x-2y=a-3$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=a+2$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{a+2}$이고 원의 중심 $(2,\ 1)$과 x축 사이의 거리는 1이므로 원이 x축과 만나려면

$\sqrt{a+2} \geq 1$

양변을 제곱하면

$a+2 \geq 1 \qquad \therefore a \geq -1$ ...... ㉠

또, 원의 중심 $(2,\ 1)$과 y축 사이의 거리는 2이므로 원이 y축과 만나지 않으려면

$\sqrt{a+2} < 2$

양변을 제곱하면

$a+2 < 4 \qquad \therefore a < 2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는

$-1 \leq a < 2$

정답_ ③

243

원 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$의 중심 $(-1,\ 3)$과 직선 $3x+4y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3+12+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|k+9|}{5}$$

원 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$의 반지름의 길이가 3이므로 이 원과 직선이 만나려면

$\dfrac{|k+9|}{5} \leq 3,\ |k+9| \leq 15$

$-15 \leq k+9 \leq 15 \qquad \therefore -24 \leq k \leq 6$ ...... ㉠

또, 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$의 중심 $(2,\ -1)$과 직선 $3x+4y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6-4+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|k+2|}{5}$$

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$의 반지름의 길이가 2이므로 이 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|k+2|}{5} > 2,\ |k+2| > 10$

$k+2 < -10$ 또는 $k+2 > 10$

$\therefore k < -12$ 또는 $k > 8$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $-24 \leq k < -12$이므로 주어진 조건을 만족시키는 정수 k는 $-24,\ -23,\ -22,\ -21,\ \cdots,\ -13$의 12개이다.

정답_ 12

244

점 $(a,\ -2a+5)$가 제4사분면 위의 점이므로

$a>0,\ -2a+5<0$

$\therefore a > \dfrac{5}{2}$ ...... ㉠

원의 중심 $(a,\ -2a+5)$와 직선 $2x-3y-18=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2a-3(-2a+5)-18|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|8a-33|}{\sqrt{13}}$$

이때 원의 넓이가 13π이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이고 이 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|8a-33|}{\sqrt{13}} > \sqrt{13},\ |8a-33| > 13$

$8a-33 < -13$ 또는 $8a-33 > 13$

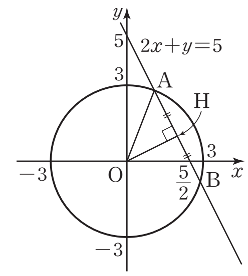
$\therefore a < \dfrac{5}{2}$ 또는 $a > \dfrac{23}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a > \dfrac{23}{4}$이므로 자연수 a의 최솟값은 6이다.

정답_ 6

245

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=9$의 중심을 $O(0,\ 0)$, 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $2x+y=5$, 즉 $2x+y-5=0$이 만나는 두 점을 A, B, 점 O에서 직선 $2x+y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{OH}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 AOH에서

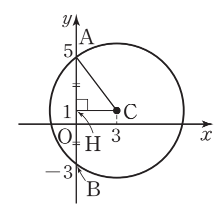
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\times2=4$

정답_ ④

246

오른쪽 그림과 같이 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=25$의 중심을 $C(3,\ 1)$, 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{CH}=3$



직각삼각형 ACH에서

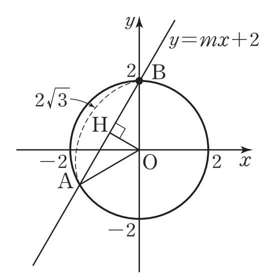
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\times4=8$

정답_ ④

247

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=4$의 중심을 $O(0,\ 0)$, 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$이 만나는 두 점을 A, B, 점 O에서 직선 $mx-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{OH}=\dfrac{|2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{m^2+1}}$

원과 직선이 만나서 생기는 현 AB의 길이가 $2\sqrt{3}$이므로

$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

직각삼각형 AOH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

즉, $\dfrac{2}{\sqrt{m^2+1}}=1$이므로 $2=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$4=m^2+1,\ m^2=3 \qquad \therefore m=-\sqrt{3}$ 또는 $m=\sqrt{3}$

이때 $m>0$이므로 $m=\sqrt{3}$

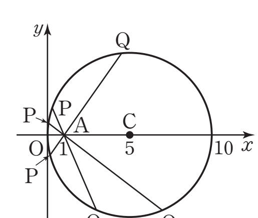
정답_ $\sqrt{3}$

248

$x^2+y^2-10x=0$에서

$(x-5)^2+y^2=25$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(5,\ 0)$, 점 $A(1,\ 0)$을 지나는 직선이 이 원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, $\overline{PQ}=l$이라고 하자.



(i) $\overline{CA}\perp\overline{PQ}$일 때

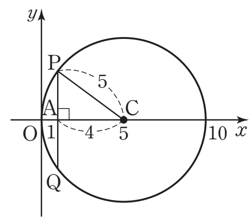
현 PQ의 길이가 최소이고, 이때 $\overline{AP}=\overline{AQ}$이다.

직각삼각형 ACP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{AC}^2}$

$=\sqrt{5^2-4^2}=3$

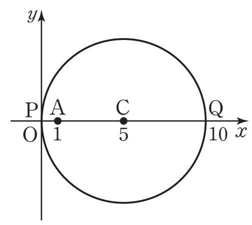
$\therefore \overline{PQ}=2\overline{AP}=2\times3=6$



따라서 현 PQ의 길이 l의 최솟값은 6이다.

(ii) 현 PQ가 원의 지름일 때

현 PQ의 길이가 최대이므로 현 PQ의 길이 l의 최댓값은 10이다.



(i), (ii)에서 $6\le l\le10$이므로 현의 길이가 자연수인 경우는 6, 7, 8, 9, 10이다.

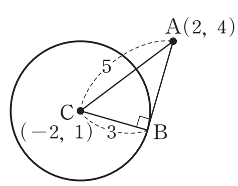
이때 길이가 7, 8, 9인 현은 각각 2개씩 존재하고, 길이가 6, 10인 현은 각각 1개씩 존재하므로 구하는 현의 개수는

$3\times2+2\times1=8$

정답_ ③

249

오른쪽 그림과 같이 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=9$의 중심을 $C(-2,\ 1)$이라고 하면



$\overline{AC}=\sqrt{(-2-2)^2+(1-4)^2}=5$

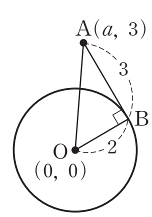
원의 반지름의 길이가 3이므로 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

정답_ 4

250

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=4$의 중심을 $O(0,\ 0)$이라고 하면



$\overline{OA}=\sqrt{a^2+9}$

원의 반지름의 길이가 2이고 $\overline{AB}=3$이므로 직각삼각형 OAB에서

$\overline{OA}=\sqrt{\overline{OB}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

즉, $\sqrt{a^2+9}=\sqrt{13}$이므로 양변을 제곱하면

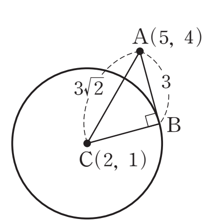
$a^2+9=13,\ a^2=4 \qquad \therefore a=-2$ 또는 $a=2$

이때 $a>0$이므로 $a=2$

정답_ ②

251

오른쪽 그림과 같이 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=a$의 중심을 $C(2,\ 1)$이라고 하면



$\overline{AC}=\sqrt{(2-5)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{2}$

$\overline{AB}=3$이므로 직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-3^2}=3$

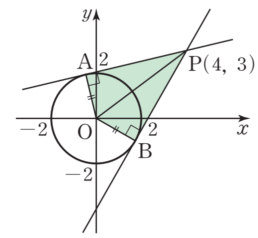
이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{a}$이므로

$\sqrt{a}=3 \qquad \therefore a=9$

정답_ ③

252

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이가 2이고



$\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

직각삼각형 OAP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

이때 $\triangle OAP\equiv\triangle OBP$ (RHS 합동)

이므로 사각형 OAPB의 넓이는

$2\times\triangle OAP=2\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{21}\times2\right)=2\sqrt{21}$

정답_ $2\sqrt{21}$

253

원 $x^2+y^2=2$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

정답_ $\sqrt{2}$

254

원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$

원의 중심 $(-2,\ 1)$과 직선 $y=2x-5$, 즉 $2x-y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4-1-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$

원의 반지름의 길이가 2이므로

$M=2\sqrt{5}+2,\ m=2\sqrt{5}-2$

$\therefore Mm=(2\sqrt{5}+2)(2\sqrt{5}-2)=20-4=16$

정답_ 16

255

원 $x^2+y^2-6x+6y+8=0$에서

$(x-3)^2+(y+3)^2=10$

원의 중심 $(3,\ -3)$과 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|9+3+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|12+k|}{\sqrt{10}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이고 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값이 $3\sqrt{10}$이므로

$\frac{|12+k|}{\sqrt{10}}+\sqrt{10}=3\sqrt{10}$

$\frac{|12+k|}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10},\ |12+k|=20$

$12+k=-20$ 또는 $12+k=20$

$\therefore k=-32$ 또는 $k=8$

이때 $k>0$이므로 $k=8$

정답_ ②

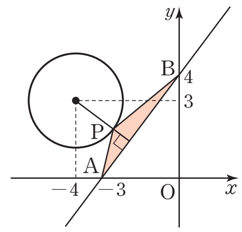
256

x절편이 -3, y절편이 4인 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$ $\quad\therefore 4x-3y+12=0$

따라서 원의 중심 $(-4,\ 3)$과 직선 $4x-3y+12=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-16-9+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{13}{5}$



원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은

$\frac{13}{5}-2=\frac{3}{5}$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{\{0-(-3)\}^2+(4-0)^2}=5$

이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times5\times\frac{3}{5}=\frac{3}{2}$

정답_ ③

참고 x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

257

점 $(-2,\ -3)$을 지나는 직선 l과 원점 사이의 거리가 최대이려면 직선 l은 원점과 점 $(-2,\ -3)$을 지나는 직선과 수직이어야 한다.

즉, 직선 l의 기울기를 m이라고 하면

$\frac{0+3}{0+2}\times m=-1$ $\quad\therefore m=-\frac{2}{3}$

직선 l의 방정식은

$y-(-3)=-\frac{2}{3}\{x-(-2)\}$ $\quad\therefore 2x+3y+13=0$

따라서 원의 중심 $(2,\ 3)$과 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|4+9+13|}{\sqrt{2^2+3^2}}=2\sqrt{13}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$이므로 원 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최댓값은

$2\sqrt{13}+\sqrt{13}=3\sqrt{13}$

정답_ $3\sqrt{13}$

258

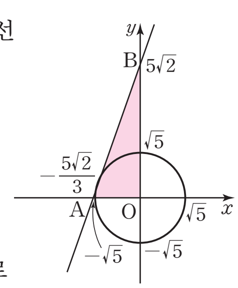
원 $x^2+y^2=5$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{5}\times\sqrt{3^2+1}$

$\therefore y=3x+5\sqrt{2}$ 또는 $y=3x-5\sqrt{2}$

이때 y절편이 양수인 직선은

$y=3x+5\sqrt{2}$



따라서 $\mathrm{A}\left(-\frac{5\sqrt{2}}{3},\ 0\right)$, $\mathrm{B}(0,\ 5\sqrt{2})$이므로

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{3}\times5\sqrt{2}=\frac{25}{3}$

정답_ ③

259

직선 $x+2y-5=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 2이다.

원 $x^2+y^2=9$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2x\pm3\sqrt{2^2+1}$

$\therefore y=2x+3\sqrt{5}$ 또는 $y=2x-3\sqrt{5}$

따라서 $m=2$, $n=3\sqrt{5}$ 또는 $m=2$, $n=-3\sqrt{5}$이므로

$m^2+n^2=2^2+(\pm3\sqrt{5})^2=49$

정답_ ④

260

원 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$에서

$(x+3)^2+(y-2)^2=4$

기울기가 $\frac{3}{4}$인 직선의 방정식을 $y=\frac{3}{4}x+k$ (k는 실수)라고 하면

$3x-4y+4k=0$

이 직선이 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=4$에 접하려면 원의 중심 $(-3,\ 2)$와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$\frac{|-9-8+4k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$, $|4k-17|=10$

$4k-17=-10$ 또는 $4k-17=10$

$\therefore k=\frac{7}{4}$ 또는 $k=\frac{27}{4}$

따라서 두 직선의 y절편은 각각 $\frac{7}{4}$, $\frac{27}{4}$이므로 두 직선의 y절편의 차는

$\frac{27}{4}-\frac{7}{4}=5$

정답_ ②

261

중심이 점 $(-1,\ 1)$인 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=r^2$

이 원이 점 $(-2,\ -2)$를 지나므로

$(-2+1)^2+(-2-1)^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=10$

직선 $3x+y+5=0$에 평행한 직선의 방정식을

$3x+y+k=0$ (k는 실수)

이라고 하자. 이 직선이 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=10$에 접하려면 원의 중심 $(-1,\ 1)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같아야 하므로

$\frac{|-3+1+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$, $|k-2|=10$

$k-2=-10$ 또는 $k-2=10$

$\therefore k=-8$ 또는 $k=12$

따라서 접선의 방정식은

$3x+y-8=0$ 또는 $3x+y+12=0$

이때 y절편이 음수인 직선의 방정식은

$3x+y+12=0$, 즉 $y=-3x-12$이므로

$m=-3$, $n=-12$

$\therefore \frac{n}{m}=\frac{-12}{-3}=4$

정답_ 4

262

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$3x+y=10 \qquad \therefore\ y=-3x+10$

따라서 접선의 y절편은 10이다.

정답_ ⑤

다른 풀이

원의 중심 $(0,\ 0)$과 점 $(3,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$

즉, 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 -3이므로 접선의 방정식은

$y-1=-3(x-3) \qquad \therefore\ y=-3x+10$

따라서 접선의 y절편은 10이다.

263

점 $(-3,\ a)$가 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

$9+a^2=25,\ a^2=16 \qquad \therefore\ a=-4$ 또는 $a=4$

이때 $a>0$이므로 $a=4$

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-3,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$-3x+4y=25$

이 직선이 점 $(b,\ 1)$을 지나므로

$-3b+4=25,\ -3b=21 \qquad \therefore\ b=-7$

$\therefore\ a+b=4+(-7)=-3$

정답_ ①

264

점 $(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2=17$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=17$ …… ㉠

원 $x^2+y^2=17$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=17 \qquad \therefore\ y=-\frac{a}{b}x+\frac{17}{b}$

접선의 기울기가 4이므로 $-\frac{a}{b}=4$

$\therefore\ a=-4b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4,\ b=1$ 또는 $a=4,\ b=-1$

$\therefore\ ab=-4$

정답_ -4

265

$x+y=1$에서 $y=-x+1$

$x^2+y^2=5$에 $y=-x+1$을 대입하면

$x^2+(-x+1)^2=5,\ 2x^2-2x+1=5$

$x^2-x-2=0,\ (x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 원과 직선의 두 교점의 좌표는 $(-1,\ 2)$ 또는 $(2,\ -1)$

점 $(-1,\ 2)$에서 원에 접하는 접선의 방정식은

$-x+2y=5 \qquad \therefore\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ …… ㉠

점 $(2,\ -1)$에서 원에 접하는 접선의 방정식은

$2x-y=5 \qquad \therefore\ y=2x-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=5,\ y=5$

따라서 두 접선의 교점의 좌표가 $(5,\ 5)$이므로 $a=5,\ b=5$

$\therefore\ a+b=5+5=10$

정답_ ②

266

원 $(x-2)^2+(y-1)^2=8$의 중심 $(2,\ 1)$과 점 $(4,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는

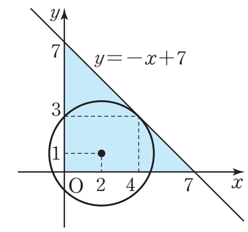
$\frac{3-1}{4-2}=1$

즉, 점 $(4,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 -1이므로 접선의 방정식은

$y-3=-(x-4) \qquad \therefore\ y=-x+7$

이 직선의 x절편과 y절편이 모두 7이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times7\times7=\frac{49}{2}$



정답_ $\frac{49}{2}$

267

원 $x^2+y^2=8$ 위의 점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$2x+2y=8 \qquad \therefore\ x+y-4=0$

원 $x^2+y^2+4x-4y+4+a=0$에서

$(x+2)^2+(y-2)^2=4-a$

원의 중심 $(-2,\ 2)$와 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{4-a}$와 같아야 하므로

$\frac{|-2+2-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{4-a},\ 2\sqrt{2}=\sqrt{4-a}$

양변을 제곱하면 $8=4-a$

$\therefore\ a=-4$

정답_ -4

268

점 $(3,\ 0)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y=m(x-3) \qquad \therefore\ mx-y-3m=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=1$에 접하려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$\frac{|-3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ |-3m|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2=m^2+1,\ m^2=\frac{1}{8}$

$\therefore\ m=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $m=\frac{\sqrt{2}}{4}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-3)$ 또는 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}(x-3)$

$\therefore\ y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 또는 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

정답_ $y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 또는 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

다른 풀이

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1$ …… ㉠

이 직선이 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$3x_1=1 \qquad \therefore\ x_1=\frac{1}{3}$

한편, 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=1$

이 식에 $x_1=\frac{1}{3}$을 대입하면

$\frac{1}{9}+y_1^2=1$, $y_1^2=\frac{8}{9}$

$\therefore y_1=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 또는 $y=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

즉, $x_1=\frac{1}{3}$, $y_1=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 또는 $x_1=\frac{1}{3}$, $y_1=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$\frac{1}{3}x-\frac{2\sqrt{2}}{3}y=1$ 또는 $\frac{1}{3}x+\frac{2\sqrt{2}}{3}y=1$

$\therefore y=\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 또는 $y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{4}$

269

원 O'의 넓이를 이등분하는 직선 l은 원 O'의 중심을 지나야 한다. 원 O'의 중심의 좌표가 $(1, 3)$이므로 직선의 기울기를 m이라고 하면 직선 l의 방정식은

$y-3=m(x-1)$ $\quad\therefore mx-y-m+3=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=2$에 접하려면 원 O의 중심 $(0, 0)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같아야 하므로

$\frac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

$|-m+3|=\sqrt{2(m^2+1)}$

양변을 제곱하면

$m^2-6m+9=2m^2+2$, $m^2+6m-7=0$

$(m+7)(m-1)=0$ $\quad\therefore m=-7$ 또는 $m=1$

따라서 구하는 직선 l의 방정식은

$y-3=-7(x-1)$ 또는 $y-3=x-1$

$\therefore y=-7x+10$ 또는 $y=x+2$

정답_ $y=-7x+10$ **또는** $y=x+2$

270

원 $x^2+y^2+6x-2y+1=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=9$

점 $(3, 1)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y-1=m(x-3)$ $\quad\therefore mx-y-3m+1=0$

이 직선이 원 $(x+3)^2+(y-1)^2=9$에 접하려면

원의 중심 $(-3, 1)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3과 같아야 하므로

$\frac{|-3m-1-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$, $\frac{|-6m|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

$|-2m|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$4m^2=m^2+1$, $m^2=\frac{1}{3}$

$\therefore m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{1}{3}$

정답_ ③

271

점 $(\sqrt{7}, a)$를 지나는 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y-a=m(x-\sqrt{7})$ $\quad\therefore mx-y-\sqrt{7}m+a=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=16$에 접하려면 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 4와 같아야 하므로

$\frac{|-\sqrt{7}m+a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=4$, $|-\sqrt{7}m+a|=4\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$7m^2-2\sqrt{7}am+a^2=16m^2+16$

$\therefore 9m^2+2\sqrt{7}am+16-a^2=0$

m에 대한 이 이차방정식의 두 근을 m_1, m_2라고 하면 두 접선의 기울기가 m_1, m_2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1m_2=\frac{16-a^2}{9}=-1$

$a^2=25$, $(a+5)(a-5)=0$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=5$

이때 $a>0$이므로 $a=5$

정답_ ⑤

272

점 $P(-4, 2)$를 지나는 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y-2=m\{x-(-4)\}$ $\quad\therefore mx-y+4m+2=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=4$에 접하려면 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$\frac{|4m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $|2m+1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$4m^2+4m+1=m^2+1$, $3m^2+4m=0$

$m(3m+4)=0$ $\quad\therefore m=0$ 또는 $m=-\frac{4}{3}$

따라서 접선의 방정식은

$y-2=0$ 또는 $y-2=-\frac{4}{3}\{x-(-4)\}$

$\therefore y=2$ 또는 $4x+3y+10=0$

원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=2$의 교점은 $A(0, 2)$이므로 점 A와 직선 $4x+3y+10=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6+10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{16}{5}$

이때 $\overline{PA}=\overline{PB}=4$이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times\frac{16}{5}=\frac{32}{5}$

정답_ $\frac{32}{5}$

273

점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=24$에서

$(x+4)^2+y^2+(x-2)^2+(y-2)^2=24$

$2x^2+2y^2+4x-4y=0$, $x^2+y^2+2x-2y=0$

$\therefore (x+1)^2+(y-1)^2=2$

정답_ ③

274

원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$

점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면 점 P는 원 위의 점이므로

$(a+2)^2+(b-1)^2=4$ …… ㉠

이때 선분 AP의 중점의 좌표를 (x, y)라고 하면

$x=\frac{a+2}{2}$, $y=\frac{b-1}{2}$

$\therefore a=2x-2$, $b=2y+1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2x-2+2)^2+(2y+1-1)^2=4$

$4x^2+4y^2=4 \qquad \therefore x^2+y^2=1$

따라서 선분 AP의 중점의 자취는 중심의 좌표가 $(0, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi\times1=2\pi$

정답_ ②

275

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:3$이므로

$\overline{BP}=3\overline{AP} \qquad \therefore \overline{BP}^2=9\overline{AP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면

$(x-6)^2+y^2=9\{(x+2)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-12x+36=9x^2+9y^2+36x+36$

$8x^2+8y^2+48=0$, $x^2+y^2+6x=0$

$\therefore (x+3)^2+y^2=9$

정답_ $(x+3)^2+y^2=9$

276

$x^2+y^2+8x-6y+k=0$에서

$(x+4)^2+(y-3)^2=25-k$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{25-k}$ …… ❶

따라서 원의 넓이는 $(25-k)\pi$이므로

$(25-k)\pi=13\pi$, $25-k=13$

$\therefore k=12$ …… ❷

정답_ 12

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이 구하기	60 %
❷ k의 값 구하기	40 %

277

$x^2+y^2+10x-6y-k^2-2k+17=0$에서

$(x+5)^2+(y-3)^2=k^2+2k+17$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{k^2+2k+17}$ …… ❶

원의 넓이가 최소가 되려면 원의 반지름의 길이가 최소가 되어야 한다.

한편, $k^2+2k+17=(k+1)^2+16$이므로 $k=-1$일 때 원의 반지름의 길이가 최소이다. …… ❷

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{16}=4$ …… ❸

정답_ $k=-1$, 원의 반지름의 길이: 4

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이를 k로 나타내기	30 %
❷ 원의 반지름의 길이가 최소가 되는 k의 값 구하기	50 %
❸ 원의 반지름의 길이 구하기	20 %

278

$x^2+y^2-2x+4y+8=a$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=a-3$ …… ㉠

이므로 원 ㉠은 중심의 좌표가 $(1, -2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{a-3}$인 원이다. 원 ㉠이 x축과 만나지 않으려면 원의 반지름의 길이가 중심의 y좌표의 절댓값보다 작아야 한다.

즉, $\sqrt{a-3}<|-2|$이어야 하므로 양변을 제곱하면

$a-3<4$

$\therefore a<7$ …… ❶

또, 원 ㉠이 y축과 만나려면 원의 반지름의 길이가 중심의 x좌표의 절댓값보다 크거나 같아야 한다.

즉, $\sqrt{a-3}\geq|1|$이어야 하므로 양변을 제곱하면

$a-3\geq1$

$\therefore a\geq4$ …… ❷

따라서 주어진 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$4\leq a<7$

이므로 정수 a는 4, 5, 6의 3개이다. …… ❸

정답_ 3

채점 기준	비율
❶ 원이 x축과 만나지 않을 때 a의 값의 범위 구하기	40 %
❷ 원이 y축과 만날 때 a의 값의 범위 구하기	40 %
❸ 정수 a의 개수 구하기	20 %

279

원의 중심 $(1, -1)$과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2+1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+3|}{\sqrt{5}}$ …… ❶

이때 원의 넓이가 5π이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이고, 원과 직선이 접하므로

$\frac{|k+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ …… ❷

$|k+3|=5$

$k+3=-5$ 또는 $k+3=5$

$\therefore k=2$ 또는 $k=-8$ …… ❸

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$2+(-8)=-6$ …… ❹

정답_ -6

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리 구하기	30 %
❷ 원과 직선이 접할 조건을 이용하여 k에 대한 식 세우기	30 %
❸ k의 값 구하기	30 %
❹ 모든 k의 값의 합 구하기	10 %

280

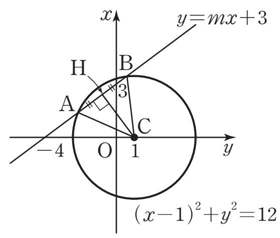
$x^2+y^2-2x-11=0$에서

$(x-1)^2+y^2=12$

따라서 원의 중심의 좌표가 $(1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$이다.

이때 삼각형 ABC가 정삼각형이어야 하므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=2\sqrt{3}$ ❶



오른쪽 그림과 같이 점 C에서 직선 $y=mx+3$, 즉 $mx-y+3=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{CH}=\dfrac{|m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$

$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 ACH에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$ ❷

따라서 $\dfrac{|m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=3$이므로

$|m+3|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$m^2+6m+9=9m^2+9$

$4m^2-3m=0,\ m(4m-3)=0$

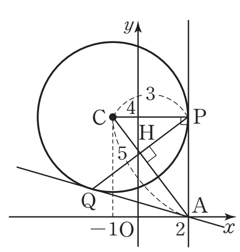
$\therefore\ m=0$ 또는 $m=\dfrac{3}{4}$

이때 $m\neq0$이므로 $m=\dfrac{3}{4}$ ❸

정답_ $\dfrac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ 삼각형 ABC의 세 변의 길이 구하기	20 %
❷ 원의 중심과 직선 AB 사이의 거리를 두 가지 방법으로 구하기	50 %
❸ m의 값 구하기	30 %

281



오른쪽 그림과 같이 원 $(x+1)^2+(y-4)^2=9$의 중심을 $C(-1,\ 4)$라고 하면

$\overline{AC}=\sqrt{(-1-2)^2+(4-0)^2}=5$ ❶

직선 AP는 원의 접선이므로

$\overline{AP}\perp\overline{CP}$

직각삼각형 APC에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ ❷

한편, $\overline{PQ}\perp\overline{AC}$이므로 선분 PQ와 선분 AC의 교점을 H라고 하면 삼각형 APC의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{PC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{PH}$

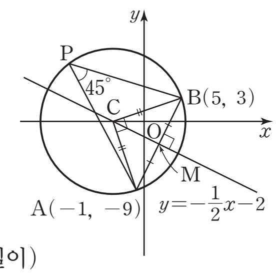
$\dfrac{1}{2}\times4\times3=\dfrac{1}{2}\times5\times\overline{PH}\qquad\therefore\ \overline{PH}=\dfrac{12}{5}$

$\therefore\ \overline{PQ}=2\overline{PH}=\dfrac{24}{5}$ ❸

정답_ $\dfrac{24}{5}$

채점 기준	비율
❶ 점 A와 원의 중심 사이의 거리 구하기	30 %
❷ $\overline{AP}$의 길이 구하기	30 %
❸ $\overline{PQ}$의 길이 구하기	40 %

282



서로 다른 세 점 A, B, P를 지나는 원에 대하여 $\angle APB=45^\circ$, 즉 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각의 크기가 45°이므로 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각의 크기가 90°이다.

$\therefore\ \angle ACB=90^\circ$

이때 $\overline{AC}=\overline{BC}$ ($\because$ 원의 반지름의 길이)

이므로 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이다.

따라서 현 AB의 수직이등분선이 원의 중심 C를 지난다.

선분 AB의 중점을 M이라고 하면

$\left(\dfrac{-1+5}{2},\ \dfrac{-9+3}{2}\right)\qquad\therefore\ M(2,\ -3)$

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{3-(-9)}{5-(-1)}=2$이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

현 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y-(-3)=-\dfrac{1}{2}(x-2)\qquad\therefore\ y=-\dfrac{1}{2}x-2$

한편, $\overline{AB}=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+\{3-(-9)\}^2}=6\sqrt{5}$

이고 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AB}=\sqrt{2}\times\overline{AC},\ 6\sqrt{5}=\sqrt{2}\times\overline{AC}$

$\therefore\ \overline{AC}=3\sqrt{10}$

즉, 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{10}$이므로 점 C의 좌표를 $\left(a,\ -\dfrac{1}{2}a-2\right)$라고 하면 점 C를 중심으로 하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}a+2\right)^2=90$

점 $B(5,\ 3)$이 이 원 위의 점이므로

$(5-a)^2+\left(5+\dfrac{1}{2}a\right)^2=90$

$5a^2-20a-160=0,\ a^2-4a-32=0$

$(a+4)(a-8)=0\qquad\therefore\ a=-4$ 또는 $a=8$

$\therefore\ C(-4,\ 0)$ 또는 $C(8,\ -6)$

(i) $C(-4,\ 0)$일 때

$k=|\overline{OC}|=|0-(-4)|=4$

(ii) $C(8,\ -6)$일 때

$k=|\overline{OC}|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$

(i), (ii)에서 k의 최솟값은 4이다.

정답_ ②

283

$\overline{OA}=4\sqrt{3},\ \overline{OB}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+6^2}=4\sqrt{3},$

$\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{3}-4\sqrt{3})^2+6^2}=4\sqrt{3}$

이므로 삼각형 OAB는 정삼각형이다.

즉, 삼각형 OAB의 내접원의 중심은 무게중심과 일치하므로 내접

원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{0+4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{3}, \frac{0+0+6}{3}\right)$ $\quad\therefore (2\sqrt{3}, 2)$

이때 선분 OA가 x축 위에 있으므로 내접원은 x축에 접한다.

따라서 원의 반지름의 길이는

$|$중심의 y좌표$|=|2|=2$

이므로 구하는 내접원의 방정식은

$(x-2\sqrt{3})^2+(y-2)^2=4$

정답_ $(x-2\sqrt{3})^2+(y-2)^2=4$

참고 삼각형의 외심, 내심, 무게중심

(1) 모든 삼각형의 내심은 삼각형의 내부에 있다.

(2) 정삼각형의 외심, 내심, 무게중심은 모두 일치한다.

(3) 이등변삼각형의 외심, 내심, 무게중심은 모두 꼭지각의 이등분선 위에 있다.

(4) 직각삼각형의 외심은 빗변의 중심이다.

284

$x^2+y^2+6x+10y+2k=0$에서

$(x+3)^2+(y+5)^2=34-2k$

방정식 $x^2+y^2+6x+10y+2k=0$이 원이 되려면

$\sqrt{34-2k}>0$, $34-2k>0$

$\therefore k<17$ ...... ㉠

이때 원 위의 모든 점이 제3사분면 위에 있으려면 원이 x축, y축과 만나지 않아야 하므로 원의 반지름의 길이가 3보다 작아야 한다.

즉, $\sqrt{34-2k}<3$이어야 하므로

$34-2k<9$, $2k>25$

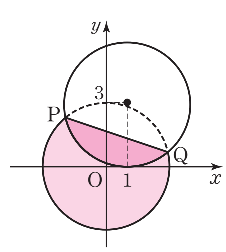
$\therefore k>\frac{25}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{25}{2}<k<17$이므로 정수 k는 13, 14, 15, 16의 4개이다.

정답_ ①

285

오른쪽 그림과 같이 $\overset{\frown}{PQ}$는 점 $(1, 0)$에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 3인 원의 일부이다.



즉, $\overset{\frown}{PQ}$를 포함하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2=9$

$\therefore x^2+y^2-2x-6y+1=0$

선분 PQ가 두 원 $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2-2x-6y+1=0$의 공통인 현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-2x-6y+1)=0$

$2x+6y-10=0$ $\quad\therefore -x-3y+5=0$

따라서 $a=-1$, $b=-3$이므로

$a^2+b^2=(-1)^2+(-3)^2=10$

정답_ 10

286

두 원 $x^2+y^2-6x+6y+8=0$, $x^2+y^2-4x=0$의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x+6y+8+k(x^2+y^2-4x)=0$ (단, $k\neq-1$) ...... ㉠

이 원이 x축에 접하므로 이 접점의 좌표를 $(a, 0)$이라고 하면

$a^2-6a+8+ka^2-4ak=0$

$\therefore (k+1)a^2-2(2k+3)a+8=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{-(2k+3)\}^2-8(k+1)=0$

$4k^2+4k+1=0$, $(2k+1)^2=0$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$

$k=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-6x+6y+8-\frac{1}{2}(x^2+y^2-4x)=0$

$x^2+y^2-8x+12y+16=0$

$\therefore (x-4)^2+(y+6)^2=36$

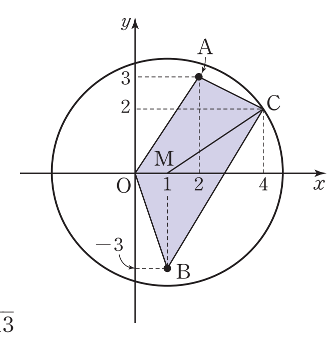
따라서 원의 반지름의 길이가 6이므로 구하는 원의 넓이는

$\pi\times6^2=36\pi$

정답_ 36π

287

$x^2+y^2-2x=k$ (k는 실수)라고 하면



$(x-1)^2+y^2=k+1$

원 $(x-1)^2+y^2=k+1$의 중심을 M$(1, 0)$이라고 하면 점 P가 점 C일 때 $\sqrt{k+1}$이 최대이고, 이때 k도 최대가 된다.

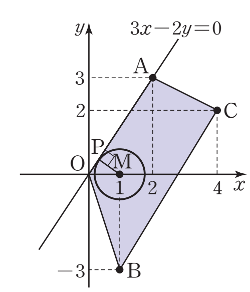
즉, $\sqrt{k+1}$의 최댓값은

$\overline{MC}=\sqrt{(4-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{13}$

이므로 $\sqrt{k+1}=\sqrt{13}$에서 $k+1=13$ $\quad\therefore k=12$

$\therefore M=12$

한편, 점 P가 원 $(x-1)^2+y^2=k+1$과 $\overline{AO}$의 접점일 때, $\sqrt{k+1}$이 최소이고, 이때 k도 최소가 된다.



직선 OA의 방정식은

$y=\frac{3}{2}x$ $\quad\therefore 3x-2y=0$

즉, $\sqrt{k+1}$의 최솟값은

$\overline{MP}=\frac{|3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$

이므로 $\sqrt{k+1}=\frac{3}{\sqrt{13}}$에서 $k+1=\frac{9}{13}$ $\quad\therefore k=-\frac{4}{13}$

$\therefore m=-\frac{4}{13}$

$\therefore M+m=12+\left(-\frac{4}{13}\right)=\frac{152}{13}$

정답_ $\frac{152}{13}$

288

직선 $3x+4y+k=0$이 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-3)^2+(y+4)^2=4$와 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 다음과 같이 두 가지 경우가 있다.

(i) 원 $x^2+y^2=4$와 한 점에서 만나고 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=4$와 서로 다른 두 점에서 만날 때

직선 $3x+4y+k=0$이 원 $x^2+y^2=4$에 접하므로

$\dfrac{|k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$, $|k|=10$

$\therefore k=-10$ 또는 $k=10$ …… ㉠

또, 직선 $3x+4y+k=0$이 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=4$와 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$\dfrac{|9-16+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}<2$, $|k-7|<10$

$-10<k-7<10$

$\therefore -3<k<17$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=10$

(ii) 원 $x^2+y^2=4$와 서로 다른 두 점에서 만나고 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=4$와 한 점에서 만날 때

직선 $3x+4y+k=0$이 원 $x^2+y^2=4$와 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$\dfrac{|k|}{\sqrt{3^2+4^2}}<2$, $|k|<10$

$\therefore -10<k<10$ …… ㉢

또, 직선 $3x+4y+k=0$이 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=4$에 접해야 하므로

$\dfrac{|9-16+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$, $|k-7|=10$

$k-7=-10$ 또는 $k-7=10$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=17$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $k=-3$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 k의 값은 -3 또는 10이므로 구하는 합은

$-3+10=7$

정답_ 7

289

$x^2+y^2-4x-2ay+a^2-9=0$에서

$(x-2)^2+(y-a)^2=13$

조건 ㈎에서 원 $x^2+y^2-4x-2ay+a^2-9=0$이 원점을 지나므로

$a^2-9=0$, $a^2=9$, $(a+3)(a-3)=0$

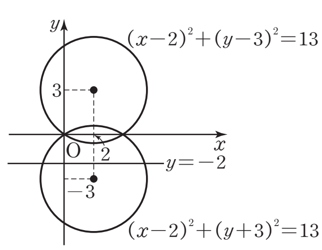
$\therefore a=-3$ 또는 $a=3$

(i) $a=-3$일 때

원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+3)^2=13$

이므로 원 C는 직선 $y=-2$와 서로 다른 두 점에서 만난다.



(ii) $a=3$일 때

원의 방정식은

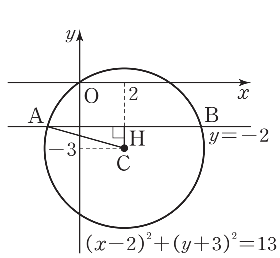
$(x-2)^2+(y-3)^2=13$

이므로 원 C는 직선 $y=-2$와 만나지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-3$

오른쪽 그림과 같이 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=13$의 중심을 점 C, 원과 직선 $y=-2$의 교점을 각각 A, B라고 하자.

원의 중심 $(2, -3)$에서 직선 $y=-2$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{\text{CH}}=3-2=1$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$이므로 직각삼각형 ACH에서

$\overline{\text{AH}}=\sqrt{\overline{\text{AC}}^2-\overline{\text{CH}}^2}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=2\sqrt{3}$

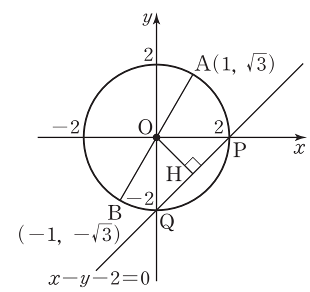
따라서 원 C와 직선 $y=-2$가 만나는 두 점 사이의 거리는

$\overline{\text{AB}}=2\overline{\text{AH}}=4\sqrt{3}$

정답_ ⑤

290

$\angle\text{APB}=\angle\text{AQB}=90°$이므로 두 점 P, Q는 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.



이 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{1+(-1)}{2}, \dfrac{\sqrt{3}+(-\sqrt{3})}{2}\right)$

$\therefore$ O$(0, 0)$

원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{\text{AB}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-1-1)^2+(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}=\dfrac{1}{2}\times 4=2$

따라서 $\overline{\text{AB}}$를 지름으로 하는 원의 방정식은

$x^2+y^2=4$

점 O에서 직선 $x-y-2=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{\text{OH}}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

직각삼각형 OHP에서

$\overline{\text{HP}}=\sqrt{\overline{\text{OP}}^2-\overline{\text{OH}}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

따라서 $\overline{\text{PQ}}=2\overline{\text{HP}}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{\text{PQ}}^2=8$

정답_ 8

다른 풀이

$\angle\text{APB}=\angle\text{AQB}=90°$이므로 두 점 P, Q는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

이 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{1+(-1)}{2}, \dfrac{\sqrt{3}+(-\sqrt{3})}{2}\right)$ $\therefore$ O$(0, 0)$

원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{\text{AB}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-1-1)^2+(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}=2$

이므로 $\overline{\text{AB}}$를 지름으로 하는 원의 방정식은

$x^2+y^2=4$

$x-y-2=0$에서 $y=x-2$

$x^2+y^2=4$에 $y=x-2$를 대입하면

$x^2+(x-2)^2=4$, $x^2+x^2-4x+4=4$

$x(x-2)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 원과 직선의 두 교점의 좌표는 $(0, -2)$, $(2, 0)$이므로 선분 PQ의 길이는

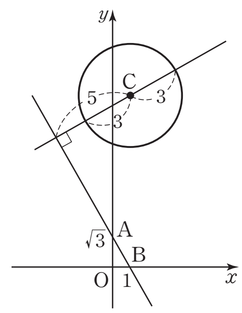
$\sqrt{(2-0)^2+\{0-(-2)\}^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{\text{PQ}}^2=(2\sqrt{2})^2=8$

291

x절편이 1, y절편이 $\sqrt{3}$인 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{1}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1 \qquad \therefore \sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$



원의 중심 C(1, 10)과 직선

$\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$ 사이의 거리는

$\frac{|\sqrt{3}+10-\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=5$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 직선 AB와 원 위의 점 P 사이의 거리를 h라고 하면

$5-3\le h\le 5+3 \qquad \therefore 2\le h\le 8$

한편, $\overline{AB}=\sqrt{(1-0)^2+(0-\sqrt{3})^2}=2$이고 삼각형 ABP의 넓이를 S라고 하면 삼각형 ABP의 밑변이 $\overline{AB}$일 때, 높이는 h와 같으므로

$S=\frac{1}{2}\times 2\times h=h \qquad \therefore 2\le S\le 8$

$S=2$ 또는 $S=8$일 때 점 P는 각각 1개씩 있고,

$S=3$ 또는 $S=4$ 또는 $S=5$ 또는 $S=6$ 또는 $S=7$일 때 점 P는 각각 2개씩 있으므로

넓이가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는

$1\times 2+2\times 5=12$

정답_ ④

292

점 (2, 1)을 지나는 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y-1=m(x-2) \qquad \therefore mx-y-2m+1=0$

이 직선이 원 $x^2+(y-1)^2=1$에 접하려면

$\frac{|-1-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ \frac{|-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

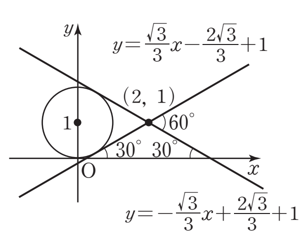
$|-2m|=\sqrt{m^2+1},\ 4m^2=m^2+1$

$m^2=\frac{1}{3} \qquad \therefore m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$ 또는 $y-1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}+1$ 또는 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}+1$



직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_1이라고 하면

$\tan\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore \theta_1=30^\circ$

직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}+1$이

x축의 음의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_2라고 하면

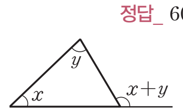
$\tan\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore \theta_2=30^\circ$

따라서 두 접선이 이루는 예각의 크기는

$\theta_1+\theta_2=30^\circ+30^\circ=60^\circ$

정답_ 60°

참고 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.



293

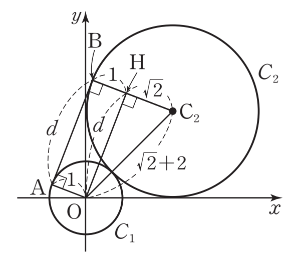
원 C_2의 중심을 C_2, 반지름의 길이를 a라고 하면 원 C_2의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

두 원 C_1, C_2가 외접하므로 두 원의 중심 (0, 0), (a, a) 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같다.

즉, $\sqrt{2}a=a+1$이므로 $(\sqrt{2}-1)a=1$

$\therefore a=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$



오른쪽 그림과 같이 원 C_1의 중심 O에서 $\overline{C_2B}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{BH}=\overline{AO}=1$

$\therefore \overline{C_2H}=\overline{C_2B}-\overline{BH}$

$=(\sqrt{2}+1)-1=\sqrt{2}$

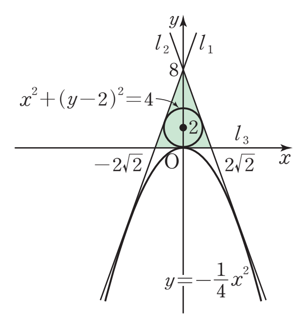
직각삼각형 OC_2H에서

$d^2=\overline{OH}^2=\overline{OC_2}^2-\overline{C_2H}^2=(\sqrt{2}+2)^2-(\sqrt{2})^2=4+4\sqrt{2}$

정답_ ⑤

294

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=-\frac{1}{4}x^2$의 그래프와 원 $x^2+(y-2)^2=4$에 동시에 접하는 세 직선을 각각 l_1, l_2, l_3이라고 하자.



직선 l_3은 x축이므로 직선 l_3의 방정식은 $y=0$

직선 l_1을 $y=mx+n$ ($m>0$, $n>0$)으로 놓으면 두 직선 l_1, l_2는 y축에 대하여 대칭이고 y절편에서 만나므로 직선 l_2의 방정식은 $y=-mx+n$으로 놓을 수 있다.

직선 l_1, 즉 $mx-y+n=0$이 원 $x^2+(y-2)^2=4$에 접하므로

$\frac{|-2+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2,\ |n-2|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$n^2-4n+4=4m^2+4$

$\therefore m^2=\frac{n^2-4n}{4}$ …… ㉠

또, 직선 l_1은 이차함수 $y=-\frac{1}{4}x^2$의 그래프에도 접하므로 이차방정식 $-\frac{1}{4}x^2=mx+n$, 즉 $x^2+4mx+4n=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(2m)^2-4n=0$

$\therefore m^2=n$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=2\sqrt{2},\ n=8$ ($\because m>0,\ n>0$)

$\therefore l_1: y=2\sqrt{2}x+8,\ l_2: y=-2\sqrt{2}x+8$

따라서 두 직선 l_1, l_2의 x절편은 각각 $-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$이므로 세 직선 l_1, l_2, l_3으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-(-2\sqrt{2}))\times 8=16\sqrt{2}$

정답_ $16\sqrt{2}$

04 도형의 이동

295

점 $(-4,\ 2)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-4+3,\ 2-5)$ $\quad\therefore (-1,\ -3)$

정답_ $(-1,\ -3)$

296

점 $(-1,\ 6)$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 점의 좌표는

$(-1+4,\ 6-3)$ $\quad\therefore (3,\ 3)$

이 점이 직선 $y=ax-6$ 위의 점이므로

$3=3a-6,\ 3a=9$

$\therefore a=3$

정답_ ②

297

점 $(2,\ -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(2+a,\ -1+5)$ $\quad\therefore (2+a,\ 4)$

따라서 $2+a=4,\ 4=b$이므로 $a=2,\ b=4$

$\therefore a+b=2+4=6$

정답_ 6

298

주어진 평행이동을 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$라고 하면 이 평행이동에 의하여 점 $(1,\ 2)$가 점 $(4,\ -1)$로 옮겨지므로

$1+a=4,\ 2+b=-1$ $\quad\therefore a=3,\ b=-3$

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+3,\ y-3)$에 의하여 점 $(6,\ -2)$로 옮겨지는 점의 좌표를 $(m,\ n)$이라고 하면

$m+3=6,\ n-3=-2$ $\quad\therefore m=3,\ n=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3,\ 1)$이다.

정답_ ④

299

주어진 평행이동을 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$이라고 하면 이 평행이동에 의하여 두 점 $\mathrm{A}(1,\ a)$, $\mathrm{B}(b,\ -5)$가 각각 두 점 $\mathrm{A}'(4,\ 7)$, $\mathrm{B}'(-2,\ 3)$으로 옮겨지므로

$1+m=4,\ a+n=7,\ b+m=-2,\ -5+n=3$

$\therefore m=3,\ n=8,\ a=-1,\ b=-5$

따라서 점 $(a-b,\ a+b)$, 즉 $(4,\ -6)$이 주어진 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+3,\ y+8)$에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(4+3,\ -6+8)$ $\quad\therefore (7,\ 2)$

정답_ $(7,\ 2)$

300

점 $\mathrm{A}(1,\ 5)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점 B의 좌표는

$(1+a,\ 5+5)$ $\quad\therefore \mathrm{B}(1+a,\ 10)$

이때 $\overline{\mathrm{OB}}=2\overline{\mathrm{OA}}$에서 $\overline{\mathrm{OB}}^2=4\overline{\mathrm{OA}}^2$이므로

$(1+a)^2+10^2=4(1^2+5^2),\ a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=1\ (\because a>0)$

정답_ ①

301

점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$을 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$\left(a-\frac{1}{2},\ a^2+2\right)$

이 점이 직선 $y=4x$ 위에 있으므로

$a^2+2=4\left(a-\frac{1}{2}\right),\ a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0$ $\quad\therefore a=2$

정답_ ⑤

302

직선 $y=5x-8$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-a=5(x-4)-8$ $\quad\therefore y=5x-28+a$

이 직선이 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$1=5\times3-28+a$ $\quad\therefore a=14$

정답_ ④

303

직선 $ax+2y-3=0$을 x축의 방향으로 n만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$a(x-n)+2(y+1)-3=0$ $\quad\therefore ax+2y-an-1=0$

이 직선이 직선 $3x+2y-13=0$과 일치하므로

$a=3,\ -an-1=-13$ $\quad\therefore n=4$

$\therefore a+n=3+4=7$

정답_ ②

304

직선 $2x-3y-8=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-a)-3(y-b)-8=0$ $\quad\therefore 2x-3y-2a+3b-8=0$

이 직선이 직선 $2x-3y-8=0$과 일치하므로

$-2a+3b-8=-8,\ 3b=2a$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{2}{3}$

정답_ $\frac{2}{3}$

305

주어진 평행이동을 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$라고 하면 이 평행이동에 의하여 점 $(1,\ -2)$가 점 $(-3,\ 4)$로 옮겨지므로

$1+a=-3,\ -2+b=4$ $\quad\therefore a=-4,\ b=6$

직선 $2x+4y-1=0$이 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x-4,\ y+6)$에 의하여 옮겨지는 직선의 방정식은

$2(x+4)+4(y-6)-1=0$ $\quad\therefore 2x+4y-17=0$

따라서 $p=2,\ q=-17$이므로

$p-q=2-(-17)=19$

정답_ ②

306

직선 $y=mx+1$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 직선의 방정식은

$y+2=m(x-1)+1 \qquad \therefore y=mx-m-1$

이 직선이 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(2, 3)$을 지난다.

즉, $3=2m-m-1$이므로 $m=4$

정답_ ①

307

직선 l의 방정식은

$y+5=a(x-2)+b \qquad \therefore y=ax-2a+b-5$

직선 l은 직선 $y=-\frac{1}{5}x+3$과 y축 위의 점에서 수직으로 만나므로 기울기가 5이고, y절편은 3이다.

따라서 $a=5$, $-2a+b-5=3$이므로

$a=5$, $b=18$

$\therefore ab=5\times18=90$

정답_ 90

308

직선 $3x+4y+17=0$을 x축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-n)+4y+17=0 \qquad \therefore 3x+4y-3n+17=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=1$에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x+4y-3n+17=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같다. 즉,

$\frac{|-3n+17|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$, $|-3n+17|=5$

$-3n+17=5$ 또는 $-3n+17=-5$

$\therefore n=4$ 또는 $n=\frac{22}{3}$

이때 n은 자연수이므로 $n=4$

정답_ ④

309

원 $x^2+y^2=13$을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-3)^2+y^2=13$

이 원이 점 $(5, a)$를 지나므로

$(5-3)^2+a^2=13$, $a^2-9=0$

$(a+3)(a-3)=0 \qquad a=-3$ 또는 $a=3$

이때 a는 양수이므로 $a=3$

정답_ ③

310

$x^2+y^2-10x+4y-1=0$에서 $(x-5)^2+(y+2)^2=30$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x-a-5)^2+(y-b+2)^2=30$

이 원이 원 $(x+7)^2+(y-1)^2=c$와 일치해야 하므로

$-a-5=7$, $-b+2=-1$, $30=c$

$\therefore a=-12$, $b=3$, $c=30$

$\therefore a+b+c=-12+3+30=21$

정답_ ①

다른 풀이

$x^2+y^2-10x+4y-1=0$에서 $(x-5)^2+(y+2)^2=30$

이므로 이 원은 중심이 $(5, -2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{30}$이다.

원 $(x+7)^2+(y-1)^2=c$의 중심은 $(-7, 1)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{c}$ $(c>0)$이고 원의 평행이동에서 중심은 평행이동된 원의 중심으로 이동하고 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$5+a=-7$, $-2+b=1$, $30=c$

$\therefore a=-12$, $b=3$, $c=30$

$\therefore a+b+c=-12+3+30=21$

311

$x^2+y^2+2x-6y+9=0$에서 $(x+1)^2+(y-3)^2=1$

이 원의 중심은 $(-1, 3)$이므로 이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 원의 중심의 좌표는

$(-1+a, 3-a)$

직선 $2x+3y-3=0$이 평행이동한 원의 넓이를 이등분하려면 이 직선이 원의 중심 $(-1+a, 3-a)$를 지나야 하므로

$2\times(-1+a)+3\times(3-a)-3=0$

$\therefore a=4$

정답_ ⑤

312

원 $x^2+(y-3)^2=29$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-3)^2=29$

이 원이 직선 $5x+2y-7=0$과 접하므로 원의 중심 $(a, 3)$과 직선 $5x+2y-7=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{29}$와 같다. 즉,

$\frac{|5a+2\times3-7|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\sqrt{29}$, $|5a-1|=29$

$5a-1=29$ 또는 $5a-1=-29$

$\therefore a=6$ 또는 $a=-\frac{28}{5}$

이때 a는 양수이므로 $a=6$

정답_ ④

313

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$은 중심의 좌표가 (a, b)이고 반지름의 길이가 b이므로 원 C는 중심의 좌표가 $(a+3, b-8)$이고 반지름의 길이가 b이다.

원 C가 x축과 y축에 동시에 접하므로

$a+3=|b-8|=b$

$b-8\neq b$이므로 $-b+8=b \qquad \therefore b=4$

$a+3=4$에서 $a=1$

$\therefore a+b=1+4=5$

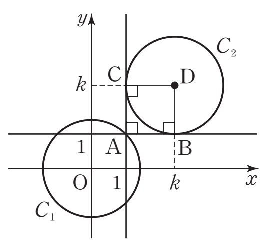
정답_ ①

314

$x^2+y^2+2x-4y+a=0$에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=5-a$
주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은
$(x-3+1)^2+(y+1-2)^2=5-a$
$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=5-a$
따라서 원의 중심의 좌표가 $(2, 1)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5-a}$이므로
$b=1$, $\sqrt{5-a}=4$
$5-a=16 \quad \therefore a=-11$
$\therefore a+b=-11+1=-10$

정답_ ①

315



오른쪽 그림과 같이 점 A$(1, 1)$에서 원 C_2에 그은 두 접선이 원 C_2와 만나는 점을 각각 B, C라 하고, 원 C_2의 중심을 D(k, k)라고 하자.
점 A$(1, 1)$에서 원 C_2에 그은 두 접선이 서로 수직이므로 사각형 ABDC는 정사각형이다.
따라서 원 C_2의 반지름의 길이와 정사각형 ABDC의 한 변의 길이가 같으므로 사각형 ABDC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형이고 $k>2$이므로
$k=1+\sqrt{2}$

정답_ ①

316

포물선 $y=x^2-4x+9$, 즉 $y=(x-2)^2+5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y-b=(x-a-2)^2+5 \quad \therefore y=(x-a-2)^2+5+b$
이 포물선이 포물선 $y=x^2$과 일치하므로
$-a-2=0$, $5+b=0 \quad \therefore a=-2$, $b=-5$
$\therefore a+b=-2+(-5)=-7$

정답_ -7

317

포물선 $y=2x^2+4x-1$, 즉 $y=2(x+1)^2-3$을 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y+1=2(x-6+1)^2-3 \quad \therefore y=2(x-5)^2-4$
이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(5, -4)$이므로
$a=5$, $b=-4$
$\therefore a-b=5-(-4)=9$

정답_ ②

318

포물선 $y=x^2+8x+11$, 즉 $y=(x+4)^2-5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $a+5$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y-(a+5)=(x-a+4)^2-5 \quad \therefore y=(x-a+4)^2+a$
이 포물선의 꼭짓점 $(a-4, a)$가 y축 위에 있으므로
$a-4=0 \quad \therefore a=4$
따라서 꼭짓점의 좌표는 $(0, 4)$이다.

정답_ $(0, 4)$

다른 풀이

$y=x^2+8x+11$에서 $y=(x+4)^2-5$
이므로 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-4, -5)$이다.
포물선의 평행이동에서 꼭짓점은 평행이동된 포물선의 꼭짓점으로 이동하므로 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-4+a, -5+a+5) \quad \therefore (a-4, a)$
이 점이 y축 위에 있으므로 $a-4=0 \quad \therefore a=4$
따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는 $(0, 4)$이다.

319

$y=x^2+2x$에서 $y=(x+1)^2-1$
$y=x^2-4x+8$에서 $y=(x-2)^2+4$
포물선 $y=(x+1)^2-1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 포물선의 방정식이 $y=(x-2)^2+4$이므로
직선 $l: 3x-y+6=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은
$3(x-3)-(y-5)+6=0 \quad \therefore y=3x+2$
$x^2-4x+8=3x+2$에서
$x^2-7x+6=0$, $(x-1)(x-6)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=6$
따라서 두 점의 좌표는 $(1, 5)$, $(6, 20)$이므로 두 점의 y좌표의 합은 $5+20=25$

정답_ ⑤

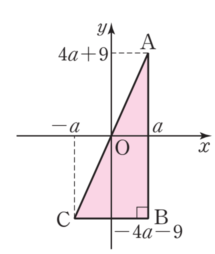
320

점 $(2, a)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는
$(a, 2)$
점 A$(a, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(a, -2)$
따라서 $a=3$, $b=-2$이므로
$a+b=3+(-2)=1$

정답_ ①

321

점 A(a, b)가 직선 $y=4x+9$ 위의 점이므로 $b=4a+9$
점 A$(a, 4a+9)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는
$(a, -4a-9)$
점 B$(a, -4a-9)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는
$(-a, -4a-9)$
따라서 오른쪽 그림에서



$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AB}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2a\times 2(4a+9)$$
$$=8a^2+18a$$
즉, $8a^2+18a=18$이므로
$4a^2+9a-9=0$, $(4a-3)(a+3)=0$
$\therefore a=-3$ 또는 $a=\frac{3}{4}$
이때 $a>0$이므로 $a=\frac{3}{4}$

정답_ $\frac{3}{4}$

322

점 (a, b)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a, b)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$-a<0,\ b>0 \qquad \therefore a>0,\ b>0$ …… ㉠

점 $(ab, a+b)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-ab, -a-b)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a-b, -ab)$

이때 ㉠에 의하여 $-a-b<0,\ -ab<0$

이므로 점 $(-a-b, -ab)$는 제3사분면 위에 있다.

정답_ **제3사분면**

323

점 $A(4, a)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$(4, -a)$

점 $B(4, -a)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$(-a, 4)$

반지름의 길이가 8이고 중심이 점 $C(-a, 4)$인 원이 점 $A(4, a)$를 지나므로

$\overline{AC}=\sqrt{(-a-4)^2+(4-a)^2}=8,\ \sqrt{2a^2+32}=8$

$2a^2+32=64,\ a^2=16,\ (a+4)(a-4)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=4$

이때 $a>0$이므로 $a=4$

정답_ 4

324

$(3, -1) \xrightarrow{(가)} (-3, 1) \xrightarrow{(나)} (3, 1) \xrightarrow{(다)} (3, -1)$

즉, 점 $P(3, -1)$을 (가), (나), (다)의 순서로 세 번 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다.

$1001=333\times3+2$이므로 1001번 대칭이동한 후의 점의 좌표는

$(3, 1)$

따라서 $a=3,\ b=1$이므로

$a+b=3+1=4$

정답_ 4

325

직선 $3x+4y-12=0$의 x절편과 y절편이 각각 4, 3이므로

$A(4, 0),\ B(0, 3)$

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times0+1\times4}{2+1}, \dfrac{2\times3+1\times0}{2+1}\right) \qquad \therefore P\left(\dfrac{4}{3}, 2\right)$

점 $P\left(\dfrac{4}{3}, 2\right)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{4}{3}, -2\right)$

점 $P\left(\dfrac{4}{3}, 2\right)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는

$\left(-\dfrac{4}{3}, 2\right)$

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}}{3}, \dfrac{2-2+2}{3}\right) \qquad \therefore \left(\dfrac{4}{9}, \dfrac{2}{3}\right)$

따라서 $a=\dfrac{4}{9},\ b=\dfrac{2}{3}$이므로

$a+b=\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{9}$

정답_ ⑤

326

직선 $-3x+y-7=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l_1의 방정식은

$x-3y-7=0$

직선 l_1을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은

$-x+3y-7=0 \qquad \therefore y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}$

따라서 직선 l_2의 y절편은 $\dfrac{7}{3}$이다.

정답_ $\dfrac{7}{3}$

327

직선 $y=\dfrac{3}{5}x-1$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{3}{5}x-1$

이 직선의 기울기가 $-\dfrac{3}{5}$이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 $-\dfrac{3}{5}$이다.

따라서 점 $(2, 7)$을 지나고 기울기가 $-\dfrac{3}{5}$인 직선의 방정식은

$y-7=-\dfrac{3}{5}(x-2) \qquad \therefore 3x+5y-41=0$

정답_ ①

328

직선 $3x-2y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3(-x)-2(-y)+a=0 \qquad \therefore -3x+2y+a=0$

이 직선이 점 $(5, 6)$을 지나므로

$-3\times5+2\times6+a=0 \qquad \therefore a=3$

정답_ ③

329

직선 $y=5x-k$를 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=5x-k \qquad \therefore 5x+y-k=0$ …… ㉠

$x^2+y^2+6x+4y-13=0$에서

$(x+3)^2+(y+2)^2=26$ …… ㉡

직선 ㉠이 원 ㉡에 접하려면 원의 중심 $(-3, -2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{26}$과 같아야 한다.

$\dfrac{|-15-2-k|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\sqrt{26},\ |17+k|=26$

$17+k=26$ 또는 $17+k=-26$

$\therefore k=9$ 또는 $k=-43$

이때 $k>0$이므로 $k=9$

정답_ ②

330

직선 $y=ax+b$가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2=a+b \quad \therefore b=2-a$ ······ ㉠

직선 $y=ax+b$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-ax+b$

이 직선이 직선 $y=2x+1$과 만나지 않으려면 두 직선이 평행해야 한다. 따라서 두 직선의 기울기가 같아야 하므로

$-a=2 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$b=4$

$\therefore ab=(-2)\times 4=-8$

정답_ ①

331

직선 $2x+5y+k=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2x-5y+k=0$

한편, 사각형 ABCD는 한 변의 길이가 6인 정사각형이고, 직선 $2x-5y+k=0$이 정사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 정사각형 ABCD의 대각선의 중점을 지난다.

