

풍산짜 라이트유형

공통수학 2

| 정답과 풀이 |

01

평면좌표

기본을 다지는 유형

본문 009쪽

001

- (1) $\overline{AB} = |3-1| = 2$ (2) $\overline{AB} = |-6-2| = 8$
 (3) $\overline{AB} = |5-(-1)| = 6$ (4) $\overline{OA} = |-4-0| = 4$
 [답] (1) 2 (2) 8 (3) 6 (4) 4

002

- (1) $\overline{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
 (2) $\overline{AB} = \sqrt{(7-1)^2 + \{-2-(-3)\}^2} = \sqrt{37}$
 (3) $\overline{AB} = \sqrt{\{-1-(-2)\}^2 + \{5-(-6)\}^2} = \sqrt{122}$
 (4) $\overline{OA} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
 [답] (1) $2\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{37}$ (3) $\sqrt{122}$ (4) 5

003

- $\overline{OA} = 4$ 에서 $\sqrt{a^2+3^2} = 4$
 양변을 제곱하면 $a^2+9=16 \quad \therefore a^2=7$
 [답] ②

004

- $\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로
 $\sqrt{(a-2)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (4-2)^2}$
 양변을 제곱하면
 $(a-2)^2 + 36 = (a-3)^2 + 4, a^2 - 4a + 40 = a^2 - 6a + 13$
 $2a = -27 \quad \therefore a = -\frac{27}{2}$
 [답] $-\frac{27}{2}$

005

- $\overline{AB} \leq 4$ 이므로
 $\sqrt{(k+1+1)^2 + (2-k)^2} \leq 4$
 양변을 제곱하면
 $(k+2)^2 + (2-k)^2 \leq 16, 2k^2 + 8 \leq 16, k^2 - 4 \leq 0$
 $(k+2)(k-2) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq k \leq 2$
 따라서 정수 k 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.
 [답] ⑤

006

- 구하는 y 축 위의 점 P 의 좌표를 $(0, a)$ 라고 하면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$
 $(0-2)^2 + (a-5)^2 = (0-3)^2 + (a+1)^2$
 $a^2 - 10a + 29 = a^2 + 2a + 10$

002 정답과 풀이

$$-12a = -19 \quad \therefore a = \frac{19}{12}$$

따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $(0, \frac{19}{12})$ 이다.

[답] ④

참고

같은 거리에 있는 점의 좌표

- (1) 두 점 A, B 에서 같은 거리에 있는 점을 P 라고 하면
 $\Rightarrow \overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$
 (2) 점 P 의 위치에 따라 다음을 이용한다.
 ① 점 P 가 x 축 위의 점이면 $\Rightarrow P(a, 0)$
 ② 점 P 가 y 축 위의 점이면 $\Rightarrow P(0, a)$
 ③ 점 P 가 직선 $y = mx + n$ 위의 점이면 $\Rightarrow P(a, ma + n)$

007

- 점 P 의 좌표를 $(a, 0)$ 이라고 하면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$
 $(a+1)^2 + (0-2)^2 = (a-5)^2 + (0-4)^2$
 $a^2 + 2a + 5 = a^2 - 10a + 41$
 $12a = 36 \quad \therefore a = 3$
 $\therefore P(3, 0)$ ①

- 점 Q 의 좌표를 $(0, b)$ 라고 하면
 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$
 $(0+1)^2 + (b-2)^2 = (0-5)^2 + (b-4)^2$
 $b^2 - 4b + 5 = b^2 - 8b + 41$
 $4b = 36 \quad \therefore b = 9$
 $\therefore Q(0, 9)$ ②

- 따라서 선분 PQ 의 길이는
 $\overline{PQ} = \sqrt{(0-3)^2 + (9-0)^2} = 3\sqrt{10}$ ③
 [답] $3\sqrt{10}$

채점 기준	비율
① 점 P 의 좌표를 구할 수 있다.	40%
② 점 Q 의 좌표를 구할 수 있다.	40%
③ 선분 PQ 의 길이를 구할 수 있다.	20%

008

- 점 P 의 좌표를 $(0, a)$ 라고 하면
 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = \{(0+2)^2 + (a-4)^2\} + \{(0-5)^2 + (a+2)^2\}$
 $= (a^2 - 8a + 20) + (a^2 + 4a + 29)$
 $= 2a^2 - 4a + 49 = 2(a-1)^2 + 47$
 따라서 $a=1$ 일 때 최솟값 47을 갖는다.
 [답] ③

009

- 점 P 가 직선 $y = x + 3$ 위에 있으므로 점 P 의 좌표를 $(a, a+3)$ 이라고 하면
 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$
 $= \{(a-0)^2 + (a+3-6)^2\} + \{(a+3)^2 + (a+3-7)^2\}$
 $= (2a^2 - 6a + 9) + (2a^2 - 2a + 25)$
 $= 4a^2 - 8a + 34 = 4(a-1)^2 + 30$

따라서 $a=1$ 일 때 최솟값 30을 갖는다.
 즉, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소일 때 점 P의 x 좌표는 1이다.

답 1

010

$$\overline{AB} = \sqrt{(2+2)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(6-2)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{65}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(-2-6)^2 + (7-8)^2} = \sqrt{65}$$

$\therefore \overline{BC} = \overline{CA}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이다.

답 ②

참고

- 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 a, b, c 라고 할 때
- (1) $a=b=c \Rightarrow$ 정삼각형
 - (2) $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow c$ 가 빗변인 직각삼각형
 - (3) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a \Rightarrow$ 이등변삼각형

011

삼각형 ABC가 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이 되려면

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$ 이어야 하므로 ①

$$(5-3)^2 + (4-0)^2 = \{(3-2)^2 + (0-a)^2\} + \{(2-5)^2 + (a-4)^2\}$$

$$20 = 2a^2 - 8a + 26, 2a^2 - 8a + 6 = 0$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0, (a-1)(a-3) = 0$$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$ ②

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$1+3=4$ ③

답 4

채점 기준	비율
① 삼각형 ABC가 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이 되는 조건을 알고 있다.	40%
② a 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ a 의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

012

(1) $\frac{2 \times (-4) + 3 \times 6}{2+3} = 2$ 이므로 P(2)

(2) $\frac{2 \times 6 + 3 \times (-4)}{2+3} = 0$ 이므로 Q(0)

(3) $\frac{6 + (-4)}{2} = 1$ 이므로 M(1)

답 (1) P(2) (2) Q(0) (3) M(1)

013

선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표가 -1이므로

$$\frac{1 \times 7 + 2 \times a}{1+2} = -1, \frac{7+2a}{3} = -1$$

$7+2a = -3, 2a = -10 \therefore a = -5$

답 -5

014

(1) $\frac{1 \times 2 + 2 \times (-1)}{1+2} = 0, \frac{1 \times 5 + 2 \times 2}{1+2} = 3$ 이므로

P(0, 3)

(2) $\frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}, \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$ 이므로 M($\frac{1}{2}, \frac{7}{2}$)

답 (1) (0, 3) (2) ($\frac{1}{2}, \frac{7}{2}$)

015

선분 BA를 3:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-7) + 1 \times (-3)}{3+1}, \frac{3 \times 3 + 1 \times (-5)}{3+1} \right)$$

$\therefore (-6, 1)$

답 ①

016

선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 0 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times (-4) + 1 \times 2}{2+1} \right)$$

$\therefore (-1, -2)$

점 $(-1, -2)$ 가 직선 $y = x + k$ 위의 점이므로

$-2 = -1 + k \therefore k = -1$

답 ②

017

선분 AB의 중점의 좌표가 $(-1, 3)$ 이므로

$$\frac{a + (-6)}{2} = -1, \frac{8 + b}{2} = 3$$

$\therefore a = 4, b = -2$

$\therefore ab = 4 \times (-2) = -8$

답 ②

018

선분 AB를 1:3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times a + 3 \times (-2)}{1+3}, \frac{1 \times (-4) + 3 \times 4}{1+3} \right)$$

$\therefore \left(\frac{a-6}{4}, 2 \right)$ ①

따라서 $\frac{a-6}{4} = 0, 2 = b$ 이므로 $a = 6, b = 2$ ②

$\therefore a + b = 6 + 2 = 8$ ③

답 8

채점 기준	비율
① 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	50%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

019

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a, b), (c, d)$ 라고 하면 선분 AB의 중점의 좌표가 $(1, 3)$ 이므로

$$\frac{a+c}{2}=1, \frac{b+d}{2}=3$$

$$\therefore a+c=2 \quad \text{..... ㉠} \quad b+d=6 \quad \text{..... ㉡}$$

선분 AB를 2:3으로 내분하는 점의 좌표가 (-1, 4)이므로

$$\frac{2c+3a}{2+3}=-1, \frac{2d+3b}{2+3}=4$$

$$\therefore 3a+2c=-5 \quad \text{..... ㉢} \quad 3b+2d=20 \quad \text{..... ㉣}$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-9, c=11$
 ㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $b=8, d=-2$
 $\therefore A(-9, 8), B(11, -2)$

답 A(-9, 8), B(11, -2)

020

선분 AB를 3:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 2 + 1 \times a}{3+1}, \frac{3 \times (-4) + 1 \times 0}{3+1} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+6}{4}, -3 \right)$$

점 $\left(\frac{a+6}{4}, -3 \right)$ 이 y 축 위에 있으므로

$$\frac{a+6}{4}=0 \quad \therefore a=-6$$

따라서 A(-6, 0), B(2, -4)이므로 선분 AB의 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{(2+6)^2 + (-4-0)^2} = 4\sqrt{5}$$

답 ③

021

$t : (1-t)$ 에서 $t > 0, 1-t > 0$

$$\therefore 0 < t < 1 \quad \text{..... ㉠}$$

점 P의 좌표를 (a, b) 라고 하면 점 P는 제1사분면 위에 있으므로

$$a > 0, b > 0$$

$$a = \frac{t \times 7 + (1-t) \times (-4)}{t + (1-t)} = 11t - 4 > 0 \text{에서}$$

$$t > \frac{4}{11} \quad \text{..... ㉡}$$

$$b = \frac{t \times 4 + (1-t) \times 6}{t + (1-t)} = -2t + 6 > 0 \text{에서}$$

$$t < 3 \quad \text{..... ㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$$\frac{4}{11} < t < 1$$

답 $\frac{4}{11} < t < 1$

022

두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{4+b}{2} = \frac{6+3}{2}, \frac{-2+3}{2} = \frac{a+(-9)}{2} \quad \therefore a=10, b=5$$

$$\therefore a+b=10+5=15$$

답 ⑤

풍샘 개념 CHECK

평행사변형과 마름모의 성질 中 수학 2

- ① 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.
- ② 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

023

두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로 중점의 x 좌표에서

$$\frac{a+6}{2} = \frac{2+b}{2} \quad \therefore a-b=-4 \quad \text{..... ㉠}$$

..... ①

또, 마름모의 네 변의 길이는 모두 같으므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$$

$$(2-a)^2 + (4-0)^2 = (6-2)^2 + (2-4)^2$$

$$a^2 - 4a + 20 = 20, a^2 - 4a = 0$$

$$a(a-4) = 0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=4 \quad \text{..... ㉡}$$

$a=0$ 을 ㉠에 대입하면 $b=4$
 $a=4$ 를 ㉠에 대입하면 $b=8$

..... ③

따라서 ab 의 값은 0 또는 32이다. ④

답 0, 32

채점 기준	비율
① 두 대각선의 중점이 일치함을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
② 마름모의 네 변의 길이는 모두 같음을 이용하여 a 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ b 의 값을 구할 수 있다.	20%
④ ab 의 값을 구할 수 있다.	20%

024

(1) $\frac{0+(-4)+10}{3}=2, \frac{0+5+(-2)}{3}=1$ 이므로
 $G(2, 1)$

(2) $\frac{-4+(-1)+2}{3}=-1, \frac{-2+5+9}{3}=4$ 이므로
 $G(-1, 4)$

(3) $\frac{-3+1+2}{3}=0, \frac{2+7+(-3)}{3}=2$ 이므로
 $G(0, 2)$

(4) $\frac{-1+3+5}{3}=\frac{7}{3}, \frac{6+(-8)+(-1)}{3}=-1$ 이므로
 $G\left(\frac{7}{3}, -1\right)$

답 (1) (2, 1) (2) (-1, 4) (3) (0, 2) (4) $\left(\frac{7}{3}, -1\right)$

025

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (2, -3)이므로

$$\frac{a+(-2)+6}{3}=2, \frac{b+(-4)+(-7)}{3}=-3$$

$$\therefore a=2, b=2$$

$$\therefore a+b=2+2=4$$

답 ④

026

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (1, 1)이므로

$$\frac{a+(a+1)+(b-2)}{3} = 1, \frac{(b+2)+(-5)+a}{3} = 1$$

$$\frac{2a+b-1}{3} = 1, \frac{a+b-3}{3} = 1$$

$$\therefore 2a+b=4, a+b=6$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=8$$

$$\therefore ab=-2 \times 8 = -16$$

답 -16

027

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (3, 2)이므로

$$\frac{-6+x_1+x_2}{3} = 3, \frac{3+y_1+y_2}{3} = 2$$

$$\therefore x_1+x_2=15, y_1+y_2=3$$

따라서 선분 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{15}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

답 ①

028

두 점 B, C의 좌표를 각각 (c, d), (e, f)라고 하면 선분 BC의 중점의 좌표가 (1, 2)이므로

$$\frac{c+e}{2} = 1, \frac{d+f}{2} = 2$$

$$\therefore c+e=2, d+f=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 무게중심이 원점이므로

$$\frac{a+c+e}{3} = 0, \frac{b+d+f}{3} = 0$$

위의 식에서 ①을 대입하면

$$\frac{a+2}{3} = 0, \frac{b+4}{3} = 0$$

$$\therefore a=-2, b=-4$$

$$\therefore a \times b = -2 \times (-4) = 8$$

답 ②

| 다른 풀이 |

변 BC의 중점을 M이라고 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 선분 AM을 2:1로 내분하는 점이다.

A(a, b), M(1, 2)이므로 선분 AM을 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 1 + 1 \times a}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times b}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+4}{3}\right)$$

이 점이 원점이므로 $\frac{a+2}{3} = 0, \frac{b+4}{3} = 0$ 에서

$$a=-2, b=-4$$

$$\therefore a \times b = -2 \times (-4) = 8$$

029

점 M이 변 BC의 중점이므로

$$\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

중선 정리에 의하여 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

$$7^2 + 5^2 = 2(\overline{AM}^2 + 5^2)$$

$$2\overline{AM}^2 = 24, \overline{AM}^2 = 12$$

$$\therefore \overline{AM} = 2\sqrt{3} (\because \overline{AM} > 0)$$

답 ④

030

(1) 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$$

이때

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3-2)^2 + (-4-8)^2} = 13,$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(6-2)^2 + (5-8)^2} = 5$$

이므로

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$= 13 : 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(2) (1)에 의하여 점 D는 선분 BC를 13:5로 내분하는 점이다.

$$\frac{13 \times 6 + 5 \times (-3)}{13+5} = \frac{7}{2}, \frac{13 \times 5 + 5 \times (-4)}{13+5} = \frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$D\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

답 (1) 13:5 (2) $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

채점 기준	비율
① $\overline{BD} : \overline{DC}$ 를 구할 수 있다.	50%
② 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	50%

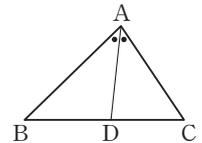
문제 개념 CHECK

내각의 이등분선의 성질 中 수학 2

삼각형 ABC에서 $\angle A$ 를 이등분하는 선이

변 BC와 만나는 점을 D라고 하면

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$



실력을 높이는 연습문제

본문 016쪽

01

$\overline{AB} = l$ 에서 $\overline{AB}^2 = l^2$ 이므로

$$l^2 = (-1-2t)^2 + (2t+3)^2$$

$$= 8t^2 + 16t + 10$$

$$= 8(t+1)^2 + 2$$

따라서 l^2 은 $t = -1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

답 2

02

직선 $y=x$ 위의 점 P의 좌표를 (a, a)라고 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(a-4)^2 + (a+4)^2} = \sqrt{(a+3)^2 + (a-6)^2}$$

양변을 제곱하면

$$(a-4)^2 + (a+4)^2 = (a+3)^2 + (a-6)^2$$

$$2a^2 + 32 = 2a^2 - 6a + 45$$

$$6a = 13 \quad \therefore a = \frac{13}{6}$$

$$\therefore P\left(\frac{13}{6}, \frac{13}{6}\right)$$

답 ⑤

03

문제 접근하기

O(0, 0), A(x, y), B(2, -3)으로 놓고 선분의 길이의 합의 최솟값을 이용하여 구한다.