정사각형 ABCD의 대각선의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+8}{2}, \frac{2+8}{2}\right)$, 즉 $(5, 5)$이므로

$2\times 5-5\times 5+k=0$

$\therefore k=15$

정답_ 15

332

원 $x^2+y^2-4x+2y-48=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+(-y)^2-4x+2(-y)-48=0$

$\therefore x^2+y^2-4x-2y-48=0$

이 원이 y축과 만나는 점의 y좌표는

$y^2-2y-48=0, (y+6)(y-8)=0$

$\therefore y=-6$ 또는 $y=8$

따라서 두 점의 좌표는 $(0, -6)$, $(0, 8)$이므로 두 점 사이의 거리는

$|8-(-6)|=14$

정답_ ⑤

333

중심이 점 $(-5, 1)$이고 반지름의 길이가 k인 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-1)^2=k^2$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y+5)^2+(x-1)^2=k^2 \quad \therefore (x-1)^2+(y+5)^2=k^2$

이 원이 점 $(7, 3)$을 지나므로

$(7-1)^2+(3+5)^2=k^2, k^2=100$

$\therefore k=10 \ (\because k>0)$

정답_ 10

334

원 $x^2+y^2+ax-8y-2=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+y^2+a(-x)-8y-2=0, x^2+y^2-ax-8y-2=0$

$\therefore \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+(y-4)^2=\frac{a^2}{4}+18$

이 원의 중심 $\left(\frac{a}{2}, 4\right)$가 직선 $y=x+8$ 위에 있으므로

$4=\frac{a}{2}+8 \quad \therefore a=-8$

따라서 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{\frac{(-8)^2}{4}+18}=\sqrt{34}$이므로 원의 넓이는

$(\sqrt{34})^2\pi=34\pi$

정답_ ③

335

원 $x^2+y^2+ax-by=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$y^2+x^2+ay-bx=0 \quad \therefore x^2+y^2-bx+ay=0$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+y^2-b(-x)+ay=0, x^2+y^2+bx+ay=0$

$\therefore \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$

이 원의 중심이 $(2, 1)$이므로

$-\frac{b}{2}=2, -\frac{a}{2}=1 \quad \therefore a=-2, b=-4$

$\therefore a+b=-2+(-4)=-6$

정답_ ③

336

$x^2+y^2-10x-6y+4=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+(-y)^2-10(-x)-6(-y)+4=0$

$x^2+y^2+10x+6y+4=0 \quad \therefore (x+5)^2+(y+3)^2=30$

이 원이 직선 $y=x+k$와 서로 다른 두 점에서 만나려면 이 원의 중심 $(-5, -3)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{30}$보다 작아야 하므로

$\frac{|-5+3+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{30}, |k-2|<2\sqrt{15}$

$-2\sqrt{15}<k-2<2\sqrt{15}$

$\therefore 2-2\sqrt{15}<k<2+2\sqrt{15}$

정답_ $2-2\sqrt{15}<k<2+2\sqrt{15}$

참고 원의 방정식을 표준형으로 만든 후에 대칭이동을 해도 된다. 즉, 원 $x^2+y^2-10x-6y+4=0$에서 $(x-5)^2+(y-3)^2=30$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-5)^2+(-y-3)^2=30 \quad \therefore (x+5)^2+(y+3)^2=30$

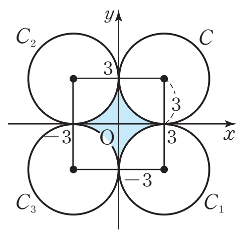
337

원 C: $(x-3)^2+(y-3)^2=9$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-3)^2+(-y-3)^2=9 \quad \therefore C_1$: $(x-3)^2+(y+3)^2=9$

원 C: $(x-3)^2+(y-3)^2=9$를 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방

정식은



$(-x-3)^2+(y-3)^2=9$

$\therefore$ C_2: $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

원 C: $(x-3)^2+(y-3)^2=9$를 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-3)^2+(-y-3)^2=9$

$\therefore$ C_3: $(x+3)^2+(y+3)^2=9$

원 C를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 원 C_1, C_2, C_3은 위의 그림과 같으므로 구하는 도형의 넓이는 한 변의 길이가 6인 정사각형의 넓이에서 반지름의 길이가 3인 사분원 4개의 합, 즉 반지름의 길이가 3인 원의 넓이를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$6\times6-\pi\times3^2=36-9\pi$

정답_ ⑤

338

포물선 $y=x^2-4x+3$을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=x^2-4x+3 \qquad \therefore y=-x^2+4x-3$

이 포물선이 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=-(-1)^2+4\times(-1)-3=-8$

정답_ ②

339

포물선 $y=x^2+2ax+b$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2+2a(-x)+b$, $y=-x^2+2ax-b$

$\therefore y=-(x-a)^2+a^2-b$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(1, -4)$이므로

$a=1$, $a^2-b=-4 \qquad \therefore b=5$

$\therefore a+b=1+5=6$

정답_ ④

340

포물선 $y=x^2-6ax+7$을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=(-x)^2-6a(-x)+7$, $y=x^2+6ax+7$

$\therefore y=(x+3a)^2-9a^2+7$

이 포물선의 꼭짓점 $(-3a, -9a^2+7)$이 직선 $y=x-5$ 위에 있으므로

$-9a^2+7=-3a-5$, $9a^2-3a-12=0$

$3a^2-a-4=0$, $(a+1)(3a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{4}{3}$

이때 $a>0$이므로 $a=\frac{4}{3}$

정답_ ④

341

포물선 $y=-3x^2-4x+k$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-3(-x)^2-4(-x)+k \qquad \therefore y=-3x^2+4x+k$

이 포물선을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=-3x^2+4x+k \qquad \therefore y=3x^2-4x-k$

이 포물선이 직선 $y=-2x+5$와 접하므로 이차방정식

$3x^2-4x-k=-2x+5$, 즉 $3x^2-2x-k-5=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-3(-k-5)=0$

$3k+16=0 \qquad \therefore k=-\frac{16}{3}$

정답_ $-\frac{16}{3}$

342

점 $(2, -1)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(1, -2)$

이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(1+a, -2+4) \qquad \therefore (1+a, 2)$

이 점이 점 $(7, b)$와 일치하므로

$1+a=7$, $2=b \qquad \therefore a=6$, $b=2$

$\therefore a-b=6-2=4$

정답_ 4

343

직선 $y=3x+1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-4=3(x-a)+1 \qquad \therefore y=3x-3a+5$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=3(-x)-3a+5 \qquad \therefore y=3x+3a-5$

이 직선이 직선 $y=3x+16$과 일치하므로

$3a-5=16 \qquad \therefore a=7$

정답_ ②

344

직선 $y=-\frac{1}{2}x-3$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}(x-a)-3 \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a-3$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l의 방정식은

$x=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}a-3 \qquad \therefore 2x+y-a+6=0$

직선 l이 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=5$와 접하려면 원의 중심 $(-1, 3)$에서 직선 l까지의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\frac{|2\times(-1)+3-a+6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$, $|-a+7|=5$

$-a+7=5$ 또는 $-a+7=-5$

$\therefore a=2$ 또는 $a=12$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$2+12=14$

정답_ ①

345

포물선 $y=x^2+3x+2a$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-(-3)=(x-1)^2+3(x-1)+2a \qquad \therefore y=x^2+x-5+2a$

이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2-x-5+2a \qquad \therefore y=-x^2+x+5-2a$

이 포물선과 y축과의 교점이 $(0,\ -3)$이므로

$-3=5-2a,\ 2a=8$

$\therefore a=4$

정답_ 4

346

원 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$y^2+x^2+2y-4x-3=0,\ x^2+y^2-4x+2y-3=0$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=8$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-2)^2+(y-1+1)^2=8 \qquad \therefore (x-a-2)^2+y^2=8$

이 원이 직선 $y=x+4$와 만나려면 원의 중심 $(a+2,\ 0)$에서 직선 $y=x+4$, 즉 $x-y+4=0$까지의 거리는 원의 반지름의 길이인 $2\sqrt{2}$보다 작거나 같아야 하므로

$\dfrac{|a+2+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\le 2\sqrt{2},\ |a+6|\le 4$

$-4\le a+6\le 4 \qquad \therefore -10\le a\le -2$

정답_ $-10\le a\le -2$

347

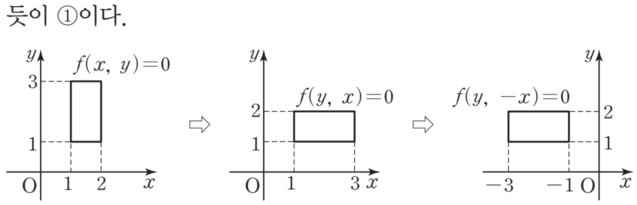
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(y,\ x)=0$

방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(y,\ -x)=0$

따라서 방정식 $f(y,\ -x)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 도형이므로 다음 그림에서 알 수 있듯이 ①이다.



정답_ ①

348

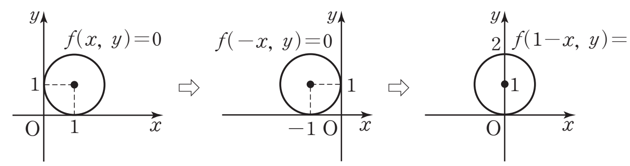
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-x,\ y)=0$

방정식 $f(-x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(-(x-1),\ y)=0 \qquad \therefore f(1-x,\ y)=0$

따라서 방정식 $f(1-x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형이므로 다음 그림에서 알 수 있듯이 ⑤이다.



정답_ ⑤

349

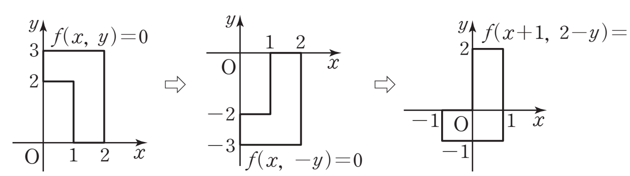
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(x,\ -y)=0$

방정식 $f(x,\ -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x+1,\ -(y-2))=0 \qquad \therefore f(x+1,\ 2-y)=0$

따라서 방정식 $f(x+1,\ 2-y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형이므로 다음 그림에서 알 수 있듯이 ②이다.



정답_ ②

350

방정식 $g(x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 방정식은

$f(x,\ -y)=0$

방정식 $f(x,\ -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x+3,\ -(y+1))=0 \qquad \therefore f(x+3,\ -y-1)=0$

따라서 $g(x,\ y)=0$과 같은 도형을 나타내는 방정식은 ④이다.

정답_ ④

351

두 점 $(-2,\ a)$, $(b,\ 6)$을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(2,\ 1)$이므로

$\dfrac{-2+b}{2}=2,\ \dfrac{a+6}{2}=1 \qquad \therefore a=-4,\ b=6$

$\therefore ab=(-4)\times 6=-24$

정답_ ③

352

$x^2+y^2+4x-10y+27=0$에서 $(x+2)^2+(y-5)^2=2$

원의 중심 $(-2,\ 5)$를 점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$\frac{-2+a}{2}=1$, $\frac{5+b}{2}=2$ $\therefore a=4, b=-1$

대칭이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 구하는 원은 중심이 $(4, -1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이다.

$\therefore (x-4)^2+(y+1)^2=2$

정답_ ②

353

포물선 $y=-x^2+x-2$, 즉 $y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

포물선 $y=x^2-6x+5$, 즉 $y=(x-3)^2-4$의 꼭짓점의 좌표는 $(3, -4)$

두 포물선이 점 (α, β)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 (α, β)에 대하여 대칭이다.

따라서 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점의 좌표가 (α, β)이므로

$\alpha=\frac{\frac{1}{2}+3}{2}=\frac{7}{4}$, $\beta=\frac{-\frac{7}{4}-4}{2}=-\frac{23}{8}$

$\therefore \alpha-\beta=\frac{7}{4}-\left(-\frac{23}{8}\right)=\frac{37}{8}$

정답_ ⑤

354

점 (a, b)를 직선 $x-2y-3=0$ 위의 점이라고 하면

$a-2b-3=0$ …… ㉠

점 (a, b)를 점 $(2, -3)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (x, y)라고 하면

$\frac{a+x}{2}=2$, $\frac{b+y}{2}=-3$

$\therefore a=4-x, b=-6-y$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(4-x)-2(-6-y)-3=0$

$\therefore x-2y-13=0$

정답_ $x-2y-13=0$

355

두 점 $(2, 2)$, (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=2x+3$ 위에 있으므로

$\frac{2+b}{2}=2\times\frac{2+a}{2}+3$ $\therefore 2a-b=-8$ …… ㉠

또, 두 점 $(2, 2)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=2x+3$과 수직이므로

$\frac{b-2}{a-2}\times2=-1$ $\therefore a+2b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=4$

$\therefore a+b=-2+4=2$

정답_ ⑤

356

$x^2+y^2-4x-8y=0$에서 $(x-2)^2+(y-4)^2=20$

두 원 $(x-2)^2+(y-4)^2=20$, $x^2+y^2=c$가 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이므로 두 원의 중심 $(2, 4)$, $(0, 0)$도 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이다.

두 점 $(2, 4)$, $(0, 0)$을 이은 선분의 중점 $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$, 즉 $(1, 2)$가 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$2=a\times1+b$ $\therefore a+b=2$ …… ㉠

또, 두 점 $(2, 4)$, $(0, 0)$을 이은 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\frac{4-0}{2-0}\times a=-1$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{5}{2}$

원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$c=20$

$\therefore abc=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{2}\times20=-25$

정답_ ③

357

$x^2+y^2-4x+8y-5=0$에서 $(x-2)^2+(y+4)^2=25$

두 원 $x^2+y^2=25$, $(x-2)^2+(y+4)^2=25$가 직선 $ax+by-5=0$에 대하여 대칭이므로 두 원의 중심 $(0, 0)$, $(2, -4)$도 직선 $ax+by-5=0$에 대하여 대칭이다.

두 점 $(0, 0)$, $(2, -4)$를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0-4}{2}\right)$, 즉 $(1, -2)$가 직선 $ax+by-5=0$ 위에 있으므로

$a-2b-5=0$ …… ㉠

또, 두 점 $(0, 0)$, $(2, -4)$를 지나는 직선이 직선 $ax+by-5=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{5}{b}$와 수직이므로

$\frac{-4-0}{2-0}\times\left(-\frac{a}{b}\right)=-1$ $\therefore b=-2a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

$\therefore a-b=1-(-2)=3$

정답_ 3

358

$C(a, b)$라고 하면 선분 AC의 중점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{4+b}{2}\right)$가 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로

$\frac{4+b}{2}=-\frac{a}{2}+2$ $\therefore a+b=0$ …… ㉠

직선 AC가 직선 $y=-x+2$와 수직이므로

$\frac{b-4}{a-0}\times(-1)=-1$ $\therefore a-b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

즉, $C(-2, 2)$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{(-2-0)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2}$

직선 AC의 방정식은

$y-4=\frac{2-4}{-2-0}x$ $\therefore x-y+4=0$

직선 AC와 점 $B(4, -3)$ 사이의 거리는

$\frac{|4-(-3)+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{11\sqrt{2}}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{11\sqrt{2}}{2}=11$

정답_ 11

359

직선 OA의 기울기는 3, 직선 OB의 기울기는 $\frac{5}{a}$ $(a\neq0)$이고

조건 ㈎에 의하여 두 직선 OA, OB는 서로 수직이므로

$3\times\frac{5}{a}=-1$ $\quad\therefore a=-15$

$\therefore$ B$(-15,\ 5)$

조건 ㈏에 의하여 두 점 B, C는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로

C$(5,\ -15)$ $\quad\therefore b=5,\ c=-15$

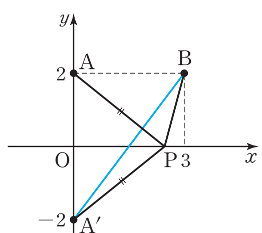
직선 AC의 방정식은

$y-3=\frac{-15-3}{5-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=-\frac{9}{2}x+\frac{15}{2}$

따라서 직선 AC의 y절편은 $\frac{15}{2}$이다.

정답_ ④

360



점 A$(0,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라고 하면

A′$(0,\ -2)$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$

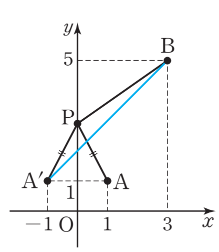
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 선분 A′B의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(3-0)^2+\{2-(-2)\}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

이므로 구하는 최솟값은 5이다.

정답_ ⑤

361



점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라고 하면

A′$(-1,\ 1)$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 A′B와 y축의 교점이다.

직선 A′B의 방정식은

$y-1=\frac{5-1}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$ $\quad\therefore y=x+2$

즉, 구하는 점 P의 좌표는 $(0,\ 2)$이다.

정답_ $(0,\ 2)$

참고 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}$이므로 점 P가 직선 A′B 위에 있을 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소가 된다.

362

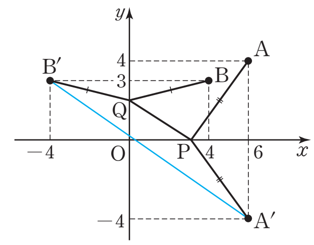
점 A$(6,\ 4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라고 하면

A′$(6,\ -4)$

점 B$(4,\ 3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면

B′$(-4,\ 3)$

이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{B'Q}}$이므로



$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{BQ}}$

$=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{B'Q}}\geq\overline{\mathrm{A'B'}}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 선분 A′B′의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{A'B'}}$

$=\sqrt{\{6-(-4)\}^2+(-4-3)^2}$

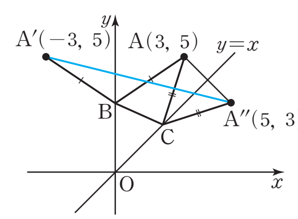
$=\sqrt{149}$

이므로 구하는 최솟값은 $\sqrt{149}$이다.

정답_ $\sqrt{149}$

참고 점 P가 x축 위의 점이므로 점 A를 x축에 대하여 대칭이동하고, 점 Q가 y축 위의 점이므로 점 B를 y축에 대하여 대칭이동한다.

363



점 A$(3,\ 5)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라고 하면

A′$(-3,\ 5)$, A″$(5,\ 3)$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B}}$, $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CA''}}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA''}}\geq\overline{\mathrm{A'A''}}$

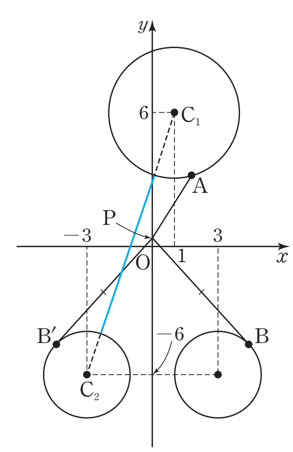
따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 선분 A′A″의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{A'A''}}=\sqrt{\{5-(-3)\}^2+(3-5)^2}=2\sqrt{17}$

이므로 구하는 최솟값은 $2\sqrt{17}$이다.

정답_ $2\sqrt{17}$

364



원 $(x-3)^2+(y+6)^2=4$를 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-3)^2+(y+6)^2=4$

$\therefore (x+3)^2+(y+6)^2=4$

점 B를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면 B′은 원 $(x+3)^2+(y+6)^2=4$ 위의 점이고, $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이다.

두 원 $(x-1)^2+(y-6)^2=9$, $(x+3)^2+(y+6)^2=4$의 중심을 각각 $C_1(1,\ 6)$, $C_2(-3,\ -6)$이라 고 하면 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$는 세 점 A, P, B′이 $\overline{C_1C_2}$ 위에 있을 때 최소이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 선분 C_1C_2의 길이에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 값과 같다.

$\overline{C_1C_2}=\sqrt{(-3-1)^2+(-6-6)^2}=4\sqrt{10}$

이므로 구하는 최솟값은

$4\sqrt{10}-(2+3)=4\sqrt{10}-5$

정답_ ②

365

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=-x^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이므로

$g(x)=-(x-p)^2+1$ ❶

이차함수 $y=-x^2+1$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{4}x-2$의 교점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라고 하면 x_1, x_2는 이차방정식

$-x^2+1=-\frac{1}{4}x-2$, 즉 $4x^2-x-12=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=\frac{1}{4}$ ❷

같은 방법으로 이차함수 $g(x)=-(x-p)^2+1$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{4}x-2$의 교점의 x좌표를 각각 x_3, x_4라고 하면 x_3, x_4는 이차방정식 $-(x-p)^2+1=-\frac{1}{4}x-2$, 즉

$4x^2-(1+8p)x+4p^2-12=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_3+x_4=\frac{1}{4}+2p$ ❸

이때 $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+2p\right)=10$이므로

$2p=\frac{19}{2}\quad \therefore p=\frac{19}{4}$ ❹

정답_ $\frac{19}{4}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $g(x)$ 식 세우기	20 %
❷ 함수 $y=-x^2+1$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{4}x-2$의 교점의 x좌표의 합 구하기	30 %
❸ 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{4}x-2$의 교점의 x좌표의 합 구하기	30 %
❹ p의 값 구하기	20 %

366

점 A$(6,\ -3)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 $(-6,\ 3)$

점 A$(6,\ -3)$을 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점 C의 좌표는

$(6+k,\ -3+2)\quad \therefore$ C$(6+k,\ -1)$

점 A$(6,\ -3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 D의 좌표는

$(-3,\ 6)$ ❶

세 점 B, C, D가 한 직선 위에 있으려면 직선 BC와 직선 BD의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{-1-3}{6+k-(-6)}=\frac{6-3}{-3-(-6)}$

$\frac{-4}{12+k}=1$ ❷

$\therefore k=-16$ ❸

정답_ -16

채점 기준	비율
❶ 세 점 B, C, D의 좌표 구하기	40 %
❷ 세 점 B, C, D가 한 직선 위에 있을 조건을 이용하여 k에 대한 방정식 구하기	40 %
❸ k의 값 구하기	20 %

367

점 $(1,\ -2)$를 지나는 직선의 기울기를 m이라고 하면 직선의 방정식은

$y-(-2)=m(x-1)\quad \therefore y=mx-m-2$ ❶

이 직선을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=m(x-2)-m-2\quad \therefore y=mx-3m-2$

이 직선을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=mx-3m-2\quad \therefore y=-mx+3m+2$ ❷

이 직선이 점 $(4,\ 5)$를 지나므로

$5=-4m+3m+2\quad \therefore m=-3$

따라서 처음 직선의 기울기는 -3이다. ❸

정답_ -3

채점 기준	비율
❶ 직선의 기울기를 m이라 하고 점 $(1,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식 구하기	30 %
❷ 평행이동 및 대칭이동한 직선의 방정식 구하기	50 %
❸ 처음 직선의 기울기 구하기	20 %

368

이차함수 $y=x^2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 이차함수의 식은

$y=(-x)^2\quad \therefore y=x^2$

이 이차함수의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 이차함수의 식은

$y-6=(x-m)^2\quad \therefore y=(x-m)^2+6$ ❶

이 이차함수의 그래프가 직선 $y=7x+2$에 접하므로 이차방정식 $(x-m)^2+6=7x+2$, 즉 $x^2-(2m+7)x+m^2+4=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=\{-(2m+7)\}^2-4\times1\times(m^2+4)=0$ ❷

$28m+33=0\quad \therefore m=-\frac{33}{28}$ ❸

정답_ $-\frac{33}{28}$

채점 기준	비율
❶ 평행이동 및 대칭이동한 이차함수의 식 구하기	40 %
❷ 평행이동한 이차함수의 그래프와 주어진 직선이 접함을 이용하여 식 세우기	40 %
❸ m의 값 구하기	20 %

369

점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 선분 AC의 중점

$\left(\frac{3+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)$가 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로

$\frac{1+b}{2}=\frac{3+a}{2}+2\quad \therefore a-b=-6$ …… ㉠

또, 직선 AC가 직선 $y=x+2$와 수직이므로

$\frac{b-1}{a-3}\times1=-1\quad \therefore a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=5\quad \therefore$ C$(-1,\ 5)$ ❶

점 D의 좌표를 $(c,\ d)$라고 하면 선분 BD의 중점

$\left(\dfrac{4+c}{2},\ \dfrac{1+d}{2}\right)$가 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로

$\dfrac{1+d}{2}=\dfrac{4+c}{2}+2 \qquad \therefore c-d=-7$ ...... ㉢

또, 직선 BD가 직선 $y=x+2$와 수직이므로

$\dfrac{d-1}{c-4}\times 1=-1 \qquad \therefore c+d=5$ ...... ㉣

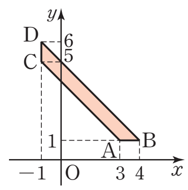
㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$c=-1,\ d=6 \qquad \therefore \mathrm{D}(-1,\ 6)$ ········· ❷

오른쪽 그림에서 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이는

$\square\mathrm{ABDC}=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{BCD}$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times4+\dfrac{1}{2}\times1\times5=\dfrac{9}{2}$ ···· ❸



정답_ $\dfrac{9}{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 C의 좌표 구하기	40 %
❷ 점 D의 좌표 구하기	40 %
❸ 사각형의 넓이 구하기	20 %

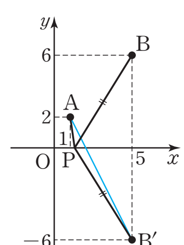
370

선분 AB의 길이는 일정하므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소일 때 삼각형 ABP의 둘레의 길이가 최소가 된다. ········· ❶

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면 $\mathrm{B'}(5,\ -6)$

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$



따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 선분 AB′의 길이와 같다.

이때 $\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(5-1)^2+(-6-2)^2}=4\sqrt{5}$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $4\sqrt{5}$이다. ········· ❷

한편,

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(5-1)^2+(6-2)^2}=4\sqrt{2}$ ········· ❸

이므로 삼각형 ABP의 둘레의 길이의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AB'}}=4\sqrt{2}+4\sqrt{5}=4(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ ········· ❹

정답_ $4(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

채점 기준	비율
❶ △APB의 둘레의 길이가 최소가 되는 경우 알기	20 %
❷ $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값 구하기	40 %
❸ 선분 AB의 길이 구하기	20 %
❹ 삼각형 ABP의 둘레의 길이의 최솟값 구하기	20 %

371

동전을 6번 던지므로 $a+b=6 \qquad \therefore b=6-a$

따라서 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하는 것을 a번, x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 것을 $(6-a)$번 실행하여 이동한 점이 Q이다.

$\therefore p=-3+1\times a+4\times(6-a)=-3a+21$

$q=2+5\times a+(-1)\times(6-a)=6a-4$

이때 두 점 $\mathrm{P}(-3,\ 2)$, $\mathrm{Q}(-3a+21,\ 6a-4)$를 지나는 직선의 기울기가 $\dfrac{3}{2}$이므로

$\dfrac{6a-4-2}{-3a+21-(-3)}=\dfrac{3}{2},\ \dfrac{6a-6}{-3a+24}=\dfrac{3}{2}$

$12a-12=-9a+72,\ 21a=84 \qquad \therefore a=4$

따라서 $b=2,\ p=9,\ q=20$이므로

$bq-ap=2\times20-4\times9=4$

정답_ 4

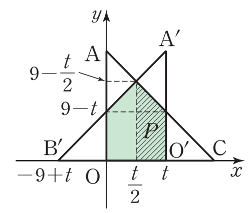
372

직선 AB, 직선 AC의 방정식은 각각 $y=x+9$, $y=-x+9$이고 직선 A′B′의 방정식은 $y=x-t+9$

(i) $0<t<9$일 때

삼각형 OCA의 내부와 삼각형 O′A′B′의 내부의 공통부분은 오른쪽 그림과 같다.

$S(t)$는 오른쪽 그림의 빗금친 부분인 사다리꼴 모양의 부분 P의 넓이를 2배한 것이므로



$S(t)=2\times\dfrac{1}{2}\times\left\{(9-t)+\left(9-\dfrac{t}{2}\right)\right\}\times\left(t-\dfrac{t}{2}\right)$

$=\dfrac{t}{2}\left(18-\dfrac{3}{2}t\right)$

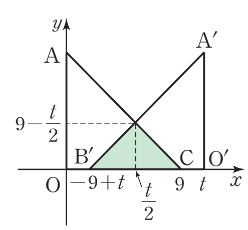
$=-\dfrac{3}{4}t^2+9t$

$=-\dfrac{3}{4}(t-6)^2+27$

따라서 $t=6$일 때, $S(t)$의 최댓값은 27이다.

(ii) $9\leq t<18$일 때

삼각형 OCA의 내부와 삼각형 O′A′B′의 내부의 공통부분은 오른쪽 그림과 같으므로



$S(t)$

$=\dfrac{1}{2}\times\{9-(-9+t)\}\times\left(9-\dfrac{t}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t^2}{2}-18t+162\right)$

$=\dfrac{1}{4}(t-18)^2$

따라서 $t=9$일 때, $S(t)$의 최댓값은 $\dfrac{81}{4}$이다.

(i), (ii)에서 $S(t)$의 최댓값은 27이다.

정답_ ③

373

포물선 $y=x^2-6x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-(-2)=(x-1)^2-6(x-1) \qquad \therefore y=x^2-8x+5$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 $p,\ q$라고 하면 $p,\ q$는 이차방정식 $x^2-8x+5=ax$, 즉 $x^2-(8+a)x+5=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=8+a$

이때 선분 AB의 중점의 x좌표가 6이므로

$\frac{8+a}{2}=6 \qquad \therefore a=4$

정답_ 4

374

주어진 규칙에 의하여 점 P_n을 구하면

점 P_2는 규칙 (가)에 의하여 점 $P_1(2,\ 1)$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점이므로

$P_2(1,\ 4)$

점 P_3은 규칙 (나)에 의하여 점 $P_2(1,\ 4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점이므로

$P_3(-1,\ 4)$

이와 같은 방법으로 점 P_4, P_5, P_6, P_7을 구하면

$P_3(-1,\ 4) \xrightarrow{(다)} P_4(-1,\ -4) \xrightarrow{(가)} P_5(-2,\ -1)$

$\xrightarrow{(나)} P_6(2,\ -1) \xrightarrow{(다)} P_7(2,\ 1)$

$\therefore P_n=P_{n+6}$

$100=6\times16+4$이므로 점 P_{100}의 좌표는 점 P_4의 좌표와 같다.

이때 점 $P_4(-1,\ -4)$이므로

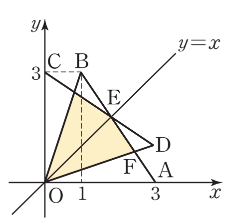
$x_{100}=-1,\ y_{100}=-4$

$\therefore x_{100}-y_{100}=-1-(-4)=3$

정답_ 3

375

오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 직선 $y=x$의 교점을 E, 선분 AB와 선분 OD의 교점을 F라고 하자.



직선 AB의 방정식은

$y-0=\frac{3-0}{1-3}(x-3)$

$\therefore y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$ ...... ㉠

㉠과 $y=x$를 연립하여 풀면

$x=\frac{9}{5},\ y=\frac{9}{5} \qquad \therefore E\left(\frac{9}{5},\ \frac{9}{5}\right)$

$\therefore \overline{OE}=\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2+\left(\frac{9}{5}\right)^2}=\frac{9\sqrt{2}}{5}$

점 $B(1,\ 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 D이므로

$D(3,\ 1)$

따라서 직선 OD의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\frac{27}{11},\ y=\frac{9}{11} \qquad \therefore F\left(\frac{27}{11},\ \frac{9}{11}\right)$

점 F와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{\left|\frac{27}{11}-\frac{9}{11}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{9\sqrt{2}}{11}$

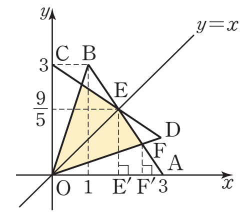
따라서 삼각형 OAB의 내부와 삼각형 OCD의 내부의 공통부분의 넓이는 삼각형 OEF의 넓이의 2배이므로

$2\triangle OEF=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{9\sqrt{2}}{5}\times\frac{9\sqrt{2}}{11}\right)=\frac{162}{55}$

정답_ $\frac{162}{55}$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 직선 $y=x$의 교점을 E, 선분 AB와 선분 OD의 교점을 F라고 하자.



직선 AB의 방정식은

$y-0=\frac{3-0}{1-3}(x-3)$

$\therefore y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$ ...... ㉠

㉠과 $y=x$를 연립하여 풀면

$x=\frac{9}{5},\ y=\frac{9}{5} \qquad \therefore E\left(\frac{9}{5},\ \frac{9}{5}\right)$

삼각형 OEA의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times\frac{9}{5}=\frac{27}{10}$

점 $B(1,\ 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 D이므로

$D(3,\ 1)$

따라서 직선 OD의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\frac{27}{11},\ y=\frac{9}{11} \qquad \therefore F\left(\frac{27}{11},\ \frac{9}{11}\right)$

두 점 E, F에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 E′, F′이라고 하면

두 점 E, F의 x좌표가 각각 $\frac{9}{5}$, $\frac{27}{11}$이므로

$\triangle OEA : \triangle OEF=\overline{AE} : \overline{EF}=\overline{AE'} : \overline{E'F'}$

$=\left(3-\frac{9}{5}\right) : \left(\frac{27}{11}-\frac{9}{5}\right)$

$=\frac{6}{5} : \frac{36}{55}=11 : 6$

삼각형 OEF의 넓이는 삼각형 OEA의 넓이의 $\frac{6}{11}$배이므로

삼각형 OEF의 넓이는

$\frac{6}{11}\triangle OEA=\frac{6}{11}\times\frac{27}{10}=\frac{81}{55}$

따라서 삼각형 OAB의 내부와 삼각형 OCD의 내부의 공통부분의 넓이는

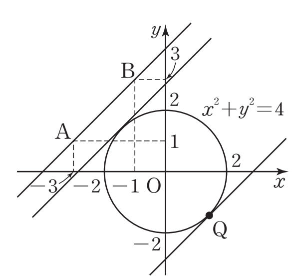
$2\triangle OEF=2\times\frac{81}{55}=\frac{162}{55}$

376

점 P가 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 위의 점이므로 점 Q는 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 원점에 대하여 대칭이동한 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이다.

삼각형 ABQ의 넓이가 최대가 되려면 점 Q와 직선 AB 사이의 거리가 최대가 되어야 한다.

따라서 점 Q는 직선 AB와 평행한 원 $x^2+y^2=4$의 두 접선 중에서 y절편이 음수인 접선의 접점이 되어야 한다.



직선 AB의 기울기는 $\frac{3-1}{-1-(-3)}=1$이므로 기울기가 1인 원 $x^2+y^2=4$의 접선의 방정식은

$y=x\pm2\sqrt{2}$

따라서 점 Q는 직선 $y=x-2\sqrt{2}$와 원 $x^2+y^2=4$의 교점이다.

$x^2+y^2=4$에 $y=x-2\sqrt{2}$를 대입하면

$x^2+(x-2\sqrt{2})^2=4,\ x^2-2\sqrt{2}x+2=0$

$(x-\sqrt{2})^2=0 \qquad \therefore x=\sqrt{2}$

$\therefore \mathrm{Q}(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$

한편, 점 P는 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점이므로 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

이 점을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-\sqrt{2}+2,\ \sqrt{2}-1) \qquad \therefore \mathrm{P}(2-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2})$

따라서 $a=2-\sqrt{2},\ b=-1+\sqrt{2}$이므로

$\therefore a+b=2-\sqrt{2}+(-1+\sqrt{2})=1$

정답_ 1

377

원 $(x-6)^2+y^2=r^2$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_1, x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 원을 C_2라고 하자.

두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각 $(0,\ 6)$, $(6+k,\ 0)$이고, 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이는 모두 r이다.

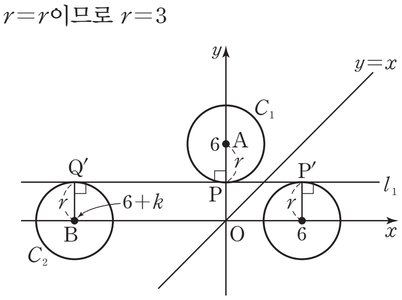
두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 A, B, 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P′, 점 Q를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점을 Q′이라고 하면 점 P′은 원 C_1 위의 점이고 점 Q′은 원 C_2 위의 점이다.

이때 두 점 P′, Q′의 좌표가 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$이므로

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$은 직선 P′Q′의 기울기와 같다.

직선 P′Q′의 기울기의 최솟값이 0이고 $x_1\neq x_2$이므로 원 C_2의 중심의 x좌표는 $-2r$보다 작아야 한다. 또, 직선 P′Q′의 기울기가 최소이면 $y_1=y_2$이므로 다음 그림과 같이 두 원 C_1, C_2는 모두 x축에 평행한 직선 l_1에 접한다.

따라서 $6-r=r$이므로 $r=3$

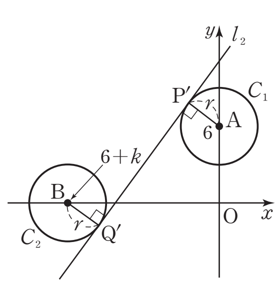


한편, 원 C_2의 중심의 x좌표가 $6+k$이므로

$6+k<-2r$, 즉 $6+k<-6$

$\therefore k<-12$ ⋯⋯ ㉠

직선 P′Q′의 기울기의 최댓값이 $\dfrac{4}{3}$이므로 오른쪽 그림과 같이 두 원 C_1, C_2는 모두 기울기가 $\dfrac{4}{3}$인 직선 l_2에 접하고, 이때 원 C_2의 중심의 x좌표는 직선 l_2의 x절편보다 작다.



직선 l_2의 방정식을 $y=\dfrac{4}{3}x+b$라고 하면 이 직선의 y절편은 점 A의 y좌표보다 크므로 $b>6$

점 $\mathrm{A}(0,\ 6)$과 직선 $y=\dfrac{4}{3}x+b$, 즉 $4x-3y+3b=0$ 사이의 거리는 원 C_1의 반지름의 길이 3과 같으므로

$\dfrac{|0-18+3b|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3,\ |3b-18|=15$

$b>6$이므로 $3b-18=15 \qquad \therefore b=11$

점 $\mathrm{B}(6+k,\ 0)$과 직선 $4x-3y+33=0$ 사이의 거리는 원 C_2의 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|4(6+k)+33|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3,\ |4k+57|=15$

$4k+57=15$ 또는 $4k+57=-15$

$\therefore k=-\dfrac{21}{2}$ 또는 $k=-18$

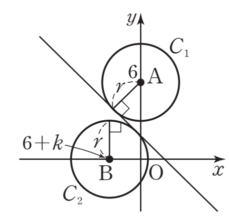
이때 ㉠에서 $k<-12$이므로 $k=-18$

따라서 $r=3,\ k=-18$이므로

$|r+k|=|3+(-18)|=15$

정답_ 15

참고 원 C_2의 중심의 x좌표가 $-2r$보다 큰 경우, 직선 P′Q′의 기울기는 음수가 될 수 있다. 이것은 직선 P′Q′의 기울기의 최솟값이 0이라는 사실에 모순이다.



378

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면

$f(-x,\ y)=0$

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

$f(x,\ -y)=0$

이것을 다시 y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면

$f(x,\ -(y-4))=0 \qquad \therefore f(x,\ 4-y)=0$

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동하면

$f(-x,\ -y)=0$

이것을 다시 y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면

$f(-x,\ -(y-4))=0 \qquad \therefore f(-x,\ 4-y)=0$

따라서 네 방정식

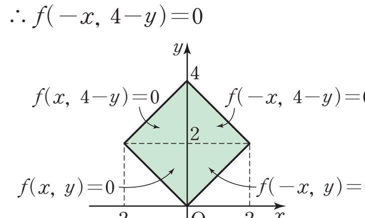
$f(x,\ y)=0$,

$f(-x,\ y)=0$,

$f(x,\ 4-y)=0$,

$f(-x,\ 4-y)=0$

이 나타내는 도형으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다. 이때 색칠한 부분은 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정사각형이므로 구하는 넓이는



$(2\sqrt{2})^2=8$

정답_ 8

379

포물선 $P_1 : y=2x^2-x+3$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 점 $\mathrm{M}(2,\ a)$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{Q}(x',\ y')$이라고 하면 점 $\mathrm{M}(2,\ a)$는 두 점

P, Q를 이은 선분의 중점이므로

$\frac{x+x'}{2}=2,\ \frac{y+y'}{2}=a \qquad \therefore x=4-x',\ y=2a-y'$

이를 $y=2x^2-x+3$에 대입하면

$2a-y'=2(4-x')^2-(4-x')+3$

$\therefore y'=-2(x')^2+15x'+2a-31$

따라서 포물선 P_2의 방정식은

$y=-2x^2+15x+2a-31$

두 포물선 P_1, P_2가 만나는 점의 x좌표는 이차방정식

$2x^2-x+3=-2x^2+15x+2a-31$, 즉 $2x^2-8x-a+17=0$의 근과 같다. 이때 두 점 A, B의 x좌표의 곱이 3이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{-a+17}{2}=3 \qquad \therefore a=11$

이를 $2x^2-8x-a+17=0$에 대입하면

$2x^2-8x+6=0,\ x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

점 B의 좌표가 점 A의 x좌표보다 크므로 B(3, 18)

$\therefore \overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{(2-3)^2+(11-18)^2}=5\sqrt{2}$

정답_ $5\sqrt{2}$

380

두 점 A, B를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3-1}{2},\ \frac{-7+13}{2}\right) \qquad \therefore (1,\ 3)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{13-(-7)}{-1-3}=-5$이고 접은 선은 점 (1, 3)을 지나고 직선 AB와 수직이므로 접은 선의 방정식은

$y-3=\frac{1}{5}(x-1) \qquad \therefore y=\frac{1}{5}x+\frac{14}{5}$

두 점 C, D를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{6+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)$가 직선

$y=\frac{1}{5}x+\frac{14}{5}$ 위의 점이므로

$\frac{1+b}{2}=\frac{1}{5}\times\frac{6+a}{2}+\frac{14}{5} \qquad \therefore a-5b=-29$ …… ㉠

또, 두 점 C, D를 지나는 직선이 직선 $y=\frac{1}{5}x+\frac{14}{5}$와 수직이므로

$\frac{b-1}{a-6}=-5 \qquad \therefore 5a+b=31$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

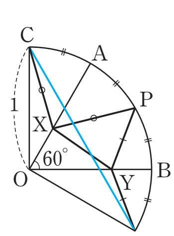
$a=\frac{63}{13},\ b=\frac{88}{13}$

$\therefore 13(a+b)=13\times\left(\frac{63}{13}+\frac{88}{13}\right)=151$

정답_ ②

381

오른쪽 그림과 같이 점 P를 변 OA에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하고, 점 P를 변 OB에 대하여 대칭이동한 점을 D라고 하면



$\overline{\mathrm{PX}}=\overline{\mathrm{CX}},\ \overline{\mathrm{PY}}=\overline{\mathrm{YD}}$이므로

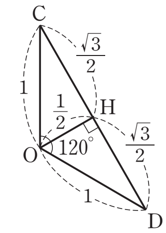
$\overline{\mathrm{PX}}+\overline{\mathrm{XY}}+\overline{\mathrm{YP}}=\overline{\mathrm{CX}}+\overline{\mathrm{XY}}+\overline{\mathrm{YD}}$

$\geq\overline{\mathrm{CD}}$

따라서 삼각형 PXY의 둘레의 길이의 최솟값은 선분 CD의 길이와 같다. 이때 C, D도 중심이 O인 원 위의 점이고 $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{POB}=30°$이므로

$\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{BOD}=30°$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{\mathrm{CD}}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\angle\mathrm{COD}=120°$이므로



$\angle\mathrm{COH}=60°$

즉, 삼각형 COH는 세 각의 크기가 각각 30°, 60°, 90°인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{CD}}=2\overline{\mathrm{CH}}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

그러므로 삼각형 PXY의 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.

정답_ ③

382

두 점 A(0, 1), B(0, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A′, B′이라고 하면

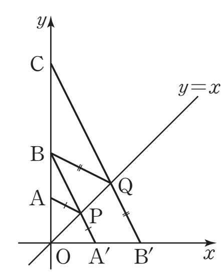
A′(1, 0), B′(2, 0)

이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}},\ \overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{B'Q}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{BQ}}+\overline{\mathrm{QC}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{B'Q}}+\overline{\mathrm{QC}}$

$\geq\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{B'C}}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{BQ}}+\overline{\mathrm{QC}}$의 값이 최소일 때는 오른쪽 그림과 같이 점 P가 두 점 A′, B를 지나는 직선과 직선 $y=x$의 교점이고, 점 Q가 두 점 B′, C를 지나는 직선과 직선 $y=x$의 교점일 때이다.



두 점 A′(1, 0), B(0, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$x+\frac{y}{2}=1 \qquad \therefore y=-2x+2$

두 점 B′(2, 0), C(0, 4)를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore y=-2x+4$

이때 점 P는 두 직선 $y=x$, $y=-2x+2$의 교점이므로

$x=-2x+2$에서 $3x=2 \qquad \therefore x=\frac{2}{3}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

또, 점 Q는 두 직선 $y=x$, $y=-2x+4$의 교점이므로

$x=-2x+4$에서 $3x=4 \qquad \therefore x=\frac{4}{3}$

$\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

정답_ ②

참고 x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Ⅱ 집합과 명제

05 집합의 뜻과 포함 관계

383

① '가까운'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 결정할 수 없으므로 집합이 아니다.
③ '큰'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 결정할 수 없으므로 집합이 아니다.
④ '좋아하는'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 결정할 수 없으므로 집합이 아니다.
⑤ '작은'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 결정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ②이다.

정답_ ②

384

④ '가까운'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 결정할 수 없으므로 집합이 아니다.
⑤ 7에 가장 가까운 자연수의 모임은 집합 $\{6, 8\}$이므로 집합이다.

따라서 집합인 것은 ④이다.

정답_ ④

385

ㄱ. 12의 양의 약수의 모임은 집합 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이다.
ㄴ. 1보다 작은 자연수는 없으므로 공집합($\varnothing$)이다.
ㄷ. 대상을 분명하게 결정할 수 있으므로 집합이다.
ㄹ. '재미있는'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 결정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

주의 공집합도 집합임에 유의한다.

386

$A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로

① $0\notin A$ ② $3\in A$ ③ $5\notin A$ ④ $9\in A$ ⑤ $18\in A$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

387

$x^2+5x-14<0$에서 $(x+7)(x-2)<0$

$\therefore -7<x<2$

따라서 $A=\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$이므로 옳지 않은 것은 ③이다.

정답_ ③

388

ㄱ. $\sqrt{2}$는 무리수이므로 $\sqrt{2}\notin Q$ (거짓)
ㄴ. $i^{100}=(i^4)^{25}=1$은 정수이므로 $i^{100}\in Z$ (거짓)
ㄷ. $\sqrt{9}=3$은 정수이므로 $\sqrt{9}\in Z$ (참)
ㄹ. $\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=-1-\sqrt{2}$는 무리수이므로
$\frac{1}{1-\sqrt{2}}\notin Q$ (참)
ㅁ. π는 무리수이므로 $\pi\notin Q$ (참)
ㅂ. $\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$는 허수이므로
$\frac{2}{1+i}\notin R$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ, ㅁ이다.

정답_ ㄷ, ㄹ, ㅁ

389

① $A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$
② $A=\{1, 2, 4, 8\}$
③ $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$
④ $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$
⑤ $A=\{4, 8, 12, 16\}$

따라서 집합 A를 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은 ③이다.

정답_ ③

390

⑤ $\{x\,|\,x=2a+1,\ a$는 정수$\}$는 $\{\cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots\}$이므로 주어진 집합이 아니다.

정답_ ⑤

391

주어진 집합의 원소는 25 이하의 5의 양의 배수이므로

$25<k\le 30$

따라서 자연수 k는 26, 27, 28, 29, 30의 5개이다.

정답_ ④

392

① $|x|<1$에서 $-1<x<1$이므로 $\{0\}$ ⇨ 유한집합
② 2보다 작은 소수는 존재하지 않으므로 공집합이다.
⇨ 유한집합
③ $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$ ⇨ 무한집합
④ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ⇨ 유한집합
⑤ $\{1, 2, 3, \cdots, 99\}$ ⇨ 유한집합

따라서 무한집합인 것은 ③이다.

정답_ ③

393

ㄱ. $\{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}$ ⇨ 무한집합
ㄴ. $\{2\}$ ⇨ 유한집합
ㄷ. -1과 0 사이의 유리수는 무수히 많다. ⇨ 무한집합
ㄹ. $x^2+6x+9\ge 0$, 즉 $(x+3)^2\ge 0$
이 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다. ⇨ 무한집합
ㅁ. $x^2+1=0$에서 $x^2=-1$

이것을 만족시키는 실수 x의 값이 존재하지 않으므로 공집합이다. ⇨ 유한집합

따라서 유한집합인 것은 ㄴ, ㅁ이다.

정답_ ㄴ, ㅁ

394

주어진 집합이 공집합이 되려면 이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a<0 \qquad \therefore a>1$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다.

정답_ 2

395

집합 $A=\{a, b, c\}$는 원소의 개수가 3이므로

$n(A)=3$

집합 $B=\{1, 4, 6, 9\}$는 원소의 개수가 4이므로

$n(B)=4$

$\therefore n(A)+n(B)=3+4=7$

정답_ ⑤

396

ㄱ. $n(\{0\})=1$, $n(\{1\})=1$이므로 $n(\{0\})=n(\{1\})$ (거짓)

ㄴ. $n(A)=0$이면 $A=\varnothing$ (거짓)

ㄷ. $n(\{1, 3, 5\})-n(\{1, 5\})=3-2=1$ (참)

ㄹ. $n(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})-n(\varnothing)=2-0=2$ (참)

ㅁ. $n(\{0\})+n(\{\varnothing\})+n(\{0, \{\varnothing\}\})=1+1+2=4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ, ㅁ이다.

정답_ ⑤

397

$A=\{1, 2, 7, 14\}$이므로 $n(A)=4$

$B=\{2\}$이므로 $n(B)=1$

$x^2=5$를 만족시키는 자연수는 없으므로 $C=\varnothing \qquad \therefore n(C)=0$

$\therefore n(A)+n(B)-n(C)=4+1-0=5$

정답_ 5

398

$n(A)=1$이므로 이차방정식 $x^2-2kx+16=0$이 중근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-16=0$

$(k+4)(k-4)=0 \qquad \therefore k=-4$ 또는 $k=4$

이때 k는 자연수이므로 $k=4$

정답_ ④

399

$B=\{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$이므로

$n(B)=4$

$n(A)=a$이므로 $n(A)=n(B)$에서 $a=4$

정답_ ③

400

k, $\frac{12}{k+2}$가 자연수이므로 $k+2$는 12의 양의 약수이고

$3\le k+2\le 12$이어야 한다.

따라서 $k+2$가 될 수 있는 값은 3, 4, 6, 12

이때의 x의 값은 각각 4, 3, 2, 1이므로

$A=\{1, 2, 3, 4\} \qquad \therefore n(A)=4$

정답_ ③

다른 풀이

k는 자연수이므로 $k+2\ge 3$

즉, $\frac{12}{k+2}\le 4$이므로 x는 12의 약수 중 4 이하의 자연수이다.

따라서 $A=\{1, 2, 3, 4\}$이므로 $n(A)=4$

401

두 수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

$\therefore B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

x \ y	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

정답_ $B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

402

$m\in A$, $n\in B$일 때, 2^m이 될 수 있는 값은 2, 8이고 3^n이 될 수 있는 값은 3, 9이므로 두 수 2^m, 3^n에 대하여 $2^m\times 3^n$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

2^m \ 3^n	3	9
2	6	18
8	24	72

따라서 $X=\{6, 18, 24, 72\}$이므로 집합 X의 모든 원소의 합은

$6+18+24+72=120$

정답_ 120

403

$A=\{i, -1, -i, 1\}$이므로 $z\in A$이면 $z^2=-1$ 또는 $z^2=1$

$z_1\in A$, $z_2\in A$일 때, $z_1^{\,2}$과 $z_2^{\,2}$이 될 수 있는 값은 -1, 1이므로 두 수 $z_1^{\,2}$, $z_2^{\,2}$에 대하여 $z_1^{\,2}+z_2^{\,2}$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

$z_1^{\,2}$ \ $z_2^{\,2}$	-1	1
-1	-2	0
1	0	2

따라서 $B=\{-2, 0, 2\}$이므로 집합 B의 원소의 개수는 3이다.

정답_ 3

404

조건 ㈎, ㈏에 의하여 $A=\{1, 3, a\}$ ($a\ne 1$, $a\ne 3$)로 놓을 수 있다. 조건 ㈐에 의하여 집합 A의 서로 다른 원소의 곱은 집합 A의 원소가 되어야 하므로 $3a\in A$

즉, $3a=1$ 또는 $3a=3$ 또는 $3a=a$이므로

$a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=1$ 또는 $a=0$

$a\ne 1$이므로 $a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=0$

따라서 구하는 집합 A는 $\left\{\frac{1}{3}, 1, 3\right\}$, $\{0, 1, 3\}$으로 2개이다.

정답_ 2

405

① 0은 집합 A의 원소이므로 $0 \in A$
② 3은 집합 B의 원소가 아니므로 $3 \notin B$
③ 2, 7은 집합 A의 원소이므로 $\{2, 7\} \subset A$
④ 1은 집합 B의 원소가 아니므로 $\{1\} \not\subset B$
⑤ 0, 7은 집합 A의 원소이므로 $\{0, 7\} \subset A$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

406

① $\{1\}$은 집합 A의 원소가 아니므로 $\{1\} \notin A$
② 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{2\} \not\subset A$
③ $\{2, 3\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{2, 3\} \in A$
④ 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{1, 2\} \not\subset A$
⑤ $\{1, 2, 3\}$은 집합 A의 원소가 아니므로 $\{1, 2, 3\} \notin A$
따라서 옳은 것은 ③이다.

정답_ ③

407

① $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing \in A$
② 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$
③ $\{0, \varnothing\}$은 집합 A의 원소가 아니므로 $\{0, \varnothing\} \notin A$
④ 0, $\{0\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{0, \{0\}\} \subset A$
⑤ $\varnothing$, $\{\varnothing\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subset A$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

정답_ ③

408

①, ② $A \not\subset B$, $B \not\subset A$
③ $A=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$이므로 $B \subset A$
④ $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, \cdots\}$, $B=\{6, 12, 18, \cdots\}$이므로
$B \subset A$
⑤ 2로 나누어떨어지는 홀수는 존재하지 않으므로 $A=\varnothing$
$|x| \le 2$에서 $-2 \le x \le 2$이므로 $B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$\therefore A \subset B$
따라서 두 집합 사이의 포함 관계가 주어진 벤 다이어그램과 같은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

409

$A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{0, 1\}$, $C=\{0\}$이므로
$C \subset B \subset A$

정답_ ⑤

410

$X=\{0, 1, 2\}$이므로 집합 X의 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

x \ y	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

$\therefore Y=\{0, 1, 2, 3, 4\}$
마찬가지로 집합 X의 두 원소 x, y에 대하여 xy의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

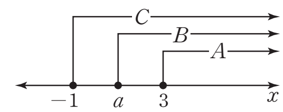
x \ y	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

$\therefore Z=\{0, 1, 2, 4\}$
$\therefore X \subset Z \subset Y$

정답_ $X \subset Z \subset Y$

411

$A \subset B \subset C$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

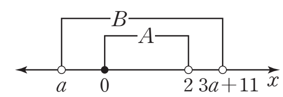


$-1 \le a \le 3$
따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

정답_ ④

412

$A \subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a<0$, $3a+11 \ge 2$
이어야 한다.
$3a+11 \ge 2$에서 $a \ge -3$
$\therefore -3 \le a < 0$
따라서 정수 a는 -3, -2, -1이므로 모든 정수 a의 값의 합은
$-3+(-2)+(-1)=-6$

정답_ -6

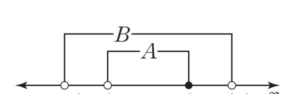
413

$A \subset B$이므로 집합 A의 원소는 모두 집합 B의 원소이다.
$7 \in A$이므로 $7 \in B$
$\therefore a^2-6a=7$ 또는 $a+6=7$
$a^2-6a=7$에서 $a^2-6a-7=0$
$(a+1)(a-7)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$ ⋯⋯ ㉠
$a+6=7$에서 $a=1$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-1$ 또는 $a=1$ 또는 $a=7$
(i) $a=-1$일 때
$A=\{3, 7\}$, $B=\{3, 5, 7\}$ $\quad\therefore A \subset B$
(ii) $a=1$일 때
$A=\{5, 7\}$, $B=\{-5, 3, 7\}$ $\quad\therefore A \not\subset B$
(iii) $a=7$일 때
$A=\{7, 11\}$, $B=\{3, 7, 13\}$ $\quad\therefore A \not\subset B$
(i)~(iii)에서 $a=-1$

정답_ -1

414

$x^2-2ax+a^2-9<0$에서 $(x-a+3)(x-a-3)<0$
$\therefore a-3<x<a+3$
$\therefore B=\{x \mid a-3<x<a+3\}$
이때 $A \subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a-3\le 1$, $a+3>3$
이어야 한다.
$\therefore 0<a\le 4$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 2, 3, 4이므로
$M=4$, $m=1$
$\therefore M+m=4+1=5$

정답_ ④

415

(2) $A=\{-1, 1\}$, $B=\{-1, 1\}$ $\therefore A=B$
(3) $B=\{1, 2, 5, 10\}$ $\therefore A\ne B$

정답_ (1) $A=B$ (2) $A=B$ (3) $A\ne B$

416

$A\subset B$이고 $B\subset A$이면 $A=B$이므로 두 집합의 원소는 같다.
$2\in A$이므로 $2\in B$
$\therefore x-y=2$ …… ㉠
$14\in B$이므로 $14\in A$
$\therefore 3x+y=14$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=2$
$\therefore x+y=4+2=6$

정답_ ③

417

ㄱ. $\{2, 3\}$
ㄴ. 무한집합
ㄷ. $x^2+5x+6=0$에서 $(x+2)(x+3)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$
$\therefore \{-3, -2\}$
ㄹ. $(x-1)(x-4)<0$에서 $1<x<4$
이때 x는 정수이므로 $x=2$ 또는 $x=3$
$\therefore \{2, 3\}$
따라서 집합 A와 서로 같은 집합인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

정답_ ②

418

$A=B$이므로 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 $1-\sqrt{2}i$, c이다. 이때 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 계수가 실수이므로 $1-\sqrt{2}i$가 근이면 $1+\sqrt{2}i$도 근이다.
$\therefore c=1+\sqrt{2}i$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(1-\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)=a$ $\therefore a=2$
$(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)=b$ $\therefore b=3$
$\therefore a+b+c=2+3+(1+\sqrt{2}i)=6+\sqrt{2}i$

정답_ $6+\sqrt{2}i$

419

$A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$
$6\in B$이므로 $6\in A$
즉, $a^2-a=6$이므로 $a^2-a-6=0$
$(a+2)(a-3)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=3$
또, $5\in A$이므로 $5\in B$
즉, $b^2+4b=5$이므로 $b^2+4b-5=0$
$(b+5)(b-1)=0$ $\therefore b=-5$ 또는 $b=1$
따라서 $a=3$, $b=-5$일 때 ab의 값은 최소이므로 구하는 최솟값은 -15이다.

정답_ ①

420

두 집합 $A=\{a+2, a^2-2\}$, $B=\{2, 6-a\}$가 서로 같으므로
$a+2=2$ 또는 $a+2=6-a$
(i) $a+2=2$일 때
$a=0$이므로 $A=\{-2, 2\}$, $B=\{2, 6\}$
$\therefore A\ne B$
(ii) $a+2=6-a$일 때
$a=2$이므로 $A=\{2, 4\}$, $B=\{2, 4\}$
$\therefore A=B$
(i), (ii)에서 $a=2$

정답_ ⑤

421

(1) $\varnothing$, $\{\varnothing\}$
(2) $\varnothing$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x, y, z\}$
(3) 7의 양의 약수는 1, 7이므로 집합 $\{1, 7\}$의 부분집합은
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{7\}$, $\{1, 7\}$

정답_ 풀이 참조

422

$A=\{2, 3, 5, 7\}$에 대하여 $B\subset A$이고 $3\in B$이면서 $n(B)=2$를 만족시키는 집합 B는 집합 A의 부분집합 중에서 3을 반드시 원소로 갖고, 원소가 2개인 집합이다.
따라서 집합 B는 $\{2, 3\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$이다.

정답_ $\{2, 3\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$

423

$P(A)$는 집합 A의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로
$P(A)=\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$
ㄱ. $\varnothing\in P(A)$ (참)
ㄴ. $\varnothing\in P(A)$이므로 $\{\varnothing\}\subset P(A)$ (거짓)
ㄷ. $\{1\}\in P(A)$ (거짓)
ㄹ. $\{0, 1\}\in P(A)$ (참)
ㅁ. $\{0, 1\}\in P(A)$이므로 $\{\{0, 1\}\}\subset P(A)$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

정답_ ㄱ, ㄹ, ㅁ

424

① $A=\{1, 3, 9\}$이므로 $\{1, 3, 5, 9\}\not\subset A$
② $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$
③ 원소가 1개인 부분집합의 개수는 ${}_3C_1=3$
④ 원소가 2개인 부분집합의 개수는 ${}_3C_2=3$
⑤ 원소가 3개인 부분집합의 개수는 ${}_3C_3=1$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

정답_ ③

425

집합 X는 원소가 2개인 집합 A의 부분집합이므로 집합 X의 개수는

${}_3C_2=3$

정답_ ④

426

$X=\{5, 10, 15, \cdots, 50\}$

가장 작은 원소는 5, 가장 큰 원소는 50이므로 구하는 부분집합의 개수는 10, 15, 20, ⋯, 45 중에서 3개 이하를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_3+{}_8C_2+{}_8C_1+{}_8C_0=56+28+8+1=93$

정답_ ③

427

원소의 개수가 짝수이므로 원소의 개수가 2 또는 4 또는 6이어야 한다.

원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는

${}_6C_2=15$

원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

원소의 개수가 6인 부분집합의 개수는

${}_6C_6=1$

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$15+15+1=31$

정답_ ③

428

집합 A의 원소의 개수를 n이라고 하면 $2^n-1=255$이므로

$2^n=256=2^8$ $\quad\therefore n=8$

즉, $n(A)=8$이므로 $n(A)-n(B)=4$에서

$n(B)=4$

따라서 집합 B의 부분집합의 개수는

$2^4=16$

정답_ ④

429

$A_8=\{x\mid x\text{는 8의 양의 약수}\}=\{1, 2, 4, 8\}$이므로

$p=2^4=16$

$A_{20}=\{x\mid x\text{는 20의 양의 약수}\}=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로

$q=2^6-1=64-1=63$

$\therefore p+q=16+63=79$

정답_ 79

430

ㄱ. $\{-1, 1\}$이 집합 A의 원소이므로 $\{-1, 1\}\in A$ (참)

ㄴ. -1, 1이 집합 A의 원소이므로 $\{-1, 1\}\subset A$ (참)

ㄷ. 집합 A의 원소는 -1, 1, $\{-1, 1\}$의 3개이다. (거짓)

ㄹ. 집합 A의 원소의 개수가 3이므로 집합 A의 진부분집합의 개수는 $2^3-1=7$ (거짓)

ㅁ. $X\subset A$, $X\neq\varnothing$, $X\neq A$이므로 집합 X는 집합 A의 진부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는

$(2^3-1)-1=6$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다.

정답_ ㄱ, ㄴ, ㅁ

431

$X=\{(-1, 1), (-1, 2), \cdots, (-1, k), (1, 1), (1, 2), \cdots, (1, k)\}$

이때 집합 X의 원소의 개수는 $2k$이고 X의 부분집합의 개수가 2^{30}이므로

$2^{2k}=2^{30}$, $2k=30$

$\therefore k=15$

정답_ 15

432

$A=\{x\mid -3\le x\le 3, x\text{는 정수}\}=\{-3, -2, -1, \cdots, 3\}$이므로

$n(A)=7$

-1, 2를 원소로 갖는 부분집합 X의 개수는

$2^{7-2}=2^5=32$ $\quad\therefore a=32$

-2는 원소로 갖지 않고, 3은 원소로 갖는 부분집합 Y의 개수는

$2^{7-1-1}=2^5=32$ $\quad\therefore b=32$

$\therefore a+b=32+32=64$

정답_ 64

433

$A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

16의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16이므로 집합 A의 원소 중에서 16의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이다.

따라서 구하는 집합의 개수는 $\{1, 2, 4, 8\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로

$2^4-1=16-1=15$

정답_ 15

434

집합 A의 원소 중에서 4의 배수 4, 8, 12를 반드시 원소로 갖고, 5의 배수 5, 10을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{12-3-2}=2^7=128$

정답_ 128

435

집합 $A=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 부분집합 중에서 가장 작은 원소가 3인 집합은 반드시 3을 원소로 갖고, 1, 2를 원소로 갖지 않아야 하므로

$2^{n-1-2}=64$, $2^{n-3}=2^6$, $n-3=6$

$\therefore n=9$

정답_ 9

436

$A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$

따라서 집합 X의 개수는 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$의 부분집합 중에서 a_1, a_2, a_3을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-3}=2^4=16$

정답_ ②

437

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로
$\{1, 2, 3, 6\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$의 부분집합 중에서 원소 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{6-4}=2^2=4$

정답_ 4

438

$B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 2, 4, 6, 8을 반드시 원소로 갖는 부분집합에서 A, B를 제외한 것과 같으므로 구하는 집합 X의 개수는
$2^{n-4}-2=30$, $2^{n-4}=32$, $2^{n-4}=2^5$, $n-4=5$
$\therefore n=9$

정답_ 9

439

$A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$
집합 X는 조건 (가)에 의하여 집합 B의 부분집합 중에서 1, 2, 5, 10을 반드시 원소로 갖고 조건 (나)에 의하여 나머지 원소 3, 4, 6, 7, 8, 9 중에서 3개 이상을 원소로 갖는 집합이다.
따라서 집합 X는 집합 $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$의 부분집합 중에서 공집합과 원소의 개수가 1, 2인 부분집합을 뺀 것과 같으므로 구하는 개수는
$2^6-1-{}_6C_1-{}_6C_2=64-1-6-15=42$

정답_ 42

440

집합 A의 부분집합 중에서 적어도 하나의 소수를 원소로 갖는 집합의 개수는 A의 모든 부분집합의 개수에서 소수 3, 5, 7, 11, 13을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.
집합 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$이므로
$n(A)=8$
따라서 집합 A의 부분집합의 개수는
$2^8=256$
소수인 원소 3, 5, 7, 11, 13을 제외한 원소로 이루어진 집합 $\{1, 9, 15\}$의 부분집합의 개수는
$2^3=8$
따라서 구하는 집합의 개수는
$256-8=248$

정답_ 248

참고 집합 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여 집합 A의 특정한 원소 k $(k<n)$개 중에서 적어도 한 개를 원소로 갖는 부분집합의 개수 ⇨ 2^n-2^{n-k}

441

집합 A의 부분집합 중에서 홀수가 한 개 이상 속해 있는 집합의 개수는 A의 모든 부분집합의 개수에서 홀수가 하나도 속해 있지 않은 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.
집합 A의 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는
$2^5=32$
홀수인 원소 1, 3, 5를 제외한 원소로 이루어진 집합 $\{2, 4\}$의 부분집합의 개수는
$2^2=4$
따라서 구하는 부분집합의 개수는
$32-4=28$

정답_ ④

다른 풀이

(i) 홀수 1개를 원소로 갖는 부분집합
집합 $\{2, 4\}$의 부분집합에 3개의 홀수 중에서 1개를 택하여 넣는 경우의 수와 같으므로
$2^2\times{}_3C_1=4\times3=12$

(ii) 홀수 2개를 원소로 갖는 부분집합
집합 $\{2, 4\}$의 부분집합에 3개의 홀수 중에서 2개를 택하여 넣는 경우의 수와 같으므로
$2^2\times{}_3C_2=4\times3=12$

(iii) 홀수 3개를 원소로 갖는 부분집합
집합 $\{2, 4\}$의 부분집합에 3개의 홀수를 모두 넣는 경우의 수와 같으므로
$2^2\times{}_3C_3=4\times1=4$

(i)~(iii)에서 구하는 집합의 개수는
$12+12+4=28$

442

a 또는 c를 원소로 갖는 집합의 개수는 집합 A의 부분집합의 개수에서 a, c를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.
집합 A의 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는
$2^5=32$
원소 a, c를 제외한 원소로 이루어진 집합 $\{b, d, e\}$의 부분집합의 개수는
$2^3=8$
따라서 구하는 집합의 개수는 $32-8=24$

정답_ 24

다른 풀이

a 또는 c를 원소로 갖는 집합은 집합 $\{b, d, e\}$의 부분집합에 a만 넣거나 c만 넣거나 a, c를 넣으면 된다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^3\times3=24$

443

가장 큰 원소가 1 이상이려면 1, 2, 3 중에서 적어도 하나를 원소로 가져야 한다. 즉, 구하는 집합의 개수는 집합 A의 모든 부분집합의 개수에서 가장 큰 원소가 1 미만인 집합의 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.
집합 A의 원소의 개수가 6이므로 부분집합의 개수는
$2^6=64$
1 이상인 수 1, 2, 3을 제외한 원소로 이루어진 집합 $\{-2, 1, 0\}$

의 부분집합의 개수는

$2^3=8$

따라서 구하는 부분집합의 개수는 $64-8=56$

정답_ 56

444

조건 ㈎에 의하여 S의 원소는 자연수이고 조건 ㈏에 의하여 $\frac{12}{x}\in S$이므로 집합 S의 원소는 12의 양의 약수이어야 한다.

이때 12의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이고 조건 ㈏에 의하여

$1\in S$이면 $12\in S$, $2\in S$이면 $6\in S$, $3\in S$이면 $4\in S$

이어야 한다. 즉, 1과 12, 2와 6, 3과 4는 둘 중에서 어느 하나가 집합 S의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 S의 원소이어야 한다.

따라서 공집합이 아닌 집합 S의 개수는 집합 $\{1, 2, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3-1=7$

정답_ 7

다른 풀이

주어진 조건을 모두 만족시키는 집합 S를 원소의 개수에 따라 구해 보면 다음과 같다.

(i) 집합 S의 원소의 개수가 2일 때

$S=\{1, 12\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}$

(ii) 집합 S의 원소의 개수가 4일 때

$S=\{1, 2, 6, 12\}, \{1, 3, 4, 12\}, \{2, 3, 4, 6\}$

(iii) 집합 S의 원소의 개수가 6일 때

$S=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

따라서 집합 S의 개수는 $3+3+1=7$

445

x와 $8-x$가 모두 자연수이므로

$x\ge1$, $8-x\ge1$ $\quad\therefore 1\le x\le7$

따라서 집합 A의 원소가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.

이때 $x\in A$이면 $8-x\in A$이어야 하므로

$1\in A$이면 $7\in A$, $2\in A$이면 $6\in A$, $3\in A$이면 $5\in A$

이어야 한다. 즉, 1과 7, 2와 6, 3과 5는 둘 중에서 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A의 원소이어야 하고 4도 집합 A의 원소가 될 수 있다.

따라서 공집합이 아닌 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4-1=15$

정답_ 15

446

조건 ㈏는 집합 A의 두 원소의 합이 집합 S의 원소이면 집합 A의 원소임을 의미한다. 조건 ㈎에 의하여 3은 반드시 집합 A의 원소이고 $3+3=6\in S$이므로 $6\in A$

이와 같은 과정을 계속하면

$6+3=9\in S$이므로 $9\in A$

$9+3=12\in S$이므로 $12\in A$

$\vdots$

즉, 주어진 조건을 만족시키는 집합은 3의 배수를 반드시 포함한다. 따라서 3의 배수를 반드시 포함하면서 원소의 개수가 가장 작은 것은 100 이하의 3의 배수의 집합이므로 $n(A)$의 최솟값은 33이다.

정답_ ④

447

집합 A의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는

${}_6C_2=15$이므로

$n=15$

집합 A_k 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합은

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}$의 5개이다.

마찬가지로 2, 3, 4, 5, 6을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 5이므로

$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{15}=5(1+2+3+4+5+6)=105$

정답_ 105

448

$1\in X$, $3\notin X$인 집합 X의 개수는

$2^{5-1-1}=2^3=8$

8개의 집합 X 중에서 5를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$1\in X$, $5\in X$, $3\notin X$인 집합 X의 개수와 같으므로

$2^{5-2-1}=2^2=4$

마찬가지로 7, 9를 각각 반드시 원소로 갖는 집합 X의 개수도 4이므로 $S(X)$의 합은

$8\times1+4\times(5+7+9)=92$

정답_ 92

참고 $1\in X$, $3\notin X$인 집합 X를 구하면 다음과 같다.

$\{1\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{1, 9\}, \{1, 5, 7\}, \{1, 5, 9\}, \{1, 7, 9\}, \{1, 5, 7, 9\}$

이때 모든 집합 X에서 1이 8개, 5, 7, 9가 각각 4개씩 있는 것을 알 수 있다.

449

집합 A_k 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

마찬가지로 3, 9, 27을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 8이므로

$$\begin{aligned}a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{15}&=1^8\times3^8\times9^8\times27^8\\&=1^8\times3^8\times3^{16}\times3^{24}\\&=3^{48}\end{aligned}$$

정답_ ③

450

$3bx-2x+12=4x+4a$에서

$3bx-6x=4a-12$

$\therefore (3b-6)x=4a-12$ ······ ❶

집합 A가 무한집합이 되려면 위의 방정식의 해가 무수히 많아야 하므로 $3b-6=0$, $4a-12=0$이어야 한다. ······ ❷

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$a+b=3+2=5$ ······ ❸

정답_ 5

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 $px=q$의 꼴로 정리하기	30 %
❷ ❶에서 구한 일차방정식의 해가 무수히 많을 조건 구하기	40 %
❸ $a+b$의 값 구하기	30 %

참고 x에 대한 방정식 $ax=b$의 해

(1) $a\neq0$일 때 $x=\frac{b}{a}$ ⇨ 오직 하나의 해를 갖는다.

(2) $a=0$일 때

① $b\neq0$이면 $0\times x\neq b$ ⇨ 해는 없다.

② $b=0$이면 $0\times x=b$ ⇨ 해는 무수히 많다.

451

$xy-x-y-3=0$에서

$(x-1)(y-1)=4$ …… ㉠

이때 $x-1$, $y-1$이 정수이므로 ㉠을 만족시키는 순서쌍 $(x-1, y-1)$은

$(1, 4), (2, 2), (4, 1), (-1, -4), (-2, -2), (-4, -1)$

의 6개이다. $\therefore n(A)=6$ ❶

이때 $n(A)-n(B)=2$이므로

$n(B)=4$ ❷

따라서 $B=\{1, 2, 3, 4\}=\{x|x\le4$인 자연수$\}$이므로

$k=4$ ❸

정답_ 4

채점 기준	비율
❶ $n(A)$ 구하기	50 %
❷ $n(B)$ 구하기	30 %
❸ k의 값 구하기	20 %

452

집합 X의 서로 다른 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

x \ y	a	b	c
a		$a+b$	$a+c$
b	$a+b$		$b+c$
c	$a+c$	$b+c$	

$\therefore P=\{a+b, a+c, b+c\}$ ❶

이때 $P=Q$이므로

$\{a+b, a+c, b+c\}=\{10, 16, 20\}$

$a<b<c$라고 하면 $a+b<a+c<b+c$이므로

$a+b=10$ …… ㉠

$a+c=16$ …… ㉡

$b+c=20$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(a+b+c)=46$ $\therefore a+b+c=23$ …… ㉣

㉣−㉢, ㉣−㉡, ㉣−㉠을 각각 하면

$a=3$, $b=7$, $c=13$ ❷

따라서 집합 X의 원소 중에서 가장 큰 수는 13이다. ❸

정답_ 13

채점 기준	비율
❶ 집합 P의 원소를 a, b, c로 나타내기	30 %
❷ a, b, c의 값 구하기	60 %
❸ 집합 X의 원소 중에서 가장 큰 수 구하기	10 %

453

$B=\{1, 3, 9\}$ ❶

이때 $A\subset X\subset B$, $X\neq B$이므로 집합 X는 집합 B의 진부분집합이다.

(i) 집합 X의 원소가 0개일 때

$X=\varnothing$이므로 $A\subset X$를 만족시키는 집합 A는 $A=\varnothing$뿐이다.

따라서 순서쌍 (A, X)의 개수는 1

(ii) 집합 X의 원소가 1개일 때

집합 X는 $\{1\}$, $\{3\}$, $\{9\}$이고 각 집합 X에 대하여 $A\subset X$를 만족시키는 집합 A의 개수는 $2^1=2$이다.

따라서 순서쌍 (A, X)의 개수는 $3\times2=6$

(iii) 집합 X의 원소가 2개일 때

집합 X는 $\{1, 3\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 9\}$이고 각 집합 X에 대하여 $A\subset X$를 만족시키는 집합 A의 개수는 $2^2=4$이다.

따라서 순서쌍 (A, X)의 개수는 $3\times4=12$ ❷

(i)~(iii)에서 순서쌍 (A, X)의 개수는

$1+6+12=19$ ❸

정답_ 19

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 원소나열법으로 나타내기	20 %
❷ 집합 X의 원소가 0개, 1개, 2개일 때, 순서쌍 (A, X)의 개수 구하기	60 %
❸ 순서쌍 (A, X)의 개수 구하기	20 %

454

짝수 2, 4, 6, 8, 10의 5개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$ ❶

홀수 1, 3, 5, 7, 9의 5개 중에서 3개 이상을 택하는 경우의 수는

${}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=10+5+1=16$ ❷

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$10\times16=160$ ❸

정답_ 160

채점 기준	비율
❶ 짝수 2개를 원소로 갖는 경우의 수 구하기	30 %
❷ 적어도 3개의 홀수를 원소로 갖는 경우의 수 구하기	50 %
❸ 짝수 2개와 적어도 3개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수 구하기	20 %

455

원소의 개수가 2개 이상인 A의 부분집합을 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 가장 작은 원소가 -2인 경우

-2를 원소로 갖는 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는

$2^{5-1}-1=2^4-1=15$

(ii) 가장 작은 원소가 -1인 경우

-2는 원소로 갖지 않고 -1은 원소로 갖는 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는

$2^{5-1-1}-1=2^3-1=7$

(iii) 가장 작은 원소가 0인 경우
-2, -1은 원소로 갖지 않고 0은 원소로 갖는 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는
$2^{5-2-1}-1=2^2-1=3$

(iv) 가장 작은 원소가 1인 경우
-2, -1, 0은 원소로 갖지 않고 1은 원소로 갖는 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는
$2^{5-3-1}-1=2-1=1$ ❶

(v) 가장 작은 원소가 2인 경우
-2, -1, 0, 1은 원소로 갖지 않고 2는 원소로 갖는 원소가 2개 이상인 부분집합은 없다. ❷

(i)~(v)에서 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값은
$(-2)\times15+(-1)\times7+0\times3+1\times1=-36$ ❸

정답_ -36

채점 기준	비율
❶ 집합의 가장 작은 원소가 각각 -2, -1, 0, 1인 경우의 부분집합의 개수 구하기	60 %
❷ 집합의 가장 작은 원소가 2인 부분집합은 없음을 알기	20 %
❸ 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값 구하기	20 %

456

ㄱ. $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^k\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^l\end{pmatrix}$ (k, l은 자연수)이라고 하면
$PQ=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^{k+l}\end{pmatrix}$이므로
$P\in A$, $Q\in A$이면 $PQ\in A$ (참)

ㄴ. $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^k\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^l\end{pmatrix}$ (k, l은 자연수)이라고 하면
$P+Q=\begin{pmatrix}2&0\\0&2^k+2^l\end{pmatrix}$
따라서 $P\in A$, $Q\in A$이지만 $P+Q\notin A$ (거짓)

ㄷ. $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^k\end{pmatrix}$ (k는 자연수)이라고 하면
$P^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^{2k}\end{pmatrix}$
$P^3=P^2P=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^{2k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^{3k}\end{pmatrix}$
⋮
$P^n=P^{n-1}P=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^{(n-1)k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^{nk}\end{pmatrix}$
이므로 $P\in A$이면 $P^n\in A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

457

① $2\in A$이면 $1\in A$, $1\in A$이면 $\frac{1}{2}\in A$, $\frac{1}{2}\in A$이면 $\frac{1}{4}\in A$, ⋯
이므로 $A=\left\{2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$로 무한집합이다.
② ①에서 A는 무한집합이지만 $0\notin A$이다.
③ $A=\left\{0, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \cdots\right\}$일 때, $\sqrt{2}\in A$, $0\in A$이다.
④ ①에서 $x=2$, $y=2$이면 $x\in A$, $y\in A$이지만 $x+y=4\notin A$
⑤ ①에서 $x=2$, $y=2$이면 $x\in A$, $y\in A$이지만 $xy=4\notin A$
따라서 항상 옳은 것은 ①이다.

정답_ ①

458

$n(A)=1$이 되게 하려면 방정식 $(k-4)x^2+2x-k=0$을 만족시키는 x의 값이 한 개이어야 한다.
(i) $k=4$일 때
주어진 방정식은 $2x-4=0$, 즉 $x=2$이므로 조건을 만족시킨다.
(ii) $k\neq4$일 때
주어진 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이차방정식 $(k-4)x^2+2x-k=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=1^2+k(k-4)=0$, $k^2-4k+1=0$
이때 k에 대한 이차방정식 $k^2-4k+1=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 4이다.
(i), (ii)에서 모든 상수 k의 값의 합은
$4+4=8$

정답_ 8

459

두 자리 자연수 a, b의 차가 10의 배수이므로 9 이하인 자연수 x, y에 대하여
$a=10x+k$, $b=10y+k$ ($k=0, 1, 2, \cdots, 9$)
라고 하면
$ab=(10x+k)(10y+k)$
$=100xy+10kx+10ky+k^2$
$=10(10xy+kx+ky)+k^2$
따라서 ab의 일의 자리의 숫자는 k^2의 일의 자리의 숫자와 같고
k^2의 값은 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81이므로
$A=\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은 25이다.

정답_ ④

460

$\frac{1}{i}=-i$이므로 $X=\{i^x+(-i)^y \mid x\in A, y\in B\}$
ㄱ. $A=\{1, 5\}$, $B=\{2, 3\}$이면
$i^1+(-i)^2=i^5+(-i)^2=-1+i$
$i^1+(-i)^3=i^5+(-i)^3=2i$
$\therefore X=\{-1+i, 2i\}$ (참)
ㄴ. $i^1=i^5=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$이고
$(-i)^1=(-i)^5=-i$, $(-i)^2=-1$, $(-i)^3=i$, $(-i)^4=1$이다. 이때 두 수 i^x, $(-i)^y$에 대하여 $i^x+(-i)^y$의 값을 구하면 다음 표와 같다.

$(-i)^y$ \ i^x	i^1	i^2	i^3	i^4	i^5
$(-i)^1$	0	$-1-i$	$-2i$	$1-i$	0
$(-i)^2$	$-1+i$	-2	$-1-i$	0	$-1+i$
$(-i)^3$	$2i$	$-1+i$	0	$1+i$	$2i$
$(-i)^4$	$1+i$	0	$1-i$	2	$1+i$
$(-i)^5$	0	$-1-i$	$-2i$	$1-i$	0

따라서 원소의 개수가 최대일 때 집합 X는

$X=\{0,\ -1+i,\ 2i,\ 1+i,\ -1-i,\ -2,\ -2i,\ 1-i,\ 2\}$

이므로 $n(X)$의 최댓값은 9이다. (거짓)

ㄷ. $-2\in X$이려면 ㄴ의 표에서 $i^2+(-i)^2=-2$이므로 두 집합 A, B는 모두 2를 반드시 원소로 가져야 한다.

이를 만족시키는 두 집합 A, B의 개수는 각각

$2^{5-1}=2^4=16$

이므로 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$16\times16=256$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ㄱ, ㄷ

461

두 수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 다음 표와 같다.

$y \backslash x$	1	2	3	4	a
1	2	3	4	5	$a+1$
3	4	5	6	7	$a+3$
5	6	7	8	9	$a+5$

이때 집합 X의 원소는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $a+1$, $a+3$, $a+5$이므로 $n(X)=10$이 되기 위해서는 $a+1$, $a+3$, $a+5$ 중 한 개만 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9가 되어야 한다.

이때 $a+1<a+3<a+5$이므로 자연수 a에 대하여 다음 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $2\le a+1\le9$인 경우

$a+1\le7$이면 $a+3\le9$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $7<a+1\le9$이므로

$6<a\le8$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 a의 값은 7, 8이다.

(ii) $2\le a+5\le9$인 경우

$a+5\ge4$이면 $a+3\ge2$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $2\le a+5<4$이므로

$-3\le a<-1$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 a의 값은 없다.

(i), (ii)에서 자연수 a의 최댓값은 8이다.

정답_ 8

462

$A=\{a_1,\ a_2\}$, $B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4\}$라고 하면

$a_1+a_2=5$, $b_1+b_2+b_3+b_4=8$

집합 C의 원소는

a_1+b_1, a_1+b_2, a_1+b_3, a_1+b_4, a_2+b_1, a_2+b_2, a_2+b_3, a_2+b_4

이고 집합 C의 모든 원소의 합이 최대가 되려면 이 8개의 수가 모두 서로 다른 값이어야 한다.

따라서 집합 C의 모든 원소의 합의 최댓값은

$(a_1+b_1)+(a_1+b_2)+(a_1+b_3)+(a_1+b_4)+(a_2+b_1)$

$+(a_2+b_2)+(a_2+b_3)+(a_2+b_4)$

$=4(a_1+a_2)+2(b_1+b_2+b_3+b_4)$

$=4\times5+2\times8=36$

정답_ 36

463

$x\in A$, $y\in A$일 때 $x+y$의 값은

$2a$, $a+b$, $a+c$, $2b$, $b+c$, $2c$

이때 $a<b<c$이므로

$2a<a+b<2b<b+c<2c$,

$2a<a+b<a+c<b+c<2c$

이고 $2b$와 $a+c$의 대소 관계는 알 수 없다.

(i) $a+c=2b$일 때

$2a+(a+b)+(a+c)+(b+c)+2c=60$

$4a+2b+4c=60$, $4(a+c)+2b=60$

$10b=60$ $\quad\therefore b=6$

즉, $a+c=12$이므로 이를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ c)$는

(1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7)의 5개이다.

(ii) $a+c\ne2b$일 때

$2a+(a+b)+(a+c)+2b+(b+c)+2c=60$

$4a+4b+4c=60$ $\quad\therefore a+b+c=15$

이때 $a+c\ne2b$이므로 $b\ne5$

이를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

(1, 2, 12), (1, 3, 11), (1, 4, 10), (1, 6, 8), (2, 3, 10), (2, 4, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8)의 8개이다.

(i), (ii)에서 구하는 집합 A의 개수는

$5+8=13$

정답_ 13

464

자연수 n에 대하여

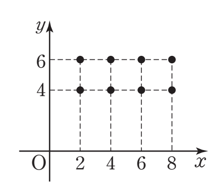
2^n이 될 수 있는 값은 2, 4, 8, 16, 32, …이므로

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

4^n이 될 수 있는 값은 4, 16, 64, 256, 1024, …이므로

$B=\{4,\ 6\}$

따라서 집합 $C=\{(x,\ y)\,|\,x\in A,\ y\in B\}$의 모든 원소를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3=4$

한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 2개이고 한 직선 위의 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 서로 다른 삼각형의 개수는

$56-2\times4=48$

정답_ ④

465

집합 X의 부분집합이 n을 최소의 원소로 가지려면 n은 원소로 갖고, n보다 작은 1, 2, …, $n-1$은 원소로 갖지 않아야 하므로

$f(n)=2^{10-(n-1)-1}=2^{10-n}$

ㄱ. $f(7)=2^{10-7}=2^3=8$ (참)

ㄴ. $f(a)=2^{10-a}$, $f(b)=2^{10-b}$

$a<b$이면 $10-a>10-b$이므로 $2^{10-a}>2^{10-b}$

$\therefore f(a)>f(b)$ (거짓)

ㄷ. $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)=2^{10-2}+2^{10-4}+2^{10-6}+2^{10-8}$

$=2^8+2^6+2^4+2^2$

$=256+64+16+4$

$=340$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

주의 집합 X의 부분집합 중 n을 최소의 원소로 갖는 부분집합을 원소의 개수가 n인 집합으로 생각하여 $f(n)=2^n$으로 구하지 않도록 주의한다.

466

(나)에서 집합 X의 모든 원소의 곱이 6의 배수이어야 하므로 다음 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $6\in X$일 때

$n(X)\geq 2$를 만족시키는 집합 X는 A의 부분집합 중에서 6을 반드시 원소로 갖는 부분집합에서 $n(X)=1$인 집합 $\{6\}$을 제외한 것과 같으므로 집합 X의 개수는

$2^{5-1}-1=2^4-1=15$

(ii) $6\notin X$일 때

집합 X의 모든 원소의 곱이 6의 배수이려면 $3\times 4=12$는 6의 배수이므로 $3\in X$, $4\in X$이어야 한다.

즉, 집합 X의 개수는 A의 부분집합 중에서 3, 4를 반드시 원소로 갖고 6을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{5-2-1}=2^2=4$

(i), (ii)에서 구하는 부분집합 X의 개수는

$15+4=19$

정답_ ②

467

조건 (가)에서 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A의 원소이다.

또, $A=\{5\}$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

이때 (나)에서 집합 A의 모든 원소의 곱이 홀수이므로 모든 원소는 홀수이다. 이때 $1+9=10$, $3+7=10$이고 모든 원소의 합이 홀수이므로 원소의 개수도 홀수이며, 모든 원소의 합이 20보다 작아야 한다.

(i) $A=\{1, 5, 9\}$일 때

집합 A의 모든 원소의 곱이 $1\times 5\times 9=45<50$이고, 모든 원소의 합이 $1+5+9=15<20$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $A=\{3, 5, 7\}$일 때

집합 A의 모든 원소의 곱이 $3\times 5\times 7=105>50$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$일 때

집합 A의 모든 원소의 곱이 $1\times 3\times 5\times 7\times 9=945>50$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 $A=\{1, 5, 9\}$이고 $a=45$, $b=15$이므로

$a+b=45+15=60$

정답_ 60

주의 조건에서 $n(A)\geq 2$이므로 집합 $\{5\}$는 A가 될 수 없다.

468

집합 A_i의 원소는 2개 이상이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $m_i=\frac{1}{2}$일 때

집합 A_i는 $\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$의 1개이다.

(ii) $m_i=\frac{1}{2^2}$일 때

집합 A_i는 S의 부분집합 중에서 $\frac{1}{2^2}$을 반드시 원소로 갖고 $\frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{2^3}$을 원소로 갖지 않는 부분집합에서 원소의 개수가 1인 $\left\{\frac{1}{2^2}\right\}$을 제외한 것과 같으므로 A_i의 개수는

$2^{5-1-2}-1=2^2-1=3$

(iii) $m_i=\frac{1}{2^3}$일 때

집합 A_i는 S의 부분집합 중에서 $\frac{1}{2^3}$을 반드시 원소로 갖고 $\frac{1}{2^4}$을 원소로 갖지 않는 부분집합에서 원소의 개수가 1인 $\left\{\frac{1}{2^3}\right\}$을 제외한 것과 같으므로 A_i의 개수는

$2^{5-1-1}-1=2^3-1=7$

(iv) $m_i=\frac{1}{2^4}$일 때

집합 A_i는 S의 부분집합 중에서 $\frac{1}{2^4}$을 반드시 원소로 갖는 부분집합에서 원소의 개수가 1인 $\left\{\frac{1}{2^4}\right\}$을 제외한 것과 같으므로 A_i의 개수는

$2^{5-1}-1=2^4-1=15$

(i)~(iv)에서

$m_1+m_2+m_3+\cdots+m_k=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2^2}\times 3+\frac{1}{2^3}\times 7+\frac{1}{2^4}\times 15=\frac{49}{16}$

정답_ $\frac{49}{16}$

주의 집합 A_i의 원소는 2개 이상이므로 m_i가 될 수 있는 원소는 $\frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2}$이다.

469

집합 $A=\{2, 4, 8, 16\}$의 공집합이 아닌 부분집합 중에서 2를 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $2^{4-1}=2^3=8$

4를 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $2^{4-1}=2^3=8$

8을 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $2^{4-1}=2^3=8$

16을 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $2^{4-1}=2^3=8$

따라서 $f(A_1)\times f(A_2)\times f(A_3)\times\cdots\times f(A_{15})$에는 2, 4, 8, 16이 각각 8번씩 곱해져 있으므로

$f(A_1)\times f(A_2)\times f(A_3)\times\cdots\times f(A_{15})=2^8\times 4^8\times 8^8\times 16^8$

$=2^8\times 2^{16}\times 2^{24}\times 2^{32}$

$=2^{80}$

즉, $2^{80}=2^k$이므로 $k=80$

정답_ 80

06 집합의 연산

470

$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 3, 9\}$, $C=\{1, 2, 3, 6\}$

① $A\cap B=\{3\}$

② $B\cup C=\{1, 2, 3, 6, 9\}$

③ $A\cap B=\{3\}$이므로 $(A\cap B)\cap C=\{3\}$

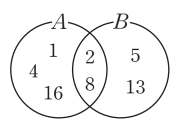
④ $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$이므로
  $(A\cup B)\cap C=\{1, 2, 3\}$

⑤ $B\cap C=\{1, 3\}$이므로
  $A\cup(B\cap C)=\{1, 2, 3, 5, 7\}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

정답_ ④

471



$A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이므로 주어진 조건을 만족시키도록 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore B=\{2, 5, 8, 13\}$

정답_ $\{2, 5, 8, 13\}$

472

집합 A는 a, t를 반드시 원소로 갖고, m, h를 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 A가 될 수 있는 것은 ③ $\{s, t, a, r\}$이다.

정답_ ③

473

① $A=\{2, 3, 5, 7, \cdots\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$이므로
  $A\cap B=\{2\}$

② $A\cap B=\varnothing$

③ $A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $B=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$이므로
  $B\subset A \qquad \therefore A\cap B=B$

④ $A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{0\}$이므로 $A\cap B=\{0\}$

⑤ $A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$이므로
  $A\cap B=\varnothing$

따라서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ②, ⑤이다.

정답_ ②, ⑤

474

$A=\{1, 3, 5, 15\}$, $B=\{3, 6, 9, 12, 15, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{3, 15\}$

즉, 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 3, 15를 원소로 갖지 않는 집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$

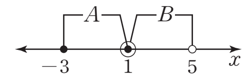
정답_ ①

475

$x^2+2x-3\le 0$에서

$(x+3)(x-1)\le 0 \qquad \therefore -3\le x\le 1$

$\therefore A=\{x\,|\,-3\le x\le 1\}$



이때

$A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{x\,|\,-3\le x<5\}$

가 성립하려면 집합 B는 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$B=\{x\,|\,1<x<5\}$

$\quad=\{x\,|\,(x-1)(x-5)<0\}$

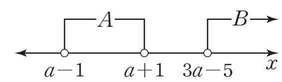
$\quad=\{x\,|\,x^2-6x+5<0\}$

따라서 $a=6$, $b=5$이므로

$a+b=6+5=11$

정답_ 11

476



두 집합 A, B가 서로소, 즉

$A\cap B=\varnothing$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$a+1\le 3a-5 \qquad \therefore a\ge 3$

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다.

정답_ 3

477

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A=\{1, 3, 4, 6\}$, $B=\{1, 4, 5, 7\}$

① $A^C=\{2, 5, 7\}$

② $A-B=\{3, 6\}$

③ $B^C=\{2, 3, 6\}$이므로 $A^C-B^C=\{5, 7\}$

④ $B-A^C=\{1, 4\}$

⑤ $U-A^C=A=\{1, 3, 4, 6\}$

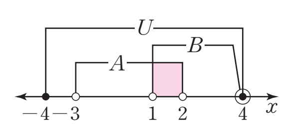
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

정답_ ④

478

$(x+3)(x-2)<0$에서 $-3<x<2$

$(x-1)(x-4)<0$에서 $1<x<4$



$A=\{x\,|\,-3<x<2\}$,

$B=\{x\,|\,1<x<4\}$이므로

$A\cap B=\{x\,|\,1<x<2\}$

이때 $U=\{x\,|\,-4\le x\le 4\}$이므로

$(A\cap B)^C=\{x\,|\,-4\le x\le 1$ 또는 $2\le x\le 4\}$

정답_ ⑤

479

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$, $A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 4, 6, 8\}$, $A\cap B=\{2, 4, 8\}$

$\therefore (A\cup B)-(A\cap B)=\{1, 6\}$

정답_ $\{1, 6\}$

480

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $(A-B)^C=\{1, 3, 5, 6, 7\}$이므로

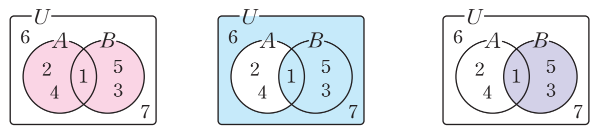
$(A\cup B)\cap(A-B)^C=\{1, 3, 5\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$1+3+5=9$

정답_ 9

참고 다음과 같이 벤 다이어그램을 이용하여 구할 수도 있다.



$(A\cup B)$ $\cap$ $(A-B)^C$ $=$ $(A\cup B)\cap(A-B)^C$

481

$0<x<1$에서 $0<nx<n$이므로

$nx=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{n},\ \dfrac{2}{n},\ \dfrac{3}{n},\ \cdots,\ \dfrac{n-1}{n}$

$\therefore\ A_n=\left\{\dfrac{1}{n},\ \dfrac{2}{n},\ \dfrac{3}{n},\ \cdots,\ \dfrac{n-1}{n}\right\}$

이때 $A_4=\left\{\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right\}$, $A_8=\left\{\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{8},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{8},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{7}{8}\right\}$이므로

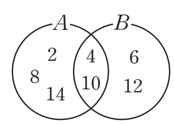
$A_4-A_8=\varnothing$, $A_8-A_4=\left\{\dfrac{1}{8},\ \dfrac{3}{8},\ \dfrac{5}{8},\ \dfrac{7}{8}\right\}$

$\therefore\ n(A_4-A_8)+n(A_8-A_4)=0+4=4$

정답_ ①

482

$U=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

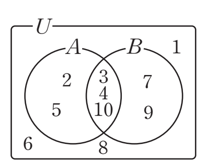


$\therefore\ B=\{4,\ 6,\ 10,\ 12\}$

정답_ ③

483

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore\ A=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10\}$

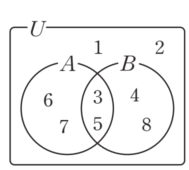
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

$2+3+4+5+10=24$

정답_ 24

484

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore\ A=\{3,\ 5,\ 6,\ 7\}$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 4이다.

정답_ 4

다른 풀이

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이므로

$A\cap B=U-(A\cap B)^C=\{3,\ 5\}$

$A-B=U-(A-B)^C=\{6,\ 7\}$

$A=(A-B)\cup(A\cap B)$이므로 $A=\{3,\ 5,\ 6,\ 7\}$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 4이다.

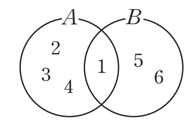
485

$B-A=\{5,\ 6\}$에서 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은 11이고

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합이 12이려면

$A\cap B=\{1\}$

이어야 한다. 이때 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



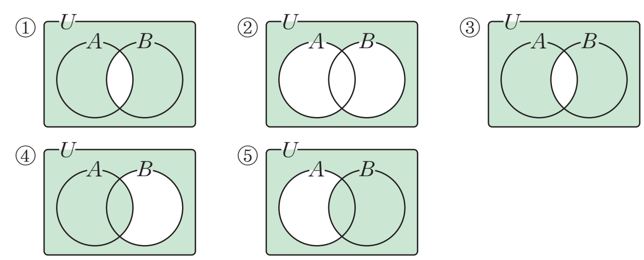
$A-B=\{2,\ 3,\ 4\}$

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$2+3+4=9$

정답_ ⑤

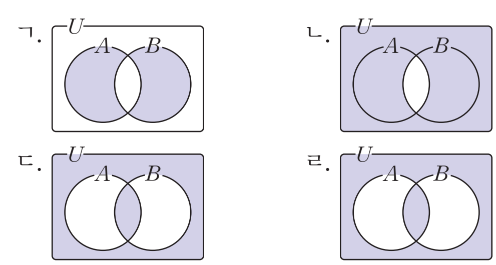
486



따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ④이다.

정답_ ④

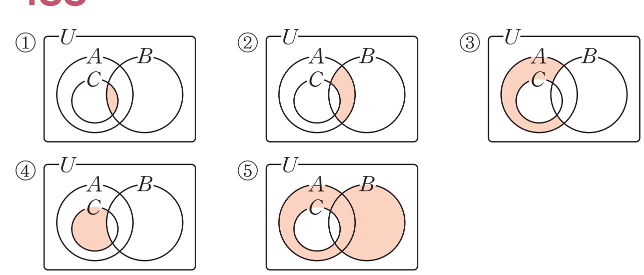
487



따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

정답_ ㄷ, ㄹ

488



따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ②이다.

정답_ ②

489

$A\cap B=\{2,\ 4\}$이므로 $2\in A$, $4\in B$이어야 한다.

$a-1=2$에서 $a=3$

$3b+1=4$에서 $b=1$

$\therefore\ a+b=3+1=4$

정답_ ⑤

490

$A-B=\{3\}$이므로 2, 7, $a-b$는 $A\cap B$의 원소이다.

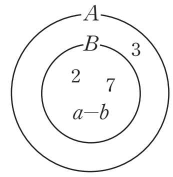
$\therefore\ 7\in B,\ a-b\in B$

$\therefore\ 2a+b=7,\ a-b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-1$

$\therefore\ ab=4\times(-1)=-4$



정답_ -4

491

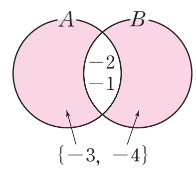
$(A-B)\cup(B-A)=\{-3,\ -4\}$이므로

$-2,\ -1$은 $A\cap B$의 원소이다.

$\therefore\ -2\in B$

즉, $-a-2=-2$ 또는 $a^2-6=-2$이므로

$a=0$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=2$



(i) $a=0$일 때

$A=\{-2,\ -1,\ -5\},\ B=\{-1,\ -2,\ -6\}$

$\therefore\ (A-B)\cup(B-A)=\{-5,\ -6\}$

(ii) $a=-2$일 때

$A=\{-2,\ -1,\ -7\},\ B=\{-1,\ 0,\ -2\}$

$\therefore\ (A-B)\cup(B-A)=\{-7,\ 0\}$

(iii) $a=2$일 때

$A=\{-2,\ -1,\ -3\},\ B=\{-1,\ -4,\ -2\}$

$\therefore\ (A-B)\cup(B-A)=\{-3,\ -4\}$

(i)~(iii)에서 $a=2$

정답_ 2

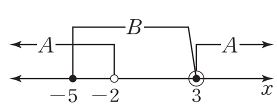
492

$x^2-x-6>0$에서

$(x+2)(x-3)>0\qquad\therefore\ x<-2$ 또는 $x>3$

$\therefore\ A=\{x\,|\,x<-2$ 또는 $x>3\}$

조건 (가)와 (나)를 만족시키면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$B=\{x\,|\,-5\le x\le 3\}$

$=\{x\,|\,(x+5)(x-3)\le 0\}$

$=\{x\,|\,x^2+2x-15\le 0\}$

따라서 $a=2,\ b=-15$이므로

$a-b=2-(-15)=17$

정답_ 17

493

$A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$

(i) $A=\varnothing$일 때, 방정식 $ax+1=x$, 즉 $(a-1)x=-1$의 해가 존재하지 않아야 하므로 $a=1$

(ii) $A\ne\varnothing$일 때, $-1\in A$ 또는 $1\in A$이어야 하므로 방정식 $ax+1=x$의 해가 $x=-1$ 또는 $x=1$이어야 한다.
즉, $-a+1=-1$ 또는 $a+1=1$이므로 $a=2$ 또는 $a=0$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$1+2+0=3$

정답_ 3

참고 방정식 $ax=b$의 해

(1) $a\ne0$일 때, $x=\dfrac{b}{a}$ ⇨ 오직 하나의 해를 갖는다.

(2) $a=0$일 때

① $b\ne0$이면 $0\times x\ne b$ ⇨ 해가 없다.

② $b=0$이면 $0\times x=b$ ⇨ 해가 무수히 많다.

494

① $U^C=\varnothing$이므로 $U^C\subset A$

② $U-A^C=U\cap(A^C)^C=U\cap A=A$

③ $U\cap B^C=B^C$

④ $A\subset U,\ B\subset U$이므로 $(A\cup B)\subset U$

⑤ $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

정답_ ③

495

① $A^C\cap A=\varnothing$

② $A\cup\varnothing=A$

④ $U-A=A^C,\ (A^C)^C=A$이므로 $U-A\ne(A^C)^C$

⑤ $A\cap(B\cup U)=A\cap U=A$

따라서 항상 옳은 것은 ③, ⑤이다.

정답_ ③, ⑤

496

① $A-B=A\cap B^C$

③ $A-(A\cap B)=A-B=A\cap B^C$

④ $A\cap(U-B)=A\cap B^C$

⑤ $(U\cup A)\cap B^C=U\cap B^C=B^C$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

정답_ ⑤

497

$A\cap B^C=\varnothing$, 즉 $A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$이다.

② $B\not\subset A^C$　　　③ $A\cap B=A$

④ $A\cup B=B$　　　⑤ $B-A\ne\varnothing$

따라서 항상 옳은 것은 ①이다.

정답_ ①

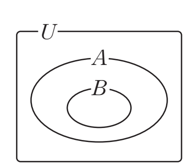
498

$A\cap B=B$이므로 $B\subset A$

① $B\subset A$이므로 $A^C\subset B^C$

④ $A\cap B^C=A-B$에서 $B\subset A$이고 $A\ne B$이므로 $A-B\ne\varnothing$

⑤ $A^C\subset B^C$이므로 $A^C\cap B^C=A^C$



따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

정답_ ④

499

$(A\cup B)-(A\cap B)=\varnothing$에서 $(A\cup B)\subset(A\cap B)$

따라서 $A\cup B=A\cap B$이므로 $A=B$

정답_ ④

500

$A\cup B=U$이므로 집합 B는 집합 A^C의 원소 1, 4를 반드시 원소로 가져야 한다.
따라서 구하는 집합 B의 개수는
$2^{5-2}=8$

정답_ ③

501

$X-Y=X$이므로 $X\cap Y=\varnothing$
즉, 집합 Y는 $U=\{a, b, c, d, e, f\}$의 부분집합 중에서 c, d, e, f를 원소로 갖지 않는 집합이다.
따라서 집합 Y의 개수는
$2^{6-4}=2^2=4$

정답_ 4

502

$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$(A-B)\cup X=X$에서 $(A-B)\subset X$
$(A\cup B)\cap X=X$에서 $X\subset(A\cup B)$
$\therefore (A-B)\subset X\subset(A\cup B)$
이때 $A-B=\{5, 7\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12\}$이므로 집합 X는 집합 $A\cup B$의 부분집합 중에서 5, 7을 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{8-2}=2^6=64$

정답_ 64

503

$A\cup C=B\cup C$이므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) $(A\cup C)\subset(B\cup C)$
$B\cup C$는 3, 5, 9를 원소로 가져야 하고 $3\notin B$, $9\notin B$이므로
$3\in C$, $9\in C$
(ii) $(B\cup C)\subset(A\cup C)$
$A\cup C$는 2, 4, 5, 7을 원소로 가져야 하고 $2\notin A$, $4\notin A$, $7\notin A$이므로
$2\in C$, $4\in C$, $7\in C$
(i), (ii)에서 집합 C는 전체집합 U의 부분집합 중에서 두 집합 A, B의 공통인 원소 5를 제외한 나머지 원소 2, 3, 4, 7, 9를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 부분집합 C의 개수는
$2^{10-5}=2^5=32$

정답_ ④

504

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$
조건 ㈎에서 $A\cup X=X$이므로 $A\subset X$
$\therefore 4\in X$, $7\in X$ …… ㉠
조건 ㈏에서 $(B-A)\cap X=\{5, 10\}$이고 $B-A=\{2, 5, 10\}$이므로
$(B-A)\cap X=\{2, 5, 10\}\cap X=\{5, 10\}$
$\therefore 2\notin X$, $5\in X$, $10\in X$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중에서 4, 5, 7, 10을 반드시 원소로 갖고, 2는 원소로 갖지 않는 집합이므로 집합 X의 개수는
$2^{12-4-1}=2^7=128$

정답_ 128

505

① 분배법칙을 이용하여 전개하면
$$\begin{aligned}A\cap(A^C\cup B)&=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)\\&=\varnothing\cup(A\cap B)\\&=A\cap B\end{aligned}$$
② 분배법칙을 이용하여 묶어 내면
$(A\cup B)\cap(A\cup B^C)=A\cup(B\cap B^C)=A\cup\varnothing=A$
③ 드모르간의 법칙을 이용하면
$(A-B)^C=(A\cap B^C)^C=A^C\cup(B^C)^C=A^C\cup B$
④ 드모르간의 법칙을 이용하면
$A^C\cup(A\cup B^C)^C=A^C\cup(A^C\cap B)=A^C$
⑤ 드모르간의 법칙을 이용하면
$(A\cup B)\cup(A^C\cap B^C)=(A\cup B)\cup(A\cup B)^C=U$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

506

ㄱ. $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$ (참)
ㄴ. $(A-B)-C=(A\cap B^C)\cap C^C$
$=A\cap(B^C\cap C^C)$ 결합법칙
$=A\cap(B\cup C)^C$ 드모르간의 법칙
$=A-(B\cup C)$ (참)
ㄷ. $A\cap(B-A)^C=A\cap(B\cap A^C)^C$
$=A\cap(B^C\cup A)$ 드모르간의 법칙
$=(A\cap B^C)\cup(A\cap A)$ 분배 법칙
$=(A\cap B^C)\cup A$
$=A$
$(B-A)\cap A=(B\cap A^C)\cap A$
$=B\cap(A^C\cap A)$ 결합법칙
$=B\cap\varnothing=\varnothing$
$\therefore \{A\cap(B-A)^C\}\cup\{(B-A)\cap A\}=A\cup\varnothing=A$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

507

$$\begin{aligned}(A-B)-(A-C)&=(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)^C\\&=(A\cap B^C)\cap(A^C\cup C)\\&=\{A\cap(A^C\cup C)\}\cap B^C\\&=\{(A\cap A^C)\cup(A\cap C)\}\cap B^C\\&=\{\varnothing\cup(A\cap C)\}\cap B^C\\&=(A\cap C)\cap B^C\\&=(A\cap C)-B\end{aligned}$$
따라서 $(A-B)-(A-C)$와 항상 같은 집합은 ②이다.

정답_ ②

508

$(B-A)^C\cap\{A\cap(A\cap B)^C\}$

$=(B\cap A^C)^C\cap\{A\cap(A^C\cup B^C)\}$

$=(B^C\cup A)\cap\{(A\cap A^C)\cup(A\cap B^C)\}$

$=(A\cup B^C)\cap(A\cap B^C)$ ($\because$ $A\cap A^C=\varnothing$)

$=A\cap B^C$

$=A-B$

따라서 주어진 집합을 나타내는 것은 ①이다.

정답_ ①

509

$(A\cup B)\cup(A^C\cup B^C)^C=(A\cup B)\cup(A\cap B)=A\cup B=B$

에서 $A\subset B$이므로

③ $B-A\neq\varnothing$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

정답_ ③

510

$A^C\cap B=\varnothing$, 즉 $B-A=\varnothing$이므로 $B\subset A$

$\therefore$ $A\cup\{(A\cap B)\cup(A\cup B^C)^C\}=A\cup\{(A\cap B)\cup(A^C\cap B)\}$

$=A\cup\{(A\cup A^C)\cap B\}$

$=A\cup(U\cap B)$

$=A\cup B$

$=A$ ($\because$ $B\subset A$)

따라서 항상 같은 집합은 ②이다.

정답_ ②

다른 풀이

$A^C\cap B=\varnothing$에서 $B-A=\varnothing$이므로 $B\subset A$

따라서 $A\cap B=B$이므로

$A\cup\{(A\cap B)\cup(A\cup B^C)^C\}=A\cup\{(A\cap B)\cup(A^C\cap B)\}$

$=A\cup(B\cup\varnothing)$

$=A\cup B$

$=A$ ($\because$ $B\subset A$)

511

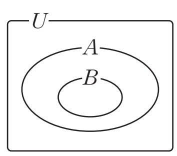
$\{(A-B^C)\cup(A\cap B^C)\}\cap B=\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cap B$

$=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cap B$

$=(A\cap U)\cap B$

$=A\cap B$

즉, $A\cap B=B$이므로 $B\subset A$



ㄱ. $B\subset A$ (참)

ㄴ. $A-B\neq\varnothing$ (거짓)

ㄷ. $A\cup B^C=U$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

512

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)=(A\cup A^C)\cap B^C$

$=U\cap B^C$

$=B^C$

$(A^C\cap B)\cup(A^C\cap B^C)=A^C\cap(B\cup B^C)$

$=A^C\cap U$

$=A^C$

즉, 주어진 식은 $B^C\cup A^C=A^C$이므로

$B^C\subset A^C$ $\quad\therefore$ $A\subset B$

따라서 두 집합 A, B의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은 ②이다.

정답_ ②

513

$A\cup(A^C\cap B)=(A\cup A^C)\cap(A\cup B)$

$=U\cap(A\cup B)$

$=A\cup B$

이때 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$이므로 구하는 원소의 개수는 6이다.

정답_ 6

514

$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)$

$=A\cap(B^C\cap C^C)$

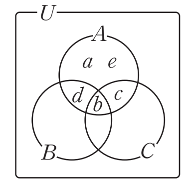
$=A\cap(B\cup C)^C$

$=A-(B\cup C)$

이때 $(A-B)\cap(A-C)=\{a, e\}$이므로

$A-(B\cup C)=\{a, e\}$

따라서 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $C-B$의 원소인 것은 c이다.

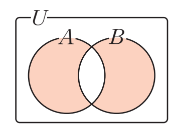


정답_ ③

515

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$

이고 이것을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



$(A-B)\cup(B-A)$의 원소가 1, 3, 8이고

$n(A)=3$, $n(B)=2$이므로 $n(A\cap B)=1$이어야 한다.

$\therefore$ $a-1\in(A\cap B)$

즉, $a-1$은 B의 원소 중 어느 하나와 같아야 한다.

이때 $a-1\neq a+2$이므로 $a-1=a^2-4a-7$이고 $a+2=8$이어야 한다.

$\therefore$ $a=6$

정답_ ②

516

12, 18, 24의 최대공약수는 6이므로

$A_{12}\cap A_{18}\cap A_{24}=A_6=\{1, 2, 3, 6\}$

따라서 집합 $A_{12}\cap A_{18}\cap A_{24}$의 원소가 아닌 것은 ④이다.

정답_ ④

참고 약수와 배수의 집합

자연수 k에 대하여

(1) k의 약수의 집합을 A_k라고 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 약수이면

⇨ $A_m\subset A_n$, $A_m\cap A_n=A_m$, $A_m\cup A_n=A_n$

(2) k의 배수의 집합을 B_k라고 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면

⇨ $B_m\subset B_n$, $B_m\cap B_n=B_m$, $B_m\cup B_n=B_n$

517

$A_6\cap(A_3\cup A_5)=(A_6\cap A_3)\cup(A_6\cap A_5)=A_6\cup A_{30}=A_6$

전체집합 U의 원소 중에서 6의 배수는 6, 12, 18, $\cdots$, 96의 16개이므로 구하는 원소의 개수는 16이다.

정답_ 16

518

ㄱ. 4는 2의 배수이므로 $A_4\subset A_2$

$\therefore A_2\cup A_4=A_2$ (참)

ㄴ. 6의 배수의 집합과 9의 배수의 집합의 교집합은 6과 9의 공배수의 집합이고, 이것은 6과 9의 최소공배수인 18의 배수의 집합이다.

$\therefore A_6\cap A_9=A_{18}$ (거짓)

ㄷ. 10과 15는 5의 배수이므로 $A_{10}\subset A_5$, $A_{15}\subset A_5$

$\therefore (A_{10}\cup A_{15})\subset A_5$ (참)

ㄹ. 6은 3의 배수이고 12는 4의 배수이므로 $A_6\subset A_3$, $A_{12}\subset A_4$

$\therefore A_3\cup A_6=A_3$, $A_4\cup A_{12}=A_4$

3과 4의 최소공배수는 12이므로

$(A_3\cup A_6)\cap(A_4\cup A_{12})=A_3\cap A_4=A_{12}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

정답_ ⑤

519

2, 7의 최소공배수는 14이므로

$(A_2\cap A_7)\subset A_p$에서 $A_{14}\subset A_p$

즉, p는 14의 양의 약수이므로 p의 최댓값은 14이다.

한편, 30, 40의 최대공약수는 10이므로

$B_q\subset(B_{30}\cap B_{40})$에서 $B_q\subset B_{10}$

즉, q는 10의 양의 약수이므로 q의 최댓값은 10이다.

따라서 구하는 합은

$14+10=24$

정답_ ③

520

$A\diamond B=(B-A^C)\cup(A-B)$

$=(B\cap A)\cup(A\cap B^C)$

$=A\cap(B\cup B^C)$

$=A\cap U=A$

이므로 $(A\diamond B)\diamond B=A\diamond B=A$

정답_ ①

521

① $A\triangle\varnothing=(A\cap\varnothing^C)\cup(A^C\cap\varnothing)=A\cup\varnothing=A$

② $A\triangle A=(A\cap A^C)\cup(A^C\cap A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

③ $A\triangle A^C=(A\cap A)\cup(A^C\cap A^C)=A\cup A^C=U$

④ $A^C\triangle B^C=(A^C\cap B)\cup(A\cap B^C)$

$=(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)$

$=A\triangle B$

$(A\triangle B)^C=\{(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)\}^C$

$=(A\cap B^C)^C\cap(A^C\cap B)^C$

$=(A^C\cup B)\cap(A\cup B^C)$

$\therefore A^C\triangle B^C\neq(A\triangle B)^C$

⑤ $(A\triangle B)\cap C=\{(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)\}\cap C$

$=(A\cap B^C\cap C)\cup(A^C\cap B\cap C)$

$(A\cap C)\triangle(B\cap C)$

$=\{(A\cap C)\cap(B\cap C)^C\}\cup\{(A\cap C)^C\cap(B\cap C)\}$

$=\{(A\cap C)\cap(B^C\cup C^C)\}\cup\{(A^C\cup C^C)\cap(B\cap C)\}$

$=\{(A\cap C\cap B^C)\cup(A\cap C\cap C^C)\}\cup\{(A^C\cap B\cap C)$
$\cup(C^C\cap B\cap C)\}$

$=(A\cap B^C\cap C)\cup\varnothing\cup(A^C\cap B\cap C)\cup\varnothing$

$=(A\cap B^C\cap C)\cup(A^C\cap B\cap C)$

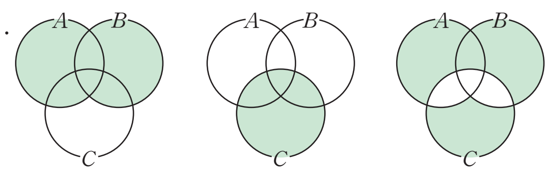
$\therefore (A\triangle B)\cap C=(A\cap C)\triangle(B\cap C)$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

정답_ ④

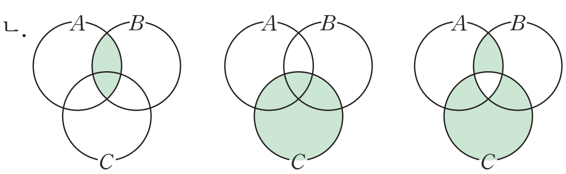
522

ㄱ.



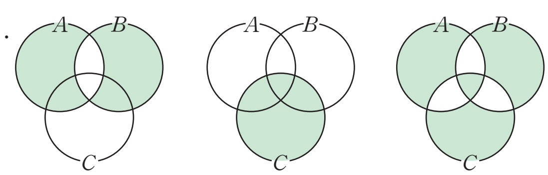
$(A\cup B)\quad\circ\quad C\quad=\quad(A\cup B)\circ C$

ㄴ.



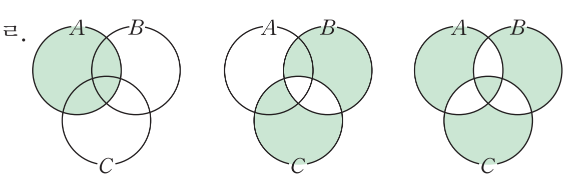
$(A\cap B)\quad\circ\quad C\quad=\quad(A\cap B)\circ C$

ㄷ.



$(A\circ B)\quad\circ\quad C\quad=\quad(A\circ B)\circ C$

ㄹ.



$A\quad\circ\quad(B\circ C)\quad=\quad A\circ(B\circ C)$

따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

정답_ ㄷ, ㄹ

참고 $(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)$, $(A-B)\cup(B-A)$, $(A\cup B)-(A\cap B)$는 모두 같은 집합을 나타낸다.

523

ㄱ. $A*B=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)$

$=(B\cup A)^C\cup(B\cap A)$

$=B*A$ (참)

ㄴ. $A*A=(A\cup A)^C\cup(A\cap A)=A^C\cup A=U$ (거짓)

ㄷ. $A*A*A=(A*A)*A$

$=U*A=(U\cup A)^C\cup(U\cap A)$

$=U^C\cup A=A$

$A*A*A*A=(A*A*A)*A$
$=A*A=U$
$A*A*A*A*A=(A*A*A*A)*A$
$=U*A=A$
⋮
이므로
$\underbrace{A*A*\cdots*A}_{A\text{가 짝수개}}=U$, $\underbrace{A*A*\cdots*A}_{A\text{가 홀수개}}=A$
임을 알 수 있다.
2009가 홀수이므로 $\underbrace{A*A*\cdots*A}_{A\text{가 }2009\text{개}}=A$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ④

524

① $n(A^C)=n(U)-n(A)$
$=50-30=20$
② $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=25-15=10$
③ $n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=30-15=15$
④ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=30+25-15=40$
⑤ $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$
$=50-15=35$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

525

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로
$5=30-n(A\cup B)$ $\quad\therefore n(A\cup B)=25$
$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=15+20-25=10$

정답_ ④

526

$n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)=18-13=5$이므로
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=20-5=15$

정답_ 15

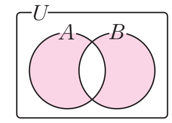
527

$A^C\cup B=(A\cap B^C)^C=(A-B)^C$이고
$A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $A\cap B=\{3, 6, 15, 30\}$이므로
$n(A)=8$, $n(A\cap B)=4$
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=8-4=4$
$\therefore n(A^C\cup B)=n((A-B)^C)$
$=n(U)-n(A-B)$
$=50-4=46$

정답_ ④

528

$(A-B)\cup(B-A)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로



$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로
$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$
$=60-7=53$
$\therefore n((A-B)\cup(B-A))=n(A\cup B)-n(A\cap B)$
$=53-23=30$

정답_ 30

529

ㄱ. $n(A)=m$이라고 하면
$S(A)\times S(A^C)=2^m\times2^{10-m}=2^{10}$ (참)
ㄴ. $A^C\subset B^C$이면 $B\subset A$이므로
$n(B)\le n(A)$
$\therefore S(B)\le S(A)$ (참)
ㄷ. $n(A)=3$, $n(B)=2$, $n(A\cap B)=1$이면
$n(A\cup B)=3+2-1=4$이므로
$S(A\cup B)=2^4=16$
한편, $S(A)+S(B)-S(A\cap B)=2^3+2^2-2=10$이므로
$S(A\cup B)\ne S(A)+S(B)-S(A\cap B)$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

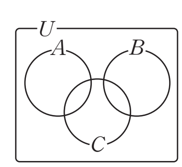
정답_ ③

530

$A\cap B=\varnothing$이므로 $A\cap B\cap C=\varnothing$
즉, $n(A\cap B)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$
$n(C^C)=n(U)-n(C)=11$에서
$21-n(C)=11$ $\quad\therefore n(C)=10$
$n(A\cup C)=n(A)+n(C)-n(A\cap C)$에서
$11=3+10-n(A\cap C)$ $\quad\therefore n(A\cap C)=2$
$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$에서
$14=7+10-n(B\cap C)$ $\quad\therefore n(B\cap C)=3$
$\therefore n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=3+7+10-0-3-2+0$
$=15$

정답_ 15

참고 두 집합 A, B가 서로소이므로
$A\cap B=\varnothing$
세 집합 A, B, C의 관계를 나타내면 오른쪽 벤 다이어그램과 같다.



531

$n(A)<n(B)$이므로 $n(A\cup B)$의 값은 $A\subset B$일 때 최소,
$A\cup B=U$일 때 최대이다.
즉, $n(B)\le n(A\cup B)\le n(U)$이므로
$60\le n(A\cup B)\le100$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$60 \le n(A)+n(B)-n(A\cap B) \le 100$

$60 \le 50+60-n(A\cap B) \le 100$

$-50 \le -n(A\cap B) \le -10$

$\therefore\ 10 \le n(A\cap B) \le 50$

따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값은 50, 최솟값은 10이므로 구하는 합은

$50+10=60$

정답_ 60

532

(i) $n(A\cup B)$가 최대인 경우 $n(A\cap B)$가 최소일 때이므로

$n(A\cap B)\ge 17$에서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 17이다.

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은

$n(A)+n(B)-n(A\cap B)=37+30-17=50$

(ii) $n(A\cup B)$가 최소인 경우 $n(A\cap B)$가 최대일 때, 즉 $B\subset A$ 일 때이므로 $A\cup B=A$

따라서 $n(A\cup B)$의 최솟값은

$n(A)=37$

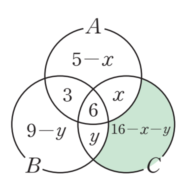
(i), (ii)에서 $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 차는

$50-37=13$

정답_ 13

533

집합 $C-(A\cup B)$는 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분과 같고, $n((A\cap C)-B)=x$, $n((B\cap C)-A)=y$라 하고 각 부분에 속하는 원소의 개수를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$n(C-(A\cup B))$는 $x+y$가 최대일 때 최소이고, $x+y$가 최소일 때 최대이므로

$x\ge 0,\ y\ge 0,\ 5-x\ge 0,\ 9-y\ge 0$에서

$0\le x\le 5,\ 0\le y\le 9 \qquad \therefore\ 0\le x+y\le 14$

따라서 $x+y$의 최솟값이 0이므로 $n(C-(A\cup B))$의 최댓값은

$16-0=16$

$x+y$의 최댓값이 14이므로 $n(C-(A\cup B))$의 최솟값은

$16-14=2$

정답_ **최댓값:** 16, **최솟값:** 2

534

전체 학생의 집합을 U, 축구를 좋아하는 학생의 집합을 A, 야구를 좋아하는 학생의 집합을 B라고 하면

$n(U)=35,\ n(A)=25,\ n(A\cap B)=8$

축구와 야구 중 어느 것도 좋아하지 않는 학생이 4명이므로

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=4$

즉, $35-n(A\cup B)=4$이므로

$n(A\cup B)=31$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$31=25+n(B)-8 \qquad \therefore\ n(B)=14$

따라서 야구를 좋아하는 학생 수는 14이다.