O(0, 0), A(x, y), B(2, -3)이라고 하면

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2} &= \overline{OA} + \overline{BA} \\ &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ &\geq \overline{OB} = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

따라서 $m = \sqrt{13}$ 이므로

$$m^2 = 13$$

답 ④

참고

선분의 길이의 합의 최솟값

- 실수 x, y, a, b 에 대하여 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 은 두 점 $(x, y), (a, b)$ 사이의 거리와 같다.
- 두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소인 경우는 점 P가 선분 AB 위에 있을 때이다.
 $\rightarrow \overline{AP} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$

04

점 P의 좌표를 (x, y) 라고 하면

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (x^2+y^2) + \{(x-3)^2+y^2\} + \{x^2+(y-6)^2\} \\ &= 3x^2 - 6x + 3y^2 - 12y + 45 \\ &= 3(x-1)^2 + 3(y-2)^2 + 30 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $x=1, y=2$ 일 때 최솟값 30을 갖는다. 이때 점 P의 좌표는 (1, 2)이다.

\rightarrow 삼각형 OAB의 무게중심이다.

답 ④

참고

- 두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값 구하기
 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 $(x-a)^2+(y-b)^2+c$ 의 꼴로 나타내면 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $x=a, y=b$ 일 때 최솟값 c 를 갖는다. 이때 점 P의 좌표는 (a, b) 이다.
- 삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에 대하여 점 P에서 삼각형의 각 꼭짓점까지의 거리의 합의 최솟가 되도록 하는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

05

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(-1-\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

답 ①

06

선분 AB를 2:1로 내분하는 점이 P(3)이므로

$$\frac{2 \times b + 1 \times a}{2+1} = 3 \quad \therefore a+2b=9 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

선분 AB의 중점이 M(2)이므로

$$\frac{a+b}{2} = 2 \quad \therefore a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a=-1, b=5$

$$\therefore 2a+b = 2 \times (-1) + 5 = 3$$

답 3

07

$$\neg. \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1} = 3, \frac{2 \times (-3) + 1 \times 3}{2+1} = -1 \text{이므로}$$

P(3, -1) (참)

$$\iota. \frac{2 \times 1 + 1 \times 4}{2+1} = 2, \frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1} = 1 \text{이므로}$$

Q(2, 1) (거짓)

$$\kappa. \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}, \frac{3+(-3)}{2} = 0 \text{이므로 } M\left(\frac{5}{2}, 0\right) \text{ (거짓)}$$

ㄹ. P(3, -1), Q(2, 1)이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{(2-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 \neg, ι 이다.

답 ②

08

$$x_3 = \frac{3x_2+x_1}{3+1} = \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2, y_3 = \frac{3y_2+y_1}{3+1} = \frac{1}{4}y_1 + \frac{3}{4}y_2$$

$$x_4 = \frac{x_2+4x_1}{1+4} = \frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2, y_4 = \frac{y_2+4y_1}{1+4} = \frac{4}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2$$

$$\begin{aligned} \therefore \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 & \frac{1}{4}y_1 + \frac{3}{4}y_2 \\ \frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 & \frac{4}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

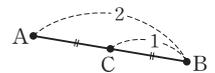
따라서 $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ 이므로 행렬 X의 (2, 2) 성분은 $\frac{1}{5}$ 이다.

답 $\frac{1}{5}$

09

$\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 에서 $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 1$

이때 점 C는 선분 AB 위의 점이므로 오른쪽



쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점이다.

따라서 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{2+1}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{이므로 } a = \frac{3}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a+b = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

답 ②

02

직선의 방정식

기본을 다지는 유형

본문 019쪽

10

점 B의 좌표를 (a, b) 라고 하면 선분 AB의 중점이 $M(0, 1)$ 이므로

$$\frac{-1+a}{2}=0, \frac{2+b}{2}=1 \quad \therefore a=1, b=0 \quad \therefore B(1, 0)$$

점 D의 좌표를 (x, y) 라고 하면 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{-1+4}{2}=\frac{1+x}{2}, \frac{2+1}{2}=\frac{0+y}{2} \quad \therefore x=2, y=3$$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 $(2, 3)$ 이다.

답 ②

11

점 D는 \overline{AB} 의 중점이므로 $D\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right)$, 즉 $D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

점 E는 \overline{BC} 의 중점이므로 $E\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-1+4}{2}\right)$, 즉 $E\left(4, \frac{3}{2}\right)$

점 F는 \overline{CA} 의 중점이므로 $F\left(\frac{5+(-2)}{2}, \frac{4+3}{2}\right)$, 즉 $F\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{1}{2}+4+\frac{3}{2}}{3}, \frac{1+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}}{3}\right), \text{ 즉 } (2, 2)$$

답 (2, 2)

| 다른 풀이 |

삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 DEF의 무게중심은 일치하므로 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+3+5}{3}, \frac{3+(-1)+4}{3}\right), \text{ 즉 } (2, 2)$$

참고

삼각형의 무게중심의 성질

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $m:n$ ($m>0, n>0$)으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라고 할 때, 삼각형 ABC와 DEF의 무게중심은 일치한다.

012

문제 접근하기

두 삼각형 ABE, ADC에서 각각 중선 정리를 이용하여 a^2, b^2 에 대한 식을 세우고 두 식을 연립하여 a^2, b^2 의 값을 구한다.

두 점 D, E가 변 BC의 삼등분점이므로 $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}=2$

삼각형 ABE에서 중선 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 = \boxed{(가) 2} (\overline{AD}^2 + \overline{BE}^2)$$

$$6^2 + b^2 = 2(a^2 + 2^2) \quad \therefore 2a^2 - b^2 = \boxed{(나) 28} \quad \dots\dots ㉠$$

삼각형 ADC에서 중선 정리에 의하여

$$\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가) 2} (\overline{AE}^2 + \overline{DE}^2)$$

$$a^2 + 4^2 = 2(b^2 + 2^2) \quad \therefore a^2 - 2b^2 = \boxed{(다) -8} \quad \dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a^2 = \boxed{(라) \frac{64}{3}}, b^2 = \boxed{(마) \frac{44}{3}}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{64}{3} + \frac{44}{3} = \boxed{(바) 36}$$

$$\therefore (가): 2, (나): 28, (다): -8, (라): \frac{64}{3}, (마): \frac{44}{3}, (바): 36$$

답 (가): 2 (나): 28 (다): -8 (라): $\frac{64}{3}$ (마): $\frac{44}{3}$ (바): 36

001

$$(2) y-3=2(x-1) \quad \therefore y=2x+1$$

$$(3) y-5=-(x+2) \quad \therefore y=-x+3$$

$$(4) y+4=\frac{1}{2}(x-6) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x-7$$

답 (1) $y=3x-1$ (2) $y=2x+1$

(3) $y=-x+3$ (4) $y=\frac{1}{2}x-7$

002

(3) 점 $(4, -2)$ 를 지나고 x 축에 수직인 직선은 y 축에 평행한 직선이므로 $x=4$

(4) 점 $(-3, -9)$ 를 지나고 y 축에 수직인 직선은 x 축에 평행한 직선이므로 $y=-9$

답 (1) $y=5$ (2) $x=2$ (3) $x=4$ (4) $y=-9$

참고

좌표축에 평행한 직선의 방정식

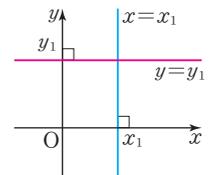
점 (x_1, y_1) 을 지나고

(1) x 축에 평행한 직선 (y 축에 수직인 직선)

$$\rightarrow y=y_1$$

(2) y 축에 평행한 직선 (x 축에 수직인 직선)

$$\rightarrow x=x_1$$



003

직선의 x 절편이 2이므로 점 $(2, 0)$ 을 지난다.

따라서 기울기가 -3 이고 점 $(2, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-0=-3(x-2) \quad \therefore y=-3x+6$$

답 $y=-3x+6$

004

점 $(3, 9)$ 를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y-9=2(x-3) \quad \therefore y=2x+3$$

따라서 구하는 y 절편은 3이다.

답 ①

005

점 $(2, -3)$ 을 지나고 기울기가 a 인 직선의 방정식은

$$y+3=a(x-2) \quad \therefore y=ax-2a-3$$

즉, $a=5, -2a-3=b$ 이므로 $a=5, b=-13$

$$\therefore a-b=5-(-13)=18$$

답 ⑤

006

두 점 $(-3, 2), (5, -8)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+(-8)}{2}\right) \quad \therefore (1, -3)$$

따라서 점 (1, -3)을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은 $y+3=-2(x-1) \quad \therefore y=-2x-1$

답 $y=-2x-1$

007

$3x-y-5=0$ 에서 $y=3x-5$ 이므로 기울기는 3이다.

점 (-1, 1)을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은 $y-1=3(x+1) \quad \therefore 3x-y+4=0$

따라서 $a=3, b=4$ 이므로 $a+b=3+4=7$

답 ③

008

직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 이므로 직선의 기울기는

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad \dots\dots\dots ①$$

점 (4, $-2\sqrt{3}$)을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y+2\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-4)$$

$$\therefore \sqrt{3}x-y-6\sqrt{3}=0 \quad \dots\dots\dots ②$$

따라서 $a=-1, b=-6\sqrt{3}$ 이므로

$$ab=-1 \times (-6\sqrt{3})=6\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots ③$$

답 $6\sqrt{3}$

채점 기준	비율
① 직선의 기울기를 구할 수 있다.	40%
② 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
③ ab 의 값을 구할 수 있다.	20%

009

$$(1) y-3=\frac{6-3}{1+2}(x+2) \quad \therefore y=x+5$$

$$(2) y+1=\frac{2+1}{8-7}(x-7) \quad \therefore y=3x-22$$

$$(3) y=\frac{0-2}{5-4}(x-5) \quad \therefore y=-2x+10$$

$$(4) y+3=\frac{-2+3}{4-2}(x-2) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x-4$$

답 (1) $y=x+5$ (2) $y=3x-22$

(3) $y=-2x+10$ (4) $y=\frac{1}{2}x-4$

010

두 점 (-3, 1), (6, 7)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{7-1}{6+3}(x+3) \quad \therefore 2x-3y+9=0$$

따라서 $a=2, b=3$ 이므로 $ab=2 \times 3=6$

답 ②

011

선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 + 1 \times (-7)}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 3}{2+1}\right)$$

008 정답과 풀이

$$\therefore (-1, 5) \quad \dots\dots\dots ①$$

두 점 (-1, 5), (2, -4)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=\frac{-4-5}{2+1}(x+1) \quad \therefore y=-3x+2 \quad \dots\dots\dots ②$$

따라서 $a=-3, b=2$ 이므로

$$a^2+b^2=(-3)^2+2^2=13 \quad \dots\dots\dots ③$$

답 13

채점 기준	비율
① 선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
② 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
③ a^2+b^2 의 값을 구할 수 있다.	20%

012

$$\frac{-3+(-2)+8}{3}=1, \frac{-5+3+(-1)}{3}=-1 \text{이므로 } G(1, -1)$$

따라서 두 점 A(-3, -5), G(1, -1)을 지나는 직선 AG의 방정식은

$$y+5=\frac{-1+5}{1+3}(x+3) \quad \therefore y=x-2$$

답 $y=x-2$

013

두 점 (-1, 2), (2, a)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{a-2}{2+1}(x+1) \quad \therefore y=\frac{a-2}{3}x+\frac{a+4}{3}$$

이 직선이 y 축과 점 (0, 5)에서 만나므로 y 절편은 5이다.

$$\text{즉, } \frac{a+4}{3}=5 \text{이므로 } a=11$$

답 ④

|다른 풀이|

두 점 (-1, 2), (0, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=\frac{5-2}{0+1}x \quad \therefore y=3x+5 \quad \rightarrow \text{세 점 } (-1, 2), (2, a), (0, 5) \text{는 한 직선 위에 있다.}$$

이 직선이 점 (2, a)를 지나므로 $a=3 \times 2+5=11$

014

$$(1) \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \quad \therefore y=-2x+4$$

$$(2) \frac{x}{-6}+\frac{y}{3}=1 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+3$$

답 (1) $y=-2x+4$ (2) $y=\frac{1}{2}x+3$

015

주어진 직선의 x 절편이 -3, y 절편이 2이므로 직선의 방정식은

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1 \quad \therefore y=\frac{2}{3}x+2$$

이 직선이 점 (k, 1)을 지나므로

$$1=\frac{2}{3}k+2 \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$$

답 $-\frac{3}{2}$

016

직선 $\frac{x}{12} + \frac{y}{8} = 1$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라고 하면

A(12, 0), B(0, 8)

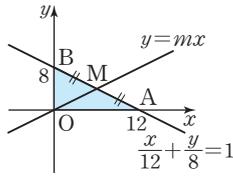
직선 $y=mx$ 는 원점 O를 지나고 오른쪽 그림의 삼각형 AOB의 넓이를 이등분하므로 변 AB의 중점을 지난다.

변 AB의 중점을 M이라고 하면

$$\frac{12+0}{2}=6, \frac{0+8}{2}=4 \quad \therefore M(6, 4)$$

즉, 직선 $y=mx$ 가 점 M(6, 4)를 지나므로

$$4=6m \quad \therefore m=\frac{2}{3}$$



답 ③

017

직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선 AC, BD의 교점을 지난다.

이때 두 대각선의 교점을 M이라고 하면 점 M은 선분 AC의 중점이고 A(2, 3), C(5, 1)이므로

$$\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2}, \frac{3+1}{2}=2 \quad \therefore M\left(\frac{7}{2}, 2\right)$$

즉, 직선 $y=ax$ 가 점 $M\left(\frac{7}{2}, 2\right)$ 를 지나므로

$$2=\frac{7}{2}a \quad \therefore a=\frac{4}{7}$$

답 ③

018

두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지난다.

A(0, 2), B(2, 4)라 하고, 작은 직사각형의 대각선의 교점을 M이라고 하면 점 M은 선분 AB의 중점이므로

$$\frac{0+2}{2}=1, \frac{2+4}{2}=3 \quad \therefore M(1, 3)$$

C(-6, -5), D(-2, -3)이라 하고, 큰 직사각형의 대각선의 교점을 N이라고 하면 점 N은 선분 CD의 중점이므로

$$\frac{-6+(-2)}{2}=-4, \frac{-5+(-3)}{2}=-4$$

$$\therefore N(-4, -4)$$

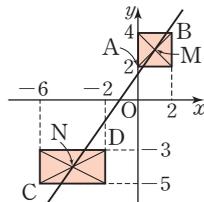
두 점 M(1, 3), N(-4, -4)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{-4-3}{-4-1}(x-1) \quad \therefore 7x-5y+8=0$$

따라서 $a=7, b=-5$ 이므로

$$a+b=7+(-5)=2$$

답 ④



019

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같다. ①

$$\text{즉, } \frac{2+3}{a+1}=\frac{a+3}{6+1} \text{에서 } \frac{5}{a+1}=\frac{a+3}{7}$$

$$(a+1)(a+3)=35, a^2+4a-32=0$$

$$(a+8)(a-4)=0 \quad \therefore a=-8 \text{ 또는 } a=4$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a=4$ ②

따라서 두 점 A(-1, -3), B(4, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y+3=\frac{2+3}{4+1}(x+1)$$

$$\therefore y=x-2 \quad \text{③}$$

답 $y=x-2$

채점 기준	비율
① 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 조건을 알 수 있다.	30%
② a 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%

참고

세 점이 한 직선 위에 있을 조건

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다.