정답_ 14

535

전체 신입 사원의 집합을 U, 버스를 타고 출근하는 사원의 집합을 A, 지하철을 타고 출근하는 사원의 집합을 B라고 하면

$n(U)=200,\ n(A)=115,\ n(B)=110$

이때 구하는 값은 $n(B-A)$이고 버스와 지하철을 모두 이용하지 않는 사원이 21명이므로

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=21$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=200-21=179$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$179=115+110-n(A\cap B) \qquad \therefore\ n(A\cap B)=46$

$\therefore\ n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=110-46=64$

따라서 지하철만을 이용하여 출근하는 사원의 수는 64이다.

정답_ ②

536

전체 학생의 집합을 U, 소방 안전 교육, 지진 대비 안전 교육, 심폐 소생술 교육을 신청한 학생의 집합을 각각 A, B, C라고 하면

$n(U)=212$

조건 (가)에서 $n(A)=80,\ n(B)=90$ …… ㉠

조건 (나)에서 $n(A\cap B)=45$ …… ㉡

조건 (다)에서 $n((A\cup B\cup C)^C)=12$ …… ㉢

㉠, ㉡에서

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

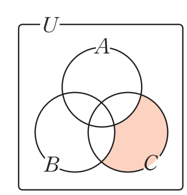
$=80+90-45=125$

㉢에서

$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n((A\cup B\cup C)^C)$

$=212-12=200$

따라서 심폐 소생술 교육만 신청한 학생 수는 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분과 같으므로



$n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)=200-125=75$

따라서 심폐 소생술 교육만 신청한 학생 수는 75이다.

정답_ 75

537

조사한 제품 전체의 집합을 U, 비타민 A, B, C의 함유량이 일일 권장 섭취량을 충족한 제품의 집합을 차례대로 A, B, C라고 하면

$n(U)=25,\ n(A)=6,\ n(B)=5,\ n(C)=3,\ n(A\cap B)=2,$

$n(B\cap C)=2,\ n(A\cap C)=1,\ n(A\cap B\cap C)=1$

이때 구하는 값은 $n(A^C\cap B^C\cap C^C)$이고

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=6+5+3-2-2-1+1=10$

이므로

$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=n((A\cup B\cup C)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

$=25-10=15$

따라서 비타민 A, B, C의 함유량이 모두 일일 권장 섭취량을 충족하지 않는 제품의 수는 15이다.

정답_ 15

538

학급 전체 학생의 집합을 U, 봉사 활동 A, B를 신청한 학생의 집합을 각각 A, B라고 하면

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이고

$n(A)+n(B)=36$이므로

$n(A\cup B)=36-n(A\cap B)$ ⋯⋯ ㉠

$n(U)=30$이므로 $n(A\cup B)\le 30$

㉠에 의하여 $36-n(A\cap B)\le 30$

$\therefore n(A\cap B)\ge 6$ ⋯⋯ ㉡

또, $n(A\cap B)\le n(A\cup B)$이므로 ㉠에 의하여

$n(A\cap B)\le 36-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)\le 18$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢에 의하여 $6\le n(A\cap B)\le 18$

따라서 $M=18$, $m=6$이므로

$M+m=18+6=24$

정답_ ④

539

$x^2-(2a+3)x+a(a+3)\le 0$에서

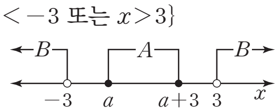
$(x-a)(x-a-3)\le 0$ $\quad\therefore a\le x\le a+3$

또, $x^2-9>0$에서 $(x+3)(x-3)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>3$ ❶

$\therefore A=\{x\mid a\le x\le a+3\}$, $B=\{x\mid x<-3$ 또는 $x>3\}$

이때 두 집합 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a\ge -3$, $a+3\le 3$ $\quad\therefore -3\le a\le 0$ ❷

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0의 4개이다. ❸

정답_ 4

채점 기준	비율
❶ 이차부등식의 해 구하기	40 %
❷ a의 값의 범위 구하기	40 %
❸ 정수 a의 개수 구하기	20 %

540

$\{(A\cap B)\cup(A-B)\}\cap B=\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cap B$

$=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cap B$

$=(A\cap U)\cap B$

$=A\cap B$ ❶

즉, $A\cap B\ne\varnothing$이므로 집합 B는 집합 A의 원소를 가져야 한다.

주어진 조건을 만족시키는 집합 B의 개수는 전체집합 U의 부분집합의 개수에서 원소 5, 10을 가지지 않는 부분집합의 개수를 빼면 된다.

따라서 구하는 집합 B의 개수는

$2^{10}-2^{10-2}=1024-256=768$ ❷

정답_ 768

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변 간단히 하기	50 %
❷ 집합 B의 개수 구하기	50 %

541

$A\cap B=\{2\}$이므로

$2\in A$, $2\in B$

$2\in A$에서 $4+2a-6=0$ $\quad\therefore a=1$

따라서 $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$이므로 $x^2+x-6=0$에서

$(x+3)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{-3, 2\}$ ❶

또, $2\in B$에서 $4b-2b-4=0$ $\quad\therefore b=2$

따라서 $B=\{x\mid 2x^2-2x-4=0\}$이므로 $2x^2-2x-4=0$에서

$2(x+1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore B=\{-1, 2\}$ ❷

$\therefore A\cup B=\{-3, -1, 2\}$ ❸

정답_ $\{-3, -1, 2\}$

채점 기준	비율
❶ 집합 A 구하기	40 %
❷ 집합 B 구하기	40 %
❸ 집합 $A\cup B$ 구하기	20 %

542

$A_n\cap A_2=A_{2n}$에서 자연수 n과 2는 서로소이므로 n은 홀수이다.
❶

또, $A_n-A_5=\varnothing$에서 $A_n\subset A_5$이므로 n은 5의 배수이다. ❷

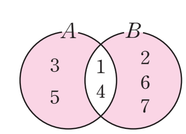
따라서 n은 5의 배수인 홀수이므로 50 이하의 자연수 n은 5, 15, 25, 35, 45의 5개이다. ❸

정답_ 5

채점 기준	비율
❶ n이 홀수임을 알기	40 %
❷ n이 5의 배수임을 알기	40 %
❸ 자연수 n의 개수 구하기	20 %

543

$A*B=(A\cup B)-(A\cap B)$는 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분과 같다.



$A=\{1, 3, 4, 5\}$의 원소 중에서 $A*B$의 원소는 3, 5이므로

$A-B=\{3, 5\}$ $\quad\therefore A\cap B=\{1, 4\}$ ❶

$A*B$의 원소 중에서 A의 원소를 제외한 나머지 원소는 2, 6, 7이므로 $B-A=\{2, 6, 7\}$

$\therefore B=\{1, 2, 4, 6, 7\}$ ❷

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$1+2+4+6+7=20$ ❸

정답_ 20

채점 기준	비율
❶ $A-B$, $A\cap B$의 원소 구하기	40 %
❷ 집합 B 구하기	40 %
❸ 집합 B의 모든 원소의 합 구하기	20 %

544

학생 전체의 집합을 U, 학교 폭력 예방 표어 대회에 참여할 학생의 집합을 A, 탄소 중립 경진 대회에 참여할 학생의 집합을 B라고 하자.

탄소 중립 경진 대회만 참여하는 학생의 집합은 $A^C\cap B$이므로

$n(U)=28$, $n(A^C\cap B)=14$

이때 $(A^C\cap B)^C=A\cup B^C$이므로

$n(A\cup B^C)=n(U)-n(A^C\cap B)$

$=28-14=14$ ……… ❶

그런데 $(A\cap B)\subset(A\cup B^C)$이므로

$n(A\cap B)\le n(A\cup B^C)$

$\therefore n(A\cap B)\le 14$ ……… ❷

따라서 학교 폭력 예방 표어 대회와 탄소 중립 경진 대회를 모두 참여하는 학생 수의 최댓값은 14이다. ……… ❸

정답_ 14

채점 기준	비율
❶ $n(A\cup B^C)$의 값 구하기	60 %
❷ $n(A\cap B)\le 14$임을 알기	30 %
❸ 두 대회 모두 참여하는 학생 수의 최댓값 구하기	10 %

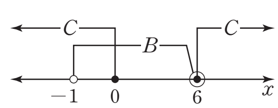
545

$x^2-4x+4\ge 0$에서 $(x-2)^2\ge 0$ $\quad\therefore x$는 모든 실수

$\therefore A=\{x\,|\,x$는 실수$\}$

$x^2-6x\ge 0$에서 $x(x-6)\ge 0$ $\quad\therefore x\le 0$ 또는 $x\ge 6$

$\therefore C=\{x\,|\,x\le 0$ 또는 $x\ge 6\}$



$B\cup C=A$,

$B\cap C=\{x\,|\,-1<x\le 0\}$

이므로 오른쪽 그림에서

$B=\{x\,|\,-1<x<6\}$

$=\{x\,|\,(x+1)(x-6)<0\}$

$=\{x\,|\,x^2-5x-6<0\}$

따라서 $a=-5$, $b=-6$이므로

$a+b=-5-6=-11$

정답_ -11

546

$n(A\cap B)=2$이므로 직선 $y=mx+1$과 곡선 $y=x^2-3x+2$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

이차방정식 $x^2-3x+2=mx+1$, 즉 $x^2-(3+m)x+1=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=(3+m)^2-4>0$

$m^2+6m+5>0$, $(m+5)(m+1)>0$

$\therefore m<-5$ 또는 $m>-1$ …… ㉠

또, $n(A\cap C)=0$이므로 직선 $y=mx+1$과 곡선 $y=x^2+2$가 만나지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2+2=mx+1$, 즉 $x^2-mx+1=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=m^2-4<0$

$(m+2)(m-2)<0$

$\therefore -2<m<2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-1<m<2$이어야 하므로 모든 정수 m의 값의 합은

$0+1=1$

정답_ 1

547

$x^3+ax^2+bx=0$에서 $x(x^2+ax+b)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x^2+ax+b=0$

$x^3+bx^2+ax=0$에서 $x(x^2+bx+a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x^2+bx+a=0$

$n(A\cap B)=2$이고, 두 방정식 $x^3+ax^2+bx=0$과 $x^3+bx^2+ax=0$이 $x=0$을 공통근으로 가지므로 두 이차방정식 $x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$이 하나의 공통근을 갖는다.

공통근을 α라고 하면

$\alpha^2+a\alpha+b=0$, $\alpha^2+b\alpha+a=0$

위의 두 식을 변끼리 빼면

$\alpha(a-b)+b-a=0$, $(a-b)(\alpha-1)=0$

$a\ne b$이므로 $\alpha=1$

$x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$에 $x=1$을 각각 대입하면

$a+b=-1$ …… ㉠

㉠에서 $a=-1-b$이므로 이것을 $x^2+ax+b=0$에 대입하면

$x^2+(-1-b)x+b=0$, $(x-1)(x-b)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=b$

또, ㉠에서 $b=-1-a$이므로 이것을 $x^2+bx+a=0$에 대입하면

$x^2+(-1-a)x+a=0$, $(x-1)(x-a)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=a$

이때 $n(A\cup B)=4$, $n(A\cap B)=2$이므로 a, b는 모두 0도 아니고 1도 아니다.

$\therefore A=\{0, 1, b\}$, $B=\{0, 1, a\}$

따라서 $(A\cup B)-(A\cap B)=\{a, b\}$이므로 모든 원소의 합은

$a+b=-1$

정답_ ②

548

집합 A_k는 전체집합 U의 부분집합이므로 x는 20 이하의 자연수이고 x와 $y-k$는 24의 양의 약수이다.

$y\in U$이고 k는 자연수이므로 $y-k<24$이고 $x\ne 1$

$x\in U$이므로 $x\ne 24$

$y-k$와 x 사이의 관계는 아래 표와 같다.

$y-k$	2	3	4	6	8	12
x	12	8	6	4	3	2

$\therefore A_k\subset\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

한편, $\dfrac{24-x}{3}\in U$에서 $24-x$는 3의 배수이므로

$B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$\therefore (A_k\cap B^C)\subset\{2, 4, 8\}$

(i) $2\in(A_k\cap B^C)$일 때

$x=2$, $y-k=12$이고 $y=12+k\le 20$ $\quad\therefore k\le 8$

(ii) $4\in(A_k\cap B^C)$일 때

$x=4$, $y-k=6$이고 $y=6+k\le 20$ $\quad\therefore k\le 14$

(iii) $8 \in (A_k \cap B^C)$일 때

$x=8$, $y-k=3$이고 $y=3+k \le 20$ $\quad \therefore k \le 17$

(i)~(iii)에서 $k \le 8$일 때 $A_k \cap B^C = \{2, 4, 8\}$

$8 < k \le 14$일 때, $A_k \cap B^C = \{4, 8\}$

$14 < k \le 17$일 때, $A_k \cap B^C = \{8\}$

따라서 $n(A_k \cap B^C)=2$가 되려면 $8 < k \le 14$이어야 하므로 자연수 k는 9, 10, 11, 12, 13, 14의 6개이다.

정답_ ③

549

$A \cup B^C = (B \cap A^C)^C = (B-A)^C$이므로

$n(B-A)+n(A \cup B^C)=n(U)$

즉, $n(U)=2+7=9$이므로

$k=9 \quad \therefore U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

조건 (가)에서 $B-A=\{4, 7\}$이고 조건 (나)에서 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이 서로 같으므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 집합 $B-A=\{4, 7\}$의 모든 원소의 합인 11과 같다.

따라서 m은 4와 7 중 어느 수도 약수로 갖지 않고, 모든 약수의 합이 11 이상이어야 하므로 m이 될 수 있는 수는 6 또는 9이다.

(i) $m=6$일 때

집합 $A=\{1, 2, 3, 6\}$이고 $A-B=\{2, 3, 6\}$이면 집합 $A-B$의 원소의 합이 11이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $m=9$일 때

집합 $A=\{1, 3, 9\}$이지만 집합 $A-B$의 원소의 합이 11인 경우는 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $m=6$

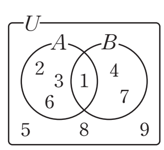
이때 $B=\{1, 4, 7\}$이므로

$A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

따라서 $A^C \cap B^C=(A \cup B)^C=\{5, 8, 9\}$이므로

집합 $A^C \cap B^C$의 모든 원소의 합은

$5+8+9=22$



정답_ ⑤

550

$(A-X) \subset A$, $(B-X) \subset B$이고

조건 (나)에서 $A-X=B-X$이므로

$(A-X) \subset (A \cap B)$, $(B-X) \subset (A \cap B)$

이때 $A \cap B=\{3, 4, 5\}$이므로

$(A-X) \subset \{3, 4, 5\}$에서 $\{1, 2\} \subset X$

$(B-X) \subset \{3, 4, 5\}$에서 $\{6, 7\} \subset X$

$\therefore \{1, 2, 6, 7\} \subset X$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

조건 (다)에서

$$\begin{aligned}(X-A) \cap (X-B) &= (X \cap A^C) \cap (X \cap B^C) \\ &= X \cap (A^C \cap B^C) \\ &= X \cap (A \cup B)^C \\ &= X \cap \{8, 9, 10\} \neq \varnothing \quad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

조건 (가)에서 $n(X)=6$이고 ㉠에 의하여

$n(X \cap \{3, 4, 5, 8, 9, 10\})=2$ $\quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡에 의하여 세 원소 8, 9, 10 중 적어도 하나의 원소는 집합 X에 속해야 한다.

집합 X의 모든 원소의 합이 최소이려면 $8 \in X$이고 ㉢에 의하여 다섯 원소 3, 4, 5, 9, 10 중에서 가장 작은 원소가 집합 X에 속해야 하므로 $3 \in X$

따라서 $X=\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$일 때 모든 원소의 합이 최소이므로 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은

$1+2+3+6+7+8=27$

정답_ ②

551

ㄱ. A_{10}은 2의 배수도 5의 배수도 아닌 수의 집합이므로

$A_2 \cap A_5 = A_{10}$

$A_2=A_4$이므로 $A_2 \cap A_5 = A_4 \cap A_5 = A_{10}$ (참)

ㄴ. $B_4=\{4, 8, 12, \cdots, 48\}$, $B_5=\{5, 10, 15, \cdots, 50\}$이므로

$n(B_4)=12$, $n(B_5)=10$

$B_4 \cap B_5=\{20, 40\}=B_{20}$이므로

$n(B_4 \cap B_5)=n(B_{20})=2$

$$\begin{aligned}\therefore n(B_4 \cup B_5) &= n(B_4)+n(B_5)-n(B_4 \cap B_5) \\ &= 12+10-2=20 \text{ (참)}\end{aligned}$$

ㄷ. 집합 $B_n \cap B_2$는 n과 2의 공배수의 집합이다.

$B_n \cap B_2 = B_{2n}$에서 n과 2의 최소공배수는 $2n$이므로 n과 2는 서로소이다.

따라서 n은 홀수인 자연수이다.

50이 집합 B_2-B_n의 원소이므로

$50 \in B_2$, $50 \notin B_n$

즉, 50은 n의 배수가 아니므로 n은 50의 약수가 아니다.

한편, 50의 양의 약수 중에서 홀수는 1, 5, 25이다.

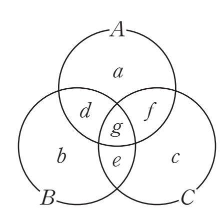
따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n은 50 이하의 홀수 중 1, 5, 25를 제외한 나머지 수이므로 그 개수는

$25-3=22$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ㄱ, ㄴ

552



오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램의 각 영역의 원소의 개수를 a, b, c, d, e, f, g라고 하면

$n(A \cup B \cup C)=90$, $n(A \triangle B)=50$,

$n(B \triangle C)=47$, $n(C \triangle A)=53$

이므로

$a+b+c+d+e+f+g=90$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$a+f+b+e=50$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

$b+d+c+f=47$ $\quad \cdots\cdots$ ㉢

$a+d+c+e=53$ $\quad \cdots\cdots$ ㉣

㉡+㉢+㉣을 하면

$2(a+b+c+d+e+f)=150$

$\therefore a+b+c+d+e+f=75$ $\quad \cdots\cdots$ ㉤

㉠−㉤을 하면

$g=15 \quad \therefore n(A \cap B \cap C)=15$

정답_ 15

553

$A\cup B=U$, $A\cap B=\{2, 5\}$이므로

$f(A\cup B)=1+2+3+4+5=15$, $f(A\cap B)=2+5=7$

$f(A\cup B)=f(A)+f(B)-f(A\cap B)$에서

$15=f(A)+f(B)-7$

$\therefore f(A)+f(B)=22$

$f(A)=x$ $(7\le x\le 15)$라고 하면 $f(B)=22-x$이므로

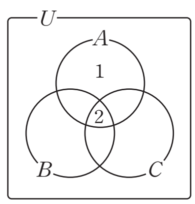
$$f(A)\times f(B)=x(22-x)=-x^2+22x$$
$$=-(x-11)^2+121$$

따라서 $f(A)\times f(B)$는 $x=11$일 때, 최댓값 121을 갖는다.

정답_ 121

참고 A의 원소의 합과 B의 원소의 합을 더하면 $A\cap B$의 원소를 두 번 더한 것이므로 $A\cap B$의 원소의 합을 빼 주어야 한다.
⇨ $f(A\cup B)=f(A)+f(B)-f(A\cap B)$

554



$n(A)=3$, $n(A-B)=1$, $n(A-C)=1$일 때 $n(B\cap C)$가 최댓값을 갖는 것은 오른쪽 벤 다이어그램과 같이

$n(A-(B\cup C))=1$, $n(A\cap B\cap C)=2$

가 되는 경우이다.

이때 $n(U)=8$이므로

$2\le n(B\cap C)\le 7$

따라서 $n(B\cap C)$의 최댓값은 7이다.

정답_ ⑤

555

은기네 반 학생 전체의 집합을 U, 수학 문제 A, B, C를 맞힌 학생의 집합을 각각 A, B, C라고 하면

$n(U)=n(A\cup B\cup C)=35$, $n(A)=17$, $n(B)=20$, $n(C)=24$

두 문제만 맞힌 학생이 8명이므로

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)=8$

$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=3\times n(A\cap B\cap C)+8$

이때

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$
$\quad+n(A\cap B\cap C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)$
$\quad-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}+n(A\cap B\cap C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-\{3\times n(A\cap B\cap C)+8\}$
$\quad+n(A\cap B\cap C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-2\times n(A\cap B\cap C)-8$

이므로

$35=17+20+24-2\times n(A\cap B\cap C)-8$

$\therefore n(A\cap B\cap C)=9$

따라서 세 문제를 모두 맞힌 학생 수는 9이다.

정답_ 9

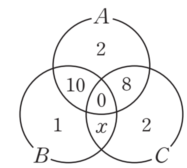
참고 모든 학생이 한 문제 이상 맞혔으므로 $U=A\cup B\cup C$이다.

556

게임 A, B, C를 선택한 회원의 집합을 각각 A, B, C라고 하자.

게임 A, B, C를 모두 선택한 회원이 없으므로

$n(A\cap B\cap C)=0$



따라서 주어진 조건을 이용하여 각 영역의 원소의 개수를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 각각 2개의 게임을 선택한 회원이 30명이므로 두 게임 B, C를 동시에 선택한 회원 수를 x라고 하면

$10+8+x=30$ $\qquad\therefore x=12$

따라서 A를 선택한 회원 수는 $2+10+8=20$,

B를 선택한 회원 수는 $1+10+12=23$,

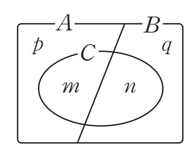
C를 선택한 회원 수는 $2+8+12=22$

이므로 가장 많이 선택한 게임부터 차례대로 나열하면 B, C, A이다.

정답_ ④

557

참석할 수 있다고 응답한 학생의 집합을 A, 모르겠다고 응답한 학생의 집합을 B, 실제로 수학 축전에 참석한 학생의 집합을 C라고 하자.



참석할 수 있다고 응답한 학생 중에서 참석한 학생 수를 m, 모르겠다고 응답한 학생 중에서 참석한 학생 수를 n이라고 할 때, 각 영역의 개수를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$n(A)=p+m=67$, $n(B)=q+n=33$에서

$p=67-m$, $q=33-n$이므로

$p-q=(67-m)-(33-n)=34-m+n$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이때 모르겠다고 응답한 학생 중에서 참석한 학생 수 n의 값의 범위는

$0\le n\le 33$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

$m+n=50$이므로 $m=50-n$을 ㉠에 대입하면

$p-q=34-(50-n)+n=2n-16$

따라서 ㉡에서

$0\le 2n\le 66$, $-16\le 2n-16\le 50$

$\therefore -16\le p-q\le 50$

따라서 $p-q$의 최댓값과 최솟값의 합은

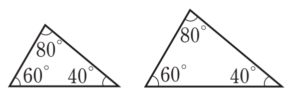
$50+(-16)=34$

정답_ ②

07 명제

558

(1) 참인 명제이다.
(2) x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 조건이다.
(3) 참인 명제이다.
(4) 오른쪽 그림의 두 삼각형은 대응하는 세 내각의 크기가 같지만 크기가 다르므로 합동이 아니다.



즉, 주어진 문장은 거짓인 명제이다.

정답_ 풀이 참조

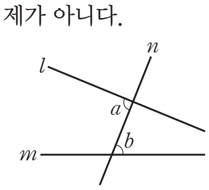
559

① $|x|\ge 0$에서 $|x|+1>0$이므로 참인 명제이다.
② x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
③ 참, 거짓을 명확하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
④ 그는 소수이지만 짝수이므로 거짓인 명제이다.
⑤ 참, 거짓을 명확하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
따라서 명제인 것은 ①, ④이다.

정답_ ①, ④

560

ㄱ. 참인 명제이다.
ㄴ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $l \not\parallel m$이면 $\angle a \ne \angle b$
즉, 엇각의 크기는 같지 않다.
따라서 거짓인 명제이다.



ㄹ. 참인 명제이다.
따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄹ이다.

정답_ ㄱ, ㄹ

561

① 부정: 6은 12의 약수가 아니다. (거짓)
② 부정: π는 무리수가 아니다. 즉, π는 유리수이다. (거짓)
③ 부정: $5\ge 10$ (거짓)
④ 부정: 3은 집합 $\{1, 2\}$의 원소가 아니다. (참)
⑤ 부정: 두 자연수 a, b가 홀수이면 $a+b$는 짝수가 아니다.
즉, 두 자연수 a, b가 홀수이면 $a+b$는 홀수이다. (거짓)
따라서 부정이 참인 명제는 ④이다.

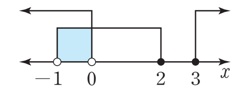
정답_ ④

다른 풀이
주어진 명제가 거짓이면 그 부정은 참이 되므로 각 명제의 참, 거짓을 판별해 보면 다음과 같다.
① 참인 명제이다. ② 참인 명제이다. ③ 참인 명제이다.
④ 거짓인 명제이다. ⑤ 참인 명제이다.
따라서 그 부정이 참인 명제는 ④이다.

참고 (짝수)+(짝수)=(짝수), (짝수)+(홀수)=(홀수)
(홀수)+(짝수)=(홀수), (홀수)+(홀수)=(짝수)

562

조건 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은 'p 그리고 $\sim q$'이다.
p: $-1<x\le 2$,
$\sim q$: $x<0$ 또는 $x\ge 3$
이므로 'p이고 $\sim q$'는 $-1<x<0$



정답_ $-1<x<0$

563

ㄴ. $xy=0$에서 $x=0$ 또는 $y=0$이므로
$\sim p$: $x\ne 0$이고 $y\ne 0$ (거짓)
ㄷ. $x^2+y^2+z^2=0$에서 $x=0$, $y=0$, $z=0$이므로
$\sim p$: $x\ne 0$ 또는 $y\ne 0$ 또는 $z\ne 0$
$\therefore$ $\sim p$: $xyz=0$ 또는 $xyz\ne 0$ (거짓)
ㄹ. '두 실수 x, y 중 적어도 하나는 무리수이다.'의 부정은
'두 실수 x, y는 모두 무리수가 아니다.'
즉, '두 실수 x, y는 모두 유리수이다.' (참)
따라서 조건 p와 그 부정 $\sim p$로 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

정답_ ②

564

조건 p의 진리집합을 P라고 하면
$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
이때 조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로
$P^C=\{5, 7\}$
따라서 조건 $\sim p$의 진리집합의 모든 원소의 합은
$5+7=12$

정답_ ②

565

$P=\{x|x\ge 3\}$, $Q=\{x|x<-1\}$에서
$P^C=\{x|x<3\}$, $Q^C=\{x|x\ge -1\}$
이때 조건 $-1\le x<3$의 진리집합은
$\{x|-1\le x<3\}$
이므로 구하는 집합은
$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$

정답_ ⑤

566

$|x-2|=2$에서 $x-2=-2$ 또는 $x-2=2$
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=4$
조건 p의 진리집합을 P라고 하면
$P=\{4\}$
$x^2-4x+3\le 0$에서
$(x-1)(x-3)\le 0$ $\therefore$ $1\le x\le 3$
조건 q의 진리집합을 Q라고 하면
$Q=\{1, 2, 3\}$
이때 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cup Q^C$이고 $Q^C=\{4, 5, 6\}$이므로
$P\cup Q^C=\{4, 5, 6\}$
따라서 구하는 진리집합의 모든 원소의 개수는 3이다.

정답_ 3

567

$\sim p$: $x^2+2kx-4k=0$
조건 $\sim p$의 진리집합의 원소의 개수가 1이면 이차방정식
$x^2+2kx-4k=0$이 중근을 가져야 하므로 이차방정식
$x^2+2kx-4k=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=k^2-(-4k)=0$
$k^2+4k=0$, $k(k+4)=0$
$\therefore$ $k=-4$ 또는 $k=0$
따라서 구하는 k의 값은 -4 또는 0이다.

정답_ -4, 0

568

명제 'q이면 $\sim p$이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 Q의 원소 중에서 집합 P^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
이때 $Q\cap(P^C)^C=Q\cap P=\{b\}$이므로 주어진 명제가 거짓임을 보이는 원소는 b이다.

정답_ b

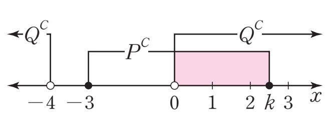
569

명제 '$\sim p$이면 q이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P^C의 원소 중에서 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 구하는 집합은
$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$

정답_ ④

570

$x(x+4)\le 0$에서 $-4\le x\le 0$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{x\mid x<-3$ 또는 $x>k\}$, $Q=\{x\mid -4\le x\le 0\}$
명제 $\sim p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P^C\cap Q^C$의 원소이고
$P^C=\{x\mid -3\le x\le k\}$ ($\because$ k는 자연수),
$Q^C=\{x\mid x<-4$ 또는 $x>0\}$
이므로 집합 $P^C\cap Q^C$의 정수인 원소가 2개이려면 오른쪽 그림에서 $2\le k<3$

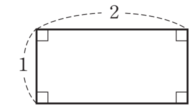


이때 k는 자연수이므로 $k=2$

정답_ 2

571

① [반례] $x=-3$이면 $x^2+x-6=0$이지만 $3x-5=-14\ne 1$
② $2(x+1)<6$에서 $x+1<3$
$\therefore$ $x<2$
$3x+1<2(x+2)$에서 $3x+1<2x+4$
$\therefore$ $x<3$
따라서 $x<2$이면 $x<3$이므로 참이다.
③ [반례] 4는 4의 배수이지만 8의 배수는 아니다.
④ [반례] 오른쪽 그림과 같이 이웃하는 두 변의 길이가 다른 직사각형은 네 각이 모두 직각인 사각형이지만 정사각형이 아니다.



⑤ [반례] $x=-1$이면 $x^{10}=1$이지만 $x\ne 1$이다.
따라서 참인 명제는 ②이다.

정답_ ②

572

① [반례] 2는 소수이지만 짝수이다.
② [반례] $a=2$, $b=\frac{1}{2}$이면 $ab=1$은 정수이지만 $a+b=\frac{5}{2}$는 정수가 아니다.
③ [반례] $a=2$, $b=3$이면 $ab=6$은 짝수이지만 a는 짝수, b는 홀수이다.
⑤ [반례] $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 $a+b=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$이고 $ab=\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$이므로 $a+b$, ab 모두 유리수이다.
따라서 참인 명제인 것은 ④이다.

정답_ ④

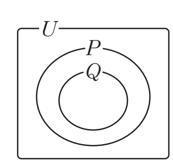
573

ㄱ. $x<y<0$이면 $|x|>|y|$이므로 $x^2>y^2$
즉, 주어진 명제는 참이다.
ㄴ. [반례] $x=-10$, $y=-20$, $z=-1$이면 $y<x<0$이고 $z\ne 0$이지만 $\frac{x}{z}=10$, $\frac{y}{z}=20$이므로 $\frac{x}{z}<\frac{y}{z}$
ㄷ. $x^2+y^2=0$이면 $x=y=0$이므로 $|x|+|y|=0$
즉, 주어진 명제는 참이다.
ㄹ. [반례] $x=3$, $y=3$, $z=4$이면 $(x-y)(y-z)=0$이지만 $x=y\ne z$
따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ①

574

명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 $Q\subset P$



① $P\cap Q=Q$
② $P\cup Q=P$
③ $P\cap Q^C\ne P$
④ $P\cup Q^C=U$
⑤ $P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C=P^C\ne U$
따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

정답_ ④

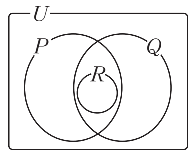
575

① $R\subset Q$이므로 $r \longrightarrow q$는 참인 명제이다.
② $P\subset R^C$이므로 $p \longrightarrow \sim r$는 참인 명제이다.
③ $R^C\not\subset Q^C$이므로 $\sim r \longrightarrow \sim q$는 거짓인 명제이다.
④ $R\subset P^C$이므로 $r \longrightarrow \sim p$는 참인 명제이다.
⑤ $P\subset Q^C$이므로 $p \longrightarrow \sim q$는 참인 명제이다.
따라서 거짓인 명제는 ③이다.

정답_ ③

576

$R\subset(P\cap Q)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$R\subset P$이므로 $P^C\subset R^C$

$R\subset Q$이므로 $Q^C\subset R^C$

① $R\subset P$이므로 $r \longrightarrow p$는 참인 명제이다.

② $R\subset Q$이므로 $r \longrightarrow q$는 참인 명제이다.

③ $P^C\not\subset Q^C$이므로 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 거짓인 명제이다.

④ $P^C\subset R^C$이므로 $\sim p \longrightarrow \sim r$는 참인 명제이다.

⑤ $Q^C\subset R^C$이므로 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 참인 명제이다.

따라서 거짓인 명제는 ③이다.

정답_ ③

577

$P\cup Q=P$에서 $Q\subset P$이므로 $P^C\subset Q^C$

$Q\cap R=R$에서 $R\subset Q$이므로 $Q^C\subset R^C$

$\therefore$ $R\subset Q\subset P$, $P^C\subset Q^C\subset R^C$

① $Q\subset P$이므로 $q \longrightarrow p$는 참인 명제이다.

② $R\subset Q$이므로 $r \longrightarrow q$는 참인 명제이다.

③ $R\subset P$이므로 $r \longrightarrow p$는 참인 명제이다.

④ $Q^C\subset R^C$이므로 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 참인 명제이다.

⑤ $R^C\not\subset P^C$이므로 $\sim r \longrightarrow \sim p$는 거짓인 명제이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 명제는 ⑤이다.

정답_ ⑤

578

ㄱ. 명제 $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로 $P^C\subset R$ (참) …… ㉠

ㄴ. [반례] $U=\{1, 2, 3\}$, $P=\{1, 2\}$, $Q=\{2\}$, $R=\{1, 3\}$이면

$P^C=\{3\}$, $Q^C=\{1, 3\}$, $R^C=\{2\}$이므로

$P^C\subset R$, $R\subset Q^C$, $R^C\subset Q$

즉, $\sim p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow q$는 모두 참이지만 $P\not\subset Q$이다. (거짓)

ㄷ. 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $R\subset Q^C$ …… ㉡

명제 $\sim r \longrightarrow q$가 참이므로 $R^C\subset Q$

$\therefore$ $Q^C\subset R$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $Q^C=R$ $\quad\therefore$ $Q=R^C$ …… ㉣

㉠, ㉡에서 $P^C\subset Q^C$ $\quad\therefore$ $Q\subset P$

$\therefore$ $P\cap Q=Q=R^C$ ($\because$ ㉣) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

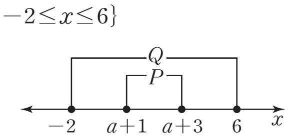
정답_ ③

579

p: $a+1\le x\le a+3$, q: $-2\le x\le 6$이라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x|a+1\le x\le a+3\}$, $Q=\{x|-2\le x\le 6\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-2\le a+1$, $a+3\le 6$

$\therefore$ $-3\le a\le 3$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개이다.

정답_ 7

580

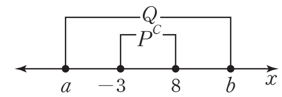
$x^2-(a+b)x+ab\le 0$, $(x-a)(x-b)\le 0$

$\therefore$ $a\le x\le b$ ($\because$ $a<b$)

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P^C=\{x|-3\le x\le 8\}$, $Q=\{x|a\le x\le b\}$

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서 $a\le -3$, $b\ge 8$



따라서 실수 a의 최댓값은 -3, 실수 b의 최솟값은 8이므로 구하는 합은 $-3+8=5$

정답_ 5

581

$|x-a|\le 1$에서 $-1\le x-a\le 1$

$\therefore$ $a-1\le x\le a+1$

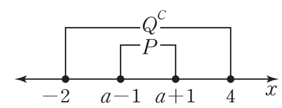
$x^2-2x-8>0$에서 $(x-4)(x+2)>0$

$\therefore$ $x<-2$ 또는 $x>4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x|a-1\le x\le a+1\}$, $Q^C=\{x|-2\le x\le 4\}$

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서 $-2\le a-1$



$a+1\le 4$ $\quad\therefore$ $-1\le a\le 3$

따라서 실수 a의 최댓값은 3이다.

정답_ ③

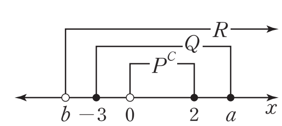
582

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하면

$P=\{x|x\le 0$ 또는 $x>2\}$, $Q=\{x|-3\le x\le a\}$, $R=\{x|x>b\}$

명제 $\sim p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이 되려면 $P^C\subset Q$, $Q\subset R$, 즉 $P^C\subset Q\subset R$이어야 한다.

이때 $P^C=\{x|0<x\le 2\}$이므로 오른쪽 그림에서 $a\ge 2$, $b<-3$



따라서 정수 a의 최솟값은 2, 정수 b의 최댓값은 -4이므로 구하는 합은 $2+(-4)=-2$

정답_ -2

주의 $Q\subset R$인 b의 값의 범위를 구할 때 등호를 포함시키면 안 된다.
$b=-3$이면 $R=\{x|x>-3\}$이므로 $Q\not\subset R$

583

① $x\in U$인 모든 x에 대하여 $x+1<7$이므로 참이다.

② $x=5$일 때, $x^2-2=23>20$이므로 참이다.

③ [반례] $x=1$이면 $x-1=0$이다.

④ $x=1$일 때, $x^2-2=-1<2$이므로 참이다.

⑤ $x^2-6x<0$에서 $x(x-6)<0$ $\quad\therefore$ $0<x<6$

즉, $x\in U$인 모든 x에 대하여 $x^2-6x<0$이므로 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ③이다.

정답_ ③

584

ㄱ. [반례] $x=0$일 때 $|x|=x$이다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$

즉, 주어진 명제는 참이다.

ㄷ. $x^2<x$에서 $x(x-1)<0$

$\therefore\ 0<x<1$

그런데 이를 만족시키는 정수 x는 없다.

즉, 주어진 명제는 거짓이다.

ㄹ. $x^2=3$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

즉, $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$일 때 $x^2=3$이므로 주어진 참이다.

따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄹ이다.

정답_ ㄴ, ㄹ

585

모든 실수 x에 대하여 $x^2+2kx+4k+5>0$이므로 이차방정식 $x^2+2kx+4k+5=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(4k+5)<0$

$k^2-4k-5<0$, $(k+1)(k-5)<0$

$\therefore\ -1<k<5$

어떤 실수 x에 대하여 $x^2=k-2$이므로

$k-2\ge0$에서 $k\ge2$

정수 k에 대한 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Q=\{2, 3, 4, \cdots\}$

$P\cap Q=\{2, 3, 4\}$이므로 두 조건 p, q가 모두 참인 명제가 되도록 하는 정수 k의 값은 2, 3, 4이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$2+3+4=9$

정답_ 9

586

명제 $q \longrightarrow \sim p$의 역 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우인 $\sim q \longrightarrow p$도 항상 참이다.

정답_ ④

587

① 역: $x>1$이면 $x>0$이다. (참)

명제: [반례] $x=\frac{1}{2}$이면 $x>0$이지만 $x<1$이다.

따라서 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

② 역: $x^2=y^2$이면 $x=y$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$, $y=1$이면 $x^2=y^2$이지만 $x\ne y$이다.

한편, 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

③ 역: $x^2+y^2=0$이면 $|x|+|y|=0$이다.

이때 $x^2+y^2=0$에서 $x=0$, $y=0$이므로 $|x|+|y|=0$ (참)

한편, 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

④ 역: $x>0$이고 $y<0$이면 $xy<0$이다. (참)

명제: [반례] $x=-1$, $y=2$이면 $xy<0$이지만 $x<0$, $y>0$이다.

따라서 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

⑤ 역: $x<y$이면 $|x-y|=y-x$이다. (참)

명제: [반례] $x=1$, $y=1$이면 $|x-y|=y-x$이지만 $x=y$이다.

따라서 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

그러므로 그 역과 대우가 모두 참인 명제는 ③이다.

정답_ ③

588

ㄱ. 역: $a^3=1$이면 $a^2=1$이다.

이때 a는 실수이므로 $a^3=1$에서 $a=1$

$a=1$이면 $a^2=1$이다. (참)

명제: [반례] $a=-1$이면 $a^2=1$이지만 $a^3=-1$이다.

따라서 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

ㄴ. 역: $a^2+b^2=0$이면 $ab=0$이다. (참)

명제: [반례] $a=1$, $b=0$이면 $ab=0$이지만 $a^2+b^2=1$이다.

따라서 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

ㄷ. 역: $a+b\ge2$이면 $a\ge1$이고 $b\ge1$이다. (거짓)

[반례] $a=2$, $b=0$이면 $a+b\ge2$이지만 $b<1$이다.

한편, 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

ㄹ. 역: a, b 중 적어도 하나가 유리수이면 $a+b$, ab는 모두 유리수이다. (거짓)

[반례] $a=1$, $b=\sqrt{2}$이면 a가 유리수이지만 $a+b=1+\sqrt{2}$, $ab=\sqrt{2}$는 모두 무리수이다.

명제: [반례] $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 $a+b=0$, $ab=-2$는 모두 유리수이지만 a, b는 모두 무리수이다.

따라서 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

그러므로 역은 참이고 대우는 거짓인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ③

589

명제 '$3x^2+ax-1\ne0$이면 $x+1\ne0$이다.'가 참이 되려면 그 대우 '$x+1=0$이면 $3x^2+ax-1=0$이다.'도 참이 되어야 한다.

$x+1=0$에서 $x=-1$이므로 $3x^2+ax-1=0$에 $x=-1$을 대입하면

$3-a-1=0 \qquad \therefore\ a=2$

정답_ ①

590

명제 '$a+b<7$이면 $a<1$ 또는 $b<k$이다.'가 참이 되려면 그 대우 '$a\ge1$이고 $b\ge k$이면 $a+b\ge7$이다.'도 참이 되어야 한다.

$a\ge1$이고 $b\ge k$이면 $a+b\ge1+k$이므로

'$a+b\ge1+k$이면 $a+b\ge7$이다.'가 참이 되려면

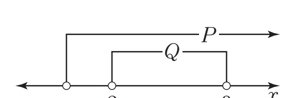
$1+k\ge7 \qquad \therefore\ k\ge6$

정답_ $k\ge6$

591

두 조건 p: $x>a$, q: $-2<x<3$의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이면 그 대우인 $q \longrightarrow p$도 참이므로 $Q\subset P$이어야 한다.

즉, 오른쪽 그림에서



$a\le-2$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2이다.

정답_ -2

592

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이 되어야 한다.

$\sim p$: $|x-k|<3$에서 $-3<x-k<3$

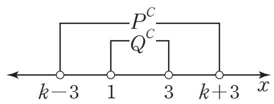
$\therefore k-3<x<k+3$

$\sim q$: $|x-2|<1$에서 $-1<x-2<1$

$\therefore 1<x<3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P^C=\{x|k-3<x<k+3\}$, $Q^C=\{x|1<x<3\}$



이때 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 $Q^C \subset P^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서 $k-3 \le 1$

$k+3 \ge 3$ $\quad \therefore 0 \le k \le 4$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

정답_ 5

다른 풀이

$|x-k| \ge 3$에서 $x-k \le -3$ 또는 $x-k \ge 3$

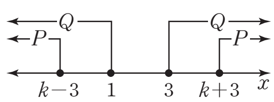
$\therefore x \le k-3$ 또는 $x \ge k+3$

$|x-2| \ge 1$에서 $x-2 \le -1$ 또는 $x-2 \ge 1$

$\therefore x \le 1$ 또는 $x \ge 3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x|x \le k-3$ 또는 $x \ge k+3\}$, $Q=\{x|x \le 1$ 또는 $x \ge 3\}$



명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$k-3 \le 1$, $k+3 \ge 3$

$\therefore 0 \le k \le 4$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

593

$p \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow q$가 모두 참이므로 각각의 대우 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow r$도 참이다.

또, $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 $p \longrightarrow r$가 참이고, 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ②이다.

정답_ ②

594

$\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow p$도 참이다.

따라서 $r \longrightarrow p$가 참이려면 ④ $r \longrightarrow \sim q$가 참이어야 한다.

정답_ ④

참고 (가)에는 $r \longrightarrow \sim q$의 대우 $q \longrightarrow \sim r$가 들어갈 수도 있다.

595

$r \longrightarrow \sim s$가 참이므로 그 대우 $s \longrightarrow \sim r$도 참이다.

$s \longrightarrow \sim r$, $q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 명제 $s \longrightarrow p$가 참이 되려면 $\sim r \longrightarrow q$가 참이어야 한다.

또, $\sim r \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow r$도 참이다.

따라서 $s \longrightarrow p$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 ④ $\sim q \longrightarrow r$이다.

정답_ ④

596

세 조건 p, q, r를

p: 잘 달리는 사람이다.

q: 운동을 좋아하는 사람이다.

r: 건강한 사람이다.

로 놓으면 $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이다.

또, $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 $p \longrightarrow r$가 참이고, 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

이때 각 보기의 문장을 세 조건 p, q, r로 나타내면 다음과 같다.

① $r \longrightarrow p$ ② $p \longrightarrow r$ ③ $p \longrightarrow \sim q$

④ $\sim p \longrightarrow \sim q$ ⑤ $\sim q \longrightarrow \sim r$

따라서 항상 참인 명제는 ②이다.

정답_ ②

597

네 조건 p, q, r, s를

p: A가 숙제를 했다.

q: B가 숙제를 했다.

r: C가 숙제를 했다.

s: D가 숙제를 했다.

로 놓으면 (나), (다), (라)에 의하여 $s \longrightarrow q$, $\sim p \longrightarrow \sim q$, $\sim s \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim s$, $q \longrightarrow p$, $r \longrightarrow s$도 참이다.

또, $r \longrightarrow s$, $s \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 $r \longrightarrow p$도 참이다.

이때 C가 숙제를 했으면 D, B, A도 숙제를 한 것이 되어 네 명 모두가 숙제를 한 것이고, D가 숙제를 했으면 B, A도 숙제를 한 것이 되어 D, B, A 세 명이 숙제를 한 것이 된다.

이는 (가)에 모순이므로 C, D는 숙제를 하지 않았다. 따라서 숙제를 한 학생은 A, B이다.

정답_ A, B

598

ㄱ. $x^2=1$이면 $x=-1$ 또는 $x=1$이므로

$x=-1 \Longrightarrow x^2=1$, $x^2=1 \not\Longrightarrow x=-1$

즉, $x=-1$은 $x^2=1$이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $x=2 \not\Longrightarrow x^2=1$, $x^2=1 \not\Longrightarrow x=2$이므로

$x=2$는 $x^2=1$이기 위한 아무 조건도 아니다.

ㄷ. $x(x^2-1)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1$이므로

$x(x^2-1)=0 \not\Longrightarrow x^2=1$, $x^2=1 \Longrightarrow x(x^2-1)=0$

즉, $x(x^2-1)=0$은 $x^2=1$이기 위한 필요조건이다.

ㄹ. $x^2=0 \not\Longrightarrow x^2=1$, $x^2=1 \not\Longrightarrow x^2=0$이므로

$x^2=0$은 $x^2=1$이기 위한 아무 조건도 아니다.

따라서 $x^2=1$이기 위한 필요조건과 충분조건을 차례대로 나열하면 ㄷ, ㄱ이다.

정답_ ㄷ, ㄱ

599

① $|x|>1$에서 $x<-1$ 또는 $x>1$이므로 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$

즉, p는 q이기 위한 필요조건이다.

② $x^2=y^2$에서 $x=y$ 또는 $x=-y$이므로 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$

즉, p는 q이기 위한 필요조건이다.

③ $x^2-16=0$에서 $(x+4)(x-4)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=4$

$|x|=4$에서 $x=4$ 또는 $x=-4$이므로

$p \Longrightarrow q,\ q \Longrightarrow p \qquad \therefore p \Longleftrightarrow q$

즉, p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ $x>0,\ y<0$이면 $xy<0$이므로 $p \Longrightarrow q$

[$\longleftarrow$ 의 반례] $x=-2,\ y=1$이면 $xy<0$이지만 $x<0,\ y>0$이다.

즉, p는 q이기 위한 충분조건이다.

⑤ $x+y>0$이면 $x,\ y$ 중 적어도 하나는 0이 아니므로

$x^2+y^2>0 \qquad \therefore q \Longrightarrow p$

[$\longrightarrow$ 의 반례] $x=-2,\ y=1$이면 $x^2+y^2=5>0$이지만

$x+y=-1<0$이다.

즉, p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ④이다.

정답_ ④

600

ㄱ. $a^2+b^2=0$이면 $a=0,\ b=0$이고, $ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$이므로 $p \Longrightarrow q$

[$\longleftarrow$ 의 반례] $a=0,\ b=1$이면 $ab=0$이지만 $a^2+b^2\neq 0$이다.

즉, p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $|a|\geq 0$이므로 $b<0$이면 $|a|>b$이다.

즉, $q \Longrightarrow p$

[$\longrightarrow$ 의 반례] $a=-2,\ b=1$이면 $|a|>b$이지만 $b>0$이다.

즉, p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $a-c>b-c \Longleftrightarrow a>b$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄹ. $a=b=c=0$이면 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$이므로

$q \Longrightarrow p$

[$\longrightarrow$ 의 반례] $a=b=c=1$이면

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$이지만 $a=b=c\neq 0$이다.

즉, p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ㄴ, ㄹ이다.

정답_ ③

601

p: $|a|+|b|=0$에서 $a=b=0$

q: $a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0$

$\therefore a=b$

r: $|a+b|=|a-b|$에서 $a+b=a-b$ 또는 $a+b=-(a-b)$

$\therefore a=0$ 또는 $b=0$

ㄱ. $p \Longrightarrow q,\ q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $\sim p$: $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$

$\sim r$: $a\neq 0$이고 $b\neq 0$

이므로 $\sim p \not\Longrightarrow \sim r,\ \sim r \Longrightarrow \sim p$

즉, $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. q이고 r이면 $a=b=0$이므로 (q이고 r) $\Longleftrightarrow p$

즉, q이고 r는 p이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

602

p는 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로 $p \Longleftarrow \sim q$

p는 r이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow r$

$\sim q \Longrightarrow p,\ p \Longrightarrow r$이므로 $\sim q \Longrightarrow r$이고, 이 명제의 대우도 참이므로 $\sim r \Longrightarrow q$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

정답_ ㄴ, ㄹ

603

(가)에서 $p \Longleftrightarrow r$, (나)에서 $q \Longleftarrow s$,

(다)에서 $r \Longrightarrow s$, (라)에서 $r \Longleftarrow q$

이때 $p \Longrightarrow r,\ r \Longrightarrow s$이므로 $p \Longrightarrow s$

$s \Longrightarrow q,\ q \Longrightarrow r,\ r \Longrightarrow p$이므로 $s \Longrightarrow p$

따라서 $p \Longleftrightarrow s$이므로 s는 p이기 위한 필요충분조건이다.

정답_ **필요충분조건**

604

① $P\subset R$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.

② $Q\subset R$이므로 r는 q이기 위한 필요조건이다.

③ $P\subset Q^C$이므로 p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

④ $Q\subset P^C$이므로 $\sim p$는 q이기 위한 필요조건이다.

⑤ $Q\subset R$이므로 $R^C\subset Q^C$

즉, $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

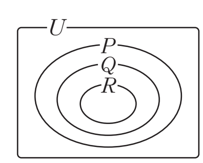
정답_ ⑤

605

r는 q이기 위한 충분조건이고, p는 q이기 위한 필요조건이므로

$R\subset Q,\ Q\subset P \qquad \therefore R\subset Q\subset P$

세 집합 $P,\ Q,\ R$ 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



③ $P-R\neq P$

④ $P\cap Q=Q$이고 $R\subset Q$이므로

$R\subset(P\cap Q)$

⑤ $(P-Q)\subset R^C$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

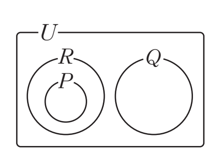
정답_ ⑤

606

$(P-R)\cup(Q-R^C)=\varnothing$에서 $P-R=\varnothing,\ Q-R^C=\varnothing$

$\therefore P\subset R,\ Q\cap R=\varnothing$

즉, 세 집합 $P,\ Q,\ R$ 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $P\subset R$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $Q\subset R^C$이지만 $R^C\not\subset Q$이므로 $\sim r$는 q이기 위한 필요충분조건이 아니다.

ㄷ. $P\subset Q^C$이므로 $\sim q$는 p이기 위한 필요조건이다.

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ㄱ, ㄷ

607

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면
명제 '$x^2-ax+2\neq0$이면 $x+2\neq0$이다.'가 참이어야 하고 이 명제의 대우 '$x+2=0$이면 $x^2-ax+2=0$이다.'도 참이어야 한다.
$x+2=0$에서 $x=-2$이므로 $x^2-ax+2=0$에 $x=-2$를 대입하면
$4+2a+2=0 \qquad \therefore a=-3$

정답_ -3

608

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.
$x^2-4x-5\leq0$에서 $(x+1)(x-5)\leq0$
$\therefore P=\{x\mid-1\leq x\leq5\}$
$|x-a|\leq b$에서 $-b\leq x-a\leq b$
$a-b\leq x\leq a+b \qquad \therefore Q=\{x\mid a-b\leq x\leq a+b\}$
p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 $P=Q$이어야 한다.
따라서 $a-b=-1$, $a+b=5$이므로 이 두 식을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=3$
$\therefore ab=2\times3=6$

정답_ 6

609

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$ ...... ㉠
r는 p이기 위한 필요조건이므로 $P\subset R$ ...... ㉡
㉠에서 $3\in Q$이므로 $a^2-1=3$ 또는 $b=3$
(i) $a^2-1=3$일 때, $a=-2$ 또는 $a=2$
㉡에서 $3\in R$이므로 $ab=3$
$\therefore a=-2,\ b=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=2,\ b=\frac{3}{2}$
(ii) $b=3$일 때,
㉡에서 $3\in R$이므로 $a=3$ 또는 $ab=3$
$\therefore a=3,\ b=3$ 또는 $a=1,\ b=3$
(i), (ii)에서 $a+b$의 최솟값은
$(-2)+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{2}$

정답_ ⑤

610

p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하면
$P=\{n\mid n\geq k,\ n$은 자연수$\}$
$3n-1\geq6$에서 $n\geq\frac{7}{3}$이므로
$Q=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots\}$
$n^2-8n\geq20$에서
$n^2-8n-20\geq0$, $(n+2)(n-10)\geq0$
이때 n은 자연수이므로 $n\geq10$
$\therefore R=\{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ \cdots\}$
p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$
p는 r이기 위한 필요조건이므로 $R\subset P$
$\therefore R\subset P\subset Q$
따라서 $3\leq k\leq10$이므로 자연수 k는 3, 4, 5, $\cdots$, 10의 8개이다.

정답_ 8

611

주어진 명제의 대우는
'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'
n이 $\boxed{(가)\ 홀수}$이면
$n=\boxed{(나)\ 2k-1}$ (k는 자연수)로 놓을 수 있으므로
$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=2(\boxed{(다)\ 2k^2-2k})+1$
즉, n^2은 $\boxed{(라)\ 홀수}$이다.
따라서 주어진 명제의 $\boxed{(마)\ 대우}$가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
$\therefore$ (가) 홀수 (나) $2k-1$ (다) $2k^2-2k$ (라) 홀수 (마) 대우

정답_ ②

참고 (나)에 $2k+1$이 들어가면 홀수 중에서 1이 빠지게 되므로 $2k-1$이 들어가야 한다.

612

주어진 명제의 대우는
'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.'
$n=3k-2$ 또는 $n=\boxed{(가)\ 3k-1}$ (k는 자연수)
로 놓을 수 있다.
(i) $n=3k-2$일 때
$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$
$=3(3k^2-4k+1)+\boxed{(나)\ 1}$
(ii) $n=\boxed{(가)\ 3k-1}$일 때
$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$
$=3(\boxed{(다)\ 3k^2-2k})+\boxed{(나)\ 1}$
(i), (ii)에서 n^2은 3으로 나누면 나머지가 $\boxed{(나)\ 1}$인 자연수이므로
n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
$\therefore$ (가) $3k-1$ (나) 1 (다) $3k^2-2k$

정답_ (가) $3k-1$ (나) 1 (다) $3k^2-2k$

613

(1) 주어진 명제의 대우는
'$m+n$을 3으로 나누었을 때의 나머지가 0도 아니고 1도 아니면 m^3+n^3을 3으로 나누었을 때의 나머지는 0도 아니고 1도 아니다.'
한편, 자연수를 3으로 나누었을 때, 나머지는 0 또는 1 또는 2이므로 나머지가 0도 아니고 1도 아니면 나머지는 2이다.
따라서 주어진 명제의 대우는
'$m+n$을 3으로 나누었을 때의 나머지가 2이면 m^3+n^3을 3으로 나누었을 때의 나머지도 2이다.'
(2) $m+n$을 3으로 나누었을 때의 나머지가 2이므로
$m+n=3k+2$ (k는 음이 아닌 정수)
로 놓을 수 있다. 한편,
$m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)$
$=(3k+2)^3-3mn(3k+2)$
$=27k^3+54k^2+36k+8-3mn(3k+2)$
$=3\{9k^3+18k^2+12k+2-mn(3k+2)\}+2$
이므로 m^3+n^3을 3으로 나누었을 때의 나머지는 2이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

정답_ 풀이 참조

614

$b\neq0$이라고 가정하면

$a+b\sqrt{3}=0$에서 $\sqrt{3}=-\frac{a}{b}$

a, b가 유리수이므로 $-\frac{a}{b}$, 즉 $\sqrt{3}$은 유리수이다.

이는 $\sqrt{3}$이 $\boxed{(가)\ 무리수}$라는 사실에 모순이므로 $\boxed{(나)\ b=0}$이다.

$a+b\sqrt{3}=0$에 $\boxed{(나)\ b=0}$을 대입하면 $a=0$이다.

따라서 유리수 a, b에 대하여 $a+b\sqrt{3}=0$이면 $\boxed{(다)\ a=b=0}$이다.

$\therefore$ (가) 무리수 (나) $b=0$ (다) $a=b=0$

정답_ ⑤

615

$p^2(n^2-1)=q^2$에서 q^2이 p의 배수이므로 $\frac{q^2}{p}$은 자연수이다.

그런데 p가 1이 아닌 자연수이면 p, q가 서로소이므로 $\frac{q^2}{p}$은 자연수가 아니다.

$\therefore p=1$

$p^2(n^2-1)=q^2$에 $p=1$을 대입하면 $n^2-1=q^2$

$\therefore n^2=\boxed{(가)\ q^2+1}$

$n\geq2$이고 $q^2=n^2-1\geq2^2-1=4-1=3$

그러므로 $q^2\geq3$에서 $q>1$

자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때

$n^2=(2k)^2+1$이므로 $(2k)^2<n^2<\boxed{(나)\ (2k+1)^2}$

즉, $2k<n<2k+1$이고, 이를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때

$n^2=(2k+1)^2+1$이므로

$\boxed{(나)\ (2k+1)^2}<n^2<(2k+2)^2$

즉, $2k+1<n<2k+2$이고, 이를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\sqrt{n^2-1}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

$\therefore$ (가) q^2+1 (나) $(2k+1)^2$

즉, $f(q)=q^2+1$, $g(k)=(2k+1)^2$이므로

$f(2)+g(3)=(2^2+1)+(2\times3+1)^2=5+49=54$

정답_ ③

616

$\sqrt{2}+1$이 유리수라고 가정하면

$\sqrt{2}+1=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)

로 놓을 수 있다.

$\therefore \sqrt{2}=\frac{q}{p}-1$ …… ㉠

이때 ㉠의 좌변은 무리수, 우변은 유리수이므로 모순이다.

따라서 $\sqrt{2}$가 무리수이면 $\sqrt{2}+1$도 무리수이다.

정답_ 풀이 참조

617

① $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$에서

$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\geq0$, $\frac{3}{4}b^2\geq0$이므로

$a^2+ab+b^2\geq0$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립한다.)

② $a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$에서

$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\geq0$, $\frac{3}{4}>0$이므로

$a^2-a+1>0$

③ [반례] $a=b=0$이면 $a^2+b^2=0=ab$

④ $a^2+\frac{1}{a^2}-2=\frac{a^4-2a^2+1}{a^2}=\frac{(a^2-1)^2}{a^2}\geq0$

$\therefore a^2+\frac{1}{a^2}\geq2$ (단, 등호는 $a=-1$ 또는 $a=1$일 때 성립한다.)

⑤ $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq0$

$\therefore \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.)

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ③이다.

정답_ ③

618

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(\boxed{(가)\ a^2x^2+2abxy+b^2y^2})$

$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$

$=(\boxed{(나)\ bx-ay})^2\geq0$

$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

이때 등호는 $bx=ay$, 즉 $\boxed{(다)\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$ (나) $bx-ay$ (다) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

정답_ (가) $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$ (나) $bx-ay$ (다) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

619

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)$

$=\boxed{(가)\ 2\sqrt{ab}}\geq0$

$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\geq(\sqrt{a+b})^2$

그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq0$, $\sqrt{a+b}\geq0$이므로

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$

이때 등호는 $2\sqrt{ab}=0$, 즉 $\boxed{(나)\ a=0}$ 또는 $b=0$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $a=0$

정답_ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $a=0$

620

$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-\boxed{(가)\ (a+b)^2}$

$=a^2+2\boxed{(나)\ |ab|}+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(\boxed{(나)\ |ab|}-ab)$

그런데 $ab\geq0$이면 $|ab|=ab$이므로

$|ab|-ab=ab-ab=0$

$ab<0$이면 $|ab|=-ab$이므로

$|ab|-ab=-ab-ab=-2ab>0$

$\therefore (|a|+|b|)^2-|a+b|^2\geq 0$

$\therefore (|a|+|b|)^2\geq |a+b|^2$

그런데 $|a|+|b|\geq 0$, $|a+b|\geq 0$이므로

$|a|+|b|\geq |a+b|$

이때 등호는 $\boxed{(다)\ ab\geq 0}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $(a+b)^2$ (나) $|ab|$ (다) $ab\geq 0$

정답_ ③

621

ㄱ. [반례] $a=1$, $b=-1$이면 $|a+b|=0$, $|a-b|=2$이므로

$|a+b|<|a-b|$

ㄴ. (i) $|a|\geq|b|$일 때

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$

$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geq 0$ ($\because |ab|\geq ab$)

$\therefore |a-b|^2\geq(|a|-|b|)^2$

그런데 $|a-b|\geq 0$, $|a|-|b|\geq 0$이므로

$|a-b|\geq|a|-|b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때

$|a-b|>0$, $|a|-|b|<0$이므로

$|a-b|>|a|-|b|$

(i), (ii)에서 $|a-b|\geq|a|-|b|$

(단, 등호는 $ab\geq 0$일 때 성립한다.)

ㄷ. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$

$\therefore a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

622

(1) $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

이때 $a+b=6$이므로 $6\geq 2\sqrt{ab}$

$\therefore \sqrt{ab}\leq 3$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

양변을 제곱하면 $ab\leq 9$이므로 ab의 최댓값은 9이다.

(2) $a>0$, $b>0$에서 $2a>0$, $4b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+4b\geq 2\sqrt{2a\times 4b}=2\sqrt{8ab}$

그런데 $ab=4$이므로

$2a+4b\geq 2\sqrt{32}=8\sqrt{2}$

(단, 등호는 $2a=4b$, 즉 $a=2b$일 때 성립한다.)

따라서 $2a+4b$의 최솟값은 $8\sqrt{2}$이다.

정답_ (1) 9 (2) $8\sqrt{2}$

참고 (1) 등호는 $a=b$, $a+b=6$일 때 성립하므로 $a=b=3$일 때 성립한다.
(2) 등호는 $a=2b$, $ab=4$일 때 성립하므로 $a=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$일 때 성립한다.

623

$a>0$, $b>0$에서 $\dfrac{4}{a}>0$, $\dfrac{1}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{4}{ab}}$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{4}{a}=\dfrac{1}{b}\text{, 즉 } a=4b\text{일 때 성립한다.}\right)$

그런데 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}=2$이므로

$2\geq 2\sqrt{\dfrac{4}{ab}}$, $1\geq\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$

$\therefore \sqrt{ab}\geq 2$

이때 $a>0$, $4b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+4b\geq 2\sqrt{4ab}=4\sqrt{ab}\geq 8$ (단, 등호는 $a=4b$일 때 성립한다.)

따라서 $a+4b$의 최솟값은 8이다.

정답_ 8

624

$a\neq 0$, $b\neq 0$에서 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2|ab|$

그런데 $a^2+b^2=8$이므로

$8\geq 2|ab|$, $|ab|\leq 4$

$\therefore -4\leq ab\leq 4$ (단, 등호는 $a^2=b^2$일 때 성립하고, $ab\neq 0$이다.)

따라서 ab의 최댓값은 4이다.

정답_ 4

625

$xy>0$이므로 x, y는 부호가 같고 $x+y=3>0$이므로

$x>0$, $y>0$이다.

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.)

이때 $x+y=3$이므로 $3\geq 2\sqrt{xy}$

양변을 제곱하면

$9\geq 4xy$ $\quad\therefore \dfrac{1}{xy}\geq\dfrac{4}{9}$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}\geq 3\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{3}$

따라서 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$의 최솟값은 $\dfrac{4}{3}$이다.

정답_ ②

626

㉠의 등호는 $a=\dfrac{1}{b}$, 즉 $ab=\boxed{(가)\ 1}$일 때 성립하고

㉡의 등호는 $a=\dfrac{9}{b}$, 즉 $ab=\boxed{(나)\ 9}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) 1 (나) 9

㉣, ㉤을 동시에 만족시키는 양수 a, b의 값은 존재하지 않으므로 ㉢의 풀이는 옳지 않다.

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$의 최솟값을 바르게 구하면 다음과 같다.

$ab>0$이므로 주어진 식을 전개하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)=ab+9+1+\frac{9}{ab}$$
$$=10+ab+\frac{9}{ab}$$
$$\geq 10+2\sqrt{ab\times\frac{9}{ab}}=16$$
$\left(\text{단, 등호는 } ab=\frac{9}{ab}\text{, 즉 } ab=3\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 16이다.

정답_ ㈎ 1 ㈏ 9, **최솟값**: 16

627

$a>0$에서 $a^2>0$, $\frac{1}{a^2}>0$이므로 주어진 식을 전개하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{4}{a}\right)=a^2-4-1+\frac{4}{a^2}$$
$$\geq -5+2\sqrt{a^2\times\frac{4}{a^2}}=-1$$

등호는 $a^2=\frac{4}{a^2}$일 때 성립하므로 $a^4=4$

이때 $a^2>0$이므로

$a^2=2$ $\quad\therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$

따라서 $\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{4}{a}\right)$는 $a=\sqrt{2}$일 때 최솟값 -1을 가진다.

정답_ **최솟값**: -1, $a=\sqrt{2}$

628

두 직선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 기울기가 각각 $\frac{a}{2}$, $\frac{1}{b}$이고 두 직선이 서로 평행하므로

$\frac{a}{2}=\frac{1}{b}$ $\quad\therefore ab=2$

$\therefore (a+1)(b+2)=ab+2a+b+2=4+2a+b$ ⋯⋯ ㉠

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+b\geq 2\sqrt{2ab}=4$ (단, 등호는 $2a=b$일 때 성립한다.)

따라서 ㉠에서

$(a+1)(b+2)\geq 4+4=8$

이므로 구하는 최솟값은 8이다.

정답_ 8

629

$a>1$에서 $a-1>0$, $\frac{1}{a-1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9a+\frac{1}{a-1}=9(a-1)+\frac{1}{a-1}+9$$
$$\geq 2\sqrt{9(a-1)\times\frac{1}{a-1}}+9$$
$$=2\times 3+9=15$$
$\left(\text{단, 등호는 } 9(a-1)=\frac{1}{a-1}\text{, 즉 } a=\frac{4}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 15이다.

정답_ 15

630

$x>3$에서 $x-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^2-3x+4}{x-3}=x+\frac{4}{x-3}=(x-3)+\frac{4}{x-3}+3$$
$$\geq 2\sqrt{(x-3)\times\frac{4}{x-3}}+3$$
$$=2\times 2+3=7$$
$\left(\text{단, 등호는 } x-3=\frac{4}{x-3}\text{, 즉 } x=5\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\frac{x^2-3x+4}{x-3}$의 최솟값은 7이다.

정답_ ③

631

$x>2$에서 $x-2>0$이고 $x^2-2x+9=(x-1)^2+8>0$이므로

$\frac{x-2}{x^2-2x+9}>0$

따라서 $\frac{x^2-2x+9}{x-2}$가 최솟값을 가질 때, $\frac{x-2}{x^2-2x+9}$는 최댓값을 갖는다.

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^2-2x+9}{x-2}=x+\frac{9}{x-2}=(x-2)+\frac{9}{x-2}+2$$
$$\geq 2\sqrt{(x-2)\times\frac{9}{x-2}}+2$$
$$=2\times 3+2=8$$
$\left(\text{단, 등호는 } x-2=\frac{9}{x-2}\text{, 즉 } x=5\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\frac{x^2-2x+9}{x-2}$의 최솟값이 8이므로 $\frac{x-2}{x^2-2x+9}$의 최댓값은 $\frac{1}{8}$이다.

정답_ $\frac{1}{8}$

632

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$
$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}}$$
$$=2+2+2=6$$
$\left(\text{단, 등호는 } \frac{b}{a}=\frac{a}{b},\ \frac{c}{b}=\frac{b}{c},\ \frac{a}{c}=\frac{c}{a}\text{, 즉 } a=b=c\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

정답_ 6

다른 풀이

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$
$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)$$

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 세 수의 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{c}}=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{a}{c}\text{, 즉 } a=b=c\text{일 때 성립한다.}\right)$

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\times\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}}=3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{c}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\text{, 즉 } a=b=c\text{일 때 성립한다.}\right)$

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\geq 6$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

참고 세 양수의 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$, $c>0$일 때

$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.)

633

$x=a+\frac{3}{b}$, $y=b+\frac{3}{a}$이므로

$$x^2+y^2=\left(a+\frac{3}{b}\right)^2+\left(b+\frac{3}{a}\right)^2$$
$$=\left(a^2+\frac{6a}{b}+\frac{9}{b^2}\right)+\left(b^2+\frac{6b}{a}+\frac{9}{a^2}\right)$$
$$=\left(a^2+\frac{9}{a^2}\right)+\left(\frac{6a}{b}+\frac{6b}{a}\right)+\left(b^2+\frac{9}{b^2}\right)$$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2+\frac{9}{a^2}\geq 2\sqrt{a^2\times\frac{9}{a^2}}=2\times 3=6$$

$\left(\text{단, 등호는 } a^2=\frac{9}{a^2}\text{, 즉 } a=\sqrt{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$$\frac{6a}{b}+\frac{6b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{6a}{b}\times\frac{6b}{a}}=2\times 6=12$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{6a}{b}=\frac{6b}{a}\text{, 즉 } a=b\text{일 때 성립한다.}\right)$

$$b^2+\frac{9}{b^2}\geq 2\sqrt{b^2\times\frac{9}{b^2}}=2\times 3=6$$

$\left(\text{단, 등호는 } b^2=\frac{9}{b^2}\text{, 즉 } b=\sqrt{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$\therefore x^2+y^2\geq 6+12+6=24$

(단, 등호는 $a=b=\sqrt{3}$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 24이다.

정답_ 24

다른 풀이

$a>0$, $b>0$이므로 $x^2>0$, $y^2>0$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2\times y^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$=2xy=2\left(a+\frac{3}{b}\right)\left(b+\frac{3}{a}\right)=2\left(ab+\frac{9}{ab}+6\right)$$
$$\geq 2\left(2\sqrt{ab\times\frac{9}{ab}}+6\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$
$$=2(2\times 3+6)=24$$

㉠에서 등호는 $x=y$일 때, ㉡에서 등호는 $ab=\frac{9}{ab}$, 즉 $ab=3$일 때 성립하므로 등호는 $a=b=\sqrt{3}$일 때 성립한다.

따라서 구하는 최솟값은 24이다.

634

전체 우리의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라고 하면 전체 우리의 넓이는 xy m^{2}이고 철망의 길이가 10 m이므로

$2x+5y=10$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+5y\geq 2\sqrt{2x\times 5y}=2\sqrt{10xy}$

(단, 등호는 $2x=5y$일 때 성립한다.)

$2x+5y=10$이므로

$10\geq 2\sqrt{10xy}$, $5\geq\sqrt{10xy}$

양변을 제곱하면 $25\geq 10xy$ $\quad\therefore xy\leq\frac{5}{2}$

따라서 전체 우리의 넓이의 최댓값은 $\frac{5}{2}$ m^{2}이다.

정답_ $\frac{5}{2}$ m^2

635

직육면체의 겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이므로

$2(xy+yz+zx)=2$ $\quad\therefore xy+yz+zx=1$

직육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2\times y^2}=2xy$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.) $\cdots\cdots$ ㉠

$y^2+z^2\geq 2\sqrt{y^2\times z^2}=2yz$ (단, 등호는 $y=z$일 때 성립한다.) $\cdots\cdots$ ㉡

$z^2+x^2\geq 2\sqrt{z^2\times x^2}=2zx$ (단, 등호는 $z=x$일 때 성립한다.) $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 더하면

$2(x^2+y^2+z^2)\geq 2(xy+yz+zx)$

$\therefore x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx=1$

$\left(\text{단, 등호는 } x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geq 1$이므로 직육면체의 대각선의 길이의 최솟값은 1이다.

정답_ 1

636

직선 OP의 기울기가 $\frac{b}{a}$이므로 점 P(a, b)를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$y=-\frac{a}{b}(x-a)+b$ $\quad\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{a^2}{b}+b$

이 직선이 y축과 만나는 점이 Q이므로 Q$\left(0, b+\frac{a^2}{b}\right)$

따라서 삼각형 OQR의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left|-\frac{1}{a}\right|\times\left(b+\frac{a^2}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=1$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

따라서 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 1이다.

정답_ ②

637

a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+3^2)(a^2+b^2)\ge(a+3b)^2$

$a^2+b^2=10$이므로

$10\times10\ge(a+3b)^2$

$(a+3b)^2\le100$

$\therefore\ -10\le a+3b\le10$ $\left(\text{단, 등호는 } a=\dfrac{b}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\alpha=10$, $\beta=-10$이므로

$\alpha-\beta=10-(-10)=20$

정답_ ④

638

$x^2+y^2=17$이므로

$x^2+4x+y^2+y=4x+y+(x^2+y^2)=4x+y+17$ …… ㉠

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(4^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(4x+y)^2$

$17\times17\ge(4x+y)^2$

$(4x+y)^2\le289$

$\therefore\ -17\le4x+y\le17$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{4}=y\text{일 때 성립한다.}\right)$

㉠에서 $0\le4x+y+17\le34$

따라서 x^2+4x+y^2+y의 최댓값은 34이다.

정답_ 34

639

a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(2^2+1^2)\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\}\ge(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\therefore\ 5(a+b)\ge(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$a+b=5$이므로

$5\times5\ge(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\le25$

이때 $\sqrt{a}\ge0$, $\sqrt{b}\ge0$이므로

$0\le2\sqrt{a}+\sqrt{b}\le5$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{\sqrt{a}}{2}=\sqrt{b}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $2\sqrt{a}+\sqrt{b}$의 최댓값은 5이다.

정답_ ⑤

640

x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2\}(x^2+y^2+z^2)\ge(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y+\sqrt{5}z)^2$

$x^2+y^2+z^2=10$이므로

$10\times10\ge(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y+\sqrt{5}z)^2$

$(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y+\sqrt{5}z)^2\le100$

$\therefore\ -10\le\sqrt{2}x-\sqrt{3}y+\sqrt{5}z\le10$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{\sqrt{2}}=\dfrac{y}{-\sqrt{3}}=\dfrac{z}{\sqrt{5}}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\sqrt{2}x-\sqrt{3}y+\sqrt{5}z$의 최댓값은 10, 최솟값은 -10이므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$10\times(-10)=-100$

정답_ -100

641

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(3^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(3x+y)^2$ …… ㉠

$3x+y=10$이므로

$10(x^2+y^2)\ge100$ $\quad\therefore\ x^2+y^2\ge10$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 10이다.

㉠에서 등호는 $\dfrac{x}{3}=y$일 때 성립하므로 $x=3y$

이것을 $3x+y=10$에 대입하면

$9y+y=10$ $\quad\therefore\ y=1$

$y=1$을 $x=3y$에 대입하면 $x=3$

따라서 $m=10$, $\alpha=3$, $\beta=1$이므로

$m+\alpha+\beta=10+3+1=14$

정답_ 14

642

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$\left\{1^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}\{(3x)^2+(2y)^2\}\ge(3x-y)^2$

$3x-y=3$이므로 $\dfrac{5}{4}(9x^2+4y^2)\ge9$

$\therefore\ 9x^2+4y^2\ge\dfrac{36}{5}$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{3x}{1}=\dfrac{2y}{-\frac{1}{2}}\text{, 즉 } 3x=-4y\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $9x^2+4y^2$의 최솟값은 $\dfrac{36}{5}$이다.

정답_ $\dfrac{36}{5}$

643

$x+y+z=2$에서

$y+z=2-x$ …… ㉠

$x^2+y^2+z^2=4$에서

$y^2+z^2=4-x^2$ …… ㉡

이때 y, z는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(y^2+z^2)\ge(y+z)^2$ (단, 등호는 $y=z$일 때 성립한다.) …… ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$2(4-x^2)\ge(2-x)^2$, $3x^2-4x-4\le0$

$(3x+2)(x-2)\le0$ $\quad\therefore\ -\dfrac{2}{3}\le x\le2$

따라서 x의 최댓값은 2, 최솟값은 $-\dfrac{2}{3}$이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $2+\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$

정답_ $\dfrac{4}{3}$

다른 풀이

$x+y+z=2$에서 $y+z=2-x$ …… ㉠

$x^2+y^2+z^2=4$에서 $y^2+z^2=4-x^2$ …… ㉡

$(y+z)^2=y^2+z^2+2yz$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$(2-x)^2=(4-x^2)+2yz$

$\therefore\ yz=x^2-2x$ …… ㉢

y, z는 t에 대한 이차방정식 $t^2-(y+z)t+yz=0$의 두 실근이므로 ㉠, ㉡에서

$t^2-(2-x)t+x^2-2x=0$

이 이차방정식이 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=\{-(2-x)\}^2-4(x^2-2x)\geq 0$

$3x^2-4x-4\leq 0$, $(3x+2)(x-2)\leq 0$

$\therefore -\frac{2}{3}\leq x\leq 2$

따라서 x의 최댓값은 2, 최솟값은 $-\frac{2}{3}$이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $2+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

644

직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y, 높이를 z라고 하면 직육면체의 대각선의 길이가 $\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{3}$

$\therefore x^2+y^2+z^2=3$

x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2$

$3\times 3\geq(x+y+z)^2$

$(x+y+z)^2\leq 9$

이때 $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로

$0<x+y+z\leq 3$ (단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립한다.)

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(x+y+z)$이므로

$0<4(x+y+z)\leq 12$

따라서 구하는 최댓값은 12이다.

정답_ 12

645

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라고 하면 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 6이므로

$a+b+c=6$

$S_1=a^2$, $S_2=b^2$, $S_3=c^2$이므로

$S_1+S_2+S_3=a^2+b^2+c^2$

a, b, c가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$ …… ㉠

$3(a^2+b^2+c^2)\geq 36$

$\therefore a^2+b^2+c^2\geq 12$

따라서 $a^2+b^2+c^2$의 최솟값은 12이다.

㉠에서 등호는 $a=b=c$일 때 성립하고 $a+b+c=6$이므로

$a=b=c=2$

즉, $S_1+S_2+S_3$의 값이 최소가 될 때, 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 구하는 넓이는

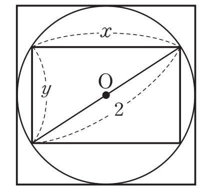
$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$

정답_ ③

646

원에 외접하는 정사각형의 한 변의 길이는 원의 지름의 길이인 2와 같으므로 정사각형의 둘레의 길이 S는

$S=4\times 2=8$



원에 내접하는 직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라고 하면 직사각형의 대각선의 길이는 원의 지름의 길이인 2이므로 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+y^2=4$

또, 직사각형의 둘레의 길이 T는

$T=2x+2y$

x, y는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(2^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(2x+2y)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=\frac{y}{2}\text{, 즉 } x=y\text{일 때 성립한다.}\right)$

$8\times 4\geq(2x+2y)^2$, $(2x+2y)^2\leq 32$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$0<2x+2y\leq 4\sqrt{2}$ $\quad\therefore \frac{1}{2x+2y}\geq\frac{1}{4\sqrt{2}}$

$\therefore \frac{S}{T}=\frac{8}{2x+2y}\geq\frac{8}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

(단, 등호는 $x=y=\sqrt{2}$일 때 성립한다.)

따라서 $\frac{S}{T}$의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

정답_ $\sqrt{2}$

647

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$이어야 한다. ❶

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $P=\{1, 2, 5, 10\}$이므로

$P^C=\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ ❷

따라서 전체집합 U의 부분집합 Q는 3, 4, 6, 7, 8, 9를 반드시 원소로 가져야 하므로 집합 Q의 개수는

$2^{10-6}=2^4=16$ ❸

정답_ 16

채점 기준	비율
❶ 두 집합 P^C, Q 사이의 포함 관계 파악하기	30 %
❷ 집합 P^C 구하기	30 %
❸ 집합 Q의 개수 구하기	40 %

648

주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-18x+k\geq 0$이다.' ❶

이차부등식 $x^2-18x+k\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-18x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-9)^2-k\leq 0$

$81-k\leq 0$ $\quad\therefore k\geq 81$ ❷

따라서 k의 최솟값은 81이다. ❸

정답_ 81

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 부정 구하기	40 %
❷ 실수 k의 값의 범위 구하기	50 %
❸ 실수 k의 최솟값 구하기	10 %

649

세 명제 $p \longrightarrow \sim s$, $q \longrightarrow s$, $\sim r \longrightarrow s$가 모두 참이므로 각각의 대우 $s \longrightarrow \sim p$, $\sim s \longrightarrow \sim q$, $\sim s \longrightarrow r$도 모두 참이다. ❶

이때 $p \longrightarrow \sim s$, $\sim s \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 $p \longrightarrow \sim q$도 참이고 그 대우인 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

또, $p \longrightarrow \sim s$, $\sim s \longrightarrow r$가 모두 참이므로 $p \longrightarrow r$도 참이고, 그 대우인 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다. ❷

따라서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 3개이다. ❸

정답_ 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우를 이용하여 참인 명제 구하기	30 %
❷ 주어진 명제와 삼단논법을 이용하여 참인 명제 구하기	50 %
❸ 항상 참인 명제의 개수 구하기	20 %

650

a, b는 양수이므로

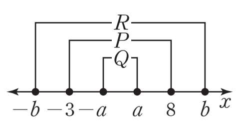
$|x| \le a$에서 $-a \le x \le a$

$|x| \le b$에서 $-b \le x \le b$ ❶

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하면 p가 q이기 위한 필요조건이고, p가 r이기 위한 충분조건이므로

$Q \subset P$, $P \subset R$

즉, $Q \subset P \subset R$이므로 오른쪽 그림에서



$-3 \le -a$, $a \le 8$, $-b \le -3$, $8 \le b$

$-3 \le -a$, $a \le 8$에서

$0 < a \le 3$ ($\because$ a는 양수)

즉, a의 최댓값은 3이다.

한편, $-b \le -3$, $8 \le b$에서

$b \ge 8$

즉, b의 최솟값은 8이다. ❷

따라서 a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은

$3+8=11$ ❸

정답_ 11

채점 기준	비율
❶ 조건 q, r를 절댓값이 없는 부등식으로 나타내기	30 %
❷ a의 최댓값과 b의 최솟값 구하기	50 %
❸ a의 최댓값과 b의 최솟값의 합 구하기	20 %

651

주어진 명제의 대우는

'$a \ne 0$ 또는 $b \ne 0$이면 $a^2+b^2 \ne 0$이다.' ❶

(i) $a \ne 0$이면

$a^2>0$이고 $b^2 \ge 0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2 \ne 0$이다.

(ii) $b \ne 0$이면

$a^2 \ge 0$이고 $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2 \ne 0$이다.

(i), (ii)에서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. ❷

정답_ 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우 구하기	30 %
❷ 주어진 명제가 참임을 증명하기	70 %

참고 주어진 명제는 귀류법을 이용하여 다음과 같이 증명할 수도 있다.
주어진 명제의 결론을 부정하면 $a \ne 0$ 또는 $b \ne 0$이다.
$a \ne 0$ 또는 $b \ne 0$이면 $a^2>0$ 또는 $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$이다.
그런데 이것은 $a^2+b^2=0$이라는 가정에 모순이다.
따라서 두 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

652

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{y+2z}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(2x+2y+2z)\left(\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{y+2z}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\{(2x+y)+(y+2z)\}\left(\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{y+2z}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2x+y}{y+2z}+\frac{y+2z}{2x+y}\right) \quad ❶$$

이때 $x>0$, $y>0$, $z>0$에서 $\dfrac{2x+y}{y+2z}>0$, $\dfrac{y+2z}{2x+y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2x+y}{y+2z}+\frac{y+2z}{2x+y} \ge 2\sqrt{\frac{2x+y}{y+2z}\times\frac{y+2z}{2x+y}}=2 \quad \cdots\cdots (*)$$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{2x+y}{y+2z}=\dfrac{y+2z}{2x+y}, \text{ 즉 } x=z\text{일 때 성립한다.}\right)$ ❷

$$\therefore (x+y+z)\left(\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{y+2z}\right) \ge \frac{1}{2}(2+2)=2$$

따라서 구하는 최솟값은 2이다. ❸

정답_ 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 식 변형하기	40 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\dfrac{2x+y}{y+2z}+\dfrac{y+2z}{2x+y}$의 범위 구하기	40 %
❸ 주어진 식의 최솟값 구하기	20 %

참고 ($*$)에서 등호가 성립하는 경우는 $\dfrac{2x+y}{x+2z}=\dfrac{y+2z}{2x+y}$일 때이므로
$(2x+y)^2=(y+2z)^2$, $4x^2+4xy+y^2=y^2+4yz+4z^2$
$4(x^2-z^2)+4y(x-z)=0$, $(x-z)(x+y+z)=0$
이때 $x+y+z>0$이므로 $x-z=0$ $\quad \therefore x=z$
따라서 ($*$)에서 등호가 성립하는 경우는 $x=z$일 때이다.

653

명제 'p이고 q이면 $\sim r$이다.'가 거짓임을 보이기 위해서는 $(P\cap Q) \not\subset R^C$임을 보이거나 주어진 명제의 대우 '$r$이면 $\sim p$ 또는 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이면 되므로 $R \not\subset (P^C \cup Q^C)$, 즉 $R \not\subset (P\cap Q)^C$임을 보이면 된다.

따라서 집합 R의 원소이지만 $(P\cap Q)^C$의 원소가 아닌 원소 x가 존재함을 보이면 된다.

이때 $(P\cap Q)^C$의 원소가 아니면 $P\cap Q$의 원소이므로 반례 x에 대한 명제 중에서 참인 것은 $x\in R$이고 $x\in(P\cap Q)$이다.

정답_ ③

654

ㄱ. [반례] p가 참이고 q가 거짓이면 $\sim q$는 참이므로

$<p>=1$, $<\sim q>=1$

이때 $(<p>-1)(<\sim q>-1)=0\times 0=0$이므로 p가 참이어도 q는 거짓일 수 있다.

ㄴ. q가 참이면 $\sim q$는 거짓이므로 $<\sim q>=0$

$(<p>-1)(<\sim q>-1)=0$에서

$-(<p>-1)=0$

따라서 $<p>=1$이므로 p는 참이다.

ㄷ. [반례] q가 거짓이고 p도 거짓이면

$<p>=0$, $<\sim q>=1$

따라서 $(<p>-1)(<\sim q>-1)=(-1)\times 0=0$이므로 q가 거짓이면 p도 거짓일 수 있다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

정답_ ㄴ

655

ㄱ. $a=0$일 때, p: $0\times(x-2)(x-4)<0$, 즉 $0<0$이므로 이 부등식을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

$\therefore P=\varnothing$ (참)

ㄴ. $a>0$, $b=0$일 때, $a(x-2)(x-4)<0$에서

$(x-2)(x-4)<0 \qquad \therefore 2<x<4$

따라서 $P=\{x|2<x<4\}$, $Q=\{x|x>0\}$이므로

$P\subset Q$ (참)

ㄷ. $a<0$, $b=5$일 때, $a(x-2)(x-4)<0$에서

$(x-2)(x-4)>0 \qquad \therefore x<2$ 또는 $x>4$

따라서 $P=\{x|x<2$ 또는 $x>4\}$이므로

$P^C=\{x|2\le x\le 4\}$, $Q=\{x|x>5\}$

$\therefore P^C\not\subset Q$

즉, 명제 '$\sim p$이면 q이다.'는 거짓이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ②

656

A와 D 중에서 한 명의 진술이 참이면 B와 C의 진술은 모두 거짓이 되어야 한다. 그런데 C의 진술이 거짓이면 B의 진술은 참이 되므로 모순이다.

따라서 B와 C 중에서 한 명의 진술이 참이다.

(i) B의 진술만이 참인 경우

A의 진술은 거짓이므로 B는 범인이 아니다.

B의 진술은 참이므로 C가 범인이다.

C의 진술은 거짓이므로 C가 범인이다.

D의 진술은 거짓이므로 D가 범인이다.

따라서 범인은 C, D가 된다. 이것은 범인이 1명이라는 사실에 모순이다.

(ii) C의 진술만이 참인 경우

A의 진술은 거짓이므로 B는 범인이 아니다.

B의 진술은 거짓이므로 C는 범인이 아니다.

C의 진술은 참이므로 C는 범인이 아니다.

D의 진술은 거짓이므로 D가 범인이다.

따라서 범인은 D이다.

(i), (ii)에서 범인은 D이다.

정답_ D

657

실수 전체의 집합을 U라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.

'모든 실수 x에 대하여 p이다.'가 참인 명제가 되려면 $P=U$이어야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2ax+1\ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-1\le 0$

$(a+1)(a-1)\le 0 \qquad \therefore -1\le a\le 1$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 -1, 0, 1이다.

한편, 'p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.'가 참인 명제가 되려면 $P\subset Q^C$이어야 한다. 이때 $P=U$이므로 $Q^C=U$이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2bx+9>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=b^2-9<0$

$(b+3)(b-3)<0 \qquad \therefore -3<b<3$

그러므로 조건을 만족시키는 정수 b는 -2, -1, 0, 1, 2이다.

따라서 구하는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3\times 5=15$

정답_ ①

658

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하자.

조건 p, q가 모두 r이기 위한 충분조건이므로 명제 $p \longrightarrow r$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이다.

또, 두 명제의 대우인 $\sim r \longrightarrow \sim p$, $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이므로

$R^C\subset P^C$, $R^C\subset Q^C$

$x^2+x-2=0$에서

$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$2x+b=0$에서 $x=-\frac{b}{2}$

따라서 $P^C=\{-2, 1\}$, $R^C=\left\{-\frac{b}{2}\right\}$이고 $R^C\subset P^C$이어야 하므로

$-\frac{b}{2}=-2$ 또는 $-\frac{b}{2}=1$

$\therefore b=4$ 또는 $b=-2$

한편, $R^C\subset Q^C$이므로 $-\frac{b}{2}\in Q^C$이어야 한다.

(i) $b=-2$일 때

$-\frac{b}{2}=1$이므로 $R^C=\{1\}$

따라서 $1\in Q^C$이어야 하므로 $x=1$이 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 한 근이어야 한다.

즉, $1-2+a=0$이므로 $a=1$

이때 이차방정식 $x^2-2x+1=0$에서

$(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

따라서 $Q^C=\{1\}$이고 $Q^C\subset R^C$이므로 q는 r이기 위한 필요충분조건이 된다.

(ⅱ) $b=4$일 때

$-\frac{b}{2}=-\frac{4}{2}=-2$이므로 $R^C=\{-2\}$

따라서 $-2\in Q^C$이어야 하므로

$x=-2$를 $x^2-2x+a=0$에 대입하면

$4+4+a=0$ $\quad\therefore a=-8$

이때 이차방정식 $x^2-2x-8=0$에서

$(x+2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 $Q^C=\{-2, 4\}$이므로 $Q^C\not\subset R^C$

그러므로 q는 r이기 위한 충분조건이고 필요조건은 아니다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-8$, $b=4$이므로

$a+b=-8+4=-4$

정답_ -4

659

a, b가 모두 홀수라고 가정하자.

방정식 $x^2+ax-b=0$의 정수인 해를 $x=m$이라고 하면

$m^2+am=b$

(ⅰ) m이 홀수일 때

m^2은 홀수, am은 두 홀수의 곱이므로 홀수이다.

따라서 m^2+am이 짝수이므로 b가 짝수이다.

즉, b가 홀수라는 가정에 모순이다.

(ⅱ) m이 짝수일 때

m^2은 짝수, am은 홀수와 짝수의 곱이므로 짝수이다.

따라서 m^2+am이 짝수이므로 b가 짝수이다.

즉, b가 홀수라는 가정에 모순이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 이차방정식 $x^2+ax-b=0$이 정수인 해를 가지면 a, b 중 적어도 하나는 짝수이다.

정답_ **풀이 참조**

660

이차방정식 $x^2-2ax+a-1=0$이 양수인 두 근을 가지므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(ⅰ) (두 근의 합)$=2a>0$ $\quad\therefore a>0$

(ⅱ) (두 근의 곱)$=a-1>0$ $\quad\therefore a>1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a>1$

이때 $a>1$에서 $a-1>0$, $\frac{3}{a-1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a-2+\frac{3}{a-1}=3(a-1)+\frac{3}{a-1}+1$$
$$\geq 2\sqrt{3(a-1)\times\frac{3}{a-1}}+1$$
$$=2\times3+1=7$$

$\left(\text{단, 등호는 } 3(a-1)=\frac{3}{a-1}\text{, 즉 } a=2\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $3a-2+\frac{3}{a-1}$의 최솟값은 7이다.

정답_ 7

참고 이차방정식 $x^2-2ax+a-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a-1)=a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

즉, 이 이차방정식은 a의 값에 관계없이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

661

텃밭의 가로, 세로의 길이를 각각 a m, b m라고 하면 텃밭의 넓이가 100 m^2이므로

$ab=100$

자전거 도로의 경계에 있지 않은 울타리는 가로와 세로로 각각 1개씩, 자전거 도로의 경계에 있는 울타리는 세로로 1개가 있으므로 텃밭에 울타리를 만드는 데 필요한 총 비용은

$a\times5+b\times5+b\times15=5a+20b$ (만 원)

이때 $5a>0$, $20b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5a+20b\geq2\sqrt{5a\times20b}=2\sqrt{100ab}$

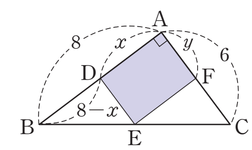
$=2\sqrt{10000}=200$

(단, 등호는 $5a=20b$, 즉 $a=20$, $b=5$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최소 비용은 200만 원이다.

정답_ ③

662



오른쪽 그림과 같이 점 D, E, F를 잡고 $\overline{AD}=x$, $\overline{AF}=y$라고 하면 직사각형 ADEF의 넓이는 xy이다.

한편, $\angle BAC=\angle BDE=90°$, $\angle B$는 공통이므로 $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$ (AA 닮음)

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{DB}:\overline{DE}$에서

$8:6=(8-x):y$, $8y=6(8-x)$

$\therefore 3x+4y=24$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x+4y\geq2\sqrt{3x\times4y}=2\sqrt{12xy}$

$24\geq4\sqrt{3xy}$, $\sqrt{3xy}\leq6$

양변을 제곱하면

$3xy\leq36$ $\quad\therefore xy\leq12$

(단, 등호는 $3x=4y$, 즉 $x=4$, $y=3$일 때 성립한다.)

따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 12이다.

정답_ 12

663

(ⅰ) $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\geq2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

그런데 $a^2+b^2=16$이므로 $16\geq2ab$

$\therefore 0<ab\leq8$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.) …… ㉠

$c>0$, $d>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$c^2+d^2\geq2\sqrt{c^2d^2}=2cd$

그런데 $c^2+d^2=4$이므로 $4\geq2cd$

$\therefore 0<cd\leq2$ (단, 등호는 $c=d$일 때 성립한다.) …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<ab+cd\leq10$

따라서 $ab+cd$의 최댓값은 10이므로

$\alpha=10$

(ⅱ) a, b, c, d가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$

그런데 $a^2+b^2=16$, $c^2+d^2=4$이므로

$64\geq(ac+bd)^2$

$\therefore 0 < ac+bd \le 8$ (단, 등호는 $ad=bc$일 때 성립한다.)
따라서 $ac+bd$의 최댓값은 8이므로
$\beta=8$
(i), (ii)에서 $\alpha+\beta=10+8=18$

정답_ ④

664

△ABC가 직각이등변삼각형이므로 △AED, △DFC도 직각이등변삼각형이다.
$\overline{\mathrm{ED}}=a$, $\overline{\mathrm{FC}}=b$라고 하면 $a+b=1$
따라서 $S_1=\frac{1}{2}a^2$, $S_2=\frac{1}{2}b^2$이므로

$$2(S_1+S_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)+4$$
$$=2\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}\right)+4$$
$$=a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4$$
$$=\left(a^2+\frac{1}{a^2}+2\right)+\left(b^2+\frac{1}{b^2}+2\right)$$
$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$$

이때 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\}\ge\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}^2$$
$$\therefore 2\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\}\ge\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}^2$$

$\left(\text{단, 등호는 } a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}\text{일 때 성립한다.}\right)$

한편, $a+b=1$이므로

$$a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}=1+\frac{a+b}{ab}=1+\frac{1}{ab}$$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b\ge 2\sqrt{ab},\ \frac{1}{2}\ge\sqrt{ab}$$

양변을 제곱하면

$\frac{1}{4}\ge ab \quad \therefore \frac{1}{ab}\ge 4$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

따라서 $1+\frac{1}{ab}\ge 5$이므로

$$2\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\}\ge\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}^2$$
$$=\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2\ge 5^2$$
$$\therefore \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge\frac{25}{2}$$
$$\therefore 2(S_1+S_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)+4=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge\frac{25}{2}$$

$\left(\text{단, 등호는 } a=b=\frac{1}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{25}{2}$이다.

정답_ $\frac{25}{2}$

참고 주어진 식이 최솟값을 갖는 경우는 $a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}$, $a=b$일 때이므로
$a=b$
그런데 $a+b=1$이므로 $a=b=\frac{1}{2}$

Ⅲ 함수와 그래프

08 함수

665

① 집합 X의 원소 2에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
⑤ 집합 X의 원소 3에 대응하는 집합 Y의 원소가 b, c의 2개이므로 함수가 아니다.
따라서 집합 X에서 집합 Y로의 함수가 아닌 것은 ①, ⑤이다.

정답_ ①, ⑤

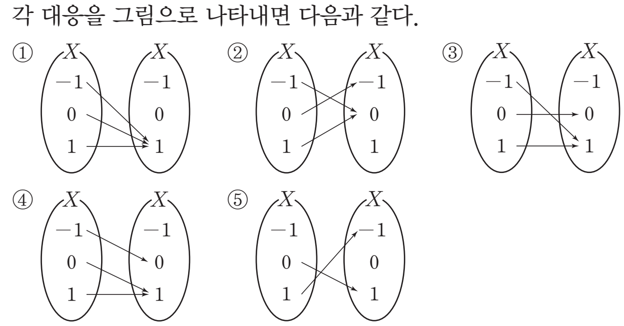
666

①, ②, ④, ⑤ y축 또는 y축과 평행한 직선이 그래프와 항상 한 점에서만 만나는 것은 아니므로 함수의 그래프가 아니다.
③ y축 또는 y축과 평행한 직선이 그래프와 항상 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.
따라서 함수의 그래프인 것은 ③이다.

정답_ ③

667

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이때 ⑤는 X의 원소 -1에 대응하는 X의 원소가 없으므로 X에서 X로의 함수가 아니다.

정답_ ⑤

668

ㄱ. $0\le x\le 2$에서 $-6\le -3x\le 0 \quad \therefore -6\le f(x)\le 0$
$\therefore \{f(x)\,|\,x\in X\}\not\subset Y$
ㄴ. $0\le x\le 2$에서 $-1\le x-1\le 1 \quad \therefore -1\le f(x)\le 1$
$\therefore \{f(x)\,|\,x\in X\}\subset Y$
ㄷ. $0\le x\le 2$에서 $0\le x^2\le 4$
$3\le x^2+3\le 7 \quad \therefore 3\le f(x)\le 7$
$\therefore \{f(x)\,|\,x\in X\}\not\subset Y$
ㄹ. $0\le x\le 2$에서 $0\le |x|\le 2$
$-1\le |x|-1\le 1 \quad \therefore -1\le f(x)\le 1$
$\therefore \{f(x)\,|\,x\in X\}\subset Y$
따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

정답_ ㄴ, ㄹ

669

$\frac{x+1}{2}=-2$에서

$x+1=-4 \qquad \therefore x=-5$

$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=3x-2$에 $x=-5$를 대입하면

$f(-2)=3\times(-5)-2=-17$

정답_ -17

다른 풀이

$\frac{x+1}{2}=t$로 놓으면 $x=2t-1$

이것을 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=3x-2$에 대입하면

$f(t)=3(2t-1)-2=6t-5$

$\therefore f(-2)=6\times(-2)-5=-17$

670

$f(3)=3-1=2$

$f(15)=f(15-3)=f(12)=f(12-3)$
$\quad=f(9)=f(9-3)=f(6)=f(6-3)$
$\quad=f(3)=2$

$\therefore f(3)+f(15)=2+2=4$

정답_ 4

671

$3x+1=4$에서 $x=1$

$g(3x+1)=f(x-4)$에 $x=1$을 대입하면

$g(4)=f(1-4)=f(-3)$
$\quad=(-3)^2-(-3)-1$
$\quad=9+3-1=11$

정답_ ③

다른 풀이

$f(x)=x^2-x-1$에서

$f(x-4)=(x-4)^2-(x-4)-1$
$\quad=x^2-8x+16-x+4-1$
$\quad=x^2-9x+19$

즉, $g(3x+1)=f(x-4)=x^2-9x+19$이고

$3x+1=4$에서 $x=1$이므로

$g(4)=1^2-9\times1+19=11$

672

(i) x가 유리수일 때, $1-x$도 유리수이므로
$f(x)+f(1-x)=1-x+1-(1-x)=1$

(ii) x가 무리수일 때, $1-x$도 무리수이므로
$f(x)+f(1-x)=x+1-x=1$

(i), (ii)에서 $f(x)+f(1-x)=1$

정답_ ③

673

$2\times1^2=2,\ 2\times2^2=8,\ 2\times3^2=18,\ 2\times4^2=32,\ 2\times5^2=50$이므로

$f(1)=2,\ f(2)=8,\ f(3)=8,\ f(4)=2,\ f(5)=0$

$f(1)=f(4)=2$이므로 $a=1$ 또는 $a=4$

$f(2)=f(3)=8$이므로 $b=2$ 또는 $b=3$

이때 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3)$이므로 $a+b$의 값은 각각 3, 4, 6, 7이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 7이다.

정답_ ③

674

$f(xy)=f(x)+f(y)$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=3,\ y=3$을 대입하면

$f(9)=f(3)+f(3)=1+1=2$

㉠의 양변에 $x=3,\ y=9$를 대입하면

$f(27)=f(3)+f(9)=1+2=3$

정답_ ③

675

$2f(x)-f(2-x)=6x$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)-f(1)=6 \qquad \therefore f(1)=6$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2f(0)-f(2)=0$ ...... ㉡

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f(2)-f(0)=12$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$f(0)=4,\ f(2)=8$

$\therefore f(0)+f(1)=4+6=10$

정답_ 10

676

(가)에 의하여

$f(2)=2,\ f(5)=5$

(나)에 의하여

$f(10)=f(2\times5)=f(2)+f(5)=2+5=7$

$\therefore f(100)=f(10\times10)=f(10)+f(10)$
$\quad=2f(10)=2\times7=14$

정답_ ⑤

677

① 주어진 등식의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)f(0) \qquad \therefore f(0)=1\ (\because f(x)>0)$

② 주어진 등식의 양변에 $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$을 대입하면
$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2$
$f(1)=4$이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\ (\because f(x)>0)$

③ $f(2)=f(1+1)=f(1)f(1)=4\times4=16$
$f(3)=f(1+2)=f(1)f(2)=4\times16=64$

④ $f(x)=f((x-y)+y)=f(x-y)f(y)$
$\therefore f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}\ (\because f(y)>0)$

⑤ $f(2x)=f(x+x)=f(x)f(x)=\{f(x)\}^2$

$f(3x)=f(x+2x)=f(x)f(2x)=f(x)\{f(x)\}^2=\{f(x)\}^3$

$f(4x)=f(x+3x)=f(x)f(3x)=f(x)\{f(x)\}^3=\{f(x)\}^4$

$\vdots$

$f(10x)=\{f(x)\}^{10}$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

정답_ ②

678

ㄱ. $f(a+b)=f(a)+f(b)$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$ (참)

ㄴ. $f(a+b)=f(a)+f(b)$의 양변에 $a=1$, $b=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)+f(1)=2+2=4$

$f(a+b)=f(a)+f(b)$의 양변에 $a=1$, $b=2$를 대입하면

$f(3)=f(1)+f(2)=2+4=6$

$\therefore f(2)+f(3)=4+6=10$ (거짓)

ㄷ. $f(2a)=f(a+a)=f(a)+f(a)=2f(a)$

$f(3a)=f(a+2a)=f(a)+f(2a)=f(a)+2f(a)=3f(a)$

$f(4a)=f(a+3a)=f(a)+f(3a)=f(a)+3f(a)=4f(a)$

$\vdots$

$\therefore f(na)=f(a+(n-1)a)=f(a)+f((n-1)a)$

$=f(a)+(n-1)f(a)=nf(a)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

679

④ 함수의 치역은 항상 공역의 부분집합이므로 $Z\subset Y$이다.

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

정답_ ④

680

$a<0$이므로 함수 $y=ax+2$는 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다. 즉, $f(-2)=b$, $f(2)=0$이므로

$-2a+2=b$, $2a+2=0$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로

$a+b=(-1)+4=3$

정답_ ⑤

681

$f(-1)=k+2$, $f(0)=2$, $f(1)=k+2$, $f(2)=4k+2$이므로 치역은 $\{k+2, 2, 4k+2\}$

$k=0$이면 $k+2$, 2, $4k+2$의 값은 모두 2이므로 치역은 $\{2\}$이다.

그런데 치역이 $\{2\}$이면 치역의 모든 원소의 합이 2가 되어 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore k\neq 0$

이때 $k+2$, 2, $4k+2$의 값이 모두 다르고, 치역의 모든 원소의 합이 16이므로

$(k+2)+2+(4k+2)=16$

$5k=10$ $\quad\therefore k=2$

정답_ 2

682

$7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=343$, $7^4=2401$, $7^5=16807$, $\cdots$이므로

$f(1)=7$, $f(2)=9$, $f(3)=3$, $f(4)=1$, $f(5)=7$, $\cdots$

즉, 함숫값이 7, 9, 3, 1의 순서로 반복되므로 함수 f의 치역은 $\{1, 3, 7, 9\}$

따라서 치역의 모든 원소의 합은

$1+3+7+9=20$

정답_ 20

683

① $f(-1)=-1$, $g(-1)=1$이므로

$f(-1)\neq g(-1)$ $\quad\therefore f\neq g$

② $f(-1)=-1$, $g(-1)=1$이므로

$f(-1)\neq g(-1)$ $\quad\therefore f\neq g$

③ $f(-1)=g(-1)=1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$

$\therefore f=g$

④ $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$

$\therefore f=g$

⑤ $f(1)=1$, $g(1)=0$이므로

$f(1)\neq g(1)$ $\quad\therefore f\neq g$

따라서 $f=g$인 것은 ③, ④이다.

정답_ ③, ④

684

$f(2)=g(2)$에서

$4+4-2=2+b$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore g(x)=x+4$

$f(a)=g(a)$에서

$a^2+2a-2=a+4$, $a^2+a-6=0$

$(a-2)(a+3)=0$ $\quad\therefore a=-3$ ($\because a\neq 2$)

$\therefore X=\{-3, 2\}$

이때 $g(-3)=1$, $g(2)=6$이므로 함수 g의 치역은 $\{1, 6\}$이다.

정답_ $\{1, 6\}$

685

$f(x)=g(x)$에서

$x^3-2x^2+3=x+1$, $x^3-2x^2-x+2=0$

$x^2(x-2)-(x-2)=0$, $(x-2)(x^2-1)=0$

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 집합 X는 집합 $\{-1, 1, 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^3-1=7$

정답_ ③

686

두 함수 f, g가 서로 같으므로 $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$이어야 한다.

이때 $f(0)=3$, $f(1)=1$, $f(2)=3$이고

$g(0)=a+b$, $g(1)=b$, $g(2)=a+b$이므로

$a+b=3$, $b=1$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore 2a-b=2\times 2-1=3$

정답_ ④

687

치역에 속하는 임의의 실수 k에 대하여 y축에 수직인 직선 $y=k$를 그었을 때, 그래프와 한 점에서 만나면 일대일함수, 일대일함수이면서 (치역)=(공역), 즉 치역이 실수 전체의 집합이면 그 함수는 일대일대응이다.

따라서 일대일함수의 그래프는 ㄴ, ㄷ, ㅂ의 3개, 일대일대응의 그래프는 ㄴ, ㅂ의 2개이므로

$a=3$, $b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$

정답_ 5

688

① $f(1)=f(3)=1$이므로 $f(x)=|x-2|$는 일대일대응이 아니다.

② $f(0)=f(2)=4$이므로 $f(x)=(x-1)^2+3$은 일대일대응이 아니다.

③ $f(1)=f(2)=7$이므로 $f(x)=7$은 일대일대응이 아니다.

④ $f(0)=f(0.1)=0$이므로 $f(x)=[x]$는 일대일대응이 아니다.

⑤ 치역과 공역이 실수 전체의 집합이고 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2) \neq 0$

즉, $f(x_1) \neq f(x_2)$이므로 $f(x)=x^3$은 일대일대응이다.

따라서 일대일대응인 것은 ⑤이다.

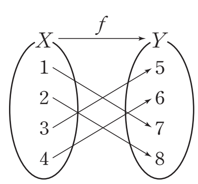
정답_ ⑤

689

$f(2)-f(3)=3$에서

$f(2)=8$, $f(3)=5$

함수 f가 일대일대응이므로 함수 f의 대응 관계를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



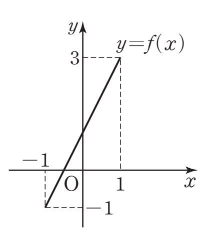
따라서 $f(4)=6$이므로

$f(3)+f(4)=5+6=11$

정답_ ①

690

$a>0$이고 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $f(-1)=-1$, $f(1)=3$이므로

$-a+b=-1$, $a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

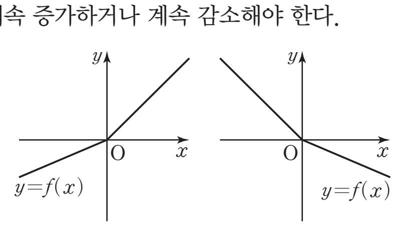
$a=2$, $b=1$

$\therefore ab=2\times1=2$

정답_ 2

691

함수 f가 일대일대응이 되려면 다음 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 계속 증가하거나 계속 감소해야 한다.



따라서 두 직선 $y=(a-5)x$, $y=(1-a)x$의 기울기가 모두 양수이거나 모두 음수이어야 한다.

즉, 두 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$(a-5)(1-a)>0$, $(a-1)(a-5)<0$

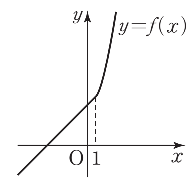
$\therefore 1<a<5$

따라서 정수 a는 2, 3, 4의 3개이다.

정답_ ③

692

함수 f가 일대일대응이 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 두 함수 $y=ax+5$, $y=x^2+b$의 그래프가 $x=1$에서 만나야 하므로

$a+5=1+b$　　$\therefore a=b-4$

(ii) 직선 $y=ax+5$의 기울기가 양수이어야 하므로

$a>0$

(i), (ii)에서 $b-4>0$　　$\therefore b>4$

따라서 자연수 b의 최솟값은 5이다.

정답_ ⑤

693

$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$이므로 $x\geq3$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 함수 f가 일대일대응이려면 함수 f의 치역이 $\{y|y\geq0\}$이어야 하므로

$f(3)=0$

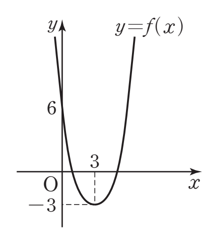
즉, $9+6+k=0$이므로 $k=-15$

정답_ −15

694

$f(x)=x^2-6x+6=(x-3)^2-3$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 함수 f가 일대일대응이 되려면 $x\geq k$일 때, x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가해야 하므로



$k\geq3$　　⋯⋯ ㉠

또, 함수 f의 치역이 $\{y|y\geq k\}$이어야 하므로

$f(k)=k$

즉, $k^2-6k+6=k$이므로

$k^2-7k+6=0$, $(k-1)(k-6)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=6$　　⋯⋯ ㉡

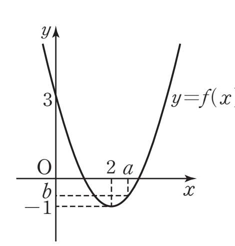
㉠, ㉡에서 $k=6$

정답_ 6

695

$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

함수 f가 일대일대응이 되려면 $x\geq a$일 때, x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가해야 하므로



$a\geq2$

또, 함수 f의 치역이 $\{y|y\geq b\}$이어야

하므로 $f(a)=b$

$\therefore a-b=a-f(a)$

$=a-(a^2-4a+3)$

$=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$

따라서 $a-b$의 최댓값은 $a=\frac{5}{2}$일 때 $\frac{13}{4}$이므로

$p=4$, $q=13$

$\therefore p+q=4+13=17$

정답_ 17

696

$f(x)=-x^2+2ax-b=-(x-a)^2+a^2-b$

이므로 $0\le x\le 1$에서 $f(x)$의 값이 항상 증가하거나 항상 감소하려면 $a\le 0$ 또는 $a>1$ ($\because a\ne 1$)이어야 한다.

(i) $a\le 0$일 때

함수 f가 일대일대응이려면 $f(0)=1$, $f(1)=0$이어야 하므로

$-b=1$, $-1+2a-b=0$

$\therefore a=0$, $b=-1$

(ii) $a>1$일 때

함수 f가 일대일대응이려면 $f(0)=0$, $f(1)=1$이어야 하므로

$-b=0$, $-1+2a-b=1$

$\therefore a=1$, $b=0$

그런데 $a>1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=0$, $b=-1$이므로

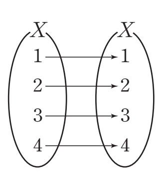
$a+b=0+(-1)=-1$

정답_ ②

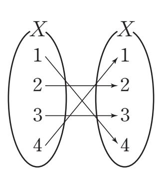
697

주어진 함수의 그래프를 이용하여 각 함수의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

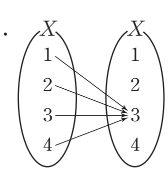
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



(1) 항등함수인 것은 ㄱ이다.

(2) 상수함수인 것은 ㄷ이다.

정답_ (1) ㄱ (2) ㄷ

698

① $f(-1)=1$이므로 항등함수가 아니다.

② $g(-1)=(-1)^2=1$이므로 항등함수가 아니다.

③ $h(-1)=-(-1)=1$이므로 항등함수가 아니다.

④ $i(-1)=(-1)^3=-1$, $i(0)=0$, $i(1)=1$이므로 항등함수이다.

⑤ $j(-1)=|-1|=1$이므로 항등함수가 아니다.

따라서 항등함수인 것은 ④이다.

정답_ ④

699

$f(x)$가 항등함수이므로

$f(x)=x$ $\quad\therefore f(5)=5$

$f(3)=3$, $f(3)+g(3)=5$이므로

$3+g(3)=5$ $\quad\therefore g(3)=2$

$g(x)$가 상수함수이고, $g(3)=2$이므로

$g(x)=2$ $\quad\therefore g(5)=2$

$\therefore f(5)+g(5)=5+2=7$

정답_ ②

700

$f(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=x$

즉, $x^2-6=x$이므로

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 집합 X는 $\{-2, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^2-1=3$

정답_ 3

701

$f(0)=2$이고 함수 f는 상수함수이므로 $f(x)=2$

$f(2)=4+2a+b=2$

$\therefore 2a+b=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(4)=16+4a+b=2$

$\therefore 4a+b=-14$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=10$

$\therefore a+b=-6+10=4$

정답_ ④

702

조건 (가)에서 함수 f가 항등함수이므로 $f(x)=x$

또, 함수 g는 상수함수이므로 $g(x)=k$ ($k\in X$인 상수)로 놓으면

조건 (나)에 의하여

$f(1)+g(1)+h(1)=11$

즉, $1+k+h(1)=11$이므로

$h(1)=10-k$

$\therefore g(7)+h(1)=k+(10-k)=10$

정답_ 10

다른 풀이

조건 (가)에서 함수 f가 항등함수이므로 $f(x)=x$

조건 (나)에서 $f(x)+g(x)+h(x)=11$이므로

$f(9)+g(9)+h(9)=9+g(9)+h(9)=11$

$\therefore g(9)+h(9)=2$

이때 $g(9)+h(9)=2$를 만족시키는 경우는 $g(9)=1$, $h(9)=1$일 때 뿐이다.

조건 (가)에서 함수 g가 상수함수이므로 $g(x)=1$

또, $f(1)+g(1)+h(1)=1+1+h(1)=11$이므로

$h(1)=9$

$\therefore g(7)+h(1)=1+9=10$

703

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의

함수의 개수는 $4^4=256$

일대일대응의 개수는 $4!=24$

항등함수의 개수는 1

상수함수의 개수는 4

따라서 $a=256$, $b=24$, $c=1$, $d=4$이므로

$a+b+c+d=256+24+1+4=285$

정답_ 285

704

구하는 함수의 개수는 X에서 Y로의 함수의 개수에서 치역이 $\{a\}$ 또는 $\{b\}$인 함수의 개수를 빼면 되므로

$2^4-2=16-2=14$

정답_ 14

705

$\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\}\neq 0$에서 $f(-1)\neq -1$, $f(1)\neq 1$이므로

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1의 2개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0, 1의 3개

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0의 2개

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2\times3\times2=12$

정답_ ②

706

집합 Y의 원소의 개수를 m $(m\geq 3)$이라고 하면 집합 $X=\{a, b, c\}$에서 집합 Y로의 일대일함수의 개수가 24이므로

${}_m\mathrm{P}_3=m(m-1)(m-2)=24=4\times3\times2$

$\therefore m=4$

따라서 집합 Y의 원소의 개수는 4이므로 구하는 함수의 개수는

$4^3=64$

정답_ 64

707

조건 (가)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=10$

조건 (나)에 의하여 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값이 될 수 있는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$10\times10=100$

정답_ 100

708

조건 (나)에 의하여 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) x가 홀수일 때

$x+f(x)$가 짝수이려면 $f(x)$가 홀수이어야 하고 조건 (가)에 의하여 f가 일대일대응이므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(9)$는 1, 3, 9에 일대일로 대응해야 한다.

즉, 그 경우의 수는 $3!=6$

(ii) x가 짝수일 때

$x+f(x)$가 짝수이려면 $f(x)$가 짝수이어야 하고 조건 (가)에 의하여 f가 일대일대응이므로 $f(2)$, $f(6)$, $f(18)$은 2, 6, 18에 일대일로 대응해야 한다.

즉, 그 경우의 수는 $3!=6$

(i), (ii)에서 함수 f의 개수는

$6\times6=36$

정답_ 36

709

조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이다.

한편, 조건 (나)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로

$f(0)=-f(0)\qquad\therefore f(0)=0$

따라서 $f(0)$의 값은 0의 1개이다.

$f(-3)$의 값이 될 수 있는 수는 X의 원소 중 0을 제외한 6개이고, 이때 $f(3)$의 값은 $-f(-3)$으로 정해진다.

$f(-2)$의 값이 될 수 있는 수는 X의 원소 중 0, $f(-3)$, $f(3)$의 값을 제외한 4개이고, 이때 $f(2)$의 값은 $-f(-2)$로 정해진다.

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 수는 X의 원소 중 0, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 2개이고, 이때 $f(1)$의 값은 $-f(-1)$로 정해진다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$1\times6\times4\times2=48$

정답_ 48

710

$f(3)=3\times3-2=7$이므로

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(7)=3\times7-2=19$

정답_ ③

711

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(4)=3$

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(2)=5$

$\therefore (g\circ f)(3)-(f\circ g)(3)=3-5=-2$

정답_ -2

712

$$\begin{aligned}(g\circ f)(1)+(f\circ g)(1)&=g(f(1))+f(g(1))\\&=g(3)+f(-2)\\&=0+2=2\end{aligned}$$

정답_ ②

713

$((f \circ g) \circ g)(a) = (f \circ (g \circ g))(a)$

$= f((g \circ g)(a))$

$= f(3a-1)$

$= 2(3a-1)+1$

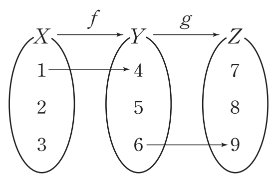
$= 6a-1$

즉, $6a-1=a$이므로 $a=\frac{1}{5}$

정답_ ①

714

조건 ㈎에 의하여 두 함수 f, g가 일대일대응이고, 조건 ㈏에 의하여 $f(1)=4$, $g(6)=9$이므로 두 함수 f, g의 대응 관계를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.



또, $(g \circ f)(2)=7$이므로 위의 그림에서 X의 원소 2에 대응하는 Z의 원소는 7이다.

f가 일대일대응이므로 $f(2)=5$ 또는 $f(2)=6$

그런데 $f(2)=6$이면 $(g \circ f)(2)=g(6)=9$이므로 $(g \circ f)(2)=7$이라는 조건에 모순이다.

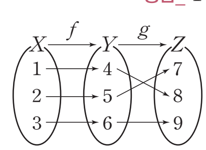
$\therefore f(2)=5$

또, 함수 f는 일대일대응이므로 $f(3)=6$

$\therefore f(3)-f(2)=6-5=1$

정답_ 1

참고 주어진 조건을 만족시키도록 두 함수 f, g의 대응 관계를 나타내면 다음 그림과 같다.



715

함수 g가 항등함수이므로 $g(x)=x$

조건 ㈎의 $(f \circ g)(-1)=g(0)$에서 $f(g(-1))=g(0)$

$\therefore f(-1)=0$

또, $(h \circ g)(1)=g(0)$에서 $h(g(1))=g(0)$

$\therefore h(1)=0$

함수 h는 상수함수이므로 $h(x)=0$

조건 ㈏에서 $(h \circ h)(0)+g(-1)=(f \circ h)(-1)$이므로

$h(h(0))+g(-1)=f(h(1))$

$h(0)-1=f(0) \qquad \therefore f(0)=-1$

함수 f는 일대일대응이고 $f(-1)=0$, $f(0)=-1$이므로

$f(1)=1$

정답_ 1

716

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+k)$

$=2(-x+k)+k=-2x+3k$

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+k)$

$=-(2x+k)+k=-2x$

$(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$이므로

$-2x+3k=-2x \qquad \therefore k=0$

정답_ ①

717

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=2(ax+b)-3=2ax+2b-3$

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=a(2x-3)+b=2ax-3a+b$

$(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$이므로

$2ax+2b-3=2ax-3a+b$

$2b-3=-3a+b \qquad \therefore b=-3a+3$

따라서 $g(x)=ax+b=ax-3a+3=a(x-3)+3$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 점 $(3, 3)$을 지난다.

정답_ $(3, 3)$

718

$2\times0=0$, $2\times1=2$, $2\times2=4$, $2\times3=6$, $2\times4=8$이므로

$f(0)=0$, $f(1)=2$, $f(2)=4$, $f(3)=1$, $f(4)=3$

$(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$이므로

$f(g(x))=g(f(x))$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(g(2))=g(f(2))$, $f(3)=g(4)$ ($\because g(2)=3$)

$\therefore g(4)=1$

㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면

$f(g(4))=g(f(4))$, $f(1)=g(3)$

$\therefore g(3)=2$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(g(3))=g(f(3))$, $f(2)=g(1)$

$\therefore g(1)=4$

정답_ 4

719

$(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$

$=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

즉, $a^2x+ab+b=4x+6$이므로

$a^2=4$, $ab+b=6$

$\therefore a=2$, $b=2$ ($\because a>0$)

따라서 $f(x)=2x+2$이므로

$f(3)=2\times3+2=8$

정답_ ④

720

$(f \circ f \circ f)(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$(f \circ f \circ f)(2)=f(f(f(2)))=f(f(3))=f(8)=63$

정답_ ④

참고 나머지 정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라고 하면 $R=P(a)$

721

$f(x)=x^2-2x+a$에서

$f(2)=4-4+a=a$, $f(4)=16-8+a=a+8$

$(f \circ f)(2)=(f \circ f)(4)$에서

$f(f(2))=f(f(4))$, $f(a)=f(a+8)$

$a^2-2a+a=(a+8)^2-2(a+8)+a$

$-16a=48 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=x^2-2x-3$이므로

$f(6)=36-12-3=21$

정답_ ①

다른 풀이

$f(x)=x^2-2x+a$에서

$f(2)=4-4+a=a$, $f(4)=16-8+a=a+8$

$(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$에서

$f(f(2))=f(f(4))$, $f(a)=f(a+8)$

이때 함수 $f(x)=x^2-2x+a$에서

$f(x)=(x-1)^2+a-1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 축이 직선 $x=1$이므로 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

$a\neq a+8$이므로 $f(a)=f(a+8)$이려면

$\dfrac{a+(a+8)}{2}=1$이어야 한다.

$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=x^2-2x-3$이므로

$f(6)=36-12-3=21$

722

$$g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-2x+k)$$
$$=-2(-2x+k)+k=4x-k$$

함수 $g(x)$는 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값도 증가하므로

$-1\le x\le 3$에서 함수 $g(x)$는 $x=3$일 때 최댓값을 갖는다.