→ (직선 AB의 기울기) = (직선 BC의 기울기) = (직선 AC의 기울기)

→ 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않는다.

020

세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있어야 한다.

즉, 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{-2-(2k+1)}{-3-0}=\frac{-2-6}{-3-(k+2)}, \frac{2k+3}{3}=\frac{8}{k+5}$$

$$(2k+3)(k+5)=24$$

$$2k^2+13k-9=0$$

→ 판별식을 D라고 하면

$$D=13^2-4 \times 2 \times (-9)=241 > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k 의 값의 합은 $-\frac{13}{2}$ 이다.

답 ②

021

$$\neg. y=2x-7$$

$$\text{ㄹ. } y=\frac{1}{2}x-3$$

직선 $y=2x+4$ 에 평행한 직선은 기울기가 2인 \neg 이다.

직선 $y=2x+4$ 에 수직인 직선은 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 ㄹ 이다.

답 평행한 직선: \neg , 수직인 직선: ㄹ

022

(1) 두 직선이 서로 평행하려면 두 직선의 기울기가 같아야 하므로

$$3a+1=-8 \quad \therefore a=-3$$

(2) 두 직선이 서로 수직이라면 두 직선의 기울기의 곱이 -1 이어야 하므로

$$-8 \times (3a+1)=-1, -24a=7 \quad \therefore a=-\frac{7}{24}$$

답 (1) -3 (2) $-\frac{7}{24}$

023

$$a \times (a+4) + (-3) \times 4 = 0 \text{에서 } a^2+4a-12=0$$

→ 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-1 \times (-12)=16 > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a 의 값의 합은 -4 이다.

답 ②

024

두 직선 $x+ky+6=0$, $(k-1)x+6y+4k=0$ 이 서로 평행하거나 일치하려면

$$\frac{1}{k-1} = \frac{k}{6} \text{에서 } k(k-1)=6$$

$$k^2-k-6=0, (k+2)(k-3)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=3$$

(i) $k=-2$ 일 때

두 직선 $x-2y+6=0$, $-3x+6y-8=0$ 에서

$$\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} \neq \frac{6}{-8} \text{이므로 두 직선은 서로 평행하다.}$$

(ii) $k=3$ 일 때

두 직선 $x+3y+6=0$, $2x+6y+12=0$ 에서

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12} \text{이므로 두 직선은 일치한다.}$$

(i), (ii)에서 $a=-2$, $b=3$

$$\therefore 2b-a=2 \times 3 - (-2)=8$$

답 ③

025

직선 $4x+ay-1=0$ 이 점 $(-2, 3)$ 을 지나므로

$$-8+3a-1=0 \quad \therefore a=3$$

직선 $-3x+by+c=0$ 이 점 $(-2, 3)$ 을 지나므로

$$6+3b+c=0 \quad \therefore 3b+c=-6 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

두 직선 $4x+3y-1=0$, $-3x+by+c=0$ 이 서로 수직으로 만나므로

$$4 \times (-3) + 3 \times b = 0 \quad \therefore b=4$$

$$b=4 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } c=-18$$

$$\therefore ab+c=3 \times 4 + (-18)=-6$$

답 ①

026

두 점 $A(5, 1)$, $B(2, 4)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4-1}{2-5}=-1$ 이므로 두 점 A, B 를 지나는 직선에 수직인 직선의 기울기는 1 이다. ①

선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점의 좌표는 $(\frac{1 \times 2 + 2 \times 5}{1+2}, \frac{1 \times 4 + 2 \times 1}{1+2})$, 즉 $(4, 2)$ ②

따라서 기울기가 1 이고 점 $(4, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y-2=x-4 \quad \therefore y=x-2$ ③

답 $y=x-2$

채점 기준	비율
① 직선의 기울기를 구할 수 있다.	30%
② 선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
③ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%

027

$$4x-2y+1=0 \text{에서 } y=2x+\frac{1}{2}$$

기울기가 2 이고 점 $(1, a)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-a=2(x-1) \quad \therefore 2x-y+a-2=0$$

따라서 $b=2$, $a-2=5$ 이므로

$$a=7, b=2$$

$$\therefore a \times b=7 \times 2=14$$

답 ⑤

028

직선 AB 의 기울기는 $\frac{-3-5}{1-5}=2$ 이므로 선분 AB 의 수직이등분선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

선분 AB 의 중점의 좌표는

$$(\frac{5+1}{2}, \frac{5+(-3)}{2}), \text{ 즉 } (3, 1)$$

기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 $(3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-3) \quad \therefore x+2y-5=0$$

따라서 $a=1$, $b=2$ 이므로

$$ab=1 \times 2=2$$

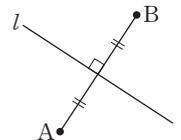
답 2

참고

선분의 수직이등분선의 방정식

선분 AB 의 수직이등분선을 l 이라고 하면

- (1) 직선 l 과 직선 AB 는 서로 수직이므로
(직선 l 의 기울기) \times (직선 AB 의 기울기) $= -1$
- (2) 직선 l 은 선분 AB 의 중점을 지난다.



029

$$x-2y-3=0 \text{에서 } y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

따라서 직선 $x-2y-3=0$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로 직선 AB 의 기울기는 -2 이다.

$$\text{즉, } \frac{b-a}{3+1} = -2 \text{이므로}$$

$$-a+b=-8 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

①

선분 AB 의 중점의 좌표는

$$(\frac{-1+3}{2}, \frac{a+b}{2}), \text{ 즉 } (1, \frac{a+b}{2})$$

직선 $x-2y-3=0$ 이 점 $(1, \frac{a+b}{2})$ 를 지나므로

$$1-(a+b)-3=0$$

$$\therefore a+b=-2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

②

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=3, b=-5$$

$$\therefore a+2b=3+2 \times (-5)=-7 \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

답 -7

채점 기준	비율
① 직선 AB의 기울기를 이용하여 a, b 에 대한 식을 세울 수 있다.	40%
② 선분 AB의 중점의 좌표를 이용하여 a, b 에 대한 식을 세울 수 있다.	40%
③ $a+2b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

030

$mx+y-4m+5=0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$m(x-4)+y+5=0$$

이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x-4=0, y+5=0 \quad \therefore x=4, y=-5$$

따라서 $P(4, -5)$ 이므로

$$OP=\sqrt{4^2+(-5)^2}=\sqrt{41}$$

답 $\sqrt{41}$

참고

정점을 지나는 직선

직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표

$$\rightarrow \text{연립방정식 } \begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \text{의 해}$$

031

$(k+2)x+(2k-1)y-3k-1=0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$k(x+2y-3)+2x-y-1=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+2y-3=0, 2x-y-1=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1, y=1$

이때 점 $(1, 1)$ 이 존재하는 사분면은 제1사분면이므로 주어진 직선이 항상 지나는 사분면은 제1사분면이다.

답 제1사분면

032

두 직선 $x+y+1=0, 3x+2y-1=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x+y+1+k(3x+2y-1)=0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓으면 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-1, 8)$ 을 지나므로

$$-1+8+1+k(-3+16-1)=0$$

$$12k=-8 \quad \therefore k=-\frac{2}{3}$$

$k=-\frac{2}{3}$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x+y+1-\frac{2}{3}(3x+2y-1)=0 \quad \therefore 3x+y-5=0$$

답 ④

033

두 직선 $3x+2y+4=0, 2x-y+6=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$3x+2y+4+k(2x-y+6)=0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓으면 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-4, 1)$ 을 지나므로

$$-12+2+4+k(-8-1+6)=0$$

$$-3k=6 \quad \therefore k=-2$$

$k=-2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3x+2y+4-2(2x-y+6)=0 \quad \therefore x-4y+8=0$$

따라서 이 직선이 x 축과 만나는 점은 $(-8, 0)$, y 축과 만나는 점은 $(0, 2)$ 이므로 좌표축에 의하여 잘린 선분의 길이는

$$\sqrt{(0+8)^2+(2-0)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

답 $2\sqrt{17}$

034

$$(1) \frac{|-3+1+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$(2) \frac{|4 \times 4 - 3 \times (-2) - 2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{20}{5}=4$$

$$(3) \frac{|2 \times (-1) - (-5) - 1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$(4) \frac{|10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

답 (1) $\sqrt{2}$ (2) 4 (3) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (4) $2\sqrt{5}$

035

선분 PH의 길이는 점 $P(2, 2)$ 와 직선 $4x-2y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4 \times 2 - 2 \times 2 + 1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

답 ①

036

점 $(\sqrt{3}, 1)$ 과 직선 $y=\sqrt{3}x+n$, 즉 $\sqrt{3}x-y+n=0$ 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 1 + n|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=3, \frac{|2+n|}{2}=3$$

$$|2+n|=6 \text{에서 } 2+n=\pm 6$$

$$\therefore n=-8 \text{ 또는 } n=4$$

이때 n 은 양수이므로 $n=4$

답 ④

037

두 점 $(-2, 1), (1, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{4-1}{1+2}(x+2) \quad \therefore x-y+3=0$$

따라서 점 $(2, -1)$ 과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-(-1)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

답 ③

038

직선 $y=-\frac{1}{3}x+5$ 에 수직인 직선의 기울기는 3이다.

①

구하는 직선의 방정식을 $y=3x+k$ (k 는 상수)라고 하면 원점과 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, |k|=5\sqrt{2} \quad \therefore k=\pm 5\sqrt{2}$$

$$\therefore y=3x\pm 5\sqrt{2}$$

이때 제 4 사분면을 지나지 않는 직선은 $y=3x+5\sqrt{2}$ 이다.

답 $y=3x+5\sqrt{2}$

채점 기준	비율
① 직선의 기울기를 구할 수 있다.	20%
② 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
③ 제 4 사분면을 지나지 않는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%

039

구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+10=0$ 위의 점 $(0, 10)$ 과 직선 $2x-y-8=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|2 \times 0 - 10 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{18}{\sqrt{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$$

답 $\frac{18\sqrt{5}}{5}$

040

$\rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{-6}{-4}$ 이므로 두 직선은 서로 평행하다.

두 직선이 서로 평행하므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 평행한 두 직선 사이의 거리와 같다.

직선 $x-2y+6=0$ 위의 점 $(0, 3)$ 과 직선 $x-2y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0 - 2 \times 3 + 6 - (-4)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

답 ②

실력을 높이는 연습 문제

본문 028쪽

01

선분 AB를 2:3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 1 + 3 \times (-4)}{2+3}, \frac{2 \times 1 + 3 \times 6}{2+3} \right)$$

$\therefore (-2, 4)$

따라서 점 $(-2, 4)$ 를 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y-4=-(x+2) \quad \therefore y=-x+2$$

답 ③

02

주어진 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$ 이므로 점 $(-1, -6)$ 을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y+6=x+1 \quad \therefore y=x-5$$

즉, $m-3=1, -n-4=-5$ 이므로 $m=4, n=1$

$$\therefore m-n=4-1=3$$

답 ③

03

두 점 $(1, -2), (4, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y+2=\frac{4+2}{4-1}(x-1) \quad \therefore y=2x-4$$

두 점 $(-2, a), (b, 6)$ 이 직선 $y=2x-4$ 위의 점이므로

$$a=-4-4, 6=2b-4 \quad \therefore a=-8, b=5$$

$$\therefore a-b=-8-5=-13$$

답 ②

04

$f(x)=x^2+px+p=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+p-\frac{p^2}{4}$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$

의 그래프에서 꼭짓점의 좌표는 $A\left(-\frac{p}{2}, p-\frac{p^2}{4}\right)$, y 축과 만나는

점의 좌표는 $B(0, p)$ 이다.

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선 l 의 기울기는

$$\frac{p-\left(p-\frac{p^2}{4}\right)}{0-\left(-\frac{p}{2}\right)}=\frac{p}{2}$$

또, 직선 l 의 y 절편은 p 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y=\frac{p}{2}x+p$$

x 절편은 y 좌표가 0인 점의 x 좌표이므로

$$0=\frac{p}{2}x+p, \frac{p}{2}x=-p \quad \therefore x=-2 (\because p \neq 0)$$

따라서 직선 l 의 x 절편은 -2 이다.

답 ②

05

x 절편과 y 절편의 절댓값이 같고 부호가 반대이므로 x 절편을

a ($a \neq 0$)라고 하면 y 절편은 $-a$ 이다.

따라서 주어진 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1 \quad \therefore y = x - a$$

이 직선이 점 $(-2, 5)$ 를 지나므로

$$5 = -2 - a \quad \therefore a = -7$$

$$\therefore y = x + 7$$

답 $y = x + 7$

06

문제 접근하기

x 축 위의 점 P의 좌표를 $(a, 0)$, y 축 위의 점 Q의 좌표를 $(0, b)$ 로 놓고 정사각형의 두 대각선의 중점이 일치함을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 먼저 구한다.

x 축 위의 점 P의 좌표를 $(a, 0)$, y 축 위의 점 Q의 좌표를 $(0, b)$ 로 놓으면 정사각형 AQPB의 두 대각선 AP와 BQ의 중점은 일치한다.

두 대각선 AP와 BQ의 중점의 좌표는 각각

$$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{4+0}{2}\right), \left(\frac{4+0}{2}, \frac{1+b}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{3+a}{2}, 2\right), \left(2, \frac{1+b}{2}\right)$$

이므로

$$\frac{3+a}{2}=2, \frac{1+b}{2}=2 \quad \therefore a=1, b=3$$

$$\therefore P(1, 0), Q(0, 3)$$

이때 정사각형 AQPB의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선 AP, BQ의 교점을 지나고 이 교점은 선분 AP의 중점이므로 교점의 좌표는

$$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4+0}{2}\right) \quad \therefore (2, 2)$$

따라서 두 점 (2, 2), (-2, 8)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{8-2}{-2-2}(x-2) \quad \therefore y=-\frac{3}{2}x+5$$

답 ③

07

세 점 A, B, C가 모두 직선 l 위에 있으므로 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 한다.

$$\text{즉, } \frac{a-2-0}{1+1}=\frac{1-0}{-a-2+1} \text{ 이므로 } \frac{a-2}{2}=\frac{1}{-a-1}$$

$$-(a-2)(a+1)=2, a^2-a=0$$

$$a(a-1)=0 \quad \therefore a=1 (\because a \neq 0)$$

두 점 A(-1, 0), B(1, -1)을 지나는 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{-1-0}{1+1}(x+1) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

따라서 직선 l의 y절편은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

답 ②

08

직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 의 기울기가 음수이고 y절편이 양수이므로

$$-\frac{a}{b}<0, -\frac{c}{b}>0 \quad \therefore \frac{a}{b}>0, \frac{c}{b}<0$$

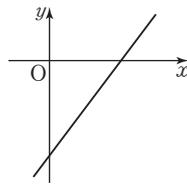
$$\therefore a>0, b>0, c<0 \text{ 또는 } a<0, b<0, c>0$$

따라서 직선 $cx+ay+b=0$, 즉

$$y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a} \text{의 기울기 } -\frac{c}{a} \text{는 양수이고}$$

y절편 $-\frac{b}{a}$ 는 음수이므로 직선

$cx+ay+b=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같고 제2사분면을 지나지 않는다.



답 ②

09

직선 $ax+y+1=0$ 이 직선 $bx-2y+1=0$ 에 수직이므로

$$a \times b + 1 \times (-2) = 0 \quad \therefore ab = 2$$

직선 $ax+y+1=0$ 이 직선 $(b-3)x-y+1=0$ 에 평행하므로

$$\frac{a}{b-3} = \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}, -a = b-3 \quad \therefore a+b=3$$

$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2 \times 2=5$$

답 5

10

두 직선이 서로 평행하거나 일치하려면

$$\frac{1}{k-2}=\frac{k+1}{4} \text{에서 } (k+1)(k-2)=4$$

$$k^2-k-6=0, (k+2)(k-3)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=3$$

(i) $k=-2$ 일 때

두 직선 $x-y-2=0, -4x+4y+8=0$ 에서

$$\frac{1}{-4}=\frac{-1}{4}=\frac{-2}{8} \text{이므로 두 직선은 일치한다.}$$

(ii) $k=3$ 일 때

두 직선 $x+4y-2=0, x+4y-12=0$ 에서

$$\frac{1}{1}=\frac{4}{4} \neq \frac{-2}{-12} \text{이므로 두 직선은 서로 평행하다.}$$

(i), (ii)에서 $a=3, b=-2$

두 직선이 서로 수직이려면

$$1 \times (k-2) + (k+1) \times 4 = 0$$

$$5k+2=0 \quad \therefore k=-\frac{2}{5}$$

$$\therefore c=-\frac{2}{5}$$

$$\therefore a-b-c=3-(-2)-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{27}{5}$$

답 $\frac{27}{5}$

11

$$\text{직선 AP의 기울기는 } \frac{4-2}{4-0}=\frac{1}{2}$$

$$\text{직선 BP의 기울기는 } \frac{4-2}{4-n}=\frac{2}{4-n}$$

두 직선 AP와 BP가 서로 수직이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{4-n} = -1$$

$$4-n=-1 \quad \therefore n=5$$

세 점 A(0, 2), B(5, 2), P(4, 4)를 꼭짓점으로 하는 삼각형

ABP의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+5+4}{3}, \frac{2+2+4}{3}\right), \text{ 즉 } \left(3, \frac{8}{3}\right)$$

따라서 $a=3, b=\frac{8}{3}$ 이므로

$$a+b=3+\frac{8}{3}=\frac{17}{3}$$

답 ②

12

두 점 (1, 2), (4, 3)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{3-2}{4-1}=\frac{1}{3}$$

점 (-2, -1)을 지나고 기울기가 $\frac{1}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y+1=\frac{1}{3}(x+2) \quad \therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

따라서 $a=\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{3}$ 이므로

$$ab=\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{9}$$

답 ②

13

직선 $2x+3y-6=0$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라고 하면 A(3, 0), B(0, 2)이다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$ 이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{3}{2}$ 이다.

선분 AB의 중점의 좌표는 $(\frac{3+0}{2}, \frac{0+2}{2})$, 즉 $(\frac{3}{2}, 1)$

따라서 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이고 점 $(\frac{3}{2}, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1 = \frac{3}{2}(x-\frac{3}{2}) \quad \therefore y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$$

직선 $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$ 가 점 $(a, \frac{1}{4})$ 을 지나므로

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{2}a - \frac{5}{4}, \quad \frac{3}{2}a = \frac{3}{2} \quad \therefore a = 1$$

답 1

14

직선 AC의 기울기는 $\frac{1+3}{3+1} = 1$

선분 AC의 중점의 좌표는

$$(\frac{-1+3}{2}, \frac{-3+1}{2}), \quad \text{즉 } (1, -1)$$

따라서 선분 AC의 수직이등분선은 기울기가 -1 이고 점 $(1, -1)$ 을 지나는 직선이므로

$$y+1 = -(x-1) \quad \therefore y = -x \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

직선 BC의 기울기는 $\frac{1-2}{3-2} = -1$

선분 BC의 중점의 좌표는

$$(\frac{2+3}{2}, \frac{2+1}{2}), \quad \text{즉 } (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$$

따라서 선분 BC의 수직이등분선은 기울기가 1 이고 점 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ 을 지나는 직선이므로

$$y - \frac{3}{2} = x - \frac{5}{2} \quad \therefore y = x - 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 이다.

답 3

참고

선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 구해 보면 $y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$ 이고, 이 직선은 점 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 을 지난다. 또, 삼각형 ABC의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형 ABC의 외심이다.

15

문제 접근하기

세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 세 직선이 모두 평행한 경우와 세 직선 중에서 두 직선만 평행한 경우, 세 직선이 한 점에서 만나는 경우가 있으므로 각 경우에 대하여 생각한다.

$$\begin{aligned} x-y &= 0 && \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ x+y-2 &= 0 && \dots\dots\dots \textcircled{2} \\ ax-5y+15 &= 0 && \dots\dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

이때 직선 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 은 서로 평행하지 않다.

(i) 두 직선 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 이 서로 평행한 경우

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{-5} \neq \frac{-2}{15} \quad \therefore a = -5$$

(ii) 두 직선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ 이 서로 평행한 경우

$$\frac{1}{a} = \frac{-1}{-5} \neq \frac{0}{15} \quad \therefore a = 5$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $x=1, y=1$ 이므로 직선 $\textcircled{3}$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지나야 한다.

즉, $a-5+15=0$ 에서 $a=-10$

(i)~(iii)에서 모든 상수 a 의 값의 곱은

$$-5 \times 5 \times (-10) = 250$$

답 250

16

$(k-1)x+k(y-1)=1$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$(x+y-1)k-x-1=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+y-1=0, \quad -x-1=0 \quad \therefore x=-1, y=2$$

따라서 주어진 직선은 k 의 값에 관계없이 점 P(-1, 2)를 지난다.

이때 점 P(-1, 2)를 지나고 직선 $y=3x+1$ 에 평행한 직선의 방정식은 \rightarrow 기울기가 3이다.

$$y-2=3(x+1) \quad \therefore y=3x+5$$

답 5

17

점 (a, b) 가 직선 $3x-y=1$ 위에 있으므로

$$3a-b=1 \quad \therefore b=3a-1$$

이것을 $ax+2by=-4$ 에 대입하면

$$ax+2(3a-1)y=-4$$

$$\therefore (x+6y)a-2y+4=0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+6y=0, \quad -2y+4=0 \quad \therefore x=-12, y=2$$

따라서 직선 $ax+2by=-4$ 는 항상 점 $(-12, 2)$ 를 지난다.

답 1

18

문제 접근하기

직선 $y=kx+k+2$ 가 k 의 값에 관계없이 지나는 점의 좌표를 구하고, 이 점을 지나는 직선이 직선 $y=-x+4$ 와 제1사분면에서 만나는 경우를 생각한다.

$y=kx+k+2$ 를 k 에 대하여 정리하면

$$k(x+1)-y+2=0 \rightarrow x+1=0, -y+2=0$$

이 직선은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$ 를 지난다.

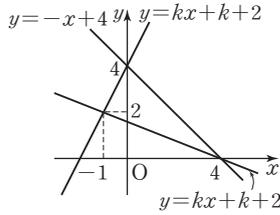
(i) 직선 $y=kx+k+2$ 가 점 $(4, 0)$ 을 지날 때

$$0=5k+2 \text{에서 } k=-\frac{2}{5}$$

(ii) 직선 $y=kx+k+2$ 가 점 $(0, 4)$ 를 지날 때

$$4=k+2 \text{에서 } k=2$$

(i), (ii)에서 $-\frac{2}{5} < k < 2$



답 $-\frac{2}{5} < k < 2$

참고

직선 $y=kx+k+2$ 의 기울기는 k 이고 두 직선 $y=-x+4$, $y=kx+k+2$ 가 제1사분면에서 만나려면 직선 $y=kx+k+2$ 의 기울기가 (i)일 때보다 크고 (ii)일 때보다 작아야 하므로 $-\frac{2}{5} < k < 2$ 이어야 한다.

19

두 직선 $2x-y-3=0$, $3x+2y+a=0$ 의 교점을 지나는 직선 l 의 방정식을

$$2x-y-3+k(3x+2y+a)=0 \text{ (} k \text{는 실수)}$$

으로 놓으면

$$(3k+2)x+(2k-1)y+ak-3=0 \text{ ㉠}$$

직선 ㉠과 직선 $3x-8y-4=0$ 이 서로 수직이므로

$$(3k+2) \times 3 + (2k-1) \times (-8) = 0$$

$$-7k+14=0 \quad \therefore k=2$$

$$k=2 \text{를 ㉠에 대입하면 } 8x+3y+2a-3=0$$

이 직선이 점 $(b, 0)$ 을 지나므로

$$8b+2a-3=0 \quad \therefore 2a+8b=3$$

답 3

20

$(k+1)x+(1-k)y-4=0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$(x-y)k+x+y-4=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x-y=0, \quad x+y-4=0$$

$$\text{위의 두 식을 연립하여 풀면 } x=2, y=2 \quad \therefore A(2, 2)$$

점 $A(2, 2)$ 와 직선 $3x-y+m=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3 \times 2 - 2 + m|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}, \quad \frac{|m+4|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|m+4|=10, \quad m+4=\pm 10 \quad \therefore m=6 \text{ 또는 } m=-14$$

따라서 모든 상수 m 의 값의 합은

$$6 + (-14) = -8$$

답 ③

21

$3x-2y-1=0$, $x+y-2=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=1, y=1$$

이므로 두 직선 $3x-2y-1=0$, $x+y-2=0$ 의 교점의 좌표는

$(1, 1)$

따라서 점 $(1, 1)$ 과 직선 $3x-2y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times 1 - 2 \times 1 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

답 ④

다른 풀이 $\frac{2}{3} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{-1}{-2}$ 이므로 서로 평행하다.

두 직선 $3x-2y-1=0$ 과 $3x-2y-5=0$ 이 서로 평행하므로 구하는 거리는 이 두 직선 사이의 거리와 같다.

직선 $3x-2y-1=0$ 위의 점 $(1, 1)$ 과 직선 $3x-2y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times 1 - 2 \times 1 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

22

두 점 $(6, 0)$, $(0, 3)$ 을 지나는 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore x+2y-6=0$$

정사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{81}{5}$ 이므로 $\overline{AB} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$

\overline{AB} 는 점 $(a, 6)$ 과 직선 $x+2y-6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|a+2 \times 6-6|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}, \quad \frac{|a+6|}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

$$|a+6|=9, \quad a+6=\pm 9 \quad \therefore a=3 \text{ 또는 } a=-15$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a=3$

답 ⑤

23

두 직선 $ax-4y+3=0$, $3x+4y+b=0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{a}{3} = \frac{-4}{4} \neq \frac{3}{b} \quad \therefore a=-3, b \neq -3$$

직선 $ax-4y+3=0$, 즉 $-3x-4y+3=0$ 위의 점 $(1, 0)$ 과 직선 $3x+4y+b=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3 \times 1 + 4 \times 0 + b|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1, \quad |b+3|=5, \quad b+3=\pm 5$$

$$\therefore b=2 \text{ 또는 } b=-8$$

이때 $b > 0$ 이므로 $b=2$

$$\therefore a+b=-3+2=-1$$

답 -1

24

$$\overline{BC} = \sqrt{(2+4)^2 + (4+5)^2} = 3\sqrt{13}$$

직선 BC의 방정식은

$$y+5 = \frac{4+5}{2+4}(x+4) \quad \therefore 3x-2y+2=0$$

삼각형 ABC의 한 변 BC를 밑변으로 하면 높이는 점 A와 직선 BC 사이의 거리와 같다.

점 $A(0, -2)$ 와 직선 $3x-2y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times 0 - 2 \times (-2) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{13} \times \frac{6\sqrt{13}}{13} = 9$$

답 ③

참고

세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이 구하기

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는 다음 순서로 구한다.

① \overline{BC} 의 길이와 직선 BC의 방정식을 구한다.

② 점 A와 직선 BC 사이의 거리 h 를 구한다.

③ 삼각형 ABC의 넓이 $\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h$ 를 구한다.

03

원의 방정식

기본을 다지는 유형

본문 033쪽

001

(1) $x^2+y^2=2^2 \quad \therefore x^2+y^2=4$

(2) $(x+1)^2+(y-2)^2=9^2$
 $\therefore (x+1)^2+(y-2)^2=81$

(3) 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 중심이 점 $(2, -3)$ 이므로 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$$

이 원이 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$(-1-2)^2+(0+3)^2=r^2$$

$$\therefore r^2=18$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+3)^2=18$$

(4) 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 중심이 점 $(-5, 1)$ 이므로 원의 방정식은

$$(x+5)^2+(y-1)^2=r^2$$

이 원이 점 $(3, -4)$ 를 지나므로

$$(3+5)^2+(-4-1)^2=r^2$$

$$\therefore r^2=89$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+5)^2+(y-1)^2=89$$

- 답 (1) $x^2+y^2=4$ (2) $(x+1)^2+(y-2)^2=81$
 (3) $(x-2)^2+(y+3)^2=18$ (4) $(x+5)^2+(y-1)^2=89$

참고

중심의 좌표와 한 점이 주어진 원의 방정식

중심이 점 (a, b) 이고 점 (x_1, y_1) 을 지나는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 으로 놓고 $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$ 임을 이용하여 구한다.

002

직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ 이 x 축과 만나는 점의 좌표는 $(3, 0)$, y 축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 2)$ 이다.

원의 중심이 점 $(3, 0)$ 이므로 $a=3, b=0$

중심이 점 $(3, 0)$ 이고 반지름의 길이가 r 이므로 원의 방정식은

$$(x-3)^2+y^2=r^2$$

이 원이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$(0-3)^2+2^2=r^2 \quad \therefore r^2=13$$

$$\therefore a-b+r^2=3-0+13=16$$

답 16

003

원 $(x-1)^2+(y+6)^2=3$ 의 중심의 좌표는 $(1, -6)$ 이므로 이 원과 중심이 같은 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+6)^2=r^2$$

016 정답과 풀이

이 원이 점 $(2, -6)$ 을 지나므로

$$(2-1)^2+(-6+6)^2=r^2 \quad \therefore r^2=1$$

따라서 원 $(x-1)^2+(y+6)^2=1$ 이 점 $(a, -7)$ 을 지나므로

$$(a-1)^2+(-7+6)^2=1$$

$$(a-1)^2=0 \quad \therefore a=1$$

답 ⑤

004

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 중심이 점 $(1, -1)$ 이므로

$$(x-1)^2+(y+1)^2=r^2$$

$x^2+y^2-4x+6y+10=0$ 에서

$$(x-2)^2+(y+3)^2=3$$

이므로 이 원의 중심은 점 $(2, -3)$ 이다.