이때 최댓값이 9이므로 $g(3)=9$에서

$12-k=9 \qquad \therefore k=3$

$\therefore g(x)=4x-3$

$-1\le x\le 3$에서 함수 $g(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$g(-1)=-4-3=-7$

정답_ -7

723

$(f\circ g)(x)=h(x)$에서 $f(g(x))=h(x)$이므로

$2g(x)+3=4x^2-1$, $2g(x)=4x^2-4$

$\therefore g(x)=2x^2-2$

정답_ ③

724

$(f\circ g)(x)=h(x)$에서 $f(g(x))=h(x)$이므로

$f(3x-2)=x+1$ …… ㉠

$3x-2=7$에서 $3x=9 \qquad \therefore x=3$

$x=3$을 ㉠의 양변에 대입하면

$f(7)=3+1=4$

정답_ ①

725

$$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))$$
$$=2f(x)-3$$

$(h\circ(g\circ f))(x)=-x+5$이므로

$2f(x)-3=-x+5$, $2f(x)=-x+8$

$\therefore f(x)=-\dfrac{1}{2}x+4$

$\therefore f(4)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 4+4=2$

정답_ ②

726

$f^1(1)=f(1)=1+1=2$

$f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=2+1=3$

$f^3(1)=(f\circ f\circ f)(1)=f(f^2(1))=f(3)=3+1=4$

$\vdots$

따라서 $f^n(1)=n+1$이므로

$f^{50}(1)=50+1=51$

정답_ ⑤

727

$f_1(2)=f(2)=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$$f_2(2)=(f\circ f)(2)=f(f(2))$$
$$=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}=-1$$

$$f_3(2)=(f\circ f\circ f)(2)=(f\circ f_2)(2)=f(f_2(2))$$
$$=f(-1)=\frac{-1-1}{-1}=2$$

$$f_4(2)=(f\circ f\circ f\circ f)(2)=(f\circ f_3)(2)=f(f_3(2))$$
$$=f(2)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\vdots$

즉, $f_n(2)$의 값은 $\dfrac{1}{2}$, -1, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $1002=3\times 334$이므로

$f_{1002}(2)=f_3(2)=2$

정답_ ④

728

$f^1(100)=f(100)=\dfrac{100}{2}=50$

$f^2(100)=(f\circ f)(100)=f(f(100))=f(50)=\dfrac{50}{2}=25$

$f^3(100)=(f\circ f^2)(100)=f(f^2(100))=f(25)=\dfrac{25-3}{2}=11$

$f^4(100)=(f\circ f^3)(100)=f(f^3(100))=f(11)=\dfrac{11-3}{2}=4$

$f^5(100)=(f\circ f^4)(100)=f(f^4(100))=f(4)=\dfrac{4}{2}=2$

$f^6(100)=(f\circ f^5)(100)=f(f^5(100))=f(2)=\dfrac{2}{2}=1$

$\therefore n=6$

정답_ 6

729

$f(x)=\begin{cases} x+1 & (0\le x<1) \\ x-1 & (1\le x\le 2)\end{cases}$이고 $f^{n+1}=f^n\circ f=f\circ f^n$이므로

$f^1\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

$f^2\left(\frac{1}{2}\right)=(f\circ f)\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

$f^3\left(\frac{1}{2}\right)=(f\circ f^2)\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

$f^4\left(\frac{1}{2}\right)=(f\circ f^3)\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^3\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

⋮

$\therefore f^n\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\frac{3}{2} & (n\text{은 홀수})\\ \frac{1}{2} & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

$\therefore f^1\left(\frac{1}{2}\right)+f^2\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+f^{100}\left(\frac{1}{2}\right)$

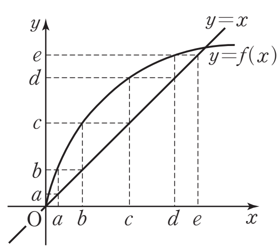
$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$

$=50\times\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=50\times 2=100$

정답_ 100

730

직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표는 서로 같으므로 x축과 점선이 만나는 점의 x좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore (f\circ f\circ f\circ f)(a)$
$=f(f(f(f(a))))$
$=f(f(f(b)))$
$=f(f(c))$
$=f(d)$
$=e$

정답_ ⑤

731

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 y의 값이 3이 되는 x의 값이 2, 4, 6이므로 $f(f(x))=3$에서

$f(x)=2$ 또는 $f(x)=4$ 또는 $f(x)=6$

(i) $f(x)=2$일 때, $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=7$

(ii) $f(x)=4$일 때, $x=5$

(iii) $f(x)=6$일 때, x의 값은 없다.

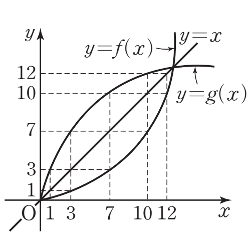
따라서 주어진 방정식의 실근은 1, 3, 5, 7이므로 모든 실근의 합은

$1+3+5+7=16$

정답_ 16

732

직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표는 서로 같으므로 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore (f\circ f)(7)+(g\circ f)(10)$
$=f(f(7))+g(f(10))$
$=f(3)+g(7)$
$=1+10=11$

정답_ 11

733

$f(x)=\begin{cases}-x-1 & (x<0)\\ x-1 & (x\geq 0)\end{cases}$, $g(x)=x+1$이므로

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)$

(i) $x+1<0$, 즉 $x<-1$일 때

$(f\circ g)(x)=f(x+1)=-(x+1)-1=-x-2$

(ii) $x+1\geq 0$, 즉 $x\geq -1$일 때

$(f\circ g)(x)=f(x+1)=(x+1)-1=x$

(i), (ii)에서 $(f\circ g)(x)=\begin{cases}-x-2 & (x<-1)\\ x & (x\geq -1)\end{cases}$

따라서 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프로 알맞은 것은 ③이다.

정답_ ③

주의 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프를 그릴 때, $g(x)$의 값의 범위를 x의 값의 범위로 착각하지 않도록 주의한다.

734

$f(x)=\begin{cases}1 & \left(0\leq x<\frac{1}{2}\right)\\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2}\leq x\leq 1\right)\end{cases}$

(i) $0\leq x<\frac{1}{2}$일 때

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(1)=-2\times1+2=0$

(ii) $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$일 때

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-2x+2)$

ⓐ $\frac{1}{2}\leq -2x+2\leq 1$, 즉 $\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{4}$일 때

$(f\circ f)(x)=f(-2x+2)=-2(-2x+2)+2=4x-2$

ⓑ $0\leq -2x+2<\frac{1}{2}$, 즉 $\frac{3}{4}<x\leq 1$일 때

$(f\circ f)(x)=f(-2x+2)=1$

(i), (ii)에서

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}0 & \left(0\leq x<\frac{1}{2}\right)\\ 4x-2 & \left(\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{4}\right)\\ 1 & \left(\frac{3}{4}<x\leq 1\right)\end{cases}$

따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프로 알맞은 것은 ④이다.

정답_ ④

735

$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (0\leq x<1)\\ 2x-2 & (1\leq x\leq 2)\end{cases}$

(i) $0\leq x<1$일 때

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-2x+2)$

ⓐ $1\leq -2x+2\leq 2$, 즉 $0\leq x\leq\frac{1}{2}$일 때

$(f\circ f)(x)=f(-2x+2)=2(-2x+2)-2=-4x+2$

ⓑ $0<-2x+2<1$, 즉 $\frac{1}{2}<x<1$일 때

$(f\circ f)(x)=f(-2x+2)=-2(-2x+2)+2=4x-2$

(ii) $1\leq x\leq 2$일 때

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x-2)$

ⓐ $0\leq 2x-2<1$, 즉 $1\leq x<\frac{3}{2}$일 때

$(f\circ f)(x)=f(2x-2)=-2(2x-2)+2=-4x+6$

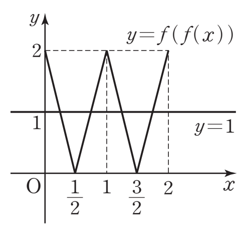
ⓑ $1\le 2x-2\le 2$, 즉 $\frac{3}{2}\le x\le 2$일 때

$(f\circ f)(x)=f(2x-2)=2(2x-2)-2=4x-6$

(i), (ii)에서

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-4x+2 & \left(0\le x\le \frac{1}{2}\right)\\ 4x-2 & \left(\frac{1}{2}<x<1\right)\\ -4x+6 & \left(1\le x<\frac{3}{2}\right)\\ 4x-6 & \left(\frac{3}{2}\le x\le 2\right)\end{cases}$$

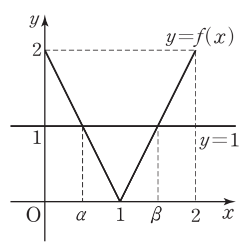
따라서 함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 방정식 $f(f(x))=1$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같으므로 구하는 실근의 개수는 4이다.



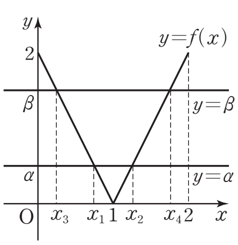
정답_ ③

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이
$f(\alpha)=f(\beta)=1$ $(0<\alpha<1<\beta<2)$
이라고 하면 $f(f(x))=1$에서
$f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$



이때 오른쪽 그림과 같이
$f(x_1)=f(x_2)=\alpha$, $f(x_3)=f(x_4)=\beta$
$(0<x_3<x_1<1<x_2<x_4<2)$
라고 하면 주어진 방정식의 실근은
$x=x_1$ 또는 $x=x_2$ 또는 $x=x_3$ 또는 $x=x_4$이므로 구하는 실근의 개수는 4이다.



736

$f(3)=1$이고 $f(2)=3$에서 $f^{-1}(3)=2$이므로
$f(3)+f^{-1}(3)=1+2=3$

정답_ ②

737

$f^{-1}(5)=1$에서 $f(1)=5$이므로
$2+a=5$ $\therefore a=3$
$\therefore f(x)=2x+3$
또, $f^{-1}(9)=b$에서 $f(b)=9$이므로
$2b+3=9$ $\therefore b=3$

정답_ ③

738

$f\left(\frac{x+2}{3}\right)=-x+2$에서 $\frac{x+2}{3}=t$로 놓으면 $x=3t-2$이므로
$f(t)=-(3t-2)+2=-3t+4$
$f^{-1}(1)=k$라고 하면 $f(k)=1$이므로
$-3k+4=1$ $\therefore k=1$

정답_ 1

다른 풀이

$f\left(\frac{x+2}{3}\right)=-x+2$에서

$f^{-1}(-x+2)=\frac{x+2}{3}$ …… ㉠

$-x+2=1$이면 $x=1$
$x=1$을 ㉠의 양변에 대입하면
$f^{-1}(1)=\frac{1+2}{3}=1$

739

$f(x)=\begin{cases}-x^2+5 & (x<0)\\ x+5 & (x\ge 0)\end{cases}$에서
$x<0$일 때, $-x^2+5<5$
$x\ge 0$일 때, $x+5\ge 5$
$f^{-1}(4)=k$라고 하면 $f(k)=4<5$이므로 $k<0$
즉, $-k^2+5=4$이므로
$-k^2=-1$ $\therefore k=-1$ ($\because k<0$)
$f^{-1}(6)=m$이라고 하면 $f(m)=6>5$이므로 $m\ge 0$
즉, $m+5=6$이므로
$m=1$
$\therefore f^{-1}(4)+f^{-1}(6)=-1+1=0$

정답_ ③

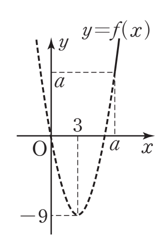
740

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.
함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 음수이므로
$f(-1)=a$, $f(2)=3$
$3+b=a$, $-6+b=3$ $\therefore a=12$, $b=9$
$\therefore a+b=12+9=21$

정답_ 21

741

$f(x)=x^2-6x=(x-3)^2-9$
$x\ge a$일 때, 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다. $x\ge a$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가해야 하므로
$a\ge 3$
또, 함수 f의 치역이 $\{y|y\ge a\}$이어야 하므로
$f(a)=a$에서
$a^2-6a=a$, $a^2-7a=0$
$a(a-7)=0$ $\therefore a=7$ ($\because a\ge 3$)



정답_ ④

742

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.
(i) $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값이 감소하므로 $x\ge 0$일 때의 직선의 기울기가 음수이어야 한다.

즉, $a-2<0$이므로 $a<2$

(ii) 실수 전체의 집합에서 정의된 함수이므로 $f(0)=0$

$0=a^2-9$, $(a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=3$

(i), (ii)에서 $a=-3$이므로

$f(a)=f(-3)=(-3)^2=9$

정답_ 9

743

$f(x)=x+2-k|x-1|$에서

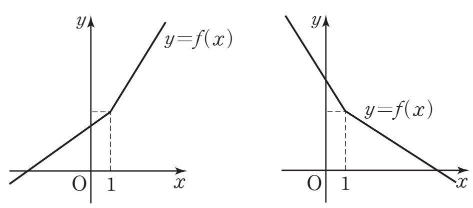
(i) $x\geq 1$일 때

$f(x)=x+2-k(x-1)=(1-k)x+2+k$

(ii) $x<1$일 때

$f(x)=x+2+k(x-1)=(1+k)x+2-k$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 다음 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 계속 증가하거나 계속 감소해야 한다.



따라서 $x\geq 1$일 때와 $x<1$일 때의 직선의 기울기가 모두 양수이거나 모두 음수이어야 한다.

즉, 두 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$(1-k)(1+k)>0$, $(k-1)(k+1)<0$

$\therefore -1<k<1$

정답_ ③

744

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.

$f(1)+2f(3)=12$에서 $f(1)=f(3)=4$이면 등식은 성립하지만 일대일대응이 아니므로

$f(1)=2$, $f(3)=5$ …… ㉠

$f^{-1}(1)=a$, $f^{-1}(3)=b$라고 하면

$f(a)=1$, $f(b)=3$, $a-b=2$이고 함수 $f(x)$는 일대일대응이므로 a와 b는 1, 3이 될 수 없다. ($\because$ ㉠)

$\therefore a=4$, $b=2$

즉, $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=1$이므로

$f(5)=4$ $\quad\therefore f^{-1}(4)=5$

$\therefore f(4)+f^{-1}(4)=1+5=6$

정답_ ②

745

(1) $y=2x-3$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$2x=y+3$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

(2) $x\geq 1$에서 $3x+1\geq 4$ $\quad\therefore y\geq 4$

$y=3x+1$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$3x=y-1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ $(x\geq 4)$

정답_ (1) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ (2) $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ $(x\geq 4)$

참고 (1)과 같이 역함수의 정의역이 실수 전체의 집합이면 별도로 언급하지 않아도 된다. 그러나 (2)와 같이 역함수의 정의역이 실수 전체의 집합이 아닌 경우에는 반드시 정의역을 써주어야 한다.

746

$y=ax+2$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$ax=y-2$ $\quad\therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{2}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$이므로

$\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}=2x+b$에서

$\frac{1}{a}=2$, $-\frac{2}{a}=b$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=-4$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\times(-4)=-2$

정답_ -2

747

$f(2x-1)=-4x+5$에서

$2x-1=t$라고 하면 $2x=t+1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

따라서 $f(t)=-4\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+5=-2t+3$이므로

$f(x)=-2x+3$

$y=-2x+3$이라고 하면

$2x=-y+3$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ $\quad\therefore f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

정답_ $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

748

$y=af(x)$라고 하면 $f(x)=\frac{y}{a}$이므로 $x=g\left(\frac{y}{a}\right)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=g\left(\frac{x}{a}\right)$

따라서 $af(x)$의 역함수는 $g\left(\frac{x}{a}\right)$이다.

한편, $y=f(ax)$라고 하면 $g(y)=ax$

x와 y를 서로 바꾸면

$g(x)=ay$ $\quad\therefore y=\frac{1}{a}g(x)$

따라서 $f(ax)$의 역함수는 $\frac{1}{a}g(x)$이다.

정답_ ⑤

749

$(f\circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))$이고 $g(3)=1$이므로

$g^{-1}(1)=3$ $\quad\therefore (f\circ g^{-1})(1)=f(3)=2$

$(g\circ f^{-1})(3)=g(f^{-1}(3))$이고 $f(1)=3$이므로

$f^{-1}(3)=1$ $\quad\therefore (g\circ f^{-1})(3)=g(1)=3$

$\therefore (f\circ g^{-1})(1)+(g\circ f^{-1})(3)=2+3=5$

정답_ 5

750

$(f^{-1}\circ g)(k)=f^{-1}(g(k))=2$에서 $f(2)=g(k)$이므로

$3\times2+1=2k-5,\ -2k=-12$

$\therefore k=6$

정답_ 6

751

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)=2(ax+b)+c$

$=2ax+2b+c$

즉, $2ax+2b+c=4x+1$이므로

$2a=4,\ 2b+c=1$ ······ ㉠

$\therefore a=2$

$f^{-1}(-1)=1$에서 $f(1)=-1$이므로

$a+b=-1$ $\quad\therefore b=-3\ (\because a=2)$

㉠에 $b=-3$을 대입하면

$-6+c=1$ $\quad\therefore c=7$

$\therefore f(x)=2x-3,\ g(x)=2x+7$

$g^{-1}(f(2))=g^{-1}(1)=k$라고 하면 $g(k)=1$이므로

$2k+7=1$ $\quad\therefore k=-3$

$\therefore g^{-1}(f(2))=-3$

정답_ -3

752

$f=f^{-1}$이면 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$

① $f(x)=3x$이므로

$f(f(x))=f(3x)=3(3x)=9x$

② $f(x)=x+4$이므로

$f(f(x))=f(x+4)=(x+4)+4=x+8$

③ $f(x)=-2x$이므로

$f(f(x))=f(-2x)=-2(-2x)=4x$

④ $f(x)=-x+1$이므로

$f(f(x))=f(-x+1)=-(-x+1)+1=x$

⑤ $f(x)=x^3$이므로

$f(f(x))=f(x^3)=(x^3)^3=x^9$

따라서 $f(x)=f^{-1}(x)$를 만족시키는 함수는 ④이다.

정답_ ④

753

$(f\circ f)(x)=x$에서 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$f(1)=f^{-1}(1)=-3$

$f^{-1}(1)=-3$에서 $f(-3)=1$이므로

$f^{-1}(-3)=f(-3)=1$

$\therefore f(1)+f^{-1}(-3)=-3+1=-2$

정답_ ①

754

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라고 하면 $f=f^{-1}$이므로

$f^{-1}(2)=f(2)=3$

$f^{-1}(2)=3$이므로 $f(3)=2$

즉, $f(2)=3,\ f(3)=2$에서

$2a+b=3,\ 3a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=5$

따라서 $f(x)=-x+5$이므로

$f(5)=0$

정답_ ③

755

ㄷ. 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$가 존재할 때, 함수 $f\circ f^{-1}$는 Y에서 Y로의 항등함수이고 함수 $f^{-1}\circ f$는 X에서 X로의 항등함수이다.

이때 $X\neq Y$이면 $f\circ f^{-1}\neq f^{-1}\circ f$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ㄱ, ㄴ

참고 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일대응일 때, 그 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$에 대하여

(1) $(f^{-1}\circ f)(x)=x\ (x\in X)$, 즉 $f^{-1}\circ f=I_X$

⇨ $f^{-1}\circ f$는 X에서의 항등함수

(2) $(f\circ f^{-1})(y)=y\ (y\in Y)$, 즉 $f\circ f^{-1}=I_Y$

⇨ $f\circ f^{-1}$는 Y에서의 항등함수

756

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=(f\circ(f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(1)$

$=((f\circ f^{-1})\circ(g^{-1}\circ f))(1)$

$=(I\circ(g^{-1}\circ f))(1)$ (I는 항등함수)

$=(g^{-1}\circ f)(1)$

$=g^{-1}(f(1))=g^{-1}(4)$

$g^{-1}(4)=k$로 놓으면 $g(k)=4$이므로

$2k-4=4$ $\quad\therefore k=4$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=4$

정답_ 4

757

$(f\circ g^{-1})^{-1}=g\circ f^{-1}$이므로 $(f\circ g^{-1})(x)$의 역함수는 $(g\circ f^{-1})(x)$이다.

$\therefore h(x)=(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))$

$f(x)=3x-1$에서 $y=3x-1$로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면 $3x=y+1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ $\quad\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

따라서 구하는 역함수 $h(x)$는

$h(x)=g(f^{-1}(x))=g\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)=6\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)+3=2x+5$

정답_ ④

다른 풀이

$g(x)=6x+3$에서 $y=6x+3$으로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면 $6x=y-3$ $\quad\therefore x=\frac{1}{6}y-\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore g^{-1}(x)=\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}$

$$\therefore (f\circ g^{-1})(x)=f(g^{-1}(x))=f\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}\right)=3\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}\right)-1$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$를 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$x=2y+5$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=2x+5$ $\quad\therefore h(x)=2x+5$

758

$f(3)=2$이므로 $f^{-1}(2)=3$

$(g\circ f^{-1})(2)=2$에서 $g(f^{-1}(2))=2$이므로 $g(3)=2$

$(g\circ f^{-1})^{-1}(3)=1$에서 $(f\circ g^{-1})(3)=1$이므로 $f(g^{-1}(3))=1$

이때 $g(2)=3$이므로 $g^{-1}(3)=2$ $\quad\therefore f(2)=1$

두 함수 f, g의 역함수가 모두 존재하므로 두 함수 f, g는 일대일 대응이다.

$\therefore f(1)=3,\ g(1)=1\ (\because f(2)=1,\ f(3)=2,\ g(2)=3,\ g(3)=2)$

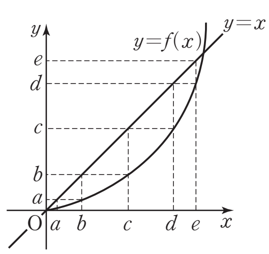
이때 $g(1)=1$에서 $g^{-1}(1)=1$이므로

$f(1)-g^{-1}(1)=3-1=2$

정답_ 2

759

직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표는 같으므로 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$(f\circ f)^{-1}(c)=(f^{-1}\circ f^{-1})(c)$
$\qquad=f^{-1}(f^{-1}(c))$

이므로 $f^{-1}(c)=k$로 놓으면

$f(k)=c$

이때 $f(d)=c$이므로 $k=d$ $\quad\therefore f^{-1}(c)=d$

$f^{-1}(d)=l$로 놓으면 $f(l)=d$

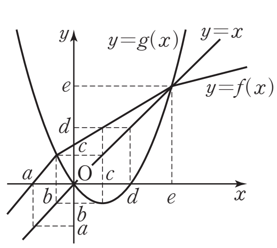
이때 $f(e)=d$이므로 $l=e$ $\quad\therefore f^{-1}(d)=e$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(d)=e$

정답_ ⑤

760

직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표는 같으므로 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$(f^{-1}\circ g\circ f)(c)=f^{-1}(g(f(c)))$
$\qquad=f^{-1}(g(d))$
$\qquad=f^{-1}(0)$

이므로 $f^{-1}(0)=k$로 놓으면 $f(k)=0$

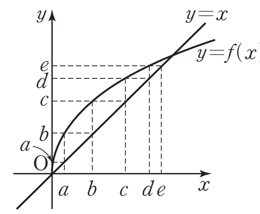
이때 $f(a)=0$이므로 $k=a$

$\therefore (f^{-1}\circ g\circ f)(c)=a$

정답_ a

761

직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표는 같으므로 y축과 점선이 만나는 점의 x좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(d)=e$ (참)

ㄴ. $f(a)=b$이므로
$\quad f^{-1}(b)=a$ (거짓)

ㄷ. $(f\circ f)(b)=f(f(b))=f(c)=d$ (거짓)

ㄹ. $(f\circ f\circ f)^{-1}(e)=(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(e)$
$\qquad=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(e)))$

$\quad f^{-1}(e)=k$로 놓으면 $f(k)=e$

$\quad$이때 $f(d)=e$이므로 $k=d$

$\quad f^{-1}(d)=l$로 놓으면 $f(l)=d$

$\quad$이때 $f(c)=d$이므로 $l=c$

$\quad f^{-1}(c)=m$으로 놓으면 $f(m)=c$

$\quad$이때 $f(b)=c$이므로 $m=b$

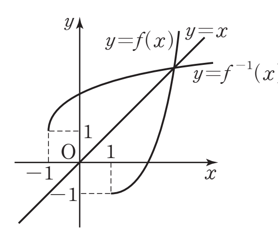
$\quad\therefore (f\circ f\circ f)^{-1}(e)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(e)))$
$\qquad=f^{-1}(f^{-1}(d))$
$\qquad=f^{-1}(c)=b$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

정답_ ㄱ, ㄹ

762

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.



따라서 구하는 교점의 좌표는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$f(x)=x$에서

$(x-1)^2-1=x,\ x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$ $\quad\therefore x=3\ (\because x\geq 1)$

즉, 구하는 교점의 좌표는 $(3, 3)$이므로

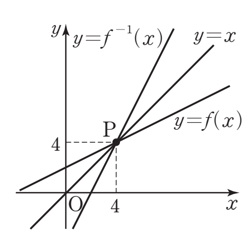
$a=3,\ b=3$

$\therefore a+b=3+3=6$

정답_ ③

763

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.



$\frac{1}{2}x+2=x$에서 $-\frac{1}{2}x=-2$ $\quad\therefore x=4$

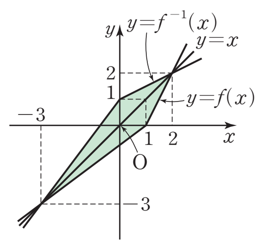
따라서 P$(4,\ 4)$이므로

$\overline{\text{OP}}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

정답_ $4\sqrt{2}$

764

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구해 보면

(i) $x<1$일 때

$\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}=x$, $-\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore x=-3$

(ii) $x\geq1$일 때

$2x-2=x$ $\quad\therefore x=2$

(i), (ii)에서 교점의 좌표는 $(-3,\ -3)$, $(2,\ 2)$이므로 구하는 도형의 넓이는

$2\left(\frac{1}{2}\times1\times3+\frac{1}{2}\times1\times2\right)=5$

정답_ 5

765

함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq0$인 부분만 남기고, 이 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ③이다.

정답_ ③

참고 주어진 그래프의 식은 다음과 같다.

① 함수 $y=|f(x)|$ ② 함수 $|y|=f(x)$

④ 함수 $|y|=f(|x|)$ ⑤ 함수 $y=|f(|x|)|$

766

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 남기고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ㄴ이다.

함수 $|y|=f(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분만 남기고, 이 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ㄹ이다.

정답_ ㄴ, ㄹ

767

$y=|x-2|$에서

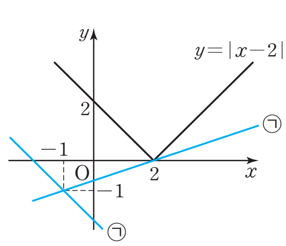
(i) $x<2$일 때

$y=-(x-2)=-x+2$

(ii) $x\geq2$일 때

$y=x-2$

(i), (ii)에서 $y=|x-2|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선



$y=m(x+1)-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ -1)$을 지난다.

(iii) 직선 ㉠이 직선 $y=-x+2$와 평행할 때

$m=-1$

(iv) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때

$0=3m-1$ $\quad\therefore m=\frac{1}{3}$

(iii), (iv)에서 구하는 실수 m의 값의 범위는

$m<-1$ 또는 $m\geq\frac{1}{3}$

정답_ $m<-1$ 또는 $m\geq\frac{1}{3}$

768

$y=|x-1|+|x-3|$에서

(i) $x<1$일 때, $y=-(x-1)-(x-3)=-2x+4$

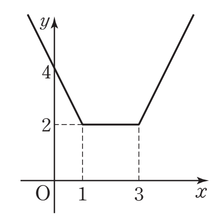
(ii) $1\leq x<3$일 때, $y=x-1-(x-3)=2$

(iii) $x\geq3$일 때, $y=x-1+x-3=2x-4$

(i)~(iii)에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값의 범위가 $1\leq x\leq3$일 때 최솟값 2를 갖는다.

따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$, $m=2$이므로

$\alpha+\beta+m=1+3+2=6$

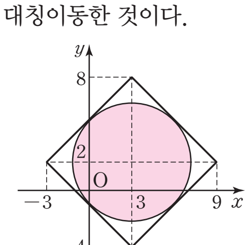


정답_ ⑤

769

$|x|+|y|=6$의 그래프는 $x+y=6$의 그래프에서 $x\geq0$, $y\geq0$인 부분을 x축, y축 및 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이다.

이때 $|x-3|+|y-2|=6$의 그래프는 $|x|+|y|=6$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $|x-3|+|y-2|=6$의 그래프는 한 변의 길이가 $6\sqrt{2}$인 정사각형이므로 이 그래프에 내접하는 원의 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$이다.

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi(3\sqrt{2})^2=18\pi$

정답_ 18π

770

조건 (가)에서

$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x_1=0$, $x_2=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$ ······ ❶

㉠의 양변에 $x_1=-2$, $x_2=2$를 대입하면

$f(0)=f(-2)+f(2)$ $\quad\therefore f(-2)=-f(2)$ ······ ❷

또, 조건 (나)에서 함수 f는 일대일함수이다. ······ ❸

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 0뿐이므로 1개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 -3, -1, 0, 1, 3 중에서 $f(0)$의 값을 제외한 4개

$f(-2)=-f(2)$에서 $f(-2)$의 값이 될 수 있는 것은 $-f(2)$의 값과 같아야 하므로 1개

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$1\times4\times1=4$ ······ ❹

정답_ 4

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값 구하기	20 %
❷ $f(-2)=-f(2)$임을 알기	20 %
❸ 함수 f가 일대일함수임을 알기	20 %
❹ 함수 f의 개수 구하기	40 %

참고 명제 '$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$'의 대우 '$f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$'가 성립해도 함수 f는 일대일함수이다.

771

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+4)=a(bx+4)-3$
$=abx+4a-3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-3)=b(ax-3)+4$
$=abx-3b+4$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$abx+4a-3=abx-3b+4$

$4a-3=-3b+4 \qquad \therefore 4a+3b=7$ ······ ❶

이때 $a>0$, $b>0$에서 $4a>0$, $3b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+3b\geq2\sqrt{12ab}$ (단, 등호는 $4a=3b$일 때 성립한다.) ······ (∗) ······ ❷

즉, $7\geq2\sqrt{12ab}$에서 $\sqrt{12ab}\leq\frac{7}{2}$

양변을 제곱하면

$12ab\leq\frac{49}{4} \qquad \therefore ab\leq\frac{49}{48}$

따라서 ab의 최댓값은 $\frac{49}{48}$이다. ······ ❸

정답_ $\frac{49}{48}$

채점 기준	비율
❶ $4a+3b$의 값 구하기	40 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계 이용하기	30 %
❸ ab의 최댓값 구하기	30 %

참고 (∗)에서 등호가 성립하는 경우는 $4a=3b$일 때이고, 이때 $4a+3b=7$이므로 $a=\frac{7}{8}$, $b=\frac{7}{6}$일 때 등호가 성립한다.

772

다항식 $g(x)$의 차수를 n이라고 하면 $g(g(x))$의 차수는 n^2이다.

$g(g(x))=x$의 양변의 차수를 비교하면

$n^2=1 \qquad \therefore n=1$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 다항식 $g(x)$는 일차식이므로

$g(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

로 놓을 수 있다. ······ ❶

$g(0)=1$, $g(g(x))=x$에서 $g(g(0))=g(1)=0$

$\therefore g(1)=0$ ······ ❷

$g(0)=1$에서 $b=1$

$g(1)=a+b$에서 $a+b=0 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $g(x)=-x+1$이므로

$g(-1)=-(-1)+1=2$ ······ ❸

정답_ 2

채점 기준	비율
❶ $g(x)$가 일차식임을 알고 $g(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓기	40 %
❷ $g(1)$의 값 구하기	20 %
❸ $g(-1)$의 값 구하기	40 %

773

$(f^{-1}\circ g)(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지가 $R(x)=ax+b$이므로 몫을 $Q(x)$라고 하면

$(f^{-1}\circ g)(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b$
$=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(f^{-1}\circ g)(1)=a+b$

$\therefore a+b=(f^{-1}\circ g)(1)=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(1)$ ······ ❶

$f^{-1}(1)=k$라고 하면 $f(k)=1$이므로

$2k+3=1 \qquad \therefore k=-1$ ······ ❷

$\therefore a+b=-1$ ······ ❸

정답_ -1

채점 기준	비율
❶ $a+b=f^{-1}(1)$임을 알기	50 %
❷ $f^{-1}(1)$의 값 구하기	40 %
❸ $a+b$의 값 구하기	10 %

참고 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면
⇨$A=BQ+R$ (단, (R의 차수)<(B의 차수))

774

$g(x)$는 항등함수이므로 $g(x)=x$

조건 ㈎에 의하여 $f(2)=g(2)=h(2)=2$

또, $h(x)$는 상수함수이므로 $h(x)=2$

조건 ㈏에 의하여

$f(3)\times g(1)\times h(3)=f(3)\times1\times2=2$

$\therefore f(3)=1$ ······ ❶

이때 $f(x)$가 일대일대응이므로 $f(1)=3$ ($\because$ $f(2)=2$, $f(3)=1$)

$\therefore (f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=1$ ······ ❷

또, $g(1)=1$에서 $g^{-1}(1)=1$이므로

$(g\circ h^{-1})^{-1}(1)=(h\circ g^{-1})(1)=h(g^{-1}(1))=h(1)=2$ ······ ❸

$\therefore (f\circ f)(1)+(g\circ h^{-1})^{-1}(1)=1+2=3$ ······ ❹

정답_ 3

채점 기준	비율
❶ $f(3)$의 값 구하기	50 %
❷ $(f\circ f)(1)$의 값 구하기	20 %
❸ $(g\circ h^{-1})^{-1}(1)$의 값 구하기	20 %
❹ $(f\circ f)(1)+(g\circ h^{-1})^{-1}(1)$의 값 구하기	10 %

775

$f^{-1}(1)=-1$에서 $f(-1)=1$이므로

$f(-1)=-1+k=1$ ∴ $k=2$ ······ ❶

∴ $f(x)=x|x|+2$

$(f^{-1}\circ f^{-1})(1)=f^{-1}(f^{-1}(1))=f^{-1}(-1)=a$라고 하면

$f(a)=-1$ ······ ❷

(i) $a<0$일 때

$f(a)=-a^2+2=-1$, $a^2=3$

∴ $a=-\sqrt{3}$ ($\because a<0$)

(ii) $a\ge 0$일 때

$f(a)=a^2+2=-1$, $a^2=-3$

이를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $(f^{-1}\circ f^{-1})(1)=-\sqrt{3}$ ······ ❸

정답_ $-\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ k의 값 구하기	30 %
❷ $(f^{-1}\circ f^{-1})(1)=a$일 때, $f(a)=-1$임을 알기	30 %
❸ $(f^{-1}\circ f^{-1})(1)$의 값 구하기	40 %

776

$f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}$ ······ ㉠

㉠에 $\frac{1}{x}$ 대신 x를 대입하면

$f\left(\frac{1}{x}\right)+3f(x)=2x$ ······ ㉡

㉠$-3\times$㉡을 하면

$-8f(x)=\frac{2}{x}-6x$

∴ $f(x)=-\frac{1}{4x}+\frac{3}{4}x=\frac{3x^2-1}{4x}$

정답_ $f(x)=\frac{3x^2-1}{4x}$

777

$f(10)=f(2\times5)=2f(5)=2f(2\times3-1)=2\times(-1)^3=-2$

$f(12)=f(2\times6)=2f(6)=2f(2\times3)=4f(3)$

$=4f(2\times2-1)=4\times(-1)^2=4$

∴ $f(10)+f(12)=(-2)+4=2$

정답_ ④

778

$f(x)=g(x)$가 되도록 하는 x의 값은

$-x^2+2x=x^3-ax^2-ax+2a$에서

$x^3-(a-1)x^2-(a+2)x+2a=0$, $(x+2)(x-1)(x-a)=0$

∴ $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=a$

이때 $a=-2$ 또는 $a=1$이면 집합 X가 될 수 있는 집합은

$\{-2\}$, $\{1\}$, $\{-2, 1\}$

이므로 각 집합 X의 모든 원소의 합을 모두 더하면

$-2+1+(-2+1)=-2$

즉, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a\ne-2$, $a\ne1$이므로 집합 X의 개수는

$k=2^3-1=7$

이때 집합 X가 될 수 있는 집합은

$\{-2\}$, $\{1\}$, $\{a\}$, $\{-2, 1\}$, $\{-2, a\}$, $\{1, a\}$, $\{-2, 1, a\}$

이므로 각 집합 X의 모든 원소의 합은

$-2+1+a+(-2+1)+(-2+a)+(1+a)+(-2+1+a)$

$=4(a-1)$

즉, $4(a-1)=12$이므로

$a-1=3$ ∴ $a=4$

∴ $a+k=4+7=11$

정답_ 11

779

함수 $f(x)=a|x+3|-2x$에서

(i) $x<-3$일 때

$f(x)=-a(x+3)-2x=-(a+2)x-3a$

(ii) $x\ge-3$일 때

$f(x)=a(x+3)-2x=(a-2)x+3a$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases}-(a+2)x-3a & (x<-3)\\ (a-2)x+3a & (x\ge-3)\end{cases}$

함수 f가 일대일대응이 되려면 두 직선 $y=-(a+2)x-3a$와 $y=(a-2)x+3a$의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$-(a+2)(a-2)>0$, $(a+2)(a-2)<0$

∴ $-2<a<2$

따라서 $-2<a<2$를 만족시키는 정수 a는 -1, 0, 1이므로 모든 정수 a의 값의 합은

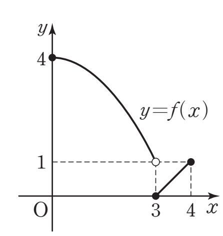
$-1+0+1=0$

정답_ 0

780

집합 $\{x|3\le x\le4\}$에서 정의된 함수 $y=x-3$의 치역은 $\{y|0\le y\le1\}$

따라서 함수 f가 일대일대응이 되기 위해서는 집합 $\{x|0\le x<3\}$에서 정의된 함수 $y=ax^2+b$의 치역이 $\{y|1<y\le4\}$이어야 하고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



이때 $g(x)=ax^2+b$라고 하면 $g(0)=4$, $g(3)=1$이어야 하므로

$g(0)=4$에서 $b=4$

$g(3)=1$에서 $9a+4=1$

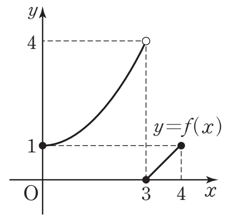
$9a=3$ ∴ $a=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^2+4 & (0\le x<3)\\ x-3 & (3\le x\le4)\end{cases}$이므로

$f(1)=-\frac{1}{3}\times1^2+4=\frac{11}{3}$

정답_ ⑤

참고 $g(x)=ax^2+b$에 대하여 $g(0)=1$, $g(3)=4$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다.
이 경우에는 $f(0)=f(4)=1$이고 공역의 원소 4가 치역에 속하지 않으므로 함수 $f(x)$는 X에서 X로의 일대일대응이 아니다.



781

세 함수 f, g, h의 정의역을 각각 X_1, X_2, X_3이라 하고 치역을 각각 Y_1, Y_2, Y_3이라고 하면
$X_1=\{x|0\le x\le 2\}$, $X_2=\{x|0\le x\le 3\}$, $X_3=\{x|-1\le x\le 2\}$
$Y_1=\{y|0\le y\le 2\}$, $Y_2=\{y|0\le y\le 27\}$, $Y_3=\{y|-1\le y\le 3\}$
ㄱ. $Y_1\subset X_2$이므로 $g\circ f$는 정의된다.
ㄴ. $Y_1\subset X_3$이므로 $h\circ f$는 정의된다.
ㄷ. $Y_3\not\subset X_1$이므로 $f\circ h$는 정의되지 않는다.
ㄹ. $Y_2\not\subset X_3$이므로 $h\circ g$는 정의되지 않는다.
따라서 정의되지 않는 합성함수는 ㄷ, ㄹ의 2개이다.

정답_ 2

참고 합성함수가 정의되는 조건
두 함수 f, g에 대하여 합성함수 $g\circ f$가 정의되려면
(함수 f의 치역)$\subset$(함수 g의 정의역)이어야 한다.

782

$m=1$일 때, $f(x)=x$이므로
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)$
즉, 함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$이다.
$m=2$일 때, $f(x)=2x$이므로
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)$
이때 $2x$는 2의 배수이고 2의 배수를 4로 나눈 나머지는 0 또는 2이므로 함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0, 2\}$이다.
$m=3$일 때, $f(x)=3x$이므로
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x)$
이때 $3x$는 3의 배수이고 3의 배수를 4로 나눈 나머지는 0 또는 1 또는 2 또는 3이므로 함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$이다.
$m=4$일 때, $f(x)=4x$이므로
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4x)$
이때 $4x$는 4의 배수이고 4의 배수를 4로 나눈 나머지는 항상 0이므로 함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0\}$이다.
⋮
따라서 치역의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 m의 최솟값은 4이다.

정답_ 4

참고 자연수 m의 값이 4의 배수가 아닌 경우 치역의 원소는 2개 이상이다.

783

$f^1(-1)=\left[\frac{3}{2}\right]+\left[-\frac{1}{2}\right]=1-1=0$

$f^2(-1)=f(f(-1))=f(0)=[1]+[0]=1+0=1$

$f^3(-1)=f(f^2(-1))=f(1)=\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1}{2}\right]=0+0=0$

$f^4(-1)=f(f^3(-1))=f(0)=[1]+[0]=1+0=1$
⋮

따라서 $f^n(-1)=\begin{cases}0 & (n\text{이 홀수})\\ 1 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$이므로

$f^{1004}(-1)+f^{1005}(-1)=1+0=1$

정답_ ④

784

$f(f(x+2))=4$에서 $f(x+2)=t$로 놓으면
$f(t)=4$ …… ㉠
방정식 ㉠의 실근은 주어진 함수의 그래프로부터
$t=6$ 또는 $t=11$ 또는 $t=15$ 또는 $t=17$
그런데 주어진 함수의 그래프에서 $f(x)\le 6$이므로
$f(x+2)=t\le 6$
$\therefore f(x+2)=6$ …… ㉡
방정식 ㉡의 실근은 주어진 함수의 그래프로부터
$x+2=8$ 또는 $x+2=16$
$\therefore x=6$ 또는 $x=14$
따라서 구하는 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 그 합은
$6+14=20$

정답_ ①

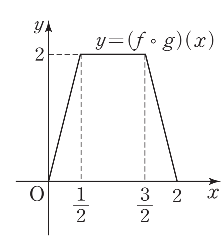
785

$f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<1)\\ 2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<1)\\ -2x+4 & (1\le x\le 2)\end{cases}$

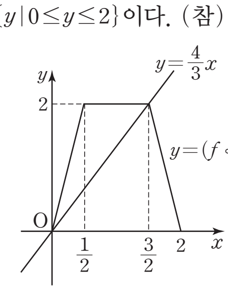
(i) $0\le x<1$일 때, $(f\circ g)(x)=f(2x)$
ⓐ $0\le 2x<1$, 즉 $0\le x<\frac{1}{2}$일 때
$(f\circ g)(x)=f(2x)=4x$
ⓑ $1\le 2x<2$, 즉 $\frac{1}{2}\le x<1$일 때
$(f\circ g)(x)=f(2x)=2$
(ii) $1\le x\le 2$일 때, $(f\circ g)(x)=f(-2x+4)$
ⓐ $0\le -2x+4<1$, 즉 $\frac{3}{2}<x\le 2$일 때
$(f\circ g)(x)=f(-2x+4)=2(-2x+4)=-4x+8$
ⓑ $1\le -2x+4\le 2$, 즉 $1\le x\le\frac{3}{2}$일 때
$(f\circ g)(x)=f(-2x+4)=2$

(i), (ii)에서

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}4x & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right)\\ 2 & \left(\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}\right)\\ -4x+8 & \left(\frac{3}{2}<x\le 2\right)\end{cases}$$



이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
ㄱ. 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 치역은 $\{y|0\le y\le 2\}$이다. (참)
ㄴ. 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{4}{3}x$는 두 점 $(0, 0)$, $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$에서 만난다. (거짓)



ㄷ. 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는

(i) $0<x<\frac{1}{2}$일 때

$4x=k$에서 $x=\frac{k}{4}$

(ii) $\frac{3}{2}<x<2$일 때

$-4x+8=k$에서 $x=\frac{8-k}{4}$

(i), (ii)에서 방정식 $(f\circ g)(x)=k$ $(0<k<2)$의 모든 실근의 합은 $\frac{k}{4}+\frac{8-k}{4}=2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ④

786

ㄱ. $f(ab)=f(2a)+f(2b)$의 양변에 $a=2$, $b=2$를 대입하면

$f(4)=f(4)+f(4)$ $\qquad \therefore f(4)=0$

$\therefore g(0)=4$ (참)

ㄴ. [반례] $g(0\times0)=4$, $g(0)\times g(0)=16$이므로

$g(0\times0)\neq g(0)g(0)$ (거짓)

ㄷ. $f(2a)=x$, $f(2b)=y$로 놓으면

$g(x)=2a$, $g(y)=2b$

$f(ab)=f(2a)+f(2b)=x+y$에서 $g(x+y)=ab$이고

$a=\frac{1}{2}g(x)$, $b=\frac{1}{2}g(y)$이므로

$g(x+y)=ab=\frac{1}{2}g(x)\times\frac{1}{2}g(y)=\frac{1}{4}g(x)g(y)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

787

ㄱ. 모든 $x\in X$에 대하여 $f(x)=g(x)=x$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=x$

즉, $g\circ f$는 항등함수이다. (참)

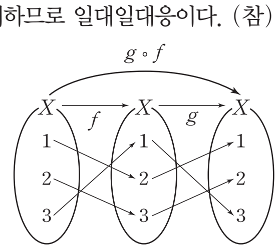
ㄴ. $g\circ f$가 항등함수이면 모든 $x\in X$에 대하여

$g(f(x))=x$

즉, f의 역함수는 g이고 g의 역함수는 f이다.

따라서 f, g는 모두 역함수가 존재하므로 일대일대응이다. (참)

ㄷ. [반례] 두 함수 f, g가 오른쪽 그림과 같을 때, $g\circ f$가 항등함수이지만 f, g는 모두 항등함수가 아니다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ②

788

ㄱ. 함수 f가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

조건 (가)에서 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $(f\circ f)(x)=x$이므로 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=f^{-1}(x)$이다.

$\therefore f(3)=f^{-1}(3)$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에서 집합 X의 어떤 원소 x에 대하여 $f(x)=2x$이므로 집합 X의 원소 중 $f(x)=2x$를 만족시키는 원소 x가 적어도 하나 존재해야 한다.

이때 $f(1)=3$이고 $2\times3=6\notin X$, $2\times4=8\notin X$이므로

$f(2)=4$이어야 한다. (참)

ㄷ. 조건 (나)에서 $f(1)=2$와 $f(2)=4$ 중 적어도 하나는 성립하므로 다음 세 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f(1)=2$이고 $f(2)\neq4$일 때

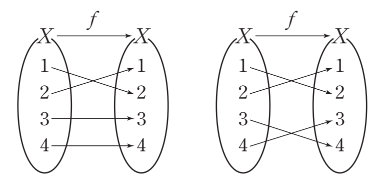
조건 (가)에 의하여 $(f\circ f)(1)=1$이므로

$f(f(1))=f(2)=1$

이때 조건 (가)에 의하여

$f(3)=3$, $f(4)=4$ 또는 $f(3)=4$, $f(4)=3$

이므로 함수 f의 개수는 2이다.



(ii) $f(2)=4$이고 $f(1)\neq2$일 때

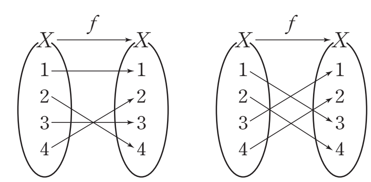
조건 (가)에 의하여 $(f\circ f)(2)=2$이므로

$f(f(2))=f(4)=2$

이때 조건 (가)에 의하여

$f(1)=1$, $f(3)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(3)=1$

이므로 함수 f의 개수는 2이다.



(iii) $f(1)=2$이고 $f(2)=4$일 때

$f(f(1))=f(2)=4$

이므로 $(f\circ f)(1)=1$이 성립하지 않는다.

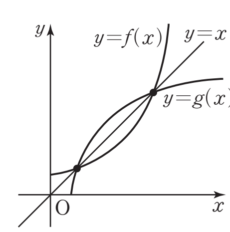
(i)~(iii)에서 가능한 함수 f의 개수는 $2+2=4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

789

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.



따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 방정식 $f(x)=x$의 실근과 같다.

$f(x)=x$에서 $\frac{x^2}{4}+a=x$

$\therefore x^2-4x+4a=0$

위의 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 두 실근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-2)^2-4a>0$ $\qquad \therefore a<1$

(ii) $\alpha+\beta=4>0$

(iii) $\alpha\beta=4a\geq0$ $\qquad \therefore a\geq0$

(i)~(iii)에서 실수 a의 값의 범위는 $0\leq a<1$

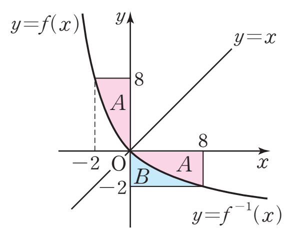
정답_ $0\leq a<1$

790

$f(x)=2x^2\ (x\le 0)$에서 $f(-2)=8$이다. ······ ㉠

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, ㉠에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-2,\ 8)$을 지나므로 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(8,\ -2)$를 지난다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=8$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $x=8$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 서로 같다.



이때 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $x=8$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=-2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합은 네 점 $(0,\ 0)$, $(0,\ -2)$, $(8,\ -2)$, $(8,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이와 같으므로

$A+B=8\times 2=16$

정답_ ③

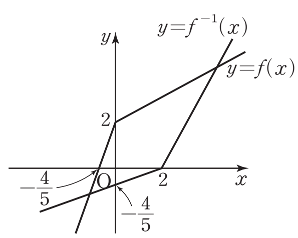
791

(i) $x<0$일 때, $f(x)=-(-x)+\frac{3}{2}x+2=\frac{5}{2}x+2$

(ii) $x\ge 0$일 때, $f(x)=-x+\frac{3}{2}x+2=\frac{1}{2}x+2$

(i), (ii)에서

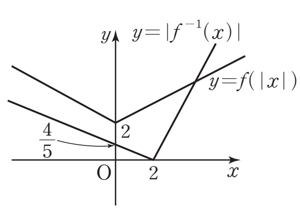
$$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{2}x+2\ (x<0)\\ \frac{1}{2}x+2\ (x\ge 0)\end{cases}$$



이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\ge 0$인 부분만 남기고, 이 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이고, 함수 $y=|f^{-1}(x)|$의 그래프는 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분은 남기고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

따라서 두 함수 $y=f(|x|)$, $y=|f^{-1}(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 두 함수의 그래프의 교점의 개수는 1이므로 방정식 $f(|x|)=|f^{-1}(x)|$의 모든 실근의 개수는 1이다.



정답_ ①

참고 $x<0$일 때, $f(|x|)=-\frac{1}{2}x+2$, $|f^{-1}(x)|=-\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}$이고

$\left|-\frac{1}{2}\right|>\left|-\frac{2}{5}\right|$이므로 $x<0$일 때 함수 $y=f(|x|)$의 그래프의 기울기의 절댓값이 함수 $y=f(|x|)$의 그래프의 기울기의 절댓값보다 크다.

따라서 두 그래프는 만나지 않는다.

09 유리식과 유리함수

792

(1) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$

$=\frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$

$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$

$=\frac{2(1+x^2)+2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}+\frac{4}{1+x^4}$

$=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}$

$=\frac{4(1+x^4)+4(1-x^4)}{(1-x^4)(1+x^4)}$

$=\frac{8}{1-x^8}$

(2) $\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3}\div\frac{a^3-b^3}{a^2-ab+b^2}\times\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+b^2}$

$=\frac{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\times\frac{a^2-ab+b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

$\times\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+b^2}$

$=1$

정답_ (1) $\frac{8}{1-x^8}$ (2) 1

793

$-\frac{a}{(b-a)(a-c)}-\frac{b}{(c-b)(b-a)}-\frac{c}{(a-c)(c-b)}$

$=-\frac{a}{(a-b)(c-a)}-\frac{b}{(a-b)(b-c)}-\frac{c}{(b-c)(c-a)}$

$=\frac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{-ab+ca-bc+ab-ca+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=0$

정답_ ③

794

$\frac{x-y}{x^3-y^3}\times\frac{x^6-y^6}{x^4-y^4}\div\frac{x^3+y^3}{x^3y+xy^3}$

$=\frac{x-y}{x^3-y^3}\times\frac{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}\times\frac{xy(x^2+y^2)}{x^3+y^3}$

$=\frac{xy}{x+y}$

$=\frac{6}{2}=3\ (\because\ x+y=2,\ xy=6)$

정답_ ③

795

$\frac{(a-5)^2}{a-b}+\frac{(b-5)^2}{b-a}=\frac{(a-5)^2}{a-b}-\frac{(b-5)^2}{a-b}$

$=\frac{(a^2-10a+25)-(b^2-10b+25)}{a-b}$

$=\frac{a^2-b^2-10a+10b}{a-b}$

$$=\frac{(a+b)(a-b)-10(a-b)}{a-b}$$
$$=\frac{(a-b)(a+b-10)}{a-b}$$
$$=a+b-10$$

따라서 $a+b-10=0$이므로

$a+b=10$

정답_ 10

796

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 x^3+1을 곱하면

$x^2-x+1-x(x+1)=ax+b$

$x^2-x+1-x^2-x=ax+b$

$\therefore\ -2x+1=ax+b$

위 등식이 x에 대한 항등식이므로

$\therefore\ a=-2,\ b=1$

$\therefore\ b-a=1-(-2)=3$

정답_ ④

797

주어진 식의 양변에 $x^2(x+1)$을 곱하면

$x-3=ax(x+1)-b(x+1)-cx^2$

$x-3=ax^2+ax-bx-b-cx^2$

$\therefore\ x-3=(a-c)x^2+(a-b)x-b$

위 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-c=0,\ a-b=1,\ -b=-3 \qquad \therefore\ a=4,\ b=3,\ c=4$

$\therefore\ a+b+c=4+3+4=11$

정답_ 11

798

주어진 식의 양변에 $(x-1)^{10}$을 곱하면

$x^9-1=a_1(x-1)^9+a_2(x-1)^8+\cdots+a_9(x-1)$ …… ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면

$-1=-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9$ …… ㉡

㉠에 $x=2$를 대입하면

$2^9-1=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9$ …… ㉢

㉢−㉡을 하면

$2^9=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)$

$\therefore\ a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=2^8=256$

정답_ 256

799

$$\frac{2x^2-2x+3}{x-1}-\frac{2x^2+4x-1}{x+2}=\frac{2x(x-1)+3}{x-1}-\frac{2x(x+2)-1}{x+2}$$
$$=\left(2x+\frac{3}{x-1}\right)-\left(2x-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$=\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{3(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\frac{4x+5}{(x-1)(x+2)}$$

정답_ $\frac{4x+5}{(x-1)(x+2)}$

800

$$\frac{2x+5}{x+3}+\frac{x+4}{x+5}-\frac{2x+1}{x+1}-\frac{x+6}{x+7}$$
$$=\frac{2(x+3)-1}{x+3}+\frac{(x+5)-1}{x+5}-\frac{2(x+1)-1}{x+1}-\frac{(x+7)-1}{x+7}$$
$$=\left(2-\frac{1}{x+3}\right)+\left(1-\frac{1}{x+5}\right)-\left(2-\frac{1}{x+1}\right)-\left(1-\frac{1}{x+7}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+5}\right)$$
$$=\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{-2}{(x+7)(x+5)}$$
$$=\frac{2(x+7)(x+5)-2(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+7)(x+5)}$$
$$=\frac{16x+64}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}$$

따라서 $a=16,\ b=64$이므로

$a+b=16+64=80$

정답_ ⑤

801

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{3}{(x+1)(x+4)}+\frac{5}{(x+4)(x+9)}$$
$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+9}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+9}$$
$$=\frac{x+9-x}{x(x+9)}$$
$$=\frac{9}{x(x+9)}$$

따라서 $a=9,\ b=9$이므로

$a+b=9+9=18$

정답_ ⑤

802

$$f(x)=\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$

$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)$$
$$=\frac{50}{101}$$

따라서 $p=101,\ q=50$이므로

$p+q=101+50=151$

정답_ 151

803

밑면의 넓이가 $n(n+1)$이고 부피가 5로 일정하므로 직육면체 R_n의 높이는 $\frac{5}{n(n+1)}$이다.

T_n의 높이는 $\frac{5}{1\times2}+\frac{5}{2\times3}+\frac{5}{3\times4}+\cdots+\frac{5}{n(n+1)}$

따라서 T_{49}의 높이는

$$\frac{5}{1\times2}+\frac{5}{2\times3}+\frac{5}{3\times4}+\cdots+\frac{5}{49\times50}$$
$$=5\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\right)\right\}$$
$$=5\left(1-\frac{1}{50}\right)=\frac{49}{10}$$

정답_ $\frac{49}{10}$

804

(1) $$\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{(x+1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)}}{\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}}$$
$$=\frac{x+1+x-1}{x+1-(x-1)}$$
$$=\frac{2x}{2}=x$$

(2) $$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x^2-1}{x^2}}=\frac{x(x+1)}{x^2-1}$$
$$=\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{x}{x-1}$$

정답_ (1) x (2) $\frac{x}{x-1}$

805

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}$$
$$=1-\frac{1-x}{-x}$$
$$=1+\frac{1-x}{x}$$
$$=\frac{x+1-x}{x}$$
$$=\frac{1}{x}$$

따라서 $a=1$, $b=0$이므로

$a+b=1+0=1$

정답_ ②

806

$$\frac{26}{11}=2+\frac{4}{11}=2+\frac{1}{\frac{11}{4}}$$
$$=2+\frac{1}{2+\frac{3}{4}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{4}{3}}}$$
$$=2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

따라서 $a=2$, $b=2$, $c=1$, $d=3$이므로

$a+b+c+d=2+2+1+3=8$

정답_ 8

807

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\times\frac{1}{x}=3^2-2=7$

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\times\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=3^3-3\times3=18$

(3) $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2x^2\times\frac{1}{x^2}=7^2-2=47$

정답_ (1) 7 (2) 18 (3) 47

808

$x^2+4x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+4-\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x-\frac{1}{x}=-4$

따라서 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=(-4)^2+2=18$이므로

$$3x^2+5x+1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}=3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x-\frac{1}{x}\right)+1$$
$$=3\times18+5\times(-4)+1$$
$$=35$$

정답_ 35

809

$x^2+2x-1=0$에서 $x>0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+2-\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x-\frac{1}{x}=-2$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=(-2)^2+4=8$이므로

$x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$ ($\because x>0$)

한편, $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=(-2)^2+2=6$이므로

$$x^4-\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$=6\times2\sqrt{2}\times(-2)$$
$$=-24\sqrt{2}$$

정답_ $-24\sqrt{2}$

810

$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^3-1=0$ $\quad\therefore x^3=1$

또, $x^2+x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+1+\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x+\frac{1}{x}=-1$

$$\therefore x^{101}+\frac{1}{x^{101}}=(x^3)^{33}\times x^2+\frac{1}{(x^3)^{33}\times x^2}$$
$$=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$
$$=(-1)^2-2=-1$$

정답_ -1

참고 (1) $x^2+x+1=0$이 주어졌을 때

⇨ 양변에 $x-1$을 곱하여 $x^3=1$을 유도한다.

(2) $x^2-x+1=0$이 주어졌을 때

⇨ 양변에 $x+1$을 곱하여 $x^3=-1$을 유도한다.

811

$a+b+c=0$이므로

$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$

$\therefore\ a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)$

$=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\right)$

$=\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{c+b}{a}$

$=\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a}$

$=-3$

정답_ ①

다른 풀이

$a+b+c=0$이므로

$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$

$\therefore\ a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=a\times\frac{b+c}{bc}+b\times\frac{c+a}{ca}+c\times\frac{a+b}{ab}$

$=a\times\frac{-a}{bc}+b\times\frac{-b}{ca}+c\times\frac{-c}{ab}$

$=-\frac{a^2}{bc}-\frac{b^2}{ca}-\frac{c^2}{ab}$

$=-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

한편, 곱셈 공식의 변형에서

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=3abc$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\frac{3abc}{abc}=-3$

812

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=0$에서

$\frac{a+b+c}{abc}=0 \qquad \therefore\ a+b+c=0$

$\therefore\ \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}$

$=\frac{3abc}{abc}=3$

정답_ ②

813

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$에서

$\frac{ab+bc+ca}{abc}=0 \qquad \therefore\ ab+bc+ca=0$

$\therefore\ \frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$

$=\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$

정답_ 0

다른 풀이

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$에서

$\frac{ab+bc+ca}{abc}=0 \qquad \therefore\ ab+bc+ca=0$

이때 주어진 식의 분모는

$(a+b)(a+c)=a^2+ab+bc+ca=a^2$

$(b+c)(b+a)=b^2+ab+bc+ca=b^2$

$(c+a)(c+b)=c^2+ab+bc+ca=c^2$

$\therefore\ \frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$

$=\frac{a}{a^2}+\frac{b}{b^2}+\frac{c}{c^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

$=0$

814

(1) $x=2k,\ y=3k\ (k\neq0)$로 놓으면

$\frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{(2k)^2-(3k)^2}{(2k)^2+2k\times3k+(3k)^2}=\frac{-5k^2}{19k^2}=-\frac{5}{19}$

(2) $2x=y$에서 $x=\frac{y}{2}$, $3y=4z$에서 $z=\frac{3}{4}y$

$\therefore\ x:y:z=\frac{y}{2}:y:\frac{3}{4}y=2:4:3$

$x=2k,\ y=4k,\ z=3k\ (k\neq0)$로 놓으면

$\frac{y^2+z^2-x^2}{(y+z+x)^2}=\frac{(4k)^2+(3k)^2-(2k)^2}{(4k+3k+2k)^2}=\frac{21k^2}{81k^2}=\frac{7}{27}$

(3) $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}=\frac{6x-4y+2z}{a}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x=3k,\ y=2k,\ z=4k$ …… ㉠

$6x-4y+2z=ak$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$18k-8k+8k=ak,\ 18k=ak$

$\therefore\ a=18$

정답_ (1) $-\frac{5}{19}$ (2) $\frac{7}{27}$ (3) 18

815

$\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}+\frac{z+x}{5}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x+y=3k,\ y+z=4k,\ z+x=5k$ …… ㉠

세 식을 변끼리 더하면 $2(x+y+z)=12k$

$\therefore\ x+y+z=6k$ …… ㉡

㉡에서 ㉠의 세 식을 각각 빼면

$z=3k,\ x=2k,\ y=k$

$\therefore\ \frac{3xy+4yz+5zx}{x^2-y^2}=\frac{3\times2k\times k+4\times k\times3k+5\times3k\times2k}{(2k)^2-k^2}$

$=\frac{48k^2}{3k^2}=16$

정답_ ②

816

$(a+b):(b+c):(c+a)=2:3:4$에서

$a+b=2k,\ b+c=3k,\ c+a=4k\ (k\neq0)$ …… ㉠

로 놓고 세 식을 변끼리 더하면 $2(a+b+c)=9k$

$\therefore a+b+c=\frac{9}{2}k$ …… ㉡

㉡에서 ㉠의 세 식을 각각 빼면

$c=\frac{5}{2}k,\ a=\frac{3}{2}k,\ b=\frac{1}{2}k$

$$\therefore \frac{ab-bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{\frac{3}{2}k\times\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}k\times\frac{5}{2}k+\frac{5}{2}k\times\frac{3}{2}k}{\left(\frac{3}{2}k\right)^2+\left(\frac{1}{2}k\right)^2+\left(\frac{5}{2}k\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{13}{4}k^2}{\frac{35}{4}k^2}=\frac{13}{35}$$

정답_ $\frac{13}{35}$

817

$\frac{3b+2c}{a}=\frac{2c+a}{3b}=\frac{a+3b}{2c}=k\ (k\neq0)$에서

$3b+2c=ak,\ 2c+a=3bk,\ a+3b=2ck$

세 식을 변끼리 더하면

$2(a+3b+2c)=(a+3b+2c)k$

(i) $a+3b+2c\neq0$일 때

$k=2$

(ii) $a+3b+2c=0$일 때

$3b+2c=-a,\ 2c+a=-3b,\ a+3b=-2c$

이므로 주어진 식에 대입하면

$\frac{-a}{a}=\frac{-3b}{3b}=\frac{-2c}{2c}=k \quad \therefore k=-1$

(i), (ii)에서 모든 상수 k의 값의 합은

$2+(-1)=1$

정답_ ③

818

$\frac{2x+2y}{5x+6y}=\frac{1}{2}$에서

$4x+4y=5x+6y \quad \therefore x=-2y$

$$\therefore \frac{3x^2+2xy-3y^2}{x^2+y^2}=\frac{3\times(-2y)^2+2\times(-2y)\times y-3y^2}{(-2y)^2+y^2}$$

$$=\frac{5y^2}{5y^2}=1$$

정답_ ②

819

$\begin{cases} x-y+z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3y+z=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡$-$㉠을 하면 $x-2y=0$

$\therefore x=2y$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$2y-y+z=0 \quad \therefore z=-y$

$$\therefore \frac{x^2-y^2+2z^2}{3xy+yz-2zx}=\frac{(2y)^2-y^2+2\times(-y)^2}{3\times2y\times y+y\times(-y)-2\times(-y)\times2y}$$

$$=\frac{5y^2}{9y^2}=\frac{5}{9}$$

정답_ ③

820

$\frac{x^2-3xy-y^2}{x^2-3xy-5y^2}=-3$에서

$x^2-3xy-y^2=-3(x^2-3xy-5y^2)$

$=-3x^2+9xy+15y^2$

$4x^2-12xy-16y^2=0,\ 4(x+y)(x-4y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=4y$

(i) $x=-y$일 때

$xy=(-y)y=-y^2\le0$

이것은 $xy>0$에 모순이므로 $x\neq-y$

(ii) $x=4y$일 때

$xy=(4y)y=4y^2>0\ (\because y\neq0)$

(i), (ii)에서 $x=4y$

$\therefore \frac{3x+4y}{x-3y}=\frac{3\times4y+4y}{4y-3y}=\frac{16y}{y}=16$

정답_ 16

821

6월까지의 관객 수를 a라고 하면 7월 첫째 주 동안 관객 수가 x % 증가하였으므로 첫째 주까지의 관객 수는

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$

둘째 주 동안 y % 증가하였으므로 둘째 주까지의 관객 수는

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{y}{100}\right)$ …… ㉠

2주 동안의 관객 수의 증가율을 z %라고 하면 7월 둘째 주까지의 관객 수는

$a\left(1+\frac{z}{100}\right)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a\left(1+\frac{z}{100}\right)=a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{y}{100}\right)$

$1+\frac{z}{100}=1+\frac{x}{100}+\frac{y}{100}+\frac{xy}{10000}$

$\therefore z=x+y+\frac{xy}{100}$

따라서 2주 동안의 관객 수의 증가율은 $\left(x+y+\frac{xy}{100}\right)$ %이다.