원 $(x-1)^2+(y+1)^2=r^2$ 이 점 $(2, -3)$ 을 지나므로

$$(2-1)^2+(-3+1)^2=r^2 \quad \therefore r^2=5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+1)^2=5$$

답 ①

005

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 4 + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times 2 + 2 \times 5}{1+2}\right), \text{ 즉 } (2, 4) \dots\dots\dots ①$$

원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 중심이 점 $(2, 4)$ 이므로

$$(x-2)^2+(y-4)^2=r^2 \dots\dots\dots ②$$

이 원이 점 B(4, 2)를 지나므로

$$(4-2)^2+(2-4)^2=r^2 \quad \therefore r^2=8$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-4)^2=8 \dots\dots\dots ③$$

답 $(x-2)^2+(y-4)^2=8$

채점 기준	비율
① 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
② 원의 방정식을 세울 수 있다.	20%
③ 원의 방정식을 구할 수 있다.	40%

006

원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$x^2+(y-a)^2=r^2$$

이 원이 두 점 $(-2, -1), (3, 4)$ 를 지나므로

$$(-2)^2+(-1-a)^2=r^2, 3^2+(4-a)^2=r^2$$

$$a^2+2a+5=r^2, a^2-8a+25=r^2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2, r^2=13$

따라서 주어진 원의 방정식은

$$x^2+(y-2)^2=13$$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0, 2)$ 이다. (참)

ㄴ. $(-3)^2+(0-2)^2=13$ 이므로 주어진 원은 점 $(-3, 0)$ 을 지난다. (참)

ㄷ. 원의 넓이는 13π 이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

참고

- (1) 중심이 x 축 위에 있는 원의 방정식
→ $(x-a)^2 + y^2 = r^2$
- (2) 중심이 y 축 위에 있는 원의 방정식
→ $x^2 + (y-b)^2 = r^2$
- (3) 중심이 $y=f(x)$ 의 그래프 위에 있는 원의 방정식
→ $(x-a)^2 + \{y-f(a)\}^2 = r^2$

007

원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 의 중심 (a, b) 가 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로 $b=a-2$
즉, 원의 중심의 좌표가 $(a, a-2)$ 이므로 원의 방정식은
 $(x-a)^2 + (y-a+2)^2 = r^2$
이 원이 두 점 $(6, 1), (3, -2)$ 를 지나므로
 $(6-a)^2 + (1-a+2)^2 = r^2, (3-a)^2 + (-2-a+2)^2 = r^2$
 $2a^2 - 18a + 45 = r^2, 2a^2 - 6a + 9 = r^2$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3, r^2=9$
∴ $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 3^2$
따라서 $b=1, r=3$ 이므로
 $a+b+r=3+1+3=7$

답 7

008

선분 AB의 중점이 원의 중심이므로 원의 중심의 좌표는
 $(\frac{2+6}{2}, \frac{-2+6}{2})$, 즉 $(4, 2)$
또, 선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는
 $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(6-2)^2 + (6+2)^2}$
 $= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
따라서 $a=4, b=2, r^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$ 이므로
 $a+b+r^2 = 4+2+20 = 26$

답 26

참고

두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식
두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은
(원의 중심) = (AB의 중점), (반지름의 길이) = $\frac{1}{2}AB$
임을 이용하여 원의 방정식을 구한다.

009

두 점 $(-2, -1), (4, 5)$ 를 이은 선분의 중점이 원의 중심이므로
원의 중심의 좌표는
 $(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1+5}{2})$, 즉 $(1, 2)$
또, 두 점 $(-2, -1), (4, 5)$ 를 이은 선분이 원의 지름이므로 원
의 반지름의 길이는
 $\frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2 + (5+1)^2} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

따라서 주어진 원의 방정식은
 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 18$

④ $(4-1)^2 + (-1-2)^2 = 18$ 이므로 점 $(4, -1)$ 은 원 위의 점이다.

답 ④

010

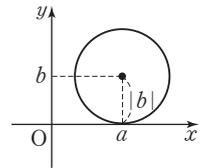
- (1) x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는
|(중심의 y 좌표)| = $|-1| = 1$
따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$
- (2) y 축에 접하는 원의 반지름의 길이는
|(중심의 x 좌표)| = $|-6| = 6$
따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 36$
- (3) x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이는
|(중심의 x 좌표)| = |(중심의 y 좌표)| = $|-4| = 4$
따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$

- 답 (1) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$
- (2) $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 36$
- (3) $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$

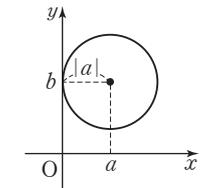
참고

좌표축에 접하는 원의 방정식

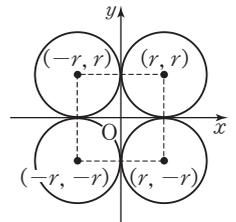
- (1) x 축에 접하는 원의 방정식
중심이 점 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원
→ (반지름의 길이) = |(중심의 y 좌표)|
= $|b|$
→ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$



- (2) y 축에 접하는 원의 방정식
중심이 점 (a, b) 이고 y 축에 접하는 원
→ (반지름의 길이) = |(중심의 x 좌표)|
= $|a|$
→ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$



- (3) x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식
 x 축과 y 축에 동시에 접하고 반지름의 길이가 r 인 원
→ (반지름의 길이) = |(중심의 x 좌표)|
= |(중심의 y 좌표)|
→ $(x\pm r)^2 + (y\pm r)^2 = r^2$



011

중심의 좌표가 $(a, -2)$ 이고 원이 y 축에 접하므로 원의 반지름의 길이는
|(중심의 x 좌표)| = $|a|$
따라서 원의 방정식은
 $(x-a)^2 + (y+2)^2 = a^2$
이 원이 점 $(-1, -5)$ 를 지나므로
 $(-1-a)^2 + (-5+2)^2 = a^2$
 $2a = -10 \quad \therefore a = -5$

답 -5

012

중심이 직선 $y=x-3$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, a-3)$ 이라고 하자.

원이 x 축에 접하므로 원의 반지름의 길이는

$$|(\text{중심의 } y\text{좌표})| = |a-3|$$

따라서 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a+3)^2 = (a-3)^2 \quad \text{①}$$

이 원이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$(3-a)^2 + (1-a+3)^2 = (a-3)^2$$

$$(4-a)^2 = 0 \quad \therefore a=4 \quad \text{②}$$

따라서 원의 반지름의 길이는 $|a-3| = |4-3| = 1$ 이므로 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 1 = 2\pi \quad \text{③}$$

답 2π

채점 기준	비율
① 원의 방정식을 세울 수 있다.	40%
② 원의 중심의 x 좌표를 구할 수 있다.	30%
③ 원의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	30%

013

점 $(-1, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제2사분면 위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 r 라고 하면 중심의 좌표는 $(-r, r)$ 이다.

따라서 원의 방정식은

$$(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$(-1+r)^2 + (2-r)^2 = r^2, \quad r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$(r-1)(r-5) = 0 \quad \therefore r=1 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(-1, 1), (-5, 5)$ 이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-5+1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$$

답 $4\sqrt{2}$

014

$x^2 + y^2 + 6kx - 2y + 18 = 0$ 에서

$$(x+3k)^2 + (y-1)^2 = 9k^2 - 17$$

이 원이 x 축에 접하므로 원의 반지름의 길이는

$$|(\text{중심의 } y\text{좌표})| = |1| = 1$$

즉, $\sqrt{9k^2 - 17} = 1$ 이므로

$$9k^2 - 17 = 1, \quad k^2 = 2 \quad \therefore k = \pm\sqrt{2} \quad \text{㉠}$$

이때 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로

$$-3k > 0 \quad \therefore k < 0 \quad \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } k = -\sqrt{2}$$

답 ①

015

점 $(3, -7)$ 과 원의 중심인 점 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}$$

018 정답과 풀이

이때 원의 반지름의 길이는 r 이고 점 $(3, -7)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 이르는 거리의 최댓값이 $3 + \sqrt{58}$ 이므로

$$r + \sqrt{58} = 3 + \sqrt{58}$$

$$\therefore r = 3$$

답 3

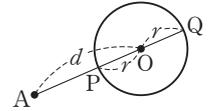
참고

원 밖의 점과 원 위의 점 사이의 거리의 최대·최소

원 밖의 한 점 A와 원의 중심 O 사이의 거리를 d , 원의 반지름의 길이를 r 라고 할 때, 점 A에서 원에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값은

$$(\text{최댓값}) = \overline{AO} + \overline{OQ} = d + r$$

$$(\text{최솟값}) = \overline{AO} - \overline{PO} = d - r$$



016

$\sqrt{(a-6)^2 + (b+8)^2}$ 의 값은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $P(a, b)$ 와 점 $(6, -8)$ 사이의 거리와 같다.

점 $(6, -8)$ 과 원의 중심인 점 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 $\sqrt{(a-6)^2 + (b+8)^2}$ 의 최댓값은 $10 + 1 = 11$

답 11

017

$$x^2 + y^2 = 3 \text{에서 } x^2 + y^2 - 3 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 6 \text{에서 } x^2 + y^2 - 4x - 6y + 7 = 0$$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 3 - (x^2 + y^2 - 4x - 6y + 7) = 0$$

$$4x + 6y - 10 = 0 \quad \therefore 2x + 3y - 5 = 0$$

따라서 점 $(-4, 0)$ 과 직선 $2x + 3y - 5 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times (-4) + 3 \times 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

답 ③

018

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + a - (x^2 + y^2 + ax + 8y - 1) = 0$$

$$\therefore (-a-2)x - 6y + a + 1 = 0 \quad \text{①}$$

이 직선이 점 $(-2, \frac{4}{3})$ 를 지나므로

$$(-a-2) \times (-2) - 6 \times \frac{4}{3} + a + 1 = 0$$

$$3a - 3 = 0 \quad \therefore a = 1 \quad \text{②}$$

답 1

채점 기준	비율
① 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
② a 의 값을 구할 수 있다.	50%

019

$$x^2 + y^2 = 16 \text{에서 } x^2 + y^2 - 16 = 0$$

두 원의 공통인 현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 16 - (x^2 + y^2 + 8x + 6y + 14) = 0$$

$$8x+6y+30=0 \quad \therefore 4x+3y+15=0 \quad \text{..... ㉠}$$

오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B라 하고 원 $x^2+y^2=16$ 의 중심 O(0, 0)에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 O와 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\overline{OH} = \frac{|15|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 3$$

삼각형 OAH에서

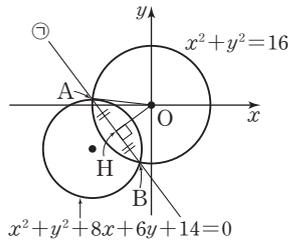
$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

→ 변 OA의 길이는 원 $x^2+y^2=16$ 의 반지름의 길이이다.

따라서 공통인 현의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{7}$$

답 $2\sqrt{7}$



020

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9 \text{에서}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16 \text{에서}$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$$

두 원 O, O'의 공통인 현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 - (x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3) = 0$$

$$4x - 2y + 4 = 0 \quad \therefore 2x - y + 2 = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

1

오른쪽 그림과 같이 점 O'(3, 2)에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 O'와 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\overline{O'H} = \frac{|2 \times 3 - 2 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

삼각형 O'AH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{O'A}^2 - \overline{O'H}^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{55}}{5}$$

→ 변 O'A의 길이는 원 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ 의 반지름의 길이이다.

즉, 공통인 현의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times \frac{2\sqrt{55}}{5} = \frac{4\sqrt{55}}{5} \quad \text{..... 2}$$

따라서 삼각형 O'AB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{O'H} = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{55}}{5} \times \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{12\sqrt{11}}{5} \quad \text{..... 3}$$

답 $\frac{12\sqrt{11}}{5}$

채점 기준	비율
1 두 원의 공통인 현의 방정식을 구할 수 있다.	30%
2 삼각형 O'AB의 넓이와 밑변의 길이를 구할 수 있다.	50%
3 삼각형 O'AB의 넓이를 구할 수 있다.	20%

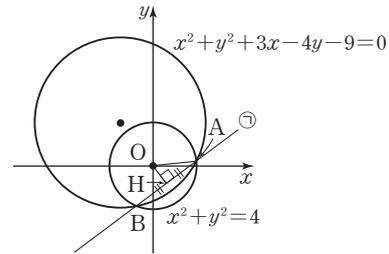
021

$$x^2 + y^2 = 4 \text{에서 } x^2 + y^2 - 4 = 0$$

두 원의 공통인 현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4 - (x^2 + y^2 + 3x - 4y - 9) = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - 5 = 0 \quad \text{..... ㉠}$$



위의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B라 하고 원 $x^2+y^2=4$ 의 중심 O(0, 0)에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 O와 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\overline{OH} = \frac{|-5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 1$$

삼각형 OAH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

→ 변 OA의 길이는 원 $x^2+y^2=4$ 의 반지름의 길이이다.

즉, 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+3x-4y-9=0$ 의 두 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ 이다.

따라서 구하는 원의 넓이는 → 두 교점을 이은 선분 AB를 지름으로 하는 원

$$\pi \times (\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

답 3

022

(1) 원의 중심 (0, 0)과 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로 주어진 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

(2) 원의 중심 (-9, 2)와 직선 $x-3y-7=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-9-3 \times 2-7|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{22}{\sqrt{10}} = \frac{11\sqrt{10}}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{15}$ 이고 $\frac{11\sqrt{10}}{5} > \sqrt{15}$ 이므로 주어진 원과 직선은 만나지 않는다.

(3) $x^2+y^2-6x-2y+6=0$ 에서

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

원의 중심 (3, 1)과 직선 $2x+y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 3 + 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이는 2이고 $\frac{4\sqrt{5}}{5} < 2$ 이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 (1) 한 점에서 만난다. (접한다.) (2) 만나지 않는다.

(3) 서로 다른 두 점에서 만난다.

023

(1) $y=3x-5$ 를 $x^2+y^2=10$ 에 대입하면

$$x^2 + (3x-5)^2 = 10 \quad \therefore 2x^2 - 6x + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 2 \times 3 = 3 > 0$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만나므로 교점의 개수는 2이다.

(2) $y = -2x + 1$ 을 $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 1$ 에 대입하면
 $(x-1)^2 + (-2x+1-7)^2 = 1$
 $(x-1)^2 + (-2x-6)^2 = 1 \quad \therefore 5x^2 + 22x + 36 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = 11^2 - 5 \times 36 = -59 < 0$

따라서 원과 직선은 만나지 않으므로 교점의 개수는 0이다.

(3) $x+y-4=0$ 에서 $y = -x+4$
 $y = -x+4$ 를 $x^2+y^2-4y+2=0$ 에 대입하면
 $x^2+(-x+4)^2-4(-x+4)+2=0$
 $2x^2-4x+2=0 \quad \therefore x^2-2x+1=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \times 1 = 0$
 따라서 원과 직선은 접하므로 교점의 개수는 1이다.
 [답] (1) 2 (2) 0 (3) 1

024

원의 중심 (2, 1)과 직선 $4x+3y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4 \times 2 + 3 \times 1 + 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{13}{5}$$

원의 반지름의 길이가 r 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$r > \frac{13}{5}$$

따라서 양의 정수 r 의 최솟값은 3이다.

[답] ③

참고

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때

- 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용
 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d , 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면
 $\Rightarrow d < r$
- 이차방정식의 판별식을 이용
 원과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
 $\Rightarrow D > 0$

025

원의 중심 (0, 0)과 직선 $y = \sqrt{3}x + k$, 즉 $\sqrt{3}x - y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{2}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 직선이 원과 만나지 않으려면

$$\frac{|k|}{2} > 2, |k| > 4 \quad \therefore k < -4 \text{ 또는 } k > 4$$

[답] $k < -4$ 또는 $k > 4$

|다른 풀이|

$y = \sqrt{3}x + k$ 를 $x^2 + y^2 = 4$ 에 대입하면
 $x^2 + (\sqrt{3}x + k)^2 = 4 \quad \therefore 4x^2 + 2\sqrt{3}kx + k^2 - 4 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = (\sqrt{3}k)^2 - 4(k^2 - 4) < 0$
 $k^2 - 16 > 0, (k+4)(k-4) > 0 \quad \therefore k < -4 \text{ 또는 } k > 4$

참고

원과 직선이 만나지 않을 때

- 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용
 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d , 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면
 $\Rightarrow d > r$
- 이차방정식의 판별식을 이용
 원과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
 $\Rightarrow D < 0$

026

원의 중심 (-1, 4)와 직선 $2x - y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times (-1) - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-6 + k|}{\sqrt{5}} \quad \text{①}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-6 + k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{10}, |-6 + k| = 5\sqrt{2}$$

$$-6 + k = \pm 5\sqrt{2} \quad \therefore k = 6 \pm 5\sqrt{2} \quad \text{②}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$(6 - 5\sqrt{2}) + (6 + 5\sqrt{2}) = 12 \quad \text{③}$$

[답] 12

채점 기준	비율
① 원의 중심과 직선 사이의 거리를 k 로 나타낼 수 있다.	40%
② k 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ 모든 실수 k 의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

참고

원과 직선이 접할 때

- 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용
 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d , 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면
 $\Rightarrow d = r$
- 이차방정식의 판별식을 이용
 원과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
 $\Rightarrow D = 0$

027

원의 중심 (6, 0)과 직선 $y = mx - m$, 즉 $mx - y - m = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6m - m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|5m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|5m|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 3, |5m| > 3\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$25m^2 > 9m^2 + 9, 16m^2 - 9 > 0$$

$$(4m+3)(4m-3) > 0 \quad \therefore m < -\frac{3}{4} \text{ 또는 } m > \frac{3}{4}$$

따라서 m 의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

[답] ②

|다른 풀이|

$y = mx - m$ 을 $(x-6)^2 + y^2 = 9$ 에 대입하면
 $(x-6)^2 + (mx-m)^2 = 9$

$$\begin{aligned} \therefore (m^2+1)x^2-2(m^2+6)x+m^2+27 &= 0 \\ \text{이 이차방정식의 판별식을 } D &\text{라고 하면} \\ \frac{D}{4} &= \{-(m^2+6)\}^2 - (m^2+1)(m^2+27) < 0 \\ 16m^2-9 > 0, (4m+3)(4m-3) > 0 \\ \therefore m < -\frac{3}{4} \text{ 또는 } m > \frac{3}{4} \end{aligned}$$

028

두 점 $(-3, 0), (1, 0)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-3+1}{2}, 0\right), \text{ 즉 } (-1, 0)$$

또, 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}|1-(-3)|=2$$

원의 중심 $(-1, 0)$ 과 직선 $kx+y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k \times (-1) - 2|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 오직 한 점에서 만나려면

$$\frac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 2, \quad |-k-2| = 2\sqrt{k^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$k^2+4k+4=4k^2+4, \quad 3k^2-4k=0$$

$$k(3k-4)=0 \quad \therefore k=0 \text{ 또는 } k=\frac{4}{3}$$

이때 k 는 양수이므로 $k=\frac{4}{3}$

답 ④

029

$$x^2+y^2-2x-4y+k=0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5-k$$

오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 $C(1, 2)$ 라 하고 점 C 에서 직선

$2x-y+5=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면

$$CH = \frac{|2 \times 1 - 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

이때 $\overline{AB}=4$ 이므로

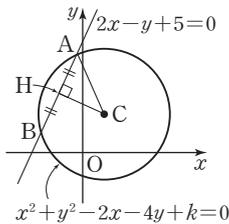
$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$\text{삼각형 } AHC \text{에서 } \overline{AC} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$$

즉, $5-k=3^2$ 이므로

$$k=-4$$

$\rightarrow \overline{AC}$ 는 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=5-k$ 의 반지름의 길이이다.



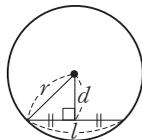
답 ①

참고

현의 길이

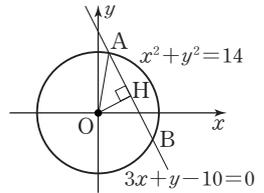
반지름의 길이가 r 인 원의 중심으로부터 d 만큼 떨어진 현의 길이를 l 이라고 하면

$$l = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$



030

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=14$ 와 직선 $3x+y-10=0$ 의 두 교점을 A, B 라고 하면 두 점 A, B 를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 선분 AB 를 지름으로 하는 원이다.



원 $x^2+y^2=14$ 의 중심 $O(0, 0)$ 에서 직선 $3x+y-10=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면

$$\overline{OH} = \frac{|-10|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \sqrt{10}$$

삼각형 AOH 에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{(\sqrt{14})^2 - (\sqrt{10})^2} = 2$$

$\rightarrow \overline{OA}$ 는 원 $x^2+y^2=14$ 의 반지름의 길이이다.

따라서 구하는 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이는 2이다.

답 2

031

오른쪽 그림에서 원의 중심 O 와 점 P 사이의 거리는

$$\overline{PO} = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$$

삼각형 AOP 에서 $\overline{AO}=1$ 이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$$

선분 AB 와 선분 PO 의 교점을 H 라

고 하면 삼각형 AOP 에서 $\overline{AO} \times \overline{AP} = \overline{PO} \times \overline{AH}$ 이므로

$$1 \times 2\sqrt{3} = \sqrt{13} \times \overline{AH}$$

\rightarrow 삼각형 AOP 의 넓이에서

$$\therefore \overline{AH} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \overline{AP} = \frac{1}{2} \times \overline{PO} \times \overline{AH}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times \frac{2\sqrt{39}}{13} = \frac{4\sqrt{39}}{13}$$

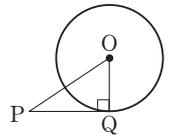
답 $\frac{4\sqrt{39}}{13}$

참고

접선의 길이

원 밖의 점 P 에서 원에 그은 접선의 접점을 Q 라고 하면 직각삼각형 OPQ 에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2}$$



032

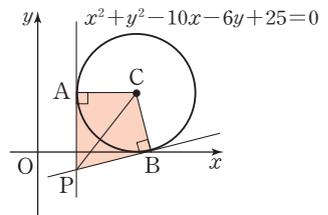
$$x^2+y^2-10x-6y+25=0 \text{에서}$$

$$(x-5)^2+(y-3)^2=9$$

$$\therefore C(5, 3)$$

오른쪽 그림에서

$$\overline{PC} = \sqrt{(5-2)^2 + (3+1)^2} = 5 \dots\dots\dots ①$$



삼각형 APC 에서 $\overline{AC}=3$ 이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \dots\dots\dots ②$$

따라서 사각형 $APBC$ 의 넓이는

$$2\triangle APC = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 3\right) = 12 \dots\dots\dots ③$$

답 12

채점 기준	비율
① 선분 PC의 길이를 구할 수 있다.	30%
② 선분 AP의 길이를 구할 수 있다.	30%
③ 사각형 APBC의 넓이를 구할 수 있다.	40%

033

$x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

원의 중심 (2, -1)과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times 2 - 4 \times (-1) + k|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|10+k|}{5}$$

원의 반지름의 길이는 3이고 원 위의 점에서 직선에 이르는 거리의 최댓값이 8이므로

$$\frac{|10+k|}{5} + 3 = 8, \frac{|10+k|}{5} = 5$$

$$|10+k|=25, 10+k=\pm 25$$

$$\therefore k=15 \text{ 또는 } k=-35$$

이때 $k > 0$ 이므로 $k=15$

답 15

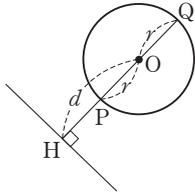
참고

원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최대·최소

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d , 원의 반지름의 길이를 r 라고 할 때, 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은

$$(\text{최댓값}) = \overline{OH} + \overline{OQ} = d + r$$

$$(\text{최솟값}) = \overline{OH} - \overline{PO} = d - r$$



034

$x^2+y^2-2x+8y+13=0$ 에서 $(x-1)^2+(y+4)^2=4$

원의 중심 (1, -4)와 직선 $x+y+13=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-4+13|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 5\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이는 2이므로 점 P와 직선 $x+y+13=0$ 사이의 거리를 d 라고 하면

$$5\sqrt{2}-2 \leq d \leq 5\sqrt{2}+2$$

이때 $7 < 5\sqrt{2} < 8$ 이므로 d 가 될 수 있는 정수는 6, 7, 8, 9이고, 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 8이다.

답 8

035

$$(1) y=2x \pm 3\sqrt{2^2+1} \quad \therefore y=2x \pm 3\sqrt{5}$$

$$(2) y=-x \pm \sqrt{5} \times \sqrt{(-1)^2+1} \quad \therefore y=-x \pm \sqrt{10}$$

$$(3) \text{ 직선 } y=5x-1 \text{에 평행한 직선의 기울기는 5이므로}$$

$$y=5x \pm 1 \times \sqrt{5^2+1} \quad \therefore y=5x \pm \sqrt{26}$$

$$(4) \text{ 직선 } y=\frac{1}{6}x+2 \text{에 수직인 직선의 기울기는 } -6 \text{이므로}$$

$$y=-6x \pm 2\sqrt{(-6)^2+1} \quad \therefore y=-6x \pm 2\sqrt{37}$$

$$\text{답 (1) } y=2x \pm 3\sqrt{5} \quad (2) y=-x \pm \sqrt{10}$$

$$(3) y=5x \pm \sqrt{26} \quad (4) y=-6x \pm 2\sqrt{37}$$

036

직선 $y=4x+3$ 에 평행한 직선의 기울기는 4이므로 원 $x^2+y^2=17$ 에 접하는 직선의 방정식은

$$y=4x \pm \sqrt{17} \times \sqrt{4^2+1} \quad \therefore y=4x \pm 17$$

따라서 이 두 직선의 y 절편은 각각 17, -17이므로

$$P(0, 17), Q(0, -17) \text{ 또는 } P(0, -17), Q(0, 17)$$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\overline{PQ} = |17 - (-17)| = 34$$

답 ⑤

037

기울기가 2인 접선의 방정식을 $y=2x+k$ 로 놓으면 원의 중심

(-3, 1)과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|2 \times (-3) - 1 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 2, \frac{|-7+k|}{\sqrt{5}} = 2$$

$$|-7+k|=2\sqrt{5}, -7+k=\pm 2\sqrt{5}$$

$$\therefore k=7 \pm 2\sqrt{5}$$

이때 k 는 직선의 y 절편이므로 구하는 y 절편의 곱은

$$(7+2\sqrt{5})(7-2\sqrt{5})=29$$

답 ⑤

참고

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식 접선의 방정식을

$$y=mx+n$$

..... ①

으로 놓은 후 다음 방법을 이용하여 구한다.

[방법 1] 원의 중심 (a, b) 에서 접선 ①까지의 거리 d 가 원의 반지름의 길이 r 와 같음을 이용한다.

[방법 2] 접선의 방정식 ①과 원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D 라고 할 때, $D=0$ 임을 이용한다.

038

$x^2+y^2-10x+6y+32=0$ 에서

$$(x-5)^2+(y+3)^2=2$$

원에 접하는 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 이므로 기울기는 $\tan 45^\circ=1$ 이다.

접선의 방정식을 $y=x+k$ 로 놓으면 원의 중심 (5, -3)과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$ 와 같으므로

$$\frac{|5-(-3)+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}, \frac{|8+k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$|8+k|=2, 8+k=\pm 2$$

$$\therefore k=-6 \text{ 또는 } k=-10$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$x-y-6=0 \text{ 또는 } x-y-10=0$$

답 ①, ③

039

$$(1) -2x+y=5 \quad \therefore y=2x+5$$

$$(2) -3x+3\sqrt{2}y=27 \quad \therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

(3) $(1+2)(x+2)+(5-4)(y-4)=10$

$3x+6+y-4=10 \quad \therefore y=-3x+8$

(4) $(-1-3)(x-3)+(-4+1)(y+1)=25$

$-4x+12-3y-3=25 \quad \therefore y=-\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}$

답 (1) $y=2x+5$ (2) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{9\sqrt{2}}{2}$

(3) $y=-3x+8$ (4) $y=-\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}$

040

점 $(-2, k)$ 가 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이므로

$(-2)^2+k^2=16, k^2=12 \quad \therefore k=\pm 2\sqrt{3}$

이때 k 는 양수이므로 $k=2\sqrt{3}$

원 $x^2+y^2=16$ 위의 점 $(-2, 2\sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$-2x+2\sqrt{3}y=16 \quad \therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{8\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 y 절편은 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 이다.

답 ⑤

041

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 중에서 제1사분면에 있는 점 P의 좌표를

$P(x_1, y_1)$ ($x_1>0, y_1>0$)이라고 하자.

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1$

이 직선이 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$3y_1=1 \quad \therefore y_1=\frac{1}{3}$

점 $P(x_1, \frac{1}{3})$ 이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$x_1^2+(\frac{1}{3})^2=1, x_1^2=\frac{8}{9}$

$\therefore x_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\because x_1>0$)

답 ⑤

042

원 $(x-5)^2+(y-7)^2=8$ 위의 점 $(3, 5)$ 에서의 접선의 방정식은

$(3-5)(x-5)+(5-7)(y-7)=8$

$-2x+10-2y+14=8, -2x-2y+16=0$

$\therefore x+y-8=0$ ①

이 접선이 x 축, y 축과 만나는

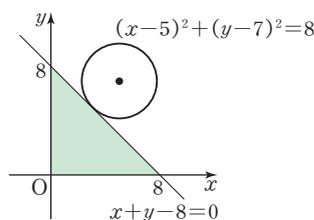
점의 좌표는 각각 $(8, 0),$

$(0, 8)$ 이다.

따라서 오른쪽 그림에서 구하는

넓이는

$\frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$ ②



답 32

채점 기준	비율
① 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
② 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있다.	50%

|다른 풀이|

원의 중심 $(5, 7)$ 과 점 $(3, 5)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{5-7}{3-5}=1$

→ 점 $(3, 5)$ 에서의 접선과 수직인 직선이다.

즉, 점 $(3, 5)$ 에서의 접선의 기울기는 -1 이므로 접선의 방정식은

$y-5=-(x-3)$ → 기울기가 -1 이고 점 $(3, 5)$ 를 지나는 직선이다.

$\therefore y=-x+8$

이 접선이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(8, 0), (0, 8)$ 이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$

043

(1) 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=9$

이 직선이 점 $(1, -3)$ 을 지나므로

$x_1-3y_1=9$ ㉠

점 (x_1, y_1) 이 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=9$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x_1=0, y_1=-3$ 또는 $x_1=\frac{9}{5}, y_1=-\frac{12}{5}$

따라서 접선의 방정식은

$-3y=9$ 또는 $\frac{9}{5}x-\frac{12}{5}y=9$

$\therefore y=-3$ 또는 $3x-4y-15=0$

(2) 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=10$

이 직선이 점 $(-4, 2)$ 를 지나므로

$-4x_1+2y_1=10 \quad \therefore 2x_1-y_1=-5$ ㉠

점 (x_1, y_1) 이 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=10$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x_1=-3, y_1=-1$ 또는 $x_1=-1, y_1=3$

따라서 접선의 방정식은

$-3x-y=10$ 또는 $-x+3y=10$

$\therefore 3x+y+10=0$ 또는 $x-3y+10=0$

답 (1) $y=-3, 3x-4y-15=0$

(2) $3x+y+10=0, x-3y+10=0$

044

접선의 기울기를 m 이라고 하면 접선의 방정식은

$y=mx+3$ → 기울기가 m 이고 점 $(0, 3)$ 을 지나는 직선이다.

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y=mx+3$, 즉 $mx-y+3=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\frac{|3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \frac{3}{\sqrt{m^2+1}}=1, 3=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9=m^2+1 \quad \therefore m=\pm 2\sqrt{2}$

(i) $m=2\sqrt{2}$ 일 때

접선의 방정식은 $y=2\sqrt{2}x+3$ 이고 $y=0$ 을 대입하면

$x=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

(ii) $m = -2\sqrt{2}$ 일 때
 접선의 방정식은 $y = -2\sqrt{2}x + 3$ 이고 $y = 0$ 을 대입하면

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

(i), (ii)에서
 $k = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k = \frac{3\sqrt{2}}{4}$
 $\therefore 16k^2 = 16 \times \left(\pm \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 18 \rightarrow k = \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}$

답 18

045

접선의 기울기를 m 이라고 하면 접선의 방정식은
 $y - 2 = m(x - 6)$ \rightarrow 기울기가 m 이고 점 $(6, 2)$ 를 지나는 직선이다.
 $\therefore mx - y + 2 - 6m = 0$
 원의 중심 $(-3, 2)$ 와 직선 $mx - y + 2 - 6m = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같으므로

$$\frac{|-3m - 2 + 2 - 6m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3$$

$$\frac{|-9m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3, \quad |-9m| = 3\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$81m^2 = 9m^2 + 9, \quad 8m^2 = 1 \quad \therefore m = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{2}}{4}x - y + 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \text{또는} \quad -\frac{\sqrt{2}}{4}x - y + 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0$$

양변에 $2\sqrt{2}$ 를 곱하여 정리하면

$$x - 2\sqrt{2}y + 4\sqrt{2} - 6 = 0 \quad \text{또는} \quad x + 2\sqrt{2}y - 4\sqrt{2} - 6 = 0$$

이 중에서 제 2사분면을 지나지 않는 직선의 방정식은

$$x - 2\sqrt{2}y + 4\sqrt{2} - 6 = 0$$

답 $x - 2\sqrt{2}y + 4\sqrt{2} - 6 = 0$

실력을 높이는 연습 문제

본문 044쪽

01

$y = x^2 - 4x + a = (x - 2)^2 + a - 4$
 이므로 꼭짓점 A의 좌표는 $(2, a - 4)$ 이다.

$$x^2 + y^2 + bx + 4y - 17 = 0 \text{에서}$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{b^2}{4} + 21$$

이므로 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{b}{2}, -2\right)$ 이다.