정답_ ③

822

농도가 a %인 소금물 100 g에 녹아 있는 소금의 양은

$100\times\frac{a}{100}=a$ (g)

농도가 b %인 소금물 200 g에 녹아 있는 소금의 양은

$200\times\frac{b}{100}=2b$ (g)

따라서 농도가 p %인 소금물 300 g에 녹아 있는 소금의 양은

$a+2b$ (g)

$\therefore p=\frac{a+2b}{300}\times100=\frac{a+2b}{3}$

농도가 a %인 소금물 200 g에 녹아 있는 소금의 양은

$200\times\frac{a}{100}=2a$ (g)

농도가 b %인 소금물 100 g에 녹아 있는 소금의 양은

$100\times\frac{b}{100}=b\,(\mathrm{g})$

따라서 농도가 q %인 소금물 300 g에 녹아 있는 소금의 양은 $2a+b\,(\mathrm{g})$

$\therefore q=\frac{2a+b}{300}\times100=\frac{2a+b}{3}$

$p:q=2:3$에서 $\frac{a+2b}{3}:\frac{2a+b}{3}=2:3$

$(a+2b):(2a+b)=2:3$

$3a+6b=4a+2b \qquad \therefore a=4b$

$\therefore \frac{3a^2+4b^2}{ab}=\frac{3\times(4b)^2+4b^2}{4b\times b}=\frac{52b^2}{4b^2}=13$

정답_ ③

823

A채널과 B채널을 구독하는 한국인의 비가 3 : 4이므로 A채널과 B채널을 구독하는 한국인의 수를 각각 $3a$, $4a$ $(a\neq0)$로 놓을 수 있다.

A채널과 B채널을 구독하는 외국인의 비가 3 : 2이므로 A채널과 B채널을 구독하는 외국인의 수를 각각 $3b$, $2b$ $(b\neq0)$로 놓을 수 있다.

	한국인의 수	외국인의 수	합계
A채널	$3a$	$3b$	$3a+3b$
B채널	$4a$	$2b$	$4a+2b$

A채널과 B채널의 전체 구독자 수의 비가 4 : 3이므로

$(3a+3b):(4a+2b)=4:3$

$9a+9b=16a+8b \qquad \therefore b=7a$

따라서 A채널을 구독하는 한국인과 외국인의 비는

$3a:3b=3a:21a=1:7$

이므로 $m=1$, $n=7$

$\therefore m+n=1+7=8$

정답_ ⑤

824

A의 가로의 길이는 2, 세로의 길이는 a, 광원의 높이는 $2a$이므로 A의 실지수는

$\frac{2a}{2a(2+a)}=\frac{1}{2+a}$

B의 가로의 길이는 4, 세로의 길이는 $2a$, 광원의 높이는 a이므로 B의 실지수는

$\frac{8a}{a(4+2a)}=\frac{4}{2+a}=4\times\frac{1}{2+a}$

따라서 B의 실지수가 A의 실지수의 4배이므로

$k=4$

정답_ ④

825

ㄷ. $k>0$이면 그래프는 제1사분면과 제3사분면을 지난다. (거짓)

ㅁ. $|k|$의 값이 클수록 그래프는 원점에서 멀어진다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

정답_ ㄱ, ㄴ, ㄹ

826

두 함수 $y=\frac{a}{x}$, $y=\frac{b}{x}$의 그래프는 제2사분면을 지나므로

$a<0$, $b<0$

이때 함수 $y=\frac{a}{x}$의 그래프가 함수 $y=\frac{b}{x}$의 그래프보다 원점에서 더 멀리 떨어져 있으므로

$|a|>|b|$

$\therefore a<b<0$ …… ㉠

두 함수 $y=\frac{c}{x}$, $y=\frac{d}{x}$의 그래프는 제1사분면을 지나므로

$c>0$, $d>0$

이때 함수 $y=\frac{d}{x}$의 그래프가 함수 $y=\frac{c}{x}$의 그래프보다 원점에서 더 멀리 떨어져 있으므로

$d>c$

$\therefore 0<c<d$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a<b<c<d$

정답_ ①

827

두 점 A(0, 3), B(a, 0)에 대하여 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점을 P라고 하면

$\mathrm{P}\left(\frac{1\times a+2\times0}{1+2}, \frac{1\times0+2\times3}{1+2}\right) \qquad \therefore \mathrm{P}\left(\frac{a}{3}, 2\right)$

이때 점 $\mathrm{P}\left(\frac{a}{3}, 2\right)$가 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프 위에 있으므로

$2=\frac{2}{\frac{a}{3}}$, $\frac{a}{3}=1$

$\therefore a=3$

정답_ 3

828

함수 $y=\frac{a}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y-2=\frac{a}{x-3} \qquad \therefore y=\frac{a}{x-3}+2$

이 함수의 그래프가 점 (4, 7)을 지나므로

$7=\frac{a}{4-3}+2 \qquad \therefore a=5$

정답_ ⑤

829

$y=\frac{3x-1}{x-1}=\frac{3(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+3$

이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$p=1$, $q=3$

$\therefore p+q=1+3=4$

정답_ 4

다른 풀이

함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면

$y-q=\frac{2}{x-p}$　　$\therefore y=\frac{2}{x-p}+q=\frac{qx-pq+2}{x-p}$

이 함수의 그래프가 함수 $y=\frac{3x-1}{x-1}$의 그래프와 일치해야 하므로

$p=1,\ q=3,\ -pq+2=-1$

$\therefore p+q=1+3=4$

830

함수 $y=\frac{bx-5}{x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$y+3=\frac{b(x+2)-5}{x+2+a}=\frac{bx+2b-5}{x+2+a}$

$\therefore y=\frac{bx+2b-5}{x+2+a}-3$

$=\frac{bx+2b-5-3(x+2+a)}{x+2+a}$

$=\frac{(b-3)x+2b-3a-11}{x+2+a}$

이 함수의 그래프가 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프와 일치해야 하므로

$b-3=0,\ 2b-3a-11=1,\ 2+a=0$

$\therefore a=-2,\ b=3$

$\therefore a+b=-2+3=1$

정답_ 1

831

어떤 함수의 그래프가 함수 $y=\frac{1}{2x}$의 그래프와 평행이동에 의하여 겹쳐지려면 그 그래프의 식은 $y=\frac{1}{2(x-p)}+q$ (p, q는 상수)의 꼴이어야 한다.

ㄱ. $y=\frac{1}{2x-2}=\frac{1}{2(x-1)}$

ㄴ. $y=\frac{4x+1}{2x}=\frac{1}{2x}+2$

ㄷ. $y=\frac{x-5}{2-2x}=\frac{(x-1)-4}{-2(x-1)}=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{\frac{1}{2}(x-1)}-\frac{1}{2}$

ㄹ. $y=\frac{4x-7}{2x-4}=\frac{2(2x-4)+1}{2x-4}=\frac{1}{2(x-2)}+2$

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=\frac{1}{2x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

정답_ ⑤

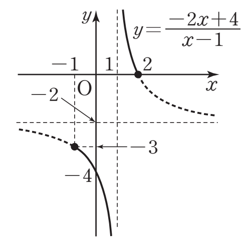
832

$y=\frac{-2x+4}{x-1}=\frac{-2(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}-2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x<1$ 또는 $1<x\le 2$에서 함수 $y=\frac{-2x+4}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\{y\,|\,y\le -3$ 또는 $y\ge 0\}$



정답_ ④

833

$y=\frac{ax+5}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+5}{x+b}=\frac{-ab+5}{x+b}+a$

이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\ne -b$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ne a\}$인 실수이다.

따라서 $a=6,\ b=3$이므로

$ab=6\times 3=18$

정답_ ⑤

834

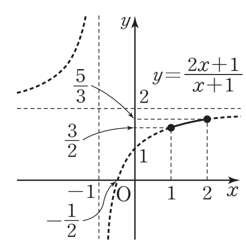
$y=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2(x+1)-1}{x+1}=-\frac{1}{x+1}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $\frac{3}{2}\le y\le \frac{5}{3}$에서 함수 $y=\frac{2x+1}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$a=1,\ b=2$

$\therefore ab=1\times 2=2$



정답_ 2

835

함수 $y=\frac{2}{x-5}+a$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=5,\ y=a$이므로

$a=3,\ b=5$

$\therefore b-a=5-3=2$

정답_ ②

836

$y=\frac{-5x+3}{x+a}=\frac{-5(x+a)+5a+3}{x+a}=\frac{5a+3}{x+a}-5$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=-5$　　$\therefore a=4,\ b=-5$

$\therefore a+b=4+(-5)=-1$

정답_ ②

837

점근선의 방정식이 $x=-2,\ y=3$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+2}+3\ (k\ne 0)$ ······ ㉠

으로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$1=\frac{k}{3+2}+3 \qquad \therefore k=-10$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-10}{x+2}+3=\frac{-10+3(x+2)}{x+2}=\frac{3x-4}{x+2}$

따라서 $a=3$, $b=-4$, $c=2$이므로

$a+b+c=3+(-4)+2=1$

정답_ ①

다른 풀이

$y=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$1=\frac{3a+b}{3+c} \qquad \therefore 3a+b=3+c$ …… ㉠

$y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\frac{b-ac}{x+c}+a$

의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-c$, $y=a$이므로

$a=3$, $c=2$

이 값을 ㉠에 대입하면

$9+b=3+2 \qquad \therefore b=-4$

$\therefore a+b+c=3+(-4)+2=1$

838

점근선의 방정식이 $x=1$, $y=-3$이므로

$f(x)=\frac{k}{x-1}-3\ (k\neq 0)$ …… ㉠

으로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프의 y절편이 -1이므로

$-1=\frac{k}{0-1}-3 \qquad \therefore k=-2$

이 값을 ㉠에 대입하면

$f(x)=\frac{-2}{x-1}-3=\frac{-2-3(x-1)}{x-1}=\frac{-3x+1}{x-1}$

$\therefore f(2)=\frac{-3\times 2+1}{2-1}=-5$

정답_ -5

839

곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$이 x축과 만나는 점은

$0=\frac{k}{x-2}+1$에서 $x=2-k$이므로

$A(2-k,\ 0)$

곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$이 y축과 만나는 점은

$y=\frac{k}{0-2}+1$에서 $y=-\frac{k}{2}+1$이므로

$B\left(0,\ -\frac{k}{2}+1\right)$

곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$의 두 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=1 \qquad \therefore C(2,\ 1)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 두 직선 AC, BC의 기울기가 서로 같아야 하므로

$\frac{1-0}{2-(2-k)}=\frac{1-\left(-\frac{k}{2}+1\right)}{2-0}$

$\frac{1}{k}=\frac{k}{4}$, $k^2=4$

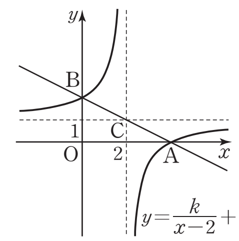
이때 $k<0$이므로 $k=-2$

정답_ ④

다른 풀이

함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$ ($k\neq 0$, k, p, q는 상수)의 그래프는 두 점근선 $x=p$, $y=q$의 교점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다. 그러므로 점 $(p,\ q)$를 지나는 직선이 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나면 두 교점은 항상 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.

따라서 곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$ $(k<0)$의 두 점근선의 교점 C(2, 1)과 곡선 위의 두 점 A, B가 한 직선 위에 있으려면 두 점 A, B는 점 C에 대하여 대칭이어야 한다.



두 점 A, B가 각각 x축, y축 위의 점이므로 두 점을 각각 $A(a,\ 0)$, $B(0,\ b)$로 놓으면 점 C가 선분 AB의 중점이므로

$\frac{a+0}{2}=2$, $\frac{0+b}{2}=1$

$\therefore a=4$, $b=2$

따라서 곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$이 점 $A(4,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{4-2}+1 \qquad \therefore k=-2$

840

$y=\frac{3x+5}{x+2}=\frac{3(x+2)-1}{x+2}=-\frac{1}{x+2}+3$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-2$, $y=3$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-2,\ 3)$에 대하여 대칭이므로

$p=-2$, $q=3$

또, 직선 $y=x+a$가 점 $(-2,\ 3)$을 지나므로

$3=-2+a \qquad \therefore a=5$

$\therefore a+p+q=5-2+3=6$

정답_ ④

841

함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이므로

$y=\frac{k}{x-2}+1\ (k\neq 0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(3,\ 3)$을 지나므로

$3=\frac{k}{3-2}+1 \qquad \therefore k=2$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{2}{x-2}+1=\frac{2+x-2}{x-2}=\frac{x}{x-2}$

따라서 $a=1$, $b=0$, $c=-2$이므로

$a+b-c=1+0-(-2)=3$

정답_ 3

842

함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$y=\frac{1}{x-2}-3$

이때 함수 $y=\frac{1}{x-2}-3$의 그래프는 점 $(2,\ -3)$을 지나고 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 대칭이다.

점 $(2,\ -3)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-(-3)=x-2 \qquad \therefore y=x-5$

점 $(2,\ -3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-(-3)=-(x-2) \qquad \therefore y=-x-1$

$\therefore a+b+c+d=1+(-5)+(-1)+(-1)=-6$

정답_ -6

843

주어진 함수의 그래프가 두 직선 $y=x+2$, $y=-x+4$에 대하여 대칭이므로 이 두 직선의 교점은 주어진 함수의 그래프의 두 점근선의 교점과 같다.

두 식 $y=x+2$, $y=-x+4$를 연립하여 풀면

$x=1$, $y=3$

따라서 주어진 함수의 식은

$y=\frac{k}{x-1}+3\ (k\neq0)$

으로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(2,\ 7)$을 지나므로

$7=\frac{k}{2-1}+3 \qquad \therefore k=4$

$\therefore y=\frac{4}{x-1}+3=\frac{4+3(x-1)}{x-1}=\frac{3x+1}{x-1}$

따라서 $a=3$, $b=1$, $c=-1$이므로

$abc=3\times1\times(-1)=-3$

정답_ -3

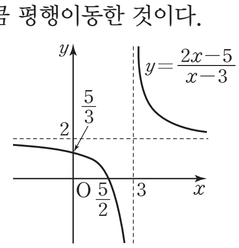
참고 유리함수 $y=f(x)$의 그래프가 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 대칭이고 두 직선의 교점의 좌표가 $(p,\ q)$일 때 유리함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이고, 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.

844

$y=\frac{2x-5}{x-3}=\frac{2(x-3)+1}{x-3}=\frac{1}{x-3}+2$

이므로 함수 $y=\frac{2x-5}{x-3}$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\frac{2x-5}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다.



정답_ ③

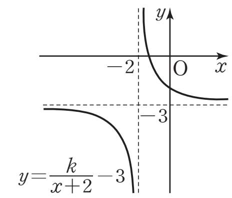
845

함수 $y=\frac{k}{x+2}-3$의 그래프는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\frac{k}{x+2}-3$의 그래프는 k의 값의 부호에 따라 다음과 같이 2가지 경우가 있다.

(i) $k>0$일 때

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\frac{k}{x+2}-3$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작거나 같아야 하므로

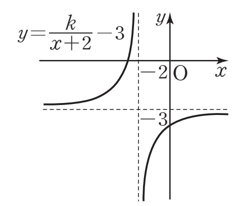


$\frac{k}{2}-3\leq0$, $k\leq6$

$\therefore 0<k\leq6$

(ii) $k<0$일 때

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\frac{k}{x+2}-3$의 그래프는 항상 제1사분면을 지나지 않는다.

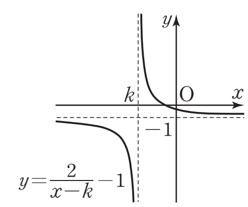


(i), (ii)에서

$k<0$ 또는 $0<k\leq6$ …… ㉠

함수 $y=\frac{2}{x-k}-1$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\frac{2}{x-k}-1$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $k<0$이고 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작거나 같아야 하므로



$\frac{2}{-k}-1\leq0$, $-k\geq2$ ($\because k<0$)

$\therefore k\leq-2$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$k\leq-2$

정답_ $k\leq-2$

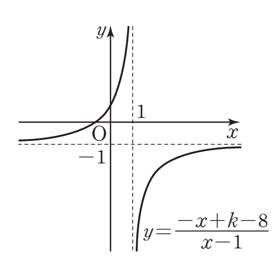
846

$y=\frac{-x+k-8}{x-1}=\frac{-(x-1)+k-9}{x-1}=\frac{k-9}{x-1}-1$

이므로 함수 $y=\frac{-x+k-8}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{k-9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림과 같이 이 함수의 그래프가 제2사분면을 지나려면

$k-9<0$, 즉 $k<9$이고, $x=0$에서의 함숫값이 0보다 커야 하므로



$\frac{k-8}{-1}>0 \qquad \therefore k<8$

즉, $k<9$이고 $k<8$이므로

$k<8$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3, …, 7의 7개이다.

정답_ ②

847

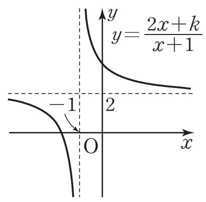
$y=\dfrac{2x+k}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+k-2}{x+1}=\dfrac{k-2}{x+1}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x+k}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{k-2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수의 그래프가 지나지 않는 사분면이 존재하는 경우는 다음의 2가지 경우이다.

(i) $k-2>0$, 즉 $k>2$일 때

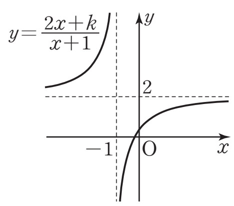
오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{2x+k}{x+1}$의 그래프는 항상 제4사분면을 지나지 않는다.



(ii) $k-2<0$, 즉 $k<2$일 때

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{2x+k}{x+1}$의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로

$k\ge 0 \qquad \therefore\ 0\le k<2$



(i), (ii)에서 $0\le k<2$ 또는 $k>2$일 때 함수 $y=\dfrac{2x+k}{x+1}$의 그래프가 지나지 않는 사분면이 존재하게 되므로 k의 최솟값은 0이다.

정답_ 0

848

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=-2$이므로 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x+1}-2\ (k\neq 0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

$\therefore\ p=1,\ q=-2$

㉠의 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$-3=\dfrac{k}{0+1}-2 \qquad \therefore\ k=-1$

$\therefore\ kpq=(-1)\times 1\times(-2)=2$

정답_ 2

849

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-2}+1\ (k\neq 0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{1-2}+1 \qquad \therefore\ k=1$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{1}{x-2}+1=\dfrac{1+x-2}{x-2}=\dfrac{x-1}{x-2}$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=-1$이므로

$a+b+c=1+(-2)+(-1)=-2$

정답_ ①

850

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=c$이므로

$a>0$, $c<0$

함수 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프가 제2, 4사분면을 지나므로

$b<0$

ㄱ. $a>0$, $b<0$이므로 $b-a<0$ (거짓)

ㄴ. $a>0$, $c<0$이므로 $ac<0$ (참)

ㄷ. $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=-\dfrac{b}{a}+c \qquad \therefore\ b=ac$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

851

③ 함수 $y=\dfrac{k}{x-a}+b\ (k\neq 0)$의 그래프는 점 $(a,\ b)$를 지나고 기울기가 ± 1인 두 직선 $y-b=\pm(x-a)$, 즉 $y=x-a+b$, $y=-x+a+b$에 대하여 대칭이다. (참)

④ $k>0$이면 $x>a$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하지만, $k<0$이면 $x>a$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

정답_ ④

852

$y=\dfrac{-3x+7}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}-3$ …… ㉠

① ㉠의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. (참)

② ㉠의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-3$이다. (참)

③ $y=\dfrac{-3x+7}{x-2}$에 $y=0$을 대입하면

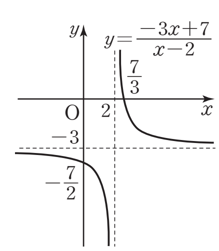
$0=\dfrac{-3x+7}{x-2}$, $-3x+7=0 \qquad \therefore\ x=\dfrac{7}{3}$

따라서 x축과 만나는 점은 $\left(\dfrac{7}{3},\ 0\right)$이다. (참)

④ ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3, 4사분면을 지난다. (거짓)

⑤ 치역은 $\{y\,|\,y\neq -3$인 실수$\}$이다. (참)

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.



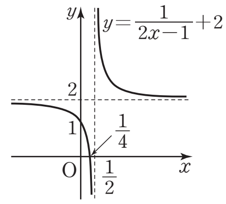
정답_ ④

853

ㄱ. $y=\dfrac{1}{2x-1}+2=\dfrac{1}{2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}+2$ …… ㉠

이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$이다. (거짓)

ㄴ. ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4사분면을 지난다. (참)



ㄷ. ㉠의 그래프는 점 $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$를 지나고 기울기가 ±1인 두 직선

$y-2=\pm\left(x-\frac{1}{2}\right)$, 즉 $y=x+\frac{3}{2}$,

$y=-x+\frac{5}{2}$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄹ. ㉠의 그래프는 $y=\frac{1}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ③

854

ㄱ. 함수 $f(x)=\frac{3x+m}{x+m}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-m$인 실수$\}$이므로

$-m=2 \qquad \therefore m=-2$

$\therefore f(1)=\frac{3-2}{1-2}=-1$ (거짓)

ㄴ. $y=\frac{3x+m}{x+m}=\frac{3(x+m)-2m}{x+m}=\frac{-2m}{x+m}+3$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-m$, $y=3$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-m,\ 3)$을 지나고 기울기가 ±1인 두 직선 $y-3=\pm(x+m)$, 즉 $y=x+m+3$, $y=-x-m+3$에 대하여 대칭이다.

이때 $-m+3=2$에서 $m=1$이므로 직선 $y=x+m+3$, 즉 $y=x+4$에 대해서도 대칭이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=\frac{3x+m}{x+m}$의 그래프가 항상 지나는 점을 $(\alpha,\ \beta)$라고 하면 $m\neq0$인 모든 실수 m에 대하여

$\beta=\frac{3\alpha+m}{\alpha+m}$, $\alpha\beta+\beta m=3\alpha+m$

$(\beta-1)m+\alpha\beta-3\alpha=0$

즉, $\beta-1=0$, $\alpha\beta-3\alpha=0$에서

$\alpha=0$, $\beta=1$

따라서 $m\neq0$인 모든 실수 m에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

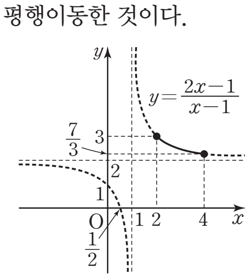
정답_ ④

855

$y=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+2$

이므로 함수 $y=\frac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le4$에서 함수 $y=\frac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일 때 최댓값 $M=3$, $x=4$일 때 최솟값 $m=\frac{7}{3}$을 갖는다.

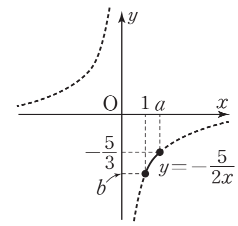


$\therefore M-3m=3-3\times\frac{7}{3}=-4$

정답_ ②

856

$1\le x\le a$에서 함수 $y=-\frac{5}{2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$일 때 최솟값 b, $x=a$일 때 최댓값 $-\frac{5}{3}$를 갖는다.



즉, $b=-\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{3}=-\frac{5}{2a}$이므로

$a=\frac{3}{2} \qquad \therefore a+b=\frac{3}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)=-1$

정답_ ②

857

함수 $y=\frac{k}{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=b$

조건 ㈎에 의하여 두 점근선의 교점 $(-a,\ b)$가 두 직선 $y=x+3$, $y=-x-1$ 위의 점이므로

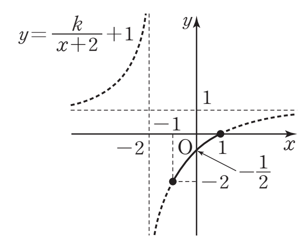
$b=-a+3$, $b=a-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

즉, 함수 $y=\frac{k}{x+a}+b$의 그래프는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le1$에서 함수 $y=\frac{k}{x+2}+1$ $(k<0)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 조건 ㈏에 의하여 $x=1$일 때 최댓값 0을 가지므로



$0=\frac{k}{1+2}+1 \qquad \therefore k=-3$

정답_ -3

858

함수 $y=-\frac{2}{x}+2$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 한 점에서 만나려면 방정식 $-\frac{2}{x}+2=2x+k$, 즉 $2x^2+(k-2)x+2=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(k-2)^2-4\times2\times2=0$

$k^2-4k-12=0$, $(k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=6$

따라서 주어진 함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은

$-2+6=4$

정답_ 4

859

$A\cap B=\varnothing$이므로 함수 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=mx+1$이 만나지 않아야 한다.

방정식 $\frac{x+1}{x-1}=mx+1$에서 $x+1=mx^2+x-mx-1$

$\therefore mx^2-mx-2=0$ ······ ㉠

㉠의 실근이 존재하지 않아야 하므로

(i) $m\neq 0$일 때

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$D=(-m)^2-4\times m\times(-2)<0$

$m(m+8)<0$ $\quad\therefore -8<m<0$

(ii) $m=0$일 때

㉠에 $m=0$을 대입하면 $-2=0$이므로 ㉠의 실근이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

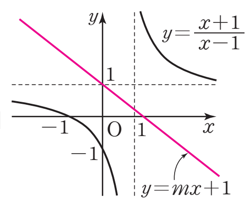
$-8<m\leq 0$

정답_ ④

참고 $y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$

이므로 함수 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=mx+1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지난다.

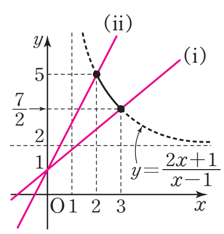
이때 $m=0$이면 직선 $y=1$이고, 이 직선은 함수 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프의 점근선이므로 함수 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프와 만나지 않는다.



860

$y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$

이므로 $2\leq x\leq 3$에서 함수 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=kx+1$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지난다.



(i) 직선 $y=kx+1$이 점 $\left(3, \frac{7}{2}\right)$을 지날 때

$\frac{7}{2}=3k+1$ $\quad\therefore k=\frac{5}{6}$

(ii) 직선 $y=kx+1$이 점 $(2, 5)$를 지날 때

$5=2k+1$ $\quad\therefore k=2$

(i), (ii)에서 함수 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=kx+1$이 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$\frac{5}{6}\leq k\leq 2$

따라서 $M=2$, $m=\frac{5}{6}$이므로

$Mm=2\times\frac{5}{6}=\frac{5}{3}$

정답_ $\frac{5}{3}$

861

함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+1$의 교점의 x좌표는

$-\frac{2}{x}=-x+1$에서

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 $A(-1, 2)$, $B(2, -1)$이라고 하면

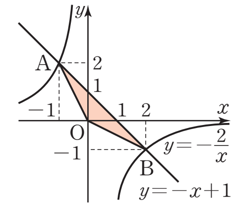
$\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{2}$

원점과 직선 $y=-x+1$, 즉

$x+y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$



정답_ ②

862

$P\left(k, \frac{3}{k}\right)$이라고 하면 두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이므로

$Q\left(-k, -\frac{3}{k}\right)$ $\quad\therefore R\left(k, -\frac{3}{k}\right)$

$\overline{QR}=|k-(-k)|=|2k|$,

$\overline{PR}=\left|-\frac{3}{k}-\frac{3}{k}\right|=\left|\frac{6}{k}\right|$

이므로

$\triangle PQR=\frac{1}{2}\times|2k|\times\left|\frac{6}{k}\right|=6$

정답_ 6

863

$P\left(a, \frac{1}{a-1}\right)$, $Q(a, -9a)$이므로

$\overline{PQ}=\frac{1}{a-1}+9a=\frac{1}{a-1}+9(a-1)+9$

이때 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{a-1}+9(a-1)+9\geq 2\sqrt{\frac{1}{a-1}\times 9(a-1)}+9$

$=2\times 3+9=15$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{1}{a-1}=9(a-1)\text{, 즉 } a=\frac{4}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 15이다.

정답_ ④

864

$P\left(k, \frac{4}{k-1}+2\right)$ $(k>1)$라고 하면

$Q(k, 2)$, $R\left(1, \frac{4}{k-1}+2\right)$

$\therefore \overline{RP}=k-1$, $\overline{PQ}=\frac{4}{k-1}+2-2=\frac{4}{k-1}$

즉, 직사각형 RSQP의 둘레의 길이는

$2\overline{RP}+2\overline{PQ}=2(k-1)+\frac{8}{k-1}$

이때 $k-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2(k-1)+\frac{8}{k-1}\geq 2\sqrt{2(k-1)\times\frac{8}{k-1}}$

$=2\times 4=8$

$\left(\text{단, 등호는 } 2(k-1)=\frac{8}{k-1}\text{, 즉 } k=3\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 직사각형 RSQP의 둘레의 길이의 최솟값은 8이다.

정답_ 8

865

함수 $y=\frac{4}{x-a}-4$ $(a>1)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=a$, $y=-4$이므로

$C(a,\ -4)$

함수 $y=\frac{4}{x-a}-4$의 그래프가 x축과 만나는 점은

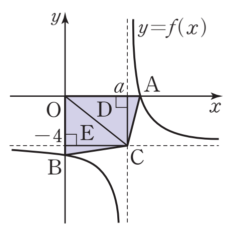
$0=\frac{4}{x-a}-4$에서 $x=a+1$이므로

$A(a+1,\ 0)$

함수 $y=\frac{4}{x-a}-4$의 그래프가 y축과 만나는 점은

$y=\frac{4}{0-a}-4$에서 $y=-\frac{4}{a}-4$이므로

$B\left(0,\ -\frac{4}{a}-4\right)$



함수 $y=f(x)$의 그래프와 사각형 OBCA는 오른쪽 그림과 같으므로 사각형 OBCA의 넓이를 S라고 하면 S는 삼각형 OCA의 넓이와 삼각형 OBC의 넓이의 합과 같다.

점 C에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 하면

$$S=\triangle OCA+\triangle OBC=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{CD}+\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{CE}$$
$$=\frac{1}{2}\times(a+1)\times4+\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{a}+4\right)\times a$$
$$=4a+4$$

이때 OBCA의 넓이가 24이므로

$4a+4=24$ $\quad\therefore a=5$

정답_ ⑤

866

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}-1}=\dfrac{1}{\dfrac{1-(x-1)}{x-1}}=\dfrac{x-1}{2-x}$

$(f\circ f)(k)=1$에서 $\frac{k-1}{2-k}=1$

$k-1=2-k$ $\quad\therefore k=\frac{3}{2}$

정답_ $\frac{3}{2}$

867

$f^1(x)=f(x)=\frac{x}{1-x}$

$f^2(x)=f(f(x))=\dfrac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}$

$f^3(x)=f(f^2(x))=\dfrac{\dfrac{x}{1-2x}}{1-\dfrac{x}{1-2x}}=\dfrac{x}{1-3x}$

$\vdots$

$\therefore f^n(x)=\frac{x}{1-nx}$

따라서 $f^{30}(x)=\frac{x}{1-30x}$이므로

$a=1$, $b=0$, $c=-30$

$\therefore a+b+c=1+0+(-30)=-29$

정답_ ②

868

$f^1(x)=f(x)=-\frac{1}{2x}+1=\frac{2x-1}{2x}$

$f^2(x)=f(f^1(x))=\dfrac{2\times\dfrac{2x-1}{2x}-1}{2\times\dfrac{2x-1}{2x}}=\dfrac{x-1}{2x-1}$

$f^3(x)=f(f^2(x))=\dfrac{2\times\dfrac{x-1}{2x-1}-1}{2\times\dfrac{x-1}{2x-1}}=\dfrac{-1}{2x-2}$

$f^4(x)=f(f^3(x))=\dfrac{2\times\dfrac{-1}{2x-2}-1}{2\times\dfrac{-1}{2x-2}}=x$

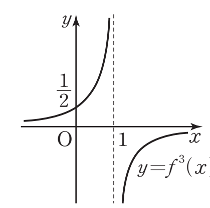
$\vdots$

이므로 자연수 k에 대하여 $f^n(x)=\begin{cases}\frac{2x-1}{2x} & (n=4k-3)\\ \frac{x-1}{2x-1} & (n=4k-2)\\ \frac{-1}{2x-2} & (n=4k-1)\\ x & (n=4k)\end{cases}$

ㄱ. $f^3(x)=\frac{-1}{2x-2}=-\frac{1}{2(x-1)}$이므로

함수 $y=f^3(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 제3사분면을 지나지 않는다. (참)



ㄴ. $f^n(x)=x$를 만족시키는 최소의 자연수 n의 값은 4이다. (참)

ㄷ. $10=4\times3-2$이므로 $f^{10}(x)=f^2(x)=\frac{x-1}{2x-1}$

즉, $a=1$, $b=-1$, $c=2$, $d=-1$이므로

$a+b+c+d=1+(-1)+2+(-1)=1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ③

869

$f^1(100)=\frac{99}{100}$

$f^2(100)=f(f(100))=f\left(\frac{99}{100}\right)=\dfrac{\dfrac{99}{100}-1}{\dfrac{99}{100}}=\dfrac{-\dfrac{1}{100}}{\dfrac{99}{100}}=-\dfrac{1}{99}$

$f^3(100)=f(f^2(100))=f\left(-\frac{1}{99}\right)=\dfrac{-\dfrac{1}{99}-1}{-\dfrac{1}{99}}=\dfrac{-\dfrac{100}{99}}{-\dfrac{1}{99}}=100$

$f^4(100)=f(f^3(100))=f(100)=\frac{99}{100}$

$\vdots$

이므로 자연수 k에 대하여 $f^n(100)=\begin{cases}\frac{99}{100} & (n=3k-2)\\ -\frac{1}{99} & (n=3k-1)\\ 100 & (n=3k)\end{cases}$

이때 $100=3\times34-2$이므로

$f^{100}(100)=f(100)=\frac{99}{100}$

정답_ $\frac{99}{100}$

870

$y=\dfrac{x+2}{3x+a}$로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$3xy+ay=x+2$, $(3y-1)x=-ay+2$

$\therefore x=\dfrac{-ay+2}{3y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{-ax+2}{3x-1}$ $\quad\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-ax+2}{3x-1}$

이때 $f(x)=\dfrac{x+2}{3x+a}$와 $f^{-1}(x)=\dfrac{-ax+2}{3x-1}$가 일치하므로

$a=-1$

정답_ ②

다른 풀이

$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$

$f(x)=\dfrac{x+2}{3x+a}$에서

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\dfrac{x+2}{3x+a}\right)$$
$$=\dfrac{\dfrac{x+2}{3x+a}+2}{3\left(\dfrac{x+2}{3x+a}\right)+a}=\dfrac{\dfrac{x+2+2(3x+a)}{3x+a}}{\dfrac{3(x+2)+a(3x+a)}{3x+a}}$$
$$=\dfrac{7x+2a+2}{3(1+a)x+6+a^2}$$

즉, $\dfrac{7x+2a+2}{3(1+a)x+6+a^2}=x$이므로

$7x+2a+2=3(1+a)x^2+(6+a^2)x$

$\therefore 3(1+a)x^2+(a^2-1)x-2a-2=0$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$1+a=0$, $a^2-1=0$, $-2a-2=0$

$\therefore a=-1$

871

점 $(1, 2)$가 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위에 존재하므로

$f(1)=2$, $f^{-1}(1)=2$ $\quad\therefore f(2)=1$

따라서 $\dfrac{-2+a}{1+b}=2$, $\dfrac{-4+a}{2+b}=1$이므로

$-2+a=2+2b$, $-4+a=2+b$

$\therefore a-2b=4$, $a-b=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=8$, $b=2$

$\therefore a+b=8+2=10$

정답_ ⑤

872

$y=\dfrac{2x+5}{x+3}$로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$xy+3y=2x+5$, $(y-2)x=-3y+5$

$\therefore x=\dfrac{-3y+5}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{-3x+5}{x-2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-3x+5}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-1}{x-2}=\dfrac{-1}{x-2}-3$

따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(2, -3)$에 대하여 대칭이다.

즉, $p=2$, $q=-3$이므로

$p-q=2-(-3)=5$

정답_ ⑤

다른 풀이

$f(x)=\dfrac{2x+5}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-1}{x+3}=\dfrac{-1}{x+3}+2$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-3, 2)$에 대하여 대칭이다.

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(2, -3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=2$, $q=-3$이므로

$p-q=2-(-3)=5$

873

방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 실근은 방정식 $f(x)=x$의 실근과 같으므로 $\dfrac{x+a}{bx-2}=x$에서

$x+a=bx^2-2x$ $\quad\therefore bx^2-3x-a=0$

이 방정식의 두 실근이 1, 5이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+5=\dfrac{3}{b}$, $1\times5=-\dfrac{a}{b}$ $\quad\therefore a=-\dfrac{5}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+b=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=-2$

정답_ -2

874

$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I$ (I는 항등함수)이므로

$$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(3)+(f\circ f^{-1})(-3)=(f^{-1}\circ I)(3)+I(-3)$$
$$=f^{-1}(3)-3$$

이때 $f^{-1}(3)=k$라고 하면 $f(k)=3$이므로

$\dfrac{2k+6}{k+1}=3$, $2k+6=3k+3$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore (f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(3)+(f\circ f^{-1})(-3)=3-3=0$

정답_ ③

875

$f^{-1}(3)=2$에서 $f(2)=3$이므로

$\dfrac{8+a}{2b-2}=3$, $8+a=6b-6$

$\therefore a-6b=-14$ …… ㉠

$f(2)=3$, $(f\circ f)(2)=\dfrac{16}{7}$이므로

$f(f(2))=f(3)=\dfrac{16}{7}$

$\dfrac{12+a}{3b-2}=\dfrac{16}{7}$, $84+7a=48b-32$

$\therefore 7a-48b=-116$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=3$

$\therefore a+b=4+3=7$

정답_ ③

876

$$(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(a)=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(a)$$
$$=(f^{-1}\circ g)(a)$$
$$=f^{-1}(g(a))$$

이므로 $f^{-1}(g(a))=3$에서 $g(a)=f(3)$

$\frac{a+1}{a-1}=\frac{6}{4}$, $4a+4=6a-6$, $2a=10$

$\therefore a=5$

정답_ 5

877

$y=\frac{3x+a}{x-2}$로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$xy-2y=3x+a$, $(y-3)x=2y+a$

$\therefore x=\frac{2y+a}{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{2x+a}{x-3}$ $\quad\therefore f^{-1}(x)=\frac{2x+a}{x-3}$

한편,

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{3x+a}{x-2}\right)$$
$$=\frac{3\times\frac{3x+a}{x-2}+a}{\frac{3x+a}{x-2}-2}=\frac{9x+3a+ax-2a}{3x+a-2x+4}$$
$$=\frac{(a+9)x+a}{x+a+4}$$

이므로 $f^{-1}(x)=(f\circ f)(x)$에서

$\frac{2x+a}{x-3}=\frac{(a+9)x+a}{x+a+4}$

따라서 $a+9=2$, $a+4=-3$이므로

$a=-7$

정답_ -7

878

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$이고

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$이므로

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=0$, $\frac{a+b+c}{abc}=0$

$\therefore a+b+c=0$ ············ ❶

따라서

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=-2(ab+bc+ca)$ ············ ❷

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=3abc$ ············ ❸

이므로

$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$=\frac{-2(ab+bc+ca)}{3abc}+\frac{2}{3}\times\frac{ab+bc+ca}{abc}$

$=0$ ············ ❹

정답_ 0

채점 기준	비율
❶ $a+b+c=0$임을 알기	30 %
❷ $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$임을 알기	30 %
❸ $a^3+b^3+c^3=3abc$임을 알기	30 %
❹ 주어진 식의 값 구하기	10 %

879

$x^2+2x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+2-\frac{1}{x}=0$, $2+x=\frac{1}{x}$

$\therefore \frac{1}{2+x}=x$ ············ ❶

$$\therefore 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}}$$
$$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}$$
$$=2+\frac{1}{2+x}$$
$$=2+x=\frac{1}{x}$$ ············ ❷

따라서 상수 a의 값은 1이다. ············ ❸

정답_ 1

채점 기준	비율
❶ $\frac{1}{2+x}=x$임을 알기	40 %
❷ 주어진 식을 간단히 하기	50 %
❸ a의 값 구하기	10 %

880

함수 $f(x)$의 그래프는 곡선 $y=-\frac{3}{x}$을 평행이동한 것이므로 두 상수 m, n에 대하여 $f(x)=-\frac{3}{x-m}+n$으로 놓을 수 있다. ··· ❶

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$의 두 점근선 $x=m$, $y=n$의 교점 (m, n)은 직선 $y=x$ 위에 있다.

$\therefore m=n$

함수 $y=f(x)$의 정의역이 $\{x|x\neq-3$인 모든 실수$\}$이므로

$m=-3$, $n=-3$ ············ ❷

따라서 $f(x)=-\frac{3}{x+3}-3$이므로

$f(-2)=-\frac{3}{-2+3}-3=-6$ ············ ❸

정답_ -6

채점 기준	비율
❶ $f(x)=-\frac{3}{x-m}+n$으로 놓기	30 %
❷ m, n의 값 구하기	50 %
❸ $f(-2)$의 값 구하기	20 %

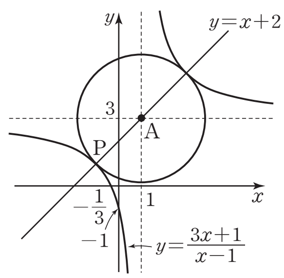
881

$y=\frac{3x+1}{x-1}=\frac{3(x-1)+4}{x-1}=\frac{4}{x-1}+3$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=3$ ❶

이때 점 A$(1,\ 3)$은 두 점근선의 교점이므로 함수 $y=\frac{3x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=(x-1)+3$, 즉 $y=x+2$에 대하여 대칭이다. ❷



점 A를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원의 넓이가 최소일 때는 점 P가 함수 $y=\frac{3x+1}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 교점일 때이므로

$x+2=\frac{3x+1}{x-1}$

$x^2+x-2=3x+1$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

즉, 점 P의 좌표가 $(-1,\ 1)$ 또는 $(3,\ 5)$일 때 원의 넓이가 최소이다. ❸

따라서 구하는 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(-1-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ❹

정답_ $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\frac{3x+1}{x-1}$의 그래프의 점근선의 방정식 구하기	20 %
❷ 함수 $y=\frac{3x+1}{x-1}$의 그래프가 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭임을 알기	30 %
❸ 원의 넓이가 최소가 되는 점 P의 좌표 구하기	30 %
❹ 반지름의 길이 구하기	20 %

다른 풀이

$\mathrm{P}\left(t,\ \frac{4}{t-1}+3\right)$ $(t\neq1)$으로 놓으면 점 A$(1,\ 3)$을 중심으로 하고 점 P를 지나는 원의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{AP}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(t-1)^2+\left(\frac{4}{t-1}\right)^2}=\sqrt{(t-1)^2+\frac{16}{(t-1)^2}}$

이때 $(t-1)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(t-1)^2+\frac{16}{(t-1)^2}\geq2\sqrt{(t-1)^2\times\frac{16}{(t-1)^2}}=8$

(단, 등호는 $t=-1$ 또는 $t=3$일 때 성립한다.)

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}\geq\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

따라서 원의 넓이가 최소일 때의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

882

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=-2$이므로

$f(x)=\frac{k}{x-1}-2$ $(k\neq0)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다. ❶

또, 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=-k-2$ $\quad\therefore k=-2$

이 값을 ㉠에 대입하면

$f(x)=\frac{-2}{x-1}-2=\frac{-2x}{x-1}$ ❷

$f^{-1}(-4)=m$으로 놓으면 $f(m)=-4$이므로

$\frac{-2m}{m-1}=-4$, $-2m=-4m+4$

$2m=4$ $\quad\therefore m=2$

$\therefore f^{-1}(-4)=2$ ❸

정답_ 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)=\frac{k}{x-1}-2$ $(k\neq0)$로 놓기	30 %
❷ $f(x)$ 구하기	30 %
❸ $f^{-1}(-4)$의 값 구하기	40 %

883

$f(g(x))=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 $g(-1)=2$에서 $f(2)=-1$이므로

$\frac{-6+1}{2+k}=-1$

$-5=-2-k$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore f(x)=\frac{-3x+1}{x+3}$ ❶

$g(2)=a$라고 하면 $f(a)=2$이므로

$\frac{-3a+1}{a+3}=2$

$-3a+1=2a+6$, $5a=-5$

$\therefore a=-1$

즉, $g(2)=-1$이므로 ❷

$(g\circ g)(2)=g(g(2))=g(-1)$

$g(-1)=b$라고 하면 $f(b)=-1$이므로

$\frac{-3b+1}{b+3}=-1$

$-3b+1=-b-3$, $-2b=-4$

$\therefore b=2$

$\therefore (g\circ g)(2)=2$ ❸

정답_ 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$ 구하기	40 %
❷ $g(2)$의 값 구하기	30 %
❸ $(g\circ g)(2)$의 값 구하기	30 %

다른 풀이

$y=\frac{-3x+1}{x+3}$로 놓고 x를 y에 대하여 나타내면

$xy+3y=-3x+1$, $(y+3)x=-3y+1$

$\therefore x=\frac{-3y+1}{y+3}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{-3x+1}{x+3}$ $\quad\therefore g(x)=\frac{-3x+1}{x+3}$

따라서 $g(2)=-1$, $g(-1)=2$이므로

$(g\circ g)(2)=g(g(2))=g(-1)=2$

884

$a=x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2+1}{x}$이므로

$a^2=\dfrac{(x^2+1)^2}{x^2}\qquad \therefore \dfrac{1}{a^2}=\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$

$b=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2(x^2+1)}{x^2-1}$이므로

$b^2=\dfrac{4(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}\qquad \therefore \dfrac{1}{b^2}=\dfrac{(x^2-1)^2}{4(x^2+1)^2}$

$\therefore \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}+\dfrac{(x^2-1)^2}{4(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{4x^2+(x^2-1)^2}{4(x^2+1)^2}=\dfrac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{x^4+2x^2+1}{4(x^2+1)^2}=\dfrac{(x^2+1)^2}{4(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \dfrac{1}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}}=4$

정답_ 4

다른 풀이

$x+\dfrac{1}{x}=a$ ...... ㉠

$b=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2(x^2+1)}{x^2-1}$에서

$b(x^2-1)=2(x^2+1)$

양변을 각각 x로 나누면

$b\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=2a\ \left(\because a=x+\dfrac{1}{x}\right)$

$\therefore x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2a}{b}$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$2x=a+\dfrac{2a}{b}$ ...... ㉢

㉠−㉡을 하면

$\dfrac{2}{x}=a-\dfrac{2a}{b}$ ...... ㉣

㉢×㉣을 하면

$4=a^2-\dfrac{4a^2}{b^2}$, $\dfrac{4a^2}{b^2}=a^2-4$

$\therefore b^2=\dfrac{4a^2}{a^2-4}$

$\therefore \dfrac{1}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{a^2-4}{4a^2}}=\dfrac{1}{\dfrac{4+a^2-4}{4a^2}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}}=4$

885

$n^2+5n+6-(2n^2+6)=-n^2+5n=-n(n-5)$

이므로 $n>5$이면

$n^2+5n+6<2n^2+6$

즉, $n>5$일 때 집합 $A_n \triangle B_n$의 원소 중 최솟값 $f(n)$은

$f(n)=n^2+5n+6$

따라서 $n>5$일 때

$\dfrac{1}{f(n)}=\dfrac{1}{n^2+5n+6}=\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}=\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}$

이므로

$\dfrac{1}{f(6)}+\dfrac{1}{f(7)}+\dfrac{1}{f(8)}+\cdots+\dfrac{1}{f(13)}$

$=\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}\right)+\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{16}\right)$

$=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{16}$

정답_ $\dfrac{1}{16}$

886

$\dfrac{a-b-c}{2a}=\dfrac{b-c-a}{2b}=\dfrac{c-a-b}{2c}=k$로 놓으면

$a-b-c=2ak$

$b-c-a=2bk$

$c-a-b=2ck$

세 식을 변끼리 더하여 정리하면

$-(a+b+c)=2k(a+b+c)$

이때 $a+b+c\neq 0$이므로

$-1=2k\qquad \therefore k=-\dfrac{1}{2}$

즉, $a-b-c=-a$, $b-c-a=-b$, $c-a-b=-c$이므로

$b+c=2a$, $a+c=2b$, $a+b=2c$

$\therefore \dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}=2+2+2=6$

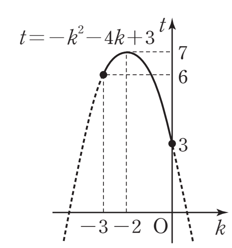
정답_ 6

887

$f(x)=\dfrac{4x+3-k^2}{x+k}=\dfrac{4(x+k)+3-k^2-4k}{x+k}$

$=\dfrac{-k^2-4k+3}{x+k}+4$

이므로 $t=-k^2-4k+3$이라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 모양은 t의 값에 따라 결정된다.



$-3\le k\le 0$인 k에 대하여

$t=-k^2-4k+3=-(k+2)^2+7$

이므로 $3\le t\le 7$

따라서 평행이동하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ②

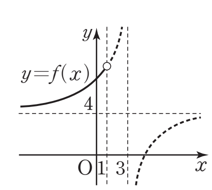
888

함수 $f(x)=\dfrac{4x+k}{x-3}=\dfrac{4(x-3)+k+12}{x-3}=\dfrac{k+12}{x-3}+4$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=4$이므로 $x<1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음의 두 가지로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $k+12<0$, 즉 $k<-12$일 때

$x<1$에서 치역은

$\{y\,|\,4<y<f(1)\}$



이때 치역의 원소 중에서 정수가 5개이려면 정수는 5, 6, 7, 8, 9가 포함되어야 하므로 $9<f(1)\le 10$이어야 한다.

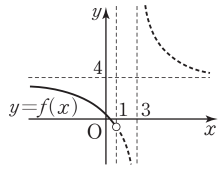
$f(1)=\frac{4+k}{-2}$이므로 $9<-\frac{4+k}{2}\le 10$에서 $-24\le k<-22$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 -24, -23

(ii) $k+12>0$, 즉 $k>-12$일 때

$x<1$에서 치역은

$\{y\,|\,f(1)<y<4\}$



이때 치역의 원소 중에서 정수가 5개이려면 정수는 -1, 0, 1, 2, 3이 포함되어야 하므로 $-2\le f(1)<-1$이어야 한다.

$-2\le -\frac{4+k}{2}<-1$에서 $-2<k\le 0$

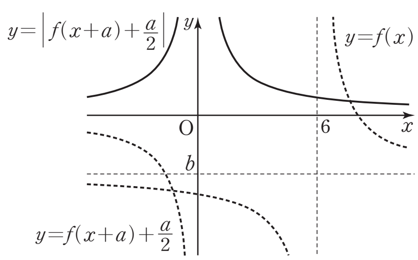
따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 -1, 0

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 k는 -24, -23, -1, 0의 4개이다.

정답_ 4

889

함수 $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프는 함수 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프에서 x축 아래에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다. 이 함수의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면 함수 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은 다음 그림과 같이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.



$f(x)=\frac{a}{x-6}+b$에서

$f(x+a)+\frac{a}{2}=\frac{a}{x+a-6}+b+\frac{a}{2}$

이므로 함수 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=6-a$, $y=b+\frac{a}{2}$

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로

$6-a=0$, $b+\frac{a}{2}=0$ $\quad\therefore a=6$, $b=-3$

따라서 $f(x)=\frac{6}{x-6}-3$이므로

$f(b)=f(-3)=\frac{6}{-3-6}-3=-\frac{11}{3}$

정답_ ④

890

$f(x)=\frac{10x}{2x-21}=\frac{5(2x-21)+105}{2x-21}=\frac{105}{2x-21}+5$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{21}{2}$, $y=5$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점근선의 교점 $\left(\frac{21}{2},\ 5\right)$에 대하여 대칭이다.

따라서 점 $\left(\frac{21}{2},\ 5\right)$에 대하여 대칭인 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$에 대하여

$\frac{a+b}{2}=\frac{21}{2}$, $\frac{f(a)+f(b)}{2}=5$

이므로

$a+b=21$, $f(a)+f(b)=10$

$1+20=21$이므로 $f(1)+f(20)=10$

$2+19=21$이므로 $f(2)+f(19)=10$

$\vdots$

$10+11=21$이므로 $f(10)+f(11)=10$

$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(20)=100$

한편, $f(21)=10$, $f(22)=\frac{220}{23}>5$이므로

$f(1)+f(2)+\cdots+f(21)=110$

$f(1)+f(2)+\cdots+f(22)>115$

따라서 자연수 m의 최솟값은 22이다.

정답_ 22

891

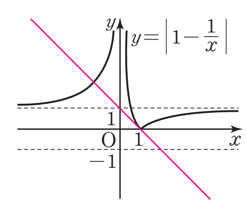
$y=\left|1-\frac{1}{x}\right|=\frac{|x-1|}{|x|}$

$x<0$일 때, $y=\frac{-x+1}{-x}=-\frac{1}{x}+1$

$0<x\le 1$일 때, $y=\frac{-x+1}{x}=\frac{1}{x}-1$

$x>1$일 때, $y=\frac{x-1}{x}=-\frac{1}{x}+1$

따라서 함수 $y=\left|1-\frac{1}{x}\right|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $y=\left|1-\frac{1}{x}\right|$의 그래프와 직선 $y=mx+1$이 세 점에서 만나려면 기울기 m이 0보다 작고 함수 $y=\frac{1}{x}-1$의 그래프에 접하는 접선의 기울기보다 커야 한다.

함수 $y=\frac{1}{x}-1$의 그래프와 직선 $y=mx+1$이 접하려면 방정식 $\frac{1}{x}-1=mx+1$, 즉 $mx^2+2x-1=0$이 중근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=1+m=0$ $\quad\therefore m=-1$

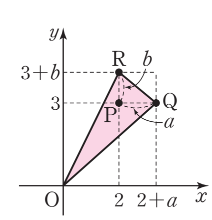
따라서 구하는 실수 m의 값의 범위는

$-1<m<0$

정답_ $-1<m<0$

892

$\mathrm{Q}(2+a,\ 3)$, $\mathrm{R}(2,\ 3+b)$이므로 삼각형 OQR의 넓이는



$S=(2+a)(3+b)$

$\quad-\frac{1}{2}\{2(3+b)+3(2+a)+ab\}$

$\quad=\frac{3}{2}a+b+\frac{1}{2}ab$

$S=6$이므로

$3a+2b+ab=12$, $(a+2)b=-3a+12$

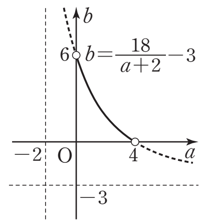
$\therefore\ b=\dfrac{-3a+12}{a+2}=\dfrac{-3(a+2)+18}{a+2}=\dfrac{18}{a+2}-3$

이때 $a>0$, $b>0$이므로

$\dfrac{18}{a+2}-3>0$, $a+2<6$ $\qquad\therefore\ a<4$

$\therefore\ 0<a<4$

따라서 $b=\dfrac{18}{a+2}-3$ $(0<a<4)$이므로 순서쌍 (a, b)를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



정답_ ③

893

점 B_{10}은 점 A_{10}을 지나고 x축에 평행한 직선 위의 점이므로 두 점 A_{10}과 B_{10}의 y좌표가 같다.

또, 점 B_{10}은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $B_{10}(5, 5)$

점 A_{11}은 점 B_{10}을 지나고 y축에 평행한 직선 위의 점이므로 두 점 B_{10}과 점 A_{11}의 x좌표는 같다.

$\therefore\ A_{11}\left(5, -\dfrac{1}{4}\right)$

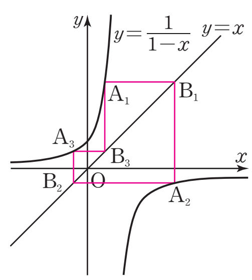
같은 방법으로 계속하면

$B_{11}\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$, $A_{12}\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{5}\right)$,

$B_{12}\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$, $A_{13}\left(\dfrac{4}{5}, 5\right)$, $\cdots$

$\therefore\ A_{3n-2}\left(\dfrac{4}{5}, 5\right)$, $A_{3n-1}\left(5, -\dfrac{1}{4}\right)$,

$A_{3n}\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{5}\right)$



따라서 점 A_{20}과 점 A_{11}은 일치하므로

$A_{20}\left(5, -\dfrac{1}{4}\right)$

즉, $p=5$, $q=-\dfrac{1}{4}$이므로

$4pq=4\times5\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-5$

정답_ -5

다른 풀이

점 A_1의 좌표를 $\left(a, \dfrac{1}{1-a}\right)$ $(0<a<1)$

이라고 하면 두 점 A_1, B_1의 y좌표는 같고 점 B_1은 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$B_1\left(\dfrac{1}{1-a}, \dfrac{1}{1-a}\right)$

두 점 A_2, B_1의 x좌표는 같고

$f\left(\dfrac{1}{1-a}\right)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}=\dfrac{1}{\dfrac{(1-a)-1}{1-a}}=\dfrac{a-1}{a}$이므로

$A_2\left(\dfrac{1}{1-a}, \dfrac{a-1}{a}\right)$, $B_2\left(\dfrac{a-1}{a}, \dfrac{a-1}{a}\right)$

두 점 A_3, B_2의 x좌표는 같고

$f\left(\dfrac{a-1}{a}\right)=\dfrac{1}{1-\dfrac{a-1}{a}}=\dfrac{1}{\dfrac{a-(a-1)}{a}}=a$이므로

$A_3\left(\dfrac{a-1}{a}, a\right)$, $B_3(a, a)$

두 점 A_4, B_3의 x좌표는 같고

$f(a)=\dfrac{1}{1-a}$이므로

$A_4\left(a, \dfrac{1}{1-a}\right)$, $B_4\left(\dfrac{1}{1-a}, \dfrac{1}{1-a}\right)$

따라서 두 점 A_1, A_4의 좌표가 같으므로 자연수 n에 대하여

$A_{3n-2}\left(a, \dfrac{1}{1-a}\right)$, $A_{3n-1}\left(\dfrac{1}{1-a}, \dfrac{a-1}{a}\right)$, $A_{3n}\left(\dfrac{a-1}{a}, a\right)$

이때 점 A_{10}의 좌표가 $\left(\dfrac{4}{5}, 5\right)$이므로

$a=\dfrac{4}{5}$

따라서 점 A_{20}의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{4}{5}}, \dfrac{\dfrac{4}{5}-1}{\dfrac{4}{5}}\right)$, 즉 $\left(5, -\dfrac{1}{4}\right)$이므로

$p=5$, $q=-\dfrac{1}{4}$

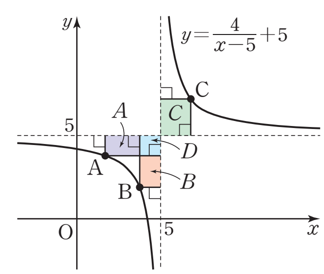
$\therefore\ 4pq=4\times5\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-5$

894

함수 $y=\dfrac{4}{x-5}+5$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=5$, $y=5$

점 C의 좌표를 (x, y)라고 하면 점 C를 꼭짓점으로 하고 이 점과 이웃하지 않는 두 변이 점근선과 겹쳐지는 직사각형 C의 가로, 세로의 길이는 각각 $|x-5|$, $|y-5|$이다.



$y=\dfrac{4}{x-5}+5$에서 $y-5=\dfrac{4}{x-5}$이므로

$(x-5)(y-5)=4$

따라서 직사각형 C의 넓이 S_C는 점의 위치에 관계없이

$S_C=|(x-5)(y-5)|=4$로 일정함을 알 수 있다.

마찬가지로 점 A를 꼭짓점으로 하고 이 점과 이웃하지 않는 두 변이 점근선과 겹쳐지는 직사각형과 점 B를 꼭짓점으로 하고 이 점과 이웃하지 않는 두 변이 점근선과 겹쳐지는 직사각형의 넓이도 4로 점 A, B의 위치와 관계없이 일정하다.

따라서 위의 그림과 같이 두 직사각형 A, B와 각각 한 변을 공유하는 직사각형을 D라 하고, 직사각형 D의 넓이를 S_D라고 하면

$S_C=S_A+S_D=S_B+S_D$

$\therefore\ S_A=S_B<S_C$

정답_ ②

895

조건 ㈎에 의하여 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=2$와 만나는 점의 개수와 직선 $y=-2$와 만나는 점의 개수의 합은 1이다.

곡선 $y=f(x)$가 x축과 평행한 직선과 만나는 점의 개수는 점근선을 제외하면 모두 1이므로 두 직선 $y=2$, $y=-2$ 중 하나는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.

이때 곡선 $y=f(x)$의 점근선이 y축, 직선 $y=b$이므로

$b=2$ 또는 $b=-2$ …… ㉠

$y=\frac{a}{x}+b$로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$\frac{a}{x}=y-b$ $\therefore x=\frac{a}{y-b}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{a}{x-b}$ $\therefore f^{-1}(x)=\frac{a}{x-b}$

조건 (나)에서 $f^{-1}(2)=f(2)-1$이므로

$\frac{a}{2-b}=\frac{a}{2}+b-1$ …… ㉡

㉡에서 $b\neq 2$이므로 ㉠에서 $b=-2$이다.

㉡에 $b=-2$를 대입하면

$\frac{a}{4}=\frac{a}{2}-3$ $\therefore a=12$

따라서 $f(x)=\frac{12}{x}-2$이므로

$f(8)=\frac{12}{8}-2=-\frac{1}{2}$

정답_ ①

896

$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I$ (I는 항등함수)이므로

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)=f^{-1}\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)$

$f^{-1}\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)=x+a$에서

$f(x+a)=\frac{2x+3}{x+1}$

$x+a=t$라고 하면 $x=t-a$이므로

$f(t)=\frac{2(t-a)+3}{t-a+1}=\frac{2t-2a+3}{t-a+1}$

이때 $f(0)=1$이므로

$\frac{-2a+3}{-a+1}=1$

$-2a+3=-a+1$ $\therefore a=2$

따라서 $f(t)=\frac{2t-1}{t-1}$이므로

$f(2)=3$

정답_ 3

10 무리식과 무리함수

897

(1) 무리식 $\sqrt{x+3}+\sqrt{4-x}$의 값이 실수가 되기 위해서는 근호 안의 식의 값이 0 이상이어야 한다.

따라서 $x+3\geq 0$에서 $x\geq -3$이고

$4-x\geq 0$에서 $x\leq 4$이므로

$-3\leq x\leq 4$

(2) 무리식 $\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{10-3x}}$의 값이 실수가 되기 위해서는 근호 안의 식의 값이 0 이상이고, 분모가 0이 아니어야 한다.

따라서 $2x+1\geq 0$에서 $x\geq -\frac{1}{2}$이고

$10-3x>0$에서 $x<\frac{10}{3}$이므로

$-\frac{1}{2}\leq x<\frac{10}{3}$

정답_ (1) $-3\leq x\leq 4$ (2) $-\frac{1}{2}\leq x<\frac{10}{3}$

898

$6x^2+5x-4\geq 0$이어야 하므로

$(3x+4)(2x-1)\geq 0$

$\therefore x\leq -\frac{4}{3}$ 또는 $x\geq \frac{1}{2}$

정답_ $x\leq -\frac{4}{3}$ 또는 $x\geq \frac{1}{2}$

899

$3x-2\geq 0$에서 $x\geq \frac{2}{3}$

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq \frac{3}{4}$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+1\geq 0$

$5-x>0$에서 $x<5$

$\therefore \frac{2}{3}\leq x<5$

정답_ $\frac{2}{3}\leq x<5$

900

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2-kx+3}$이 실수가 되기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 $kx^2-kx+3\geq 0$이어야 한다.

(i) $k=0$일 때

$3\geq 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k\neq 0$일 때

$k>0$이고 이차방정식 $kx^2-kx+3=0$의 판별식을 D라고 하면 $D\leq 0$이어야 하므로

$D=k^2-12k\leq 0$

$k(k-12)\leq 0$ $\therefore 0<k\leq 12$

(i), (ii)에서 $0\leq k\leq 12$이므로 정수 k는 0, 1, 2, ⋯, 12의 13개이다.

정답_ ①

참고 $k<0$이면 $kx^2-kx+3<0$을 만족시키는 x의 값이 반드시 존재하므로 $k<0$이 될 수 없다.

901

$\frac{1}{3}<a<1$일 때 $a-1<0$, $3a-1>0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{9a^2-6a+1}&=\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(3a-1)^2}\\&=|a-1|+|3a-1|\\&=-(a-1)+(3a-1)\\&=-a+1+3a-1\\&=2a\end{aligned}$$

정답_ ②

902

$1<\sqrt{2}<2$, $1<\sqrt{3}<2$이므로

$a+b=(2-\sqrt{3})+\sqrt{2}>0$

$a-b=(2-\sqrt{3})-\sqrt{2}=(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{2})<0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(a-b)^2}&=|a+b|+|a-b|\\&=(a+b)-(a-b)\\&=2b=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

정답_ ③

903

$\sqrt{x+3}$에서 $x+3\ge 0$

$\therefore x\ge -3$ ...... ㉠

$\sqrt{2-x}$에서 $2-x\ge 0$

$\therefore x\le 2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는

$-3\le x\le 2$

따라서 $-x+4>0$, $2x-5<0$이므로

$$\begin{aligned}|-x+4|-\sqrt{4x^2-20x+25}&=|-x+4|-\sqrt{(2x-5)^2}\\&=|-x+4|-|2x-5|\\&=(-x+4)+(2x-5)\\&=x-1\end{aligned}$$

정답_ ②

904

(1) $$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}&=\frac{2(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}\\&=\frac{2(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(x+2)-x}\\&=\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}}&=\frac{3(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4})}\\&=\frac{3(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4})}{(x+1)-(x+4)}\\&=\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}&=\frac{(\sqrt{x+4}-2)^2}{(\sqrt{x+4}+2)(\sqrt{x+4}-2)}\\&=\frac{x+4-4\sqrt{x+4}+4}{(x+4)-4}\\&=\frac{x+8-4\sqrt{x+4}}{x}\end{aligned}$$

정답_ (1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}$ (2) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}$ (3) $\frac{x+8-4\sqrt{x+4}}{x}$

905

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}+\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}&=\frac{x(1-\sqrt{x+1})+x(1+\sqrt{x+1})}{(1+\sqrt{x+1})(1-\sqrt{x+1})}\\&=\frac{x-x\sqrt{x+1}+x+x\sqrt{x+1}}{1-(x+1)}\\&=\frac{2x}{-x}=-2\end{aligned}$$

정답_ ①

906

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\\&=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}\\&=\frac{x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+x-1+x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+x-1}{(x+1)-(x-1)}\\&=\frac{4x}{2}=2x\end{aligned}$$

정답_ ②

907

$\sqrt{10}-3=\frac{1}{6+a_1}$에서

$6+a_1=\frac{1}{\sqrt{10}-3}=\frac{\sqrt{10}+3}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}=\sqrt{10}+3$

$\therefore a_1=\sqrt{10}-3$

$a_1=\frac{1}{6+a_2}$, 즉 $\sqrt{10}-3=\frac{1}{6+a_2}$에서

$6+a_2=\frac{1}{\sqrt{10}-3}=\frac{\sqrt{10}+3}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}=\sqrt{10}+3$

$\therefore a_2=\sqrt{10}-3$

⋮

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\sqrt{10}-3$이므로

$3a_5-a_1=3(\sqrt{10}-3)-(\sqrt{10}-3)=2\sqrt{10}-6$

정답_ ⑤

908

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{x}}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}&=\frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}=\frac{2}{1-x}=\frac{2}{1-\sqrt{3}}\\&=\frac{2(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{1-3}\\&=-1-\sqrt{3}\end{aligned}$$

정답_ ②

909

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}&=\frac{x-\sqrt{x^2-1}+x+\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}\\&=\frac{2x}{x^2-(x^2-1)}\\&=2x\\&=2(\sqrt{2}+1)\\&=2\sqrt{2}+2\end{aligned}$$

정답_ $2\sqrt{2}+2$

910

$x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}=3+2\sqrt{2}$이므로

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$
$$=\frac{(x-2\sqrt{x}+1)+(x+2\sqrt{x}+1)}{x-1}$$
$$=\frac{2x+2}{x-1}$$
$$=\frac{2(3+2\sqrt{2})+2}{(3+2\sqrt{2})-1}$$
$$=\frac{4\sqrt{2}+8}{2\sqrt{2}+2}=\frac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}+1}$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$=\frac{2(2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2)}{2-1}$$
$$=2\sqrt{2}$$

정답_ ④

911

$\sqrt{11-x}=3$의 양변을 제곱하면

$11-x=9 \qquad \therefore x=2$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}$$
$$=1$$

정답_ ①

참고 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=2-1=1$이므로 분모가 1이 된다. 즉, $x=2$를 먼저 대입한 후 식을 계산하는 것이 편리하다.

912

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}$$
$$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

$$\therefore k=\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(7)}$$
$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{8}-\sqrt{7})$$
$$=\sqrt{8}-1$$

$2<\sqrt{8}<3$이므로 $1<\sqrt{8}-1<2$

$\therefore 1<k<2$

따라서 $n<k<n+1$을 만족시키는 자연수 n의 값은 1이다.

정답_ ①

913

$x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$,

$y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

이므로

$x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

$\therefore \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{y})^2+(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}\sqrt{y}}=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{4}{\sqrt{1}}=4$

정답_ ⑤

914

$x-y=(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1)=2$

$xy=(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)=4$

$$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$$
$$=2^3+3\times4\times2$$
$$=32$$

정답_ ②

915

$x=\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$,

$y=\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})}=\sqrt{7}+\sqrt{2}$

이므로

$x+y=(\sqrt{7}-\sqrt{2})+(\sqrt{7}+\sqrt{2})=2\sqrt{7}$

$xy=(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})=7-2=5$

$$\therefore \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}}{\frac{x+y}{xy}}=\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}$$
$$=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy(x+y)}$$
$$=\frac{(2\sqrt{7})^2-2\times5}{5\times2\sqrt{7}}$$
$$=\frac{18}{10\sqrt{7}}=\frac{9\sqrt{7}}{35}$$

정답_ ④

916

$x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$에서 $x-1=\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $x^2-2x+1=2$

따라서 $x^2-2x-1=0$이므로

$$x^3-2x^2-3x+2=x(x^2-2x-1)-2x+2$$
$$=-2(x-1)$$
$$=-2\sqrt{2}$$

정답_ ①

917

$x=2-\sqrt{3}$에서 $x-2=-\sqrt{3}$

양변을 제곱하면 $x^2-4x+4=3$

따라서 $x^2-4x+1=0$이므로

$$\frac{x^3-6x^2+4x-2}{x^2-4x+6}=\frac{x(x^2-4x+1)-2(x^2-4x+1)-5x}{(x^2-4x+1)+5}$$
$$=\frac{-5x}{5}=-x$$
$$=-(2-\sqrt{3})$$
$$=-2+\sqrt{3}$$

정답_ ①

918

$x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$에서 $2x+1=\sqrt{3}$

양변을 제곱하면 $4x^2+4x+1=3$

따라서 $2x^2+2x-1=0$이므로

$6x^4+2x^3-7x^2+2x+1$

$=3x^2(2x^2+2x-1)-2x(2x^2+2x-1)+1=1$

정답_ 1

919

① 정의역은 $a>0$이면 $\{x|x\ge0\}$, $a<0$이면 $\{x|x\le0\}$이다.

② 치역은 $\{y|y\ge0\}$이다.

③ $|a|$의 값이 커질수록 그래프는 x축으로부터 멀어진다.

④ 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

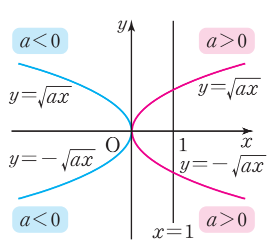
⑤ 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-ax}$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

정답_ ④

참고 ⑤ 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\ne0)$의 그래프와 원점에 대하여 대칭인 그래프의 함수의 식은 $y=-\sqrt{-ax}$이다.

920



ㄱ. a의 값의 부호에 관계없이 함수 $y=-\sqrt{ax}$의 치역은 $\{y|y\le0\}$이다. (참)

ㄴ. $a>0$일 때, 함수 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프는 위의 그림과 같이 제4사분면을 지난다. (거짓)

ㄷ. $|a|$의 값이 작아질수록 그래프는 x축에 가까워진다. (참)

ㄹ. $a>0$이면 두 함수 $y=\sqrt{ax}$, $y=-\sqrt{ax}$의 그래프는 위의 그림과 같이 직선 $x=1$과 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

정답_ ⑤

921

함수 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프가 주어진 그림과 같으려면 $a<0$이어야 한다.

$\therefore \frac{|a|}{a}=\frac{-a}{a}=-1$

정답_ -1

922

$3x-6\ge0$에서 $x\ge2$이므로 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\ge2\}$

$\therefore b=2$

또, $\sqrt{3x-6}\ge0$이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\ge a\}$

$\therefore a=-1$

$\therefore a+b=(-1)+2=1$

정답_ 1

923

함수 $y=-\sqrt{x-a}+a+2$의 그래프가 점 $(a, -a)$를 지나므로

$-a=-\sqrt{a-a}+a+2$, $-2a=2$

$\therefore a=-1$ $\quad\therefore y=-\sqrt{x+1}+1$

$-\sqrt{x+1}\le0$이므로 $-\sqrt{x+1}+1\le1$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\le1\}$

정답_ ①

924

주어진 함수는 정의역이 $\{x|x\le2\}$, 치역이 $\{y|y\ge-1\}$이므로

$y=\sqrt{a(x-2)}-1$ $(a<0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 함수의 그래프가 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{a(1-2)}-1$, $\sqrt{-a}=2$, $-a=4$

$\therefore a=-4$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-4(x-2)}-1=\sqrt{-4x+8}-1$

따라서 $a=-4$, $b=8$, $c=1$이므로

$a+b+c=-4+8+1=5$

정답_ 5

925

$y=\frac{5x+14}{x+3}=\frac{5(x+3)-1}{x+3}=-\frac{1}{x+3}+5$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3$, $y=5$

따라서 $a=-3$, $b=5$, $c=a+b=2$이므로

$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{-3x+5}+2=-\sqrt{-3\left(x-\frac{5}{3}\right)}+2$

그러므로 함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 정의역은 $\left\{x\middle|x\le\frac{5}{3}\right\}$이고, 치역은 $\{y|y\le2\}$이다.

정답_ **정의역:** $\left\{x\middle|x\le\frac{5}{3}\right\}$, **치역:** $\{y|y\le2\}$

926

함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{2(x-1)}+3$

이 함수의 그래프가 점 $(9, a)$를 지나므로

$a=\sqrt{2(9-1)}+3=4+3=7$

정답_ ③

927

함수 $y=\sqrt{1-3x}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{1-3(x-m)}+4+n=\sqrt{1+3m-3x}+4+n$

이 함수의 그래프가 $y=\sqrt{7-3x}-4$의 그래프와 일치하므로

$1+3m=7,\ 4+n=-4$

$\therefore\ m=2,\ n=-8$

$\therefore\ m^2+n^2=2^2+(-8)^2=68$

정답_ ②

928

함수 $y=-\sqrt{2x+3}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=-\sqrt{2x+3}\qquad\therefore\ y=\sqrt{2x+3}$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{2(x-5)+3}-1\qquad\therefore\ y=\sqrt{2x-7}-1$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$0=\sqrt{2x-7}-1,\ \sqrt{2x-7}=1,\ 2x-7=1$

$\therefore\ x=4$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(4,\ 0)$이다.

정답_ $(4,\ 0)$

929

함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{a(x-2)}$

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=\sqrt{a(-x-2)}$

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{a(-1-2)},\ 3=\sqrt{-3a},\ 9=-3a$

$\therefore\ a=-3$

정답_ ①

930

ㄱ. 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y=-\sqrt{6+3x}=-\sqrt{3(x+2)}$

이므로 함수 $y=-\sqrt{6+3x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=-\frac{1}{3}\sqrt{3x-3}+2=-\sqrt{\frac{1}{9}(3x-3)}+2$

$=-\sqrt{\frac{1}{3}(x-1)}+2$

이므로 함수 $y=-\frac{1}{3}\sqrt{3x-3}+2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{\frac{1}{3}x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

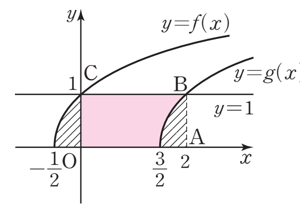
따라서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ㄴ, ㄷ

931

함수 $f(x)=\sqrt{2x+1}=\sqrt{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

또, 함수 $g(x)=\sqrt{2x-3}=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이다.



따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 부분의 넓이는 직사각형 OABC의 넓이와 같다.

그러므로 구하는 부분의 넓이는

$2\times1=2$

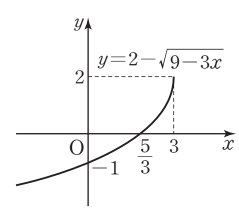
정답_ 2

932

$y=2-\sqrt{9-3x}=-\sqrt{-3(x-3)}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

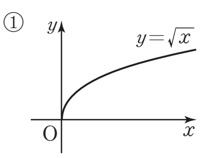
따라서 함수 $y=2-\sqrt{9-3x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3, 4사분면을 지난다.



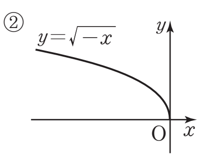
정답_ ④

933

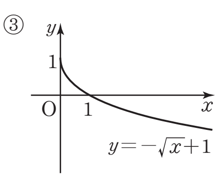
①



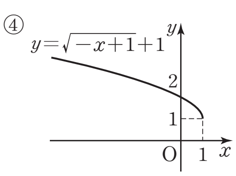
②



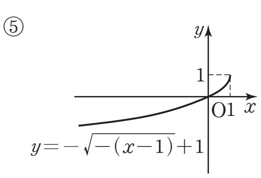
③



④



⑤



따라서 그 그래프가 제3사분면을 지나는 것은 ⑤이다.

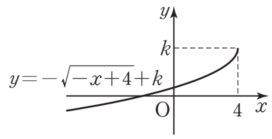
정답_ ⑤

934

$y=-\sqrt{-x+4}+k=-\sqrt{-(x-4)}+k$

이므로 함수 $y=-\sqrt{-x+4}+k$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-\sqrt{-x+4}+k$의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $y\geq 0$이어야 하므로



$-2+k\geq 0 \qquad \therefore k\geq 2$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

정답_ 2

935

주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식은

$y=\sqrt{a\left(x+\frac{1}{2}\right)}-1$

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\sqrt{a\left(0+\frac{1}{2}\right)}-1$

$\sqrt{\frac{a}{2}}=1,\ \frac{a}{2}=1 \qquad \therefore a=2$

$\therefore y=\sqrt{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}-1=\sqrt{2x+1}-1$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-1$이므로

$a+b+c=2+1+(-1)=2$

정답_ ④

936

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x-1)}-2$

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=\sqrt{-a}-2,\ 1=\sqrt{-a},\ 1=-a$

$\therefore a=-1$

$\therefore y=\sqrt{-(x-1)}-2=\sqrt{-x+1}-2$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$0=\sqrt{-x+1}-2,\ 2=\sqrt{-x+1},\ 4=-x+1$

$\therefore x=-3$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편은 -3이다.

정답_ -3

937

정의역이 $\{x\,|\,x\geq -2\}$이므로

$f(x)=-\sqrt{a(x+2)}+3\ (a>0)$ …… ㉠

으로 놓을 수 있다.

㉠의 함수의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{3a}+3,\ \sqrt{3a}=3,\ 3a=9$

$\therefore a=3$

이 값을 ㉠에 대입하면

$f(x)=-\sqrt{3(x+2)}+3=-\sqrt{3x+6}+3$

따라서 $b=6$이므로

$ab=3\times 6=18$

정답_ ⑤

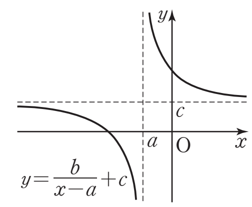
938

$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$

이므로 함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다. 이때 주어진 함수의 그래프에서 $-\frac{b}{a}>0$, $c>0$이고, $a<0$이므로

$a<0,\ b>0,\ c>0$

따라서 함수 $y=\frac{b}{x-a}+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



정답_ **제4사분면**

939

$y=\frac{ax+b}{cx+1}=\frac{\frac{a}{c}(cx+1)-\frac{a}{c}+b}{cx+1}=\frac{-\frac{a}{c}+b}{c\left(x+\frac{1}{c}\right)}+\frac{a}{c}$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{1}{c},\ y=\frac{a}{c}$

주어진 함수의 그래프에서 $-\frac{1}{c}>0$, $\frac{a}{c}>0$이므로

$a<0,\ c<0$

또, 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 양수이므로

$b>0$

한편, $y=\sqrt{ax+b}-c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}-c$이므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}-c$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 $-c$만큼 평행이동한 것이다. 이때 $a<0$, $-\frac{b}{a}>0$, $-c>0$이므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}-c$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.

정답_ ②

940

① $3x+9\geq 0$에서 $x\geq -3$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\geq -3\}$이다.

② $\sqrt{3x+9}\geq 0$이므로 $\sqrt{3x+9}-1\geq -1$

따라서 치역은 $\{y\,|\,y\geq -1\}$이다.

③ $y=\sqrt{3x+9}-1=\sqrt{3(x+3)}-1$

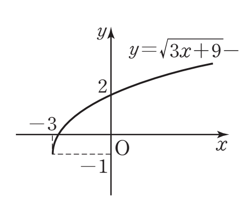
이므로 함수 $y=\sqrt{3x+9}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

④ 주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$y=\sqrt{9}-1=3-1=2$

따라서 주어진 함수의 그래프의 y절편은 2이다.

⑤ 함수 $y=\sqrt{3x+9}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

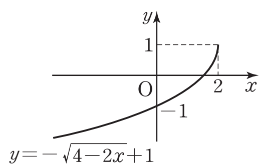
941

① $4-2x\geq 0$에서 $x\leq 2$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\leq 2\}$,
$-\sqrt{4-2x}\leq 0$에서 $-\sqrt{4-2x}+1\leq 1$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\leq 1\}$이다.

② 주어진 식에 $y=0$을 대입하면
$0=-\sqrt{4-2x}+1$, $\sqrt{4-2x}=1$, $4-2x=1$
$\therefore x=\frac{3}{2}$
따라서 함수 $y=-\sqrt{4-2x}+1$의 그래프는 x축과 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$에서 만난다.

③ $y=-\sqrt{4-2x}+1=-\sqrt{-2(x-2)}+1$
따라서 함수 $y=-\sqrt{4-2x}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 평행이동하면 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프와 겹쳐진다.

④ 함수 $y=-\sqrt{4-2x}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.



⑤ 함수 $y=-\sqrt{4-2x}+1$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면
$y=-\sqrt{4-2(-x)}+1 \qquad \therefore y=-\sqrt{2x+4}+1$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

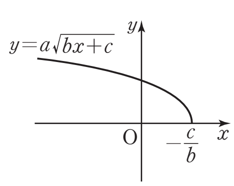
정답_ ③

942

ㄱ. $y=a\sqrt{bx+c}=a\sqrt{b\left(x+\frac{c}{b}\right)}$이고, $b<0$이므로 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\leq -\frac{c}{b}\right\}$이다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=a\sqrt{bx+c}=a\sqrt{b\left(x+\frac{c}{b}\right)}$의 그래프는 함수 $y=a\sqrt{bx}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼 평행이동한 것이다.
(참)

ㄷ. $a>0$, $b<0$, $c>0$이면 $-\frac{c}{b}>0$이므로 함수 $y=a\sqrt{bx+c}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 그 그래프는 제1, 2사분면을 지난다. (참)



그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

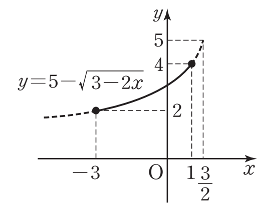
정답_ ⑤

943

$y=5-\sqrt{3-2x}=-\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+5$

이므로 함수 $y=5-\sqrt{3-2x}$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

$-3\leq x\leq 1$에서 함수 $y=5-\sqrt{3-2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$일 때 최댓값 4, $x=-3$일 때 최솟값 2를 갖는다.
따라서 $M=4$, $m=2$이므로
$Mm=4\times 2=8$

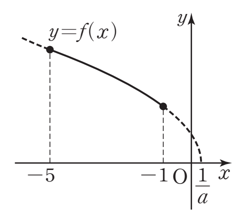


정답_ ③

944

$f(x)=\sqrt{-ax+1}=\sqrt{-a\left(x-\frac{1}{a}\right)}$이고, $a>0$이므로

$-5\leq x\leq -1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)=\sqrt{-ax+1}$은 $x=-5$일 때 최댓값 4를 가지므로 $f(-5)=4$에서
$\sqrt{5a+1}=4$, $5a+1=16$, $5a=15$
$\therefore a=3$



정답_ 3

945

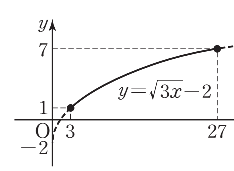
주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$이므로

$y=\frac{k}{x-2}+3\ (k>0)$ ...... ㉠

으로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{0-2}+3$, $\frac{k}{2}=3$
$\therefore k=6$
이 값을 ㉠에 대입하면
$y=\frac{6}{x-2}+3=\frac{3x}{x-2}$
$\therefore a=3$, $b=0$, $c=-2$
따라서 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{3x}-2$이므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

$3\leq x\leq 27$에서 함수 $y=\sqrt{3x}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=27$일 때 최댓값 7, $x=3$일 때 최솟값 1을 갖는다.
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$7+1=8$



정답_ ②

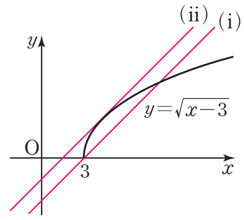
946

$\sqrt{4x+5}=x+k$의 양변을 제곱하면
$4x+5=x^2+2kx+k^2$
$\therefore x^2+2(k-2)x+k^2-5=0$ ...... ㉠
함수 $y=\sqrt{4x+5}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접하므로 ㉠의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2-5)=0$
$k^2-4k+4-k^2+5=0$, $-4k+9=0$
$\therefore k=\frac{9}{4}$

정답_ ⑤

947

함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 (3, 0)을 지날 때

$0=3+k \qquad \therefore k=-3$

(ii) 직선 $y=x+k$가 함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프에 접할 때

$\sqrt{x-3}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x-3=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2+3)=0$

$-4k-11=0 \qquad \therefore k=-\frac{11}{4}$

(i), (ii)에서 주어진 두 함수의 그래프가 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$k<-3$ 또는 $k=-\frac{11}{4}$

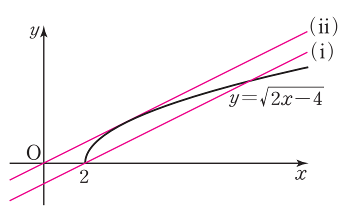
따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

정답_ ④

948

방정식 $\sqrt{2x-4}=\frac{1}{2}x+a$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=\sqrt{2x-4}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

함수 $y=\sqrt{2x-4}=\sqrt{2(x-2)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고,



$y=\frac{1}{2}x+a$는 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 y절편이 a인 직선이다.

(i) 직선 $y=\frac{1}{2}x+a$가 점 (2, 0)을 지날 때

$0=\frac{1}{2}\times2+a \qquad \therefore a=-1$

(ii) 직선 $y=\frac{1}{2}x+a$가 함수 $y=\sqrt{2x-4}$의 그래프에 접할 때

$\sqrt{2x-4}=\frac{1}{2}x+a$의 양변을 제곱하면

$2x-4=\frac{1}{4}x^2+ax+a^2$, $8x-16=x^2+4ax+4a^2$

$\therefore x^2+4(a-2)x+4a^2+16=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{2(a-2)\}^2-(4a^2+16)=0$

$-16a=0 \qquad \therefore a=0$

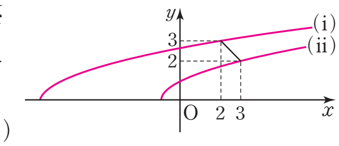
(i), (ii)에서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$-1\le a<0$

정답_ ③

949

곡선 $y=\sqrt{x+a}$는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이다.



(i) 곡선 $y=\sqrt{x+a}$가 점 (2, 3)을 지날 때

$3=\sqrt{2+a}$, $9=2+a \qquad \therefore a=7$

(ii) 곡선 $y=\sqrt{x+a}$가 점 (3, 2)를 지날 때

$2=\sqrt{3+a}$, $4=3+a \qquad \therefore a=1$

(i), (ii)에서 곡선 $y=\sqrt{x+a}$가 두 점 (2, 3), (3, 2)를 이은 선분과 만나려면 $1\le a\le7$이므로

$M=7$, $m=1$

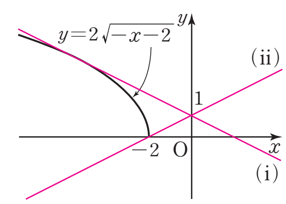
$\therefore M+m=7+1=8$

정답_ ⑤

950

$A\cap B\ne\varnothing$이려면 함수 $y=2\sqrt{-x-2}$의 그래프와 직선 $y=ax+1$이 만나야 한다.

함수 $y=2\sqrt{-x-2}=2\sqrt{-(x+2)}$의 그래프는 함수 $y=2\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=ax+1$은 a의 값에 관계없이 점 (0, 1)을 지난다.



(i) 직선 $y=ax+1$이 함수 $y=2\sqrt{-x-2}$의 그래프에 접할 때

$ax+1=2\sqrt{-x-2}$의 양변을 제곱하면

$a^2x^2+2ax+1=-4x-8$

$\therefore a^2x^2+2(a+2)x+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-9a^2=0$

$-8a^2+4a+4=0$, $2a^2-a-1=0$

$(2a+1)(a-1)=0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

이때 위의 그림에서 직선의 기울기가 음수이어야 하므로

$a<0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=ax+1$이 점 $(-2, 0)$을 지날 때

$0=-2a+1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $A\cap B\ne\varnothing$이기 위한 실수 a의 값의 범위는

$-\frac{1}{2}\le a\le\frac{1}{2}$

정답_ ③

951

직선 OA와 평행하고 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프에 접하는 직선의 접점이 P일 때 삼각형 OAP의 넓이는 최대가 된다.

직선 OA의 기울기가 1이므로 직선 OA와 평행한 접선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 실수)라고 하자.

$\sqrt{3x}=x+k$의 양변을 제곱하면

$3x=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-3)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2k-3)^2-4k^2=0$

$-12k+9=0 \qquad \therefore\ k=\dfrac{3}{4}$

직선 $y=x$와 직선 $y=x+\dfrac{3}{4}$, 즉 $4x-4y+3=0$ 사이의 거리는

직선 $y=x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $4x-4y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|3|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$

이때 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$이므로 삼각형 OAP의 넓이의 최댓값은

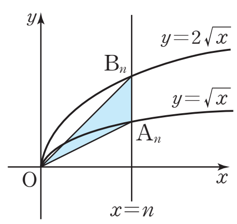
$\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{8}=\dfrac{9}{8}$

정답_ $\dfrac{9}{8}$

952

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=2\sqrt{n}-\sqrt{n}=\sqrt{n}$이므로

삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이 $S(n)$은



$S(n)=\dfrac{1}{2}n\sqrt{n}$

$S(2^{100})=\dfrac{1}{2}\times2^{100}\times\sqrt{2^{100}}$

$\qquad\quad=\dfrac{1}{2}\times2^{100}\times2^{50}=2^{149}$

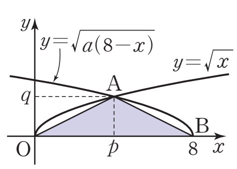
이므로

$k=149$

정답_ 149

953

점 A의 좌표를 $(p,\ q)$ ($p,\ q$는 양수)라 고 할 때, 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OB}}=8$이고, 삼각형 AOB의 넓이가 8이므로



$\dfrac{1}{2}\times8\times q=8 \qquad \therefore\ q=2$

이때 점 $\mathrm{A}(p,\ 2)$는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 점이므로

$2=\sqrt{p} \qquad \therefore\ p=4$

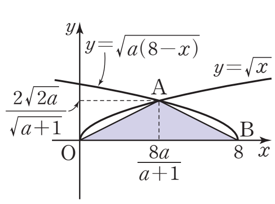
점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$는 함수 $y=\sqrt{a(8-x)}$의 그래프 위의 점이므로

$2=\sqrt{4a},\ 4=4a \qquad \therefore\ a=1$

정답_ ①

다른 풀이

점 A는 두 함수 $y=\sqrt{a(8-x)}$, $y=\sqrt{x}$의 교점이므로 점 A의 x좌표는 $\sqrt{a(8-x)}=\sqrt{x}$에서



$a(8-x)=x,\ 8a=(a+1)x$

$\therefore\ x=\dfrac{8a}{a+1}$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\dfrac{8a}{a+1},\ \dfrac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a+1}}\right)$이므로 삼각형 AOB의 넓이는

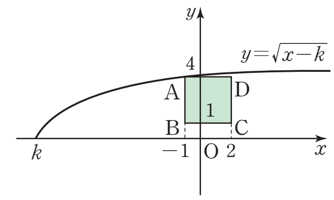
$\dfrac{1}{2}\times8\times\dfrac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a+1}}=8$

$\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{a+1}}=1,\ \sqrt{2a}=\sqrt{a+1},\ 2a=a+1$

$\therefore\ a=1$

954

집합 A를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 사각형 ABCD의 경계 및 내부와 같다.



이때 $A\cap B\neq\varnothing$을 만족시키려면 사각형 ABCD와 함수 $y=\sqrt{x-k}$의 그래프가 만나야 하므로 함수 $y=\sqrt{x-k}$의 그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지날 때 실수 k의 값이 최소가 된다.

즉, $4=\sqrt{-1-k}$에서

$16=-1-k \qquad \therefore\ k=-17$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 -17이다.

정답_ -17

955

$y=\sqrt{x-2}+2\ (x\geq2,\ y\geq2)$에서 $y-2=\sqrt{x-2}$

양변을 제곱하면

$y^2-4y+4=x-2 \qquad \therefore\ x=y^2-4y+6\ (y\geq2)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{x-2}+2$의 역함수는

$y=x^2-4x+6\ (x\geq2)$

따라서 $a=-4,\ b=6,\ c=2$이므로

$a+b+c=-4+6+2=4$

정답_ ④

956

$1-x\geq0$에서 $x\leq1$이므로 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x|x\leq1\}$

$\sqrt{1-x}\geq0$에서 $1-\sqrt{1-x}\leq1$이므로 함수 $y=f(x)$의 치역은 $\{y|y\leq1\}$

$y=1-\sqrt{1-x}\ (x\leq1,\ y\leq1)$에서

$y-1=-\sqrt{1-x}$

양변을 제곱하면

$y^2-2y+1=1-x \qquad \therefore\ x=y^2-2y=(y-1)^2+1$

$x,\ y$를 서로 바꾸면 함수 $y=f(x)$의 역함수 $g(x)$는

$g(x)=-(x-1)^2+1\ (x\leq1)$

$y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$y=-(x-a-1)^2-1\ (x\leq a+1)$

이 함수의 그래프가 함수 $y=-(x-3)^2+b\ (x\leq3)$의 그래프와 일치하므로

$-a-1=-3,\ b=-1 \qquad \therefore\ a=2$

$\therefore\ a+b=2+(-1)=1$

정답_ ①

957

함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{3a+b}$

양변을 제곱하면

$3a+b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나면 함수 $y=f(x)$의

그래프는 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{a+b}$

양변을 제곱하면

$a+b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=13$

$\therefore\ f(x)=\sqrt{-4x+13}$

$g(5)=k$라고 하면 $f(k)=5$이므로

$\sqrt{-4k+13}=5,\ -4k+13=25 \qquad \therefore\ k=-3$

$\therefore\ g(5)=-3$

정답_ -3

958

역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역이 $\{x\,|\,x\ge -1\}$, 치역이 $\{y\,|\,y\ge -2\}$이므로 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -2\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge -1\}$이다.

따라서 $f(x)=\sqrt{a(x+2)}-1\ (a>0)$로 놓을 수 있다.

$\therefore\ c=-1$

이때 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

즉, $1=\sqrt{2a}-1$이므로

$2=\sqrt{2a},\ 4=2a \qquad \therefore\ a=2$

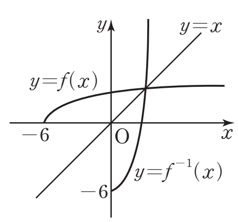
따라서 $f(x)=\sqrt{a(x+2)}-1=\sqrt{2x+4}-1$이므로

$b=4$

$\therefore\ abc=2\times4\times(-1)=-8$

정답_ -8

959



함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{x+6}=x$의 양변을 제곱하면

$x+6=x^2,\ x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=3$

이때 $x>0$이므로 $x=3$

따라서 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$이므로

$a=3,\ b=3$

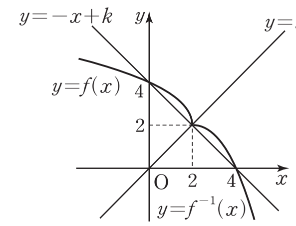
$\therefore\ a+b=3+3=6$

정답_ ⑤

960

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 $y=-x+k$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=\sqrt{4-2x}+2$의 역함수의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 함수 $y=\sqrt{4-2x}+2=\sqrt{-2(x-2)}+2$의 그래프와 직선 $y=-x+k$도 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

함수 $y=\sqrt{4-2x}+2$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우 중에서 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-x+k$가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때, k의 값이 최소가 된다.

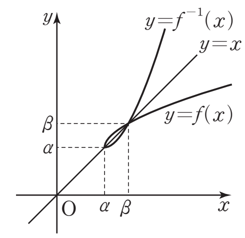


따라서 k의 최솟값은

$2=-2+k$에서 $k=4$

정답_ ②

961



함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{x+a}+2=x$에서

$\sqrt{x+a}=x-2$

양변을 제곱하면

$x+a=x^2-4x+4$

$\therefore\ x^2-5x+4-a=0$ …… ㉠

이 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라고 하면 두 교점의 좌표는 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$이므로 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}$

$(\beta-\alpha)^2=1,\ (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1$

이때 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=4-a$이므로

$5^2-4(4-a)=1,\ 4a=-8$

$\therefore\ a=-2$

정답_ ②

962

두 선분 AB, CD는 직선 $y=x$에 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 두 점 C, D도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 $\mathrm{A}(1,\ 2)$이므로 $\mathrm{B}(2,\ 1)$

또, 선분 BD가 x축에 평행하므로 $\mathrm{D}(a,\ 1)$이라고 하면

$\mathrm{C}(1,\ a) \qquad \therefore\ f^{-1}(1)=a$

$f(1)-f^{-1}(1)=6$이므로

$2-a=6 \qquad \therefore\ a=-4$

따라서 점 D의 좌표는 $(-4,\ 1)$

$\therefore\ \triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}\times\{2-(-4)\}\times(2-1)$

$=\dfrac{1}{2}\times6\times1=3$

정답_ 3

963

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(3)=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=k$라고 하면 $f(k)=3$이므로

$\sqrt{3-2k}=3,\ 3-2k=9 \qquad \therefore\ k=-3$

$\therefore\ (f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(3)=-3$

정답_ -3

964

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(1)=a$로 놓으면 $f(a)=1$이므로

$\sqrt{7-3a}=1,\ 7-3a=1 \qquad \therefore a=2$

$\therefore g(1)=2$

$\therefore (g\circ g)(1)=g(g(1))=g(2)$

$g(2)=b$로 놓으면 $f(b)=2$이므로

$\sqrt{7-3b}=2,\ 7-3b=4 \qquad \therefore b=1$

$\therefore (g\circ g)(1)=g(g(1))=g(2)=1$

정답_ ①

965

$$
\begin{aligned}
(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)\\
&=(g^{-1}\circ f)(3)\\
&=g^{-1}(f(3))\\
&=g^{-1}(2)
\end{aligned}
$$

$g^{-1}(2)=a$로 놓으면 $g(a)=2$이므로

$\sqrt{2a-1}=2,\ 2a-1=4 \qquad \therefore a=\frac{5}{2}$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(2)=\frac{5}{2}$

정답_ $\frac{5}{2}$

966

$f^{-1}(g(x))=2x$에서

$g(x)=f(2x)$

$\therefore g(3)=f(6)=\sqrt{3\times6-12}=\sqrt{6}$

정답_ ③

다른 풀이

$y=\sqrt{3x-12}$로 놓고 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\sqrt{3y-12}$

이 식의 양변을 제곱하면

$x^2=3y-12 \qquad \therefore y=\frac{1}{3}x^2+4$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x^2+4\ (x\ge0)$

$f^{-1}(g(x))=2x$에서

$\frac{1}{3}\{g(x)\}^2+4=2x,\ \{g(x)\}^2=6x-12$

이때 $x\ge2$에서 $g(x)\ge0$이므로

$g(x)=\sqrt{6x-12}$

$\therefore g(3)=\sqrt{6\times3-12}=\sqrt{6}$

967

$\frac{1}{\sqrt{x^2-2kx+k+20}}$의 값이 실수 x의 값에 관계없이 항상 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2-2kx+k+20>0$ ❶

이어야 한다.

이차방정식 $x^2-2kx+k+20=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k+20)<0$

$k^2-k-20<0,\ (k+4)(k-5)<0$

$\therefore -4<k<5$ ❷

따라서 정수 k의 최솟값은 -3이다. ❸

정답_ -3

채점 기준	비율
❶ $x^2-2kx+k+20>0$임을 알기	30 %
❷ k의 값의 범위 구하기	60 %
❸ 정수 k의 최솟값 구하기	10 %

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 할 때, 이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다.

(1) $ax^2+bx+c>0 \Rightarrow a>0,\ D<0$

(2) $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow a<0,\ D<0$

968

$$
\begin{aligned}
x-\frac{1}{x}&=2-\sqrt{5}-\frac{1}{2-\sqrt{5}}\\
&=2-\sqrt{5}-\frac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}\\
&=2-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}=4
\end{aligned}
$$
❶

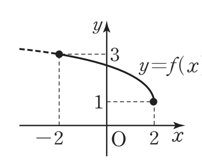
$$
\begin{aligned}
\therefore x^3-\frac{1}{x^3}&=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\\
&=4^3+3\times4=76
\end{aligned}
$$
❷

정답_ 76

채점 기준	비율
❶ $x-\frac{1}{x}$의 값 구하기	50 %
❷ $x^3-\frac{1}{x^3}$의 값 구하기	50 %

969

(i) $a>0$이면 $-2\le x\le2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-2$일 때 최댓값 3, $x=2$일 때 최솟값 1을 갖는다.

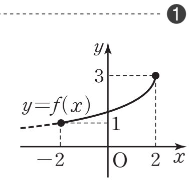


즉, $f(-2)=2a+b=3,\ f(2)=b=1$이므로

$a=1,\ b=1$

$\therefore a^2+b^2=1^2+1^2=2$ ❶

(ii) $a<0$이면 $-2\le x\le2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-2$일 때 최솟값 1, $x=2$일 때 최댓값 3을 갖는다.



즉, $f(-2)=2a+b=1,\ f(2)=b=3$이므로

$a=-1,\ b=3$

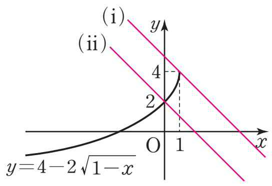
$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+3^2=10$ ❷

(i), (ii)에서 a^2+b^2의 최댓값은 10이다. ❸

정답_ 10

채점 기준	비율
❶ $a>0$일 때, a^2+b^2의 값 구하기	45 %
❷ $a<0$일 때, a^2+b^2의 값 구하기	45 %
❸ a^2+b^2의 최댓값 구하기	10 %

970



$y=4-2\sqrt{1-x}=-\sqrt{-4(x-1)}+4$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고, $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k인 직선이다.

(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1, 4)$를 지날 때

$4=-1+k \qquad \therefore k=5$ ········· ❶

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(0, 2)$를 지날 때

$k=2$ ········· ❷

(i), (ii)에서 함수 $y=4-2\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는

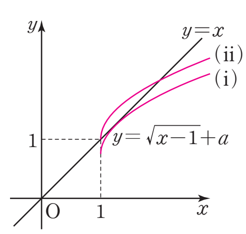
$2<k\le 5$ ········· ❸

정답_ $2<k\le 5$

채점 기준	비율
❶ 직선 $y=-x+k$가 점 $(1, 4)$를 지날 때, k의 값 구하기	40 %
❷ 직선 $y=-x+k$가 점 $(0, 2)$를 지날 때, k의 값 구하기	40 %
❸ k의 값의 범위 구하기	20 %

971

함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+a$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프가 한 점에서 만나려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 한 점에서 만나면 된다.



(i) 직선 $y=x$가 함수 $y=\sqrt{x-1}+a$의 그래프에 접할 때

$x=\sqrt{x-1}+a$에서 $x-a=\sqrt{x-1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-(2a+1)x+a^2+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2a+1)^2-4(a^2+1)=0$

$4a-3=0 \qquad \therefore a=\dfrac{3}{4}$ ········· ❶

(ii) 함수 $y=\sqrt{x-1}+a$의 그래프가 점 $(1, 1)$을 지날 때

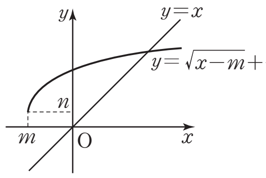
$1=a$ ········· ❷

(i), (ii)에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$a=\dfrac{3}{4}$ 또는 $a>1$ ········· ❸

정답_ $a=\dfrac{3}{4}$ 또는 $a>1$

채점 기준	비율
❶ 직선 $y=x$가 함수 $y=\sqrt{x-1}+a$의 그래프에 접할 때, a의 값 구하기	40 %
❷ 함수 $y=\sqrt{x-1}+a$의 그래프가 점 $(1, 1)$을 지날 때, a의 값 구하기	40 %
❸ a의 값의 범위 구하기	20 %



참고 함수 $f(x)=\sqrt{x-m}+n$이라고 하면 정의역은 $\{x|x\ge m\}$이고 치역은 $\{y|y\ge n\}$이다. 이때 $m<n$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 오직 한 점에서 만난다.

972

$(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(a)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(a)))=36$에서

$f(f(f(36)))=a$ ········· ❶

$36\ge 1$이므로 $f(36)=3-\sqrt{36}=-3$

$-3<1$이므로 $f(-3)=2+\sqrt{1-(-3)}=4$

$4\ge 1$이므로 $f(4)=3-\sqrt{4}=1$ ········· ❷

$\therefore a=f(f(f(36)))=f(f(-3))=f(4)=1$ ········· ❸

정답_ 1

채점 기준	비율
❶ $f(f(f(36)))=a$임을 알기	30 %
❷ $f(36)$, $f(4)$, $f(1)$의 값 구하기	60 %
❸ a의 값 구하기	10 %

973

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{(k-1)x^2-(k-1)x+4}$의 값이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여

$(k-1)x^2-(k-1)x+4\ge 0$

이어야 한다.

(i) $k=1$일 때

$4\ge 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k\ne 1$일 때

$k-1>0$에서 $k>1$

이차방정식 $(k-1)x^2-(k-1)x+4=0$의 판별식을 D라고 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$D=(k-1)^2-16(k-1)\le 0$

$k^2-18k+17\le 0$, $(k-1)(k-17)\le 0$

$\therefore 1<k\le 17$ ($\because k\ne 1$)

(i), (ii)에서 $1\le k\le 17$이므로 정수 k는 1, 2, 3, ⋯, 17의 17개이다.

정답_ 17

974

$(\sqrt{13-2x}+\sqrt{11-4y})^2$

$=13-2x+11-4y+2\sqrt{13-2x}\sqrt{11-4y}$

$=24-2(x+2y)+2\sqrt{(13-2x)(11-4y)}$ ······ ㉠

$x+2y=3$에서 $2y=3-x$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$24-2(x+2y)+2\sqrt{(13-2x)(11-4y)}$

$=24-2(x+3-x)+2\sqrt{(13-2x)\{11-2(3-x)\}}$

$=18+2\sqrt{(13-2x)(5+2x)}$

$=18+2\sqrt{-4x^2+16x+65}$

$=18+2\sqrt{-4(x-2)^2+81}$

이때 $-4(x-2)^2+81$은 $x=2$일 때, 최댓값 81을 가지므로 구하는 최댓값은

$18+2\sqrt{81}=18+18=36$

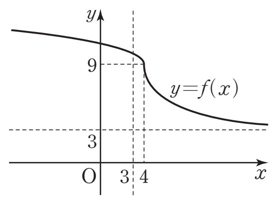
정답_ 36

975

$x>4$일 때

$$f(x)=\frac{3x-3}{x-3}=\frac{3(x-3)+6}{x-3}=\frac{6}{x-3}+3$$

조건 (가)에서 치역이 $\{y|y>3\}$이고 조건 (나)에서 함수 f는 일대일함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(4,\ 9)$를 지나야 한다.



즉, $f(4)=9$이므로 $a=9$

이때 $f(3)=\sqrt{4-3}+9=10$이므로 $f(3)f(k)=50$에서

$10f(k)=50 \qquad \therefore f(k)=5$

$f(k)=5<f(4)$이므로 $k>4$

따라서 $\dfrac{3k-3}{k-3}=5$이므로

$3k-3=5k-15 \qquad \therefore k=6$

정답_ 6

976

$f(x)=-\sqrt{kx+2k}+4,\ g(x)=\sqrt{-kx+2k}-4$라고 하자.

ㄱ. $f(-x)=-\sqrt{-kx+2k}+4$

$\qquad =-(\sqrt{-kx+2k}-4)$

$\qquad =-g(x)$

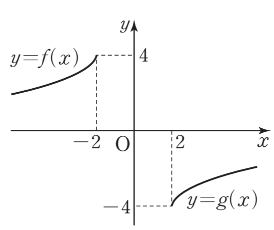
이므로 $g(x)=-f(-x)$

따라서 두 곡선 $y=-\sqrt{kx+2k}+4,\ y=\sqrt{-kx+2k}-4$는 서로 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $f(x)=-\sqrt{k(x+2)}+4$,

$g(x)=\sqrt{-k(x-2)}-4$

이고 $k<0$이면 두 곡선은 오른쪽 그림과 같으므로 만나지 않는다. (거짓)



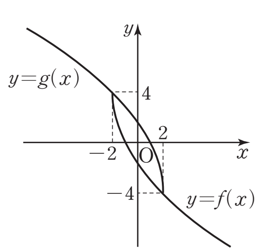
ㄷ. (i) $k<0$일 때

ㄴ에 의하여 두 곡선은 만나지 않는다.

(ii) $k>0$일 때

ㄱ에서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이고 k의 값이 커질수록 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=4$와 멀어지고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=-4$와 멀어진다.

따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최댓값은 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ -4)$를 지날 때이다.



즉, $-4=-\sqrt{2k+2k}+4$이므로

$\sqrt{4k}=8,\ 4k=64 \qquad \therefore k=16$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ④

977

$1-x\ge0,\ 1+x\ge0$이어야 하므로 $-1\le x\le1$

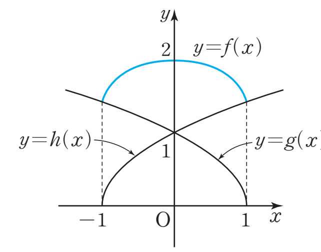
$g(x)=\sqrt{1-x},\ h(x)=\sqrt{1+x}$라고 하면

$g(-x)=\sqrt{1-(-x)}=\sqrt{1+x}=h(x)$,

$h(-x)=\sqrt{1-x}=g(x)$

이므로 $f(-x)=g(-x)+h(-x)=h(x)+g(x)=f(x)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고 위로 볼록하므로 함수 $y=f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값을 갖고, $x=-1$ 또는 $x=1$일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $f(0)=\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}=2,\ f(-1)=f(1)=\sqrt{2}$이므로

$M=2,\ m=\sqrt{2}$

$\therefore Mm=2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

정답_ $2\sqrt{2}$

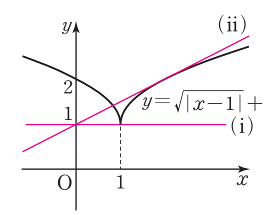
978

$y=\sqrt{|x-1|}+1$에서

$x\ge1$일 때, $y=\sqrt{x-1}+1$

$x<1$일 때, $y=\sqrt{-(x-1)}+1=\sqrt{-x+1}+1$

따라서 함수 $y=\sqrt{|x-1|}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=kx+1$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.



(i) $y=1$일 때, $k=0$

(ii) 직선 $y=kx+1$이 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$의 그래프에 접할 때

$\sqrt{x-1}+1=kx+1$에서 $\sqrt{x-1}=kx$

양변을 제곱하여 정리하면 $k^2x^2-x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=1-4k^2=0$

$(1+2k)(1-2k)=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $k=\dfrac{1}{2}$

위의 그림에서 $k>0$이어야 하므로 $k=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 두 함수의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는

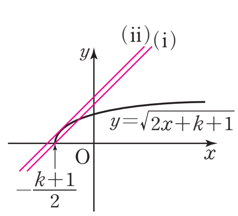
$0<k<\dfrac{1}{2}$

정답_ $0<k<\dfrac{1}{2}$

979

$$y=\sqrt{2x+k+1}=\sqrt{2\left(x+\frac{k+1}{2}\right)}$$

이므로 함수 $y=\sqrt{2x+k+1}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{k+1}{2}$만큼 평행이동



한 것이다.

(i) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(-\frac{k+1}{2},\ 0\right)$을 지날 때

$0=-\frac{k+1}{2}+k$에서 $k=1$

(ii) 직선 $y=x+k$가 함수 $y=\sqrt{2x+k+1}$의 그래프에 접할 때

$x+k=\sqrt{2x+k+1}$에서 양변을 제곱하면

$x^2+2kx+k^2=2x+k+1$

$\therefore\ x^2+2(k-1)x+k^2-k-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-k-1)=0$

$-k+2=0 \qquad \therefore\ k=2$

(i), (ii)에서

ㄱ. $k<1$이면 함수 $y=\sqrt{2x+k+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$는 한 점에서 만난다. (참)

ㄴ. $1\le k<2$이면 함수 $y=\sqrt{2x+k+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$는 서로 다른 두 점에서 만나고, $k=2$이면 한 점에서 만난다. (거짓)

ㄷ. $k>2$이면 함수 $y=\sqrt{2x+k+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$는 만나지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

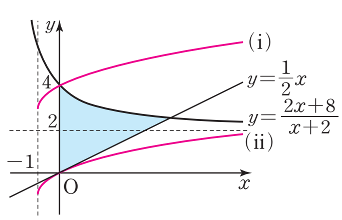
정답_ ③

980

$y=\frac{2x+8}{x+2}=\frac{2(x+2)+4}{x+2}=\frac{4}{x+2}+2\ (x>-2)$

이므로 함수 $y=\frac{2x+8}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 직선 $y=\frac{1}{2}x$는 원점을 지나므로 함수 $y=\frac{2x+8}{x+2}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 경계 및 내부는 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



함수 $y=\sqrt{x+1}+k$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

(i) 함수 $y=\sqrt{x+1}+k$의 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지날 때

$4=1+k$에서 $k=3$

(ii) 함수 $y=\sqrt{x+1}+k$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 접할 때

$\sqrt{x+1}+k=\frac{1}{2}x$에서 $2\sqrt{x+1}=x-2k$

양변을 제곱하면

$4(x+1)=x^2-4kx+4k^2$

$\therefore\ x^2-4(k+1)x+4(k^2-1)=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{2(k+1)\}^2-4(k^2-1)=0$

$4k^2+8k+4-4k^2+4=0,\ 8k+8=0$

$\therefore\ k=-1$

(i), (ii)에서 색칠한 부분의 경계 및 내부에 함수 $y=\sqrt{x+1}+k$의 그래프의 일부가 존재하도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$-1\le k\le 3$

따라서 $a=-1,\ b=3$이므로

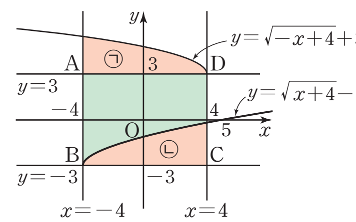
$a+b=-1+3=2$

정답_ 2

981

함수 $y=\sqrt{x+4}-3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=\sqrt{-x+4}+3=\sqrt{-(x-4)}+3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡의 넓이가 같으므로 구하는 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

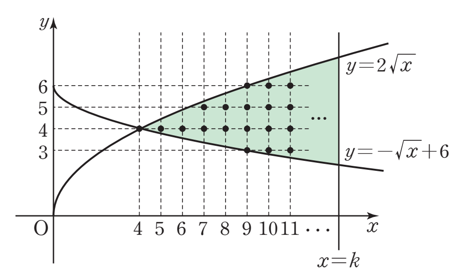


따라서 구하는 넓이는

$6\times 8=48$

정답_ 48

982



두 함수 $y=2\sqrt{x}$와 $y=-\sqrt{x}+6$의 그래프의 교점의 좌표가 $(4,\ 4)$이므로 $x\ge 4$일 때 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프 위의 y좌표가 정수인 점은

$(4,\ 4),\ \left(\frac{25}{4},\ 5\right),\ (9,\ 6),\ \left(\frac{49}{4},\ 7\right),\ (16,\ 8),\ \left(\frac{81}{4},\ 9\right),\ \cdots$

또, 함수 $y=-\sqrt{x}+6$의 그래프 위의 y좌표가 정수인 점은

$(4,\ 4),\ (9,\ 3),\ (16,\ 2),\ (25,\ 1),\ \cdots$

두 곡선 $y=2\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}+6$과 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분의 경계 및 내부에 포함되는 점 중에서 x, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $4\le x<\frac{25}{4}$일 때, $y=4$이므로 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $3\times 1=3$

(ii) $\frac{25}{4}\le x<9$일 때, $y=4,\ 5$이므로 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $2\times 2=4$

(iii) $9\le x<\frac{49}{4}$일 때, $y=3,\ 4,\ 5,\ 6$이므로 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $4\times 4=16$

(iv) $\frac{49}{4}\le x<16$일 때, $y=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$이므로 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $3\times 5=15$

(v) $16\le x<\frac{81}{4}$일 때, $y=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$이므로 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $5\times 7=35$

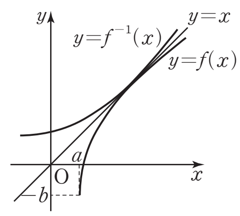
(ⅰ)~(ⅳ)에서 $4 \le x < 16$일 때, x좌표, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $3+4+16+15=38$

(ⅴ)에서 $x=16$, 17, 18일 때, x좌표, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $3 \times 7 = 21$

따라서 조건을 만족시키는 점의 개수가 59가 되도록 하는 자연수 k의 값은 18이다.

정답_ 18

983



함수 $f(x)=\sqrt{x-a}-b$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 한 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 접해야 한다.

$\sqrt{x-a}-b=x$에서 $\sqrt{x-a}=x+b$

양변을 제곱하면

$x-a=x^2+2bx+b^2$

$\therefore x^2+(2b-1)x+a+b^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2b-1)^2-4(a+b^2)=0$

$-4(a+b)+1=0 \qquad \therefore a+b=\frac{1}{4}$

이때 a, b가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b \ge 2\sqrt{ab}$, $\frac{1}{4} \ge 2\sqrt{ab}$, $\sqrt{ab} \le \frac{1}{8}$

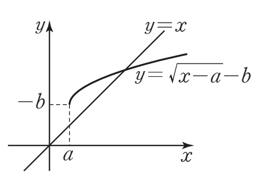
$\therefore ab \le \frac{1}{64}$ $\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{8},\ b=\frac{1}{8}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 ab의 최댓값은 $\frac{1}{64}$이다.

정답_ ⑤

참고 b가 양수이므로 $-b<0$

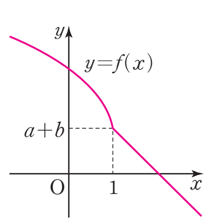
따라서 함수 $f(x)=\sqrt{x-a}-b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같은 경우가 존재하지 않는다.



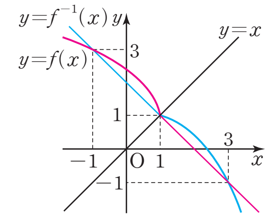
984

$c>0$이면 $y=\sqrt{cx+d}=\sqrt{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}$의 정의역은 $\left\{x \,\middle|\, x \ge -\frac{d}{c}\right\}$이다. 그런데 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 $c>0$이면 $y=\sqrt{cx+d}$가 집합 $\{x \mid x<1\}$에서 정의된다는 조건을 만족시키지 않는다.

또, $c=0$이면 역함수를 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키려면 $c<0$이어야 한다.



$f(x)=\begin{cases} \sqrt{cx+d} & (x<1) \\ ax+b & (x \ge 1) \end{cases}$의 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이고, $f(x)$가 일대일대응이므로 함수 $y=\sqrt{cx+d}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(1,\ a+b)$를 지나야 한다.



이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$ 위에 있거나 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 세 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 3이므로 직선 $y=x$ 위에 있는 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$이고, 나머지 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 나머지 두 교점의 좌표는 $(-1,\ 3)$, $(3,\ -1)$이다.

따라서 직선 $y=ax+b$는 두 점 $(1,\ 1)$, $(3,\ -1)$을 지나므로

$a+b=1$, $3a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=2$

또, 함수 $y=\sqrt{cx+d}$의 그래프는 두 점 $(-1,\ 3)$, $(1,\ 1)$을 지나므로

$\sqrt{-c+d}=3$, $\sqrt{c+d}=1$

위의 두 식의 양변을 제곱하면

$-c+d=9$, $c+d=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$c=-4$, $d=5$

$\therefore a+b+c+d=(-1)+2+(-4)+5=2$

정답_ 2

985

$y=\frac{1}{2}x^2-4\ (x \ge 0)$로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$2y=x^2-8$, $x^2=2y+8 \qquad \therefore x=\sqrt{2y+8}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\sqrt{2x+8}\ (x \ge -4)$

따라서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 서로 역함수 관계이다. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\frac{1}{2}x^2-4=x$에서

$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x \ge 0)$

따라서 두 곡선의 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$이다.

한편, 두 직선 $y=x$, $y=-x+k$는 서로 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 즉, $\mathrm{B}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2-4\right)\ (0 \le a \le 4)$라고 하면 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}a^2-4,\ a\right)$

이때 $\frac{1}{2}a^2-a-4=\frac{1}{2}(a+2)(a-4) \le 0$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2-4-a\right)^2+\left\{a-\left(\frac{1}{2}a^2-4\right)\right\}^2}$$

$$=\sqrt{2\left(\frac{1}{2}a^2-4-a\right)^2}$$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}a^2+a+4\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}(a-1)^2+\frac{9}{2}\sqrt{2}$$

따라서 선분 AB의 길이는 $a=1$일 때 최댓값 $\frac{9}{2}\sqrt{2}$를 갖는다.

정답_ ④