점 A와 원의 중심이 일치하므로

$$2 = -\frac{b}{2}, \quad a - 4 = -2 \text{에서} \quad a = 2, \quad b = -4$$

$$\therefore a + b = 2 + (-4) = -2$$

답 ②

02

점 (a, b) 가 직선 $x - 2y + 1 = 0$ 위에 있으므로

$$a - 2b + 1 = 0 \quad \therefore a = 2b - 1$$

..... ①

024 정답과 풀이

즉, 원의 중심의 좌표가 $(2b - 1, b)$ 이므로 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$(x - 2b + 1)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

이 원이 두 점 $(2, 3), (4, 1)$ 을 지나므로

$$(2 - 2b + 1)^2 + (3 - b)^2 = r^2 \text{에서} \quad 5b^2 - 18b + 18 = r^2 \quad \text{..... ㉠}$$

$$(4 - 2b + 1)^2 + (1 - b)^2 = r^2 \text{에서} \quad 5b^2 - 22b + 26 = r^2 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b = 2, r^2 = 2$

$b = 2$ 를 ㉠에 대입하면 $a = 3$

$$\therefore b - a = 2 - 3 = -1$$

답 ②

03

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{3 + (-3) + (-6)}{3}, \frac{-6 + 12 + 9}{3}\right), \quad \text{즉} \quad (-2, 5)$$

선분 GC의 중점이 원의 중심이므로 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2 + (-6)}{2}, \frac{5 + 9}{2}\right), \quad \text{즉} \quad (-4, 7)$$

또, 선분 GC가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}GC = \frac{1}{2}\sqrt{(-6 + 2)^2 + (9 - 5)^2} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 8$$

답 $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 8$

04

원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ (A, B, C 는 상수)이라고 하면 이 원이 세 점 $(0, 1), (-1, 0), (2, 2)$ 를 지나므로 원의 방정식에

$x = 0, y = 1$ 을 대입하면 $1 + B + C = 0$ 에서

$$B = -C - 1 \quad \text{..... ㉠}$$

$x = -1, y = 0$ 을 대입하면 $1 - A + C = 0$ 에서

$$A = C + 1 \quad \text{..... ㉡}$$

$x = 2, y = 2$ 를 대입하면 $4 + 4 + 2A + 2B + C = 0$ 에서

$$2A + 2B + C = -8 \quad \text{..... ㉢}$$

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$$2(C + 1) + 2(-C - 1) + C = -8 \quad \therefore C = -8$$

$C = -8$ 을 ㉠에 대입하면 $B = 7$

$C = -8$ 을 ㉡에 대입하면 $A = -7$

원의 방정식은 $x^2 + y^2 - 7x + 7y - 8 = 0$ 이므로

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$$

즉, 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{65}{2}}$ 이다.

따라서 $a = \frac{7}{2}, b = -\frac{7}{2}, c^2 = \frac{65}{2}$ 이므로

$$c^2 - a + b = \frac{65}{2} - \frac{7}{2} - \frac{7}{2} = \frac{51}{2}$$

답 ②

05

원의 중심의 좌표를 (a, b) 라고 하면 x 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$$

이 원이 두 점 $(2, 2), (3, 3)$ 을 지나므로

$(2-a)^2 + (2-b)^2 = b^2$ 에서
 $a^2 - 4a - 4b + 8 = 0$ ㉠
 $(3-a)^2 + (3-b)^2 = b^2$ 에서
 $a^2 - 6a - 6b + 18 = 0$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a = 2\sqrt{3}, b = 5 - 2\sqrt{3}$ 또는 $a = -2\sqrt{3}, b = 5 + 2\sqrt{3}$
 이때 원의 반지름의 길이는 $|b|$ 이므로 두 원의 반지름의 길이의 합은
 $(5 - 2\sqrt{3}) + (5 + 2\sqrt{3}) = 10$

답 10

06

구하는 원의 반지름의 길이를 r ($r > 0$)라고 하면 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-r, r)$ 이다.
 점 $(-r, r)$ 가 곡선 $y = x^2 - x - 1$ 위에 있으므로
 $r = (-r)^2 - (-r) - 1$
 $r^2 = 1 \quad \therefore r = 1$ ($\because r > 0$)
 중심이 점 $(-1, 1)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은
 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$
 $\therefore x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$
 따라서 $a = 2, b = -2, c = 1$ 이므로
 $a + b + c = 2 + (-2) + 1 = 1$

답 1

07

$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 9 = 0$ 에서
 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 27$
 점 $A(-3, 5)$ 와 원의 중심 $(3, 3)$ 사이의 거리는
 $\sqrt{(3+3)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{10}$
 이때 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$ 이므로 선분 AP의 길이의 최댓값은 $2\sqrt{10} + 3\sqrt{3}$
 최솟값은 $2\sqrt{10} - 3\sqrt{3}$
 따라서 선분 AP의 길이의 최댓값과 최솟값의 곱은
 $(2\sqrt{10} + 3\sqrt{3})(2\sqrt{10} - 3\sqrt{3}) = 13$

답 3

08

$x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ 에서
 $(x-4)^2 + y^2 = 4$
 점 $A(1, 4)$ 와 원의 중심 $(4, 0)$ 사이의 거리는
 $\sqrt{(4-1)^2 + (0-4)^2} = 5$
 이때 원의 반지름의 길이가 2이므로
 $5 - 2 \leq \overline{AP} \leq 5 + 2 \quad \therefore 3 \leq \overline{AP} \leq 7$
 (i) $\overline{AP} = 4, 5, 6$ 인 점 P는 각각 2개이다.
 (ii) $\overline{AP} = 3, 7$ 인 점 P는 각각 1개이다.
 (i), (ii)에서 구하는 점 P의 개수는
 $3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$

답 4

09

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 2x + y - (x^2 + y^2 - x - y - 2) = 0$
 $-x + 2y + 2 = 0 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - 1$
 이 직선과 평행하고 점 $(6, -8)$ 을 지나는 직선의 방정식은
 $y + 8 = \frac{1}{2}(x - 6) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - 11$
 따라서 $a = \frac{1}{2}, b = 11$ 이므로 $ab = \frac{1}{2} \times 11 = \frac{11}{2}$

답 2

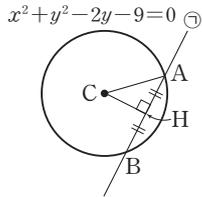
10

원 $x^2 + y^2 + ax + 6y - a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0$ 의 둘레의 길이를 이등분하므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0$ 의 중심을 지나야 한다.
 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $x^2 + y^2 + ax + 6y - a - (x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6) = 0$
 $\therefore (a-2)x + 4y - a + 6 = 0$ ㉠
 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0$ 에서
 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 8$ ㉡
 따라서 직선 ㉠이 원 ㉡의 중심 $(-1, -1)$ 을 지나야 하므로
 $-(a-2) - 4 - a + 6 = 0, -2a + 4 = 0$
 $\therefore a = 2$

답 4

11

두 원의 공통인 현의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 2y - 9 - (x^2 + y^2 - x + k) = 0$
 $\therefore x - 2y - k - 9 = 0$ ㉠
 두 원의 교점을 A, B라 하고 원 $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$, 즉 $x^2 + (y-1)^2 = 10$ 의 중심을 C라고 하자.
 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직선 ㉠과 점 C(0, 1) 사이의 거리는
 $\overline{CH} = \frac{|0 - 2 \times 1 - k - 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|k + 11|}{\sqrt{5}}$
 공통인 현의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이므로
 $\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$
 삼각형 ACH에서
 $\overline{CH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}$
 즉, $\frac{|k+11|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ 이므로 $|k+11| = 5$
 $k+11 = \pm 5 \quad \therefore k = -6$ 또는 $k = -16$
 따라서 모든 상수 k의 값의 합은
 $-6 + (-16) = -22$



답 1

12

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 에서 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$
 $x^2 + (y-k)^2 = 10$ 에서 $x^2 + y^2 - 2ky + k^2 - 10 = 0$
 두 원의 교점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - (x^2 + y^2 - 2ky + k^2 - 10) = 0$$

$$2x + 2(k-2)y - k^2 + 10 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

두 원의 공통인 현인 선분 PQ의 길이가 최대가 되는 경우는 공통인 현이 작은 원의 중심을 지나 때이므로 직선 ①이 점 (-1, 2)를 지나야 한다. 즉, → 공통인 현이 작은 원의 지름이다.

$$-2 + 4k - 8 - k^2 + 10 = 0$$

$$k^2 - 4k = 0, k(k-4) = 0$$

$$\therefore k = 4 (\because k > 0)$$

답 4

13

원의 중심 (a, 0)과 직선 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a+1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|a+1|}{\sqrt{2}} > 3\sqrt{2}, |a+1| > 6$$

$a+1 < -6$ 또는 $a+1 > 6 \quad \therefore a < -7$ 또는 $a > 5$

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다.

답 4

14

원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 넓이가 $\frac{5}{2}\pi$ 이므로

$$\pi r^2 = \frac{5}{2}\pi \text{에서 } r^2 = \frac{5}{2} \quad \therefore r = \frac{\sqrt{10}}{2} (\because r > 0)$$

원의 중심 (4, -1)과 직선 $2x - 4y + k = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2 \times 4 - 4 \times (-1) + k|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{|12+k|}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$|12+k| = 5\sqrt{2}, 12+k = \pm 5\sqrt{2}$$

$$\therefore k = -12 \pm 5\sqrt{2}$$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$$(-12 + 5\sqrt{2}) + (-12 - 5\sqrt{2}) = -24$$

답 3

15

문제 접근하기

(원의 중심과 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 사이의 거리)
 =(원의 중심과 직선 $x + 2y - 5 = 0$ 사이의 거리)
 =(원의 반지름의 길이)
 임을 이용한다.

원의 중심이 직선 $y = x + 1$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 (a, a+1)이라고 하자.

원의 중심 (a, a+1)과 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a + 2(a+1) - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|3a-1|}{\sqrt{5}}$$

원의 중심 (a, a+1)과 직선 $x + 2y - 5 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a + 2(a+1) - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|3a-3|}{\sqrt{5}}$$

원이 두 직선 $x + 2y - 3 = 0, x + 2y - 5 = 0$ 에 접하므로

$$\frac{|3a-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|3a-3|}{\sqrt{5}}, |3a-1| = |3a-3|$$

$$\therefore 3a-1 = \pm(3a-3)$$

(i) $3a-1 = 3a-3$ 일 때

$$-1 = -3 \text{이므로 등식이 성립하지 않는다.}$$

(ii) $3a-1 = -(3a-3)$ 일 때

$$6a = 4 \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

(i), (ii)에서 $a = \frac{2}{3}$

$a = \frac{2}{3}$ 를 $\frac{|3a-1|}{\sqrt{5}}$ 에 대입하면

$$\frac{|3 \times \frac{2}{3} - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

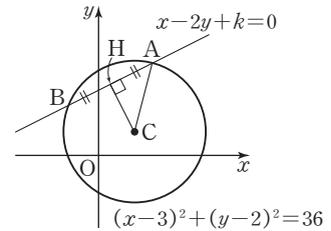
따라서 구하는 원의 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 이므로 원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{\pi}{5}$$

답 2

16

오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C(3, 2)라 하고 점 C에서 직선 $x - 2y + k = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$$\overline{CH} = \frac{|3 - 2 \times 2 + k|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{|-1+k|}{\sqrt{5}}$$

$\overline{AB} = 8$ 이므로

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

삼각형 AHC에서 $\overline{CA} = 6$ 이므로

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$$

즉, $\frac{|-1+k|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$ 이므로

$$|-1+k| = 10, -1+k = \pm 10$$

$$\therefore k = 11 \text{ 또는 } k = -9$$

이때 $k > 0$ 이므로 $k = 11$

답 3

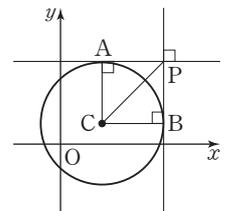
17

원의 중심을 C라고 하면 C(2, 1)이므로

$$\overline{PC} = \sqrt{(2-5)^2 + (1-4)^2} = 3\sqrt{2}$$

두 접점을 A, B라고 하면 두 접선이 서로 수직이고, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 사각형 ACBP는 정사각형이다.

→ 네 변의 길이가 같고, 네 각의 크기가 같은 사각형은 정사각형이다.



즉, 삼각형 PCB에서

$$r^2 + r^2 = (3\sqrt{2})^2$$

$$2r^2 = 18, r^2 = 9$$

$$\therefore r = \pm 3$$

이때 $r > 0$ 이므로 $r = 3$

답 3

18

문제 접근하기

정삼각형이 되는 삼각형 ABC의 넓이가 최소일 때와 최대일 때의 두 삼각형의 넓음비를 구하고 두 삼각형의 넓음비가 $a : b$ 일 때 넓이의 비는 $a^2 : b^2$ 임을 이용한다.

정삼각형 ABC의 한 변 BC를 밑변으로 생각하면 원 위의 점 A와 직선 BC 사이의 거리가 높이가 된다.

따라서 정삼각형 ABC는 점 A와 직선 BC 사이의 거리가 최소일 때 넓이가 최소이고, 점 A와 직선 BC 사이의 거리가 최대일 때 넓이가 최대이다.

원의 중심 (0, 0)과 직선 $y=2x-6$, 즉 $2x-y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로 점 A와 직선 $y=2x-6$ 사이의 거리의 최솟값은 $\frac{6\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 최댓값은 $\frac{6\sqrt{5}}{5} + \sqrt{5} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$ 이다.

따라서 정삼각형 ABC의 넓이가 최소일 때와 최대일 때 두 삼각형의 넓음비는

$$\frac{\sqrt{5}}{5} : \frac{11\sqrt{5}}{5} = 1 : 11$$

이므로 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

$$1^2 : 11^2 = 1 : 121$$

답 ④

뎡뎡 개념 CHECK

넓은 도형의 넓이의 비_중 수학 2

넓은 도형의 넓이의 비는 넓음비의 제곱과 같다.

즉, 넓음비가 $m : n$ 이면 넓이의 비는 $m^2 : n^2$ 이다.

19

직선 $x-y=0$, 즉 $y=x$ 에 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로 원 $x^2+y^2=8$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x \pm 2\sqrt{2} \times \sqrt{(-1)^2+1} \quad \therefore y = -x \pm 4$$

따라서 두 직선의 y 절편은 각각 4, -4 이므로

$P(0, 4)$, $Q(0, -4)$ 또는 $P(0, -4)$, $Q(0, 4)$

$$\therefore \overline{PQ} = |4 - (-4)| = 8$$

답 ②

20

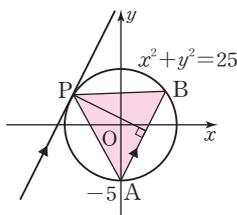
문제 접근하기

점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되므로 점 P에서의 접선의 방정식을 구한다.

점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되고, 이때 점 P에서의 접선은 직선 AB와 평행하다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{3+5}{4-0} = 2$ 이므로

기울기가 2인 원 $x^2+y^2=25$ 의 접선의



방정식은

$$y = 2x \pm 5\sqrt{2^2+1}$$

$$\therefore y = 2x \pm 5\sqrt{5}$$

점 A(0, -5)와 직선 $y=2x+5\sqrt{5}$, 즉 $2x-y+5\sqrt{5}=0$ 사이의 거리는 \rightarrow 점 A에서 직선 $y=2x-5\sqrt{5}$ 사이의 거리보다 직선 $y=2x+5\sqrt{5}$ 사이의 거리가 더 멀다.

$$\frac{|5+5\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}+5$$

한편,

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2+(3+5)^2} = 4\sqrt{5}$$

이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times (\sqrt{5}+5) = 10+10\sqrt{5}$$

답 10+10√5

21

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a, 4\sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$$ax + 4\sqrt{3}y = r^2$$

$$\therefore ax + 4\sqrt{3}y - r^2 = 0$$

두 직선 $ax + 4\sqrt{3}y - r^2 = 0$ 과 $x - \sqrt{3}y + b = 0$ 이 일치하므로

$$\frac{1}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{b}{-r^2}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \text{에서 } a = -4$$

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{-r^2} \text{에서 } \frac{1}{-4} = \frac{b}{-r^2}, 4b = r^2 \quad \therefore b = \frac{r^2}{4} \quad \dots\dots\dots \text{㉠}$$

한편, 점 $(-4, 4\sqrt{3})$ 은 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

$$(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2 = r^2$$

$$r^2 = 64 \quad \therefore r = 8 (\because r > 0)$$

$r = 8$ 을 ㉠에 대입하면

$$b = \frac{64}{4} = 16$$

$$\therefore a + b + r = -4 + 16 + 8 = 20$$

답 ④

22

점 $P(a, b)$ 가 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 2 \quad \dots\dots\dots \text{㉠}$$

원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$ax + by = 2 \quad \therefore ax + by - 2 = 0 \quad \dots\dots\dots \text{㉡}$$

$$x^2 + y^2 - 10y + 24 = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + (y-5)^2 = 1 \quad \dots\dots\dots \text{㉢}$$

직선 ㉡이 원 ㉢과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원 ㉢의 중심

$(0, 5)$ 와 직선 ㉡ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1보다 작아야 하므로

$$\frac{|5b-2|}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1, |5b-2| < \sqrt{a^2+b^2}$$

$$|5b-2| < \sqrt{2} (\because \text{㉠})$$

$$-\sqrt{2} < 5b-2 < \sqrt{2}, 2-\sqrt{2} < 5b < 2+\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{2-\sqrt{2}}{5} < b < \frac{2+\sqrt{2}}{5}$$

답 $\frac{2-\sqrt{2}}{5} < b < \frac{2+\sqrt{2}}{5}$

23

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 4$$

이 직선이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4y_1 = 4 \quad \therefore y_1 = 1$$

점 $(x_1, 1)$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위에 있으므로

$$x_1^2 + 1^2 = 4, \quad x_1^2 = 3 \quad \therefore x_1 = \pm\sqrt{3}$$

따라서 접선의 방정식은

$$\sqrt{3}x + y = 4 \quad \text{또는} \quad -\sqrt{3}x + y = 4$$

두 직선의 x 절편은 각각 $\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이고, y 절편은 모두 4이므로

두 직선 l_1, l_2 와 x 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left[\frac{4\sqrt{3}}{3} - \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3} \right) \right] \times 4 = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

24

직선 l 이 원 O' 의 넓이를 이등분하므로 직선 l 은 원 O' 의 중심

$(-2, 0)$ 을 지난다.

$$\text{즉, } -2a + b = 0 \text{이므로 } b = 2a \quad \dots\dots \text{㉠}$$

따라서 직선 l 의 방정식은 $ax - y + 2a = 0$

원 O 의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|2a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{|2a|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

원 O 의 반지름의 길이가 1이고 직선 l 과 접하므로

$$\frac{|2a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1, \quad |2a| = \sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$4a^2 = a^2 + 1, \quad 3a^2 = 1 \quad \therefore a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \text{을 ㉠에 대입하면 } b = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (복호동순)}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

답 ④

04

도형의 이동

기본을 다지는 유형

본문 049쪽

001

$$(1) (0-1, 0+2) \quad \therefore (-1, 2)$$

$$(2) (3-1, 2+2) \quad \therefore (2, 4)$$

$$(3) (-2-1, 5+2) \quad \therefore (-3, 7)$$

$$(4) (1-1, -4+2) \quad \therefore (0, -2)$$

답 (1) $(-1, 2)$ (2) $(2, 4)$ (3) $(-3, 7)$ (4) $(0, -2)$

참고

점의 평행이동

점 (x, y) 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표

→ x 대신 $x+m, y$ 대신 $y+n$ 을 대입한다.

→ $(x+m, y+n)$

002

점 $(2, -1)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(2+a, -1+5), \text{ 즉 } (2+a, 4)$$

따라서 $2+a=4, b=4$ 이므로 $a=2, b=4$

$$\therefore a+b=2+4=6$$

답 6

003

점 (a, b) 가 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x-3, y+4)$ 에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$$(a-3, b+4)$$

따라서 $a-3=0, b+4=-5$ 이므로

$$a=3, b=-9$$

$$\therefore a-b=3-(-9)=12$$

답 ③

004

점 $(3, -1)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점이 $(-2, 1)$ 이라고 하면

$$3+a=-2, -1+b=1 \quad \therefore a=-5, b=2$$

따라서 점 $(6, 4)$ 를 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(6-5, 4+2), \text{ 즉 } (1, 6)$$

답 ①

005

점 $P(a, b)$ 가 직선 $y=3x$ 위에 있으므로

$$b=3a$$

따라서 점 P 의 좌표는

$$P(a, 3a) \dots\dots\dots \text{①}$$

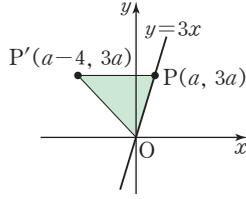
점 P(a, 3a)를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점 P'의 좌표는

P'(a-4, 3a) ②

삼각형 OPP'의 넓이는 6이므로

$\frac{1}{2} \times 4 \times 3a = 6$ → 점 P(a, 3a)가 제1사분면 위의 점이므로 a > 0, 3a > 0

∴ a = 1 ③



답 1

채점 기준	비율
① 점 P의 좌표를 a를 사용하여 나타낼 수 있다.	30%
② 점 P'의 좌표를 a를 사용하여 나타낼 수 있다.	30%
③ a의 값을 구할 수 있다.	40%

006

직선 2x+y+9=0을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 직선의 방정식은

2(x+1)+(y-5)+9=0 ∴ 2x+y+6=0

∴ a=6

답 ②

007

점 (2, 1)이 평행이동 (x, y) → (x+m, y+n)에 의하여 점 (-2, 7)로 옮겨지므로

2+m=-2, 1+n=7

∴ m=-4, n=6

직선 x+ay+b=0을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 직선의 방정식은

(x+4)+a(y-6)+b=0 ∴ x+ay-6a+b+4=0

따라서 a=-5, -6a+b+4=10이므로

a=-5, b=-24

∴ m+n+a+b=-4+6+(-5)+(-24)=-27

답 -27

참고

도형의 평행이동 - 직선

직선 ax+by+c=0을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식

→ x 대신 x-m, y 대신 y-n을 대입한다.

→ a(x-m)+b(y-n)+c=0

008

원 x²+(y+4)²=10을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

(x+4)²+(y-2+4)²=10, (x+4)²+(y+2)²=10

∴ x²+y²+8x+4y+10=0

따라서 a=8, b=4, c=10이므로

a+b+c=8+4+10=22

답 ⑤

|다른 풀이|

원 x²+(y+4)²=10을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원은 반지름의 길이는 그대로이고 원의 중심

(0, -4)만 평행이동한 원과 같다.

점 (0, -4)를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

(0-4, -4+2), 즉 (-4, -2)

따라서 구하는 원의 방정식은

(x+4)²+(y+2)²=10 ∴ x²+y²+8x+4y+10=0

따라서 a=8, b=4, c=10이므로

a+b+c=8+4+10=22

참고

도형의 평행이동 - 원

(1) 원 (x-a)²+(y-b)²=r²을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식

→ x 대신 x-m, y 대신 y-n을 대입한다.

→ (x-m-a)²+(y-n-b)²=r²

(2) 원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다. 이때 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다.

009

원 x²+(y-3)²=16을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

(x-a)²+(y-3)²=16

이 원이 직선 4x-3y+1=0과 접하므로 원의 중심 (a, 3)과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 4와 같다.

즉, $\frac{|4a-3 \times 3+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=4$ 이므로 $\frac{|4a-8|}{5}=4$

|4a-8|=20, 4a-8=±20

4a=28 또는 4a=-12

∴ a=7 또는 a=-3

이때 a < 0이므로 a=-3

답 -3

010

포물선 y=x²+ax+b가 평행이동 (x, y) → (x+1, y-9)에 의하여 옮겨지는 포물선의 방정식은

y+9=(x-1)²+a(x-1)+b

∴ y=x²+(a-2)x-a+b-8

따라서 a-2=0, -a+b-8=0이므로

a=2, b=10

∴ ab=2×10=20

답 20

011

포물선 y=3x²+6x+10, 즉 y=3(x+1)²+7의 꼭짓점의 좌표는 (-1, 7)이다. ①

점 (-1, 7)을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 p+2만큼 평행이동하면

(-1+p, 7+p+2), 즉 (-1+p, 9+p) ②

이 점이 x축 위에 있으므로 y좌표가 0이다.

즉, 9+p=0이므로

p=-9 ③

답 -9

채점 기준	비율
① 포물선 $y=3x^2+6x+10$ 의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
② 포물선의 꼭짓점을 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
③ p 의 값을 구할 수 있다.	30%

참고

포물선의 평행이동은 포물선의 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

012

- (1) 점 (5, -7)을 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (5, 7)이다.
- (2) 점 (5, -7)을 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (-5, -7)이다.
- (3) 점 (5, -7)을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (-5, 7)이다.
- (4) 점 (5, -7)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (-7, 5)이다.
- (5) 점 (5, -7)을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (7, -5)이다.

답 (1) (5, 7) (2) (-5, -7) (3) (-5, 7)
(4) (-7, 5) (5) (7, -5)

참고

점의 대칭이동

점 (x, y) 를 대칭이동한 점의 좌표

- (1) x 축에 대한 대칭이동
 - y 좌표의 부호를 바꾼다.
 - $(x, -y)$
- (2) y 축에 대한 대칭이동
 - x 좌표의 부호를 바꾼다.
 - $(-x, y)$
- (3) 원점에 대한 대칭이동
 - x 좌표, y 좌표의 부호를 모두 바꾼다.
 - $(-x, -y)$
- (4) 직선 $y=x$ 에 대한 대칭이동
 - x 좌표와 y 좌표를 서로 바꾼다.
 - (y, x)
- (5) 직선 $y=-x$ 에 대한 대칭이동
 - x 좌표와 y 좌표를 서로 바꾸고 부호도 모두 바꾼다.
 - $(-y, -x)$

013

점 (-4, 5)를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (4, 5)

점 (4, 5)를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (-4, -5)

따라서 $a=-4, b=-5$ 이므로

$b-a=-5-(-4)=-1$

답 ②

014

점 (2, -3)을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 (-2, 3)

030 정답과 풀이

점 (2, -3)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 (-3, 2)

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{2-3}{-3-(-2)}(x+2) \quad \therefore y=x+5$$

답 $y=x+5$

015

점 P(-9, -6)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 (-6, -9)

점 Q(-6, -9)를 x 축에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는 (-6, 9)

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-9+(-6)+(-6)}{3}, \frac{-6+(-9)+9}{3}\right), \text{ 즉 } (-7, -2)$$

답 ①

016

점 (a, b) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a, -b)$

이 점이 제1사분면 위의 점이므로 $a>0, -b>0$

$\therefore a>0, b<0$ ①

점 $(a-b, ab)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a+b, -ab)$

이 점을 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a+b, ab)$ ②

이때 $a>0, b<0$ 이므로 $-a+b<0, ab<0$

따라서 점 $(-a+b, ab)$ 는 제3사분면 위에 있다. ③

답 제3사분면

채점 기준	비율
① a, b 의 부호를 구할 수 있다.	40%
② 점 $(a-b, ab)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
③ ②에서 구한 점이 있는 사분면을 구할 수 있다.	30%

017

직선 $3x-2y+a=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $3 \times (-x) - 2 \times (-y) + a = 0 \quad \therefore 3x - 2y - a = 0$

이 직선이 점 (3, 2)를 지나므로

$9 - 4 - a = 0 \quad \therefore a = 5$

답 ⑤

018

직선 $y=ax-\frac{5}{2}$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=a \times (-x) - \frac{5}{2} \quad \therefore y=-ax-\frac{5}{2}$ ①

직선 $y=ax-\frac{5}{2}$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $-y=a \times (-x)-\frac{5}{2} \quad \therefore y=ax+\frac{5}{2}$ ㉠
 두 직선 ㉠과 ㉡이 서로 수직이므로
 $-a \times a = -1, a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$

답 ①

019

$x^2+y^2-6ax-4y+2=0$ 에서
 $(x-3a)^2+(y-2)^2=9a^2+2$
 이 원을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(-x-3a)^2+(y-2)^2=9a^2+2$
 $\therefore (x+3a)^2+(y-2)^2=9a^2+2$
 이 원의 중심 $(-3a, 2)$ 가 직선 $y=-\frac{1}{3}x+1$ 위에 있으므로
 $2=a+1 \quad \therefore a=1$

답 ①

020

$x^2+y^2-2x+4y-8=0$ 에서
 $(x-1)^2+(y+2)^2=13$
 이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(y-1)^2+(x+2)^2=13$
 $\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=13$
 이 원이 y 축과 만나는 점의 y 좌표는
 $(0+2)^2+(y-1)^2=13$ 에서 $\rightarrow x$ 좌표는 0이다.
 $(y-1)^2=9$
 $y-1=-3$ 또는 $y-1=3$
 $\therefore y=-2$ 또는 $y=4$
 따라서 대칭이동한 원이 y 축과 만나는 두 점 사이의 거리는
 $|4-(-2)|=6$

답 6

021

포물선 $y=x^2-4x+k+5$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선을 나타내는 함수는
 $-y=x^2-4x+k+5$
 $\therefore y=-x^2+4x-k-5$
 $=-(x-2)^2-k-1$
 이 함수는 $x=2$ 일 때 최댓값 $-k-1$ 을 가지므로
 $-k-1=4 \quad \therefore k=-5$

답 -5

022

포물선 $y=x^2+ax+b$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
 $-y=(-x)^2+a \times (-x)+b$
 $\therefore y=-x^2+ax-b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}-b\right)$ 이므로
 $\frac{a}{2}=-1, \frac{a^2}{4}-b=2 \quad \therefore a=-2, b=-1$
 $\therefore a+b=-2+(-1)=-3$

답 ①

023

포물선 $y=x^2+3x+k$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
 $y+4=(x-1)^2+3(x-1)+k$
 $\therefore y=x^2+x+k-6$
 이 포물선을 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
 $-y=x^2+x+k-6 \quad \therefore y=-x^2-x-k+6$
 이 포물선이 포물선 $y=-x^2-x+16$ 과 일치하므로
 $-k+6=16 \quad \therefore k=-10$

답 -10

024

직선 $y=x-2$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $-y=-x-2 \quad \therefore y=x+2$ ①
 직선 $y=x+2$ 를 y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $y-m=x+2 \quad \therefore y=x+m+2$ ②
 이 직선이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(-3, 1)$ 을 지나야 하므로
 $1=-3+m+2 \quad \therefore m=2$ ③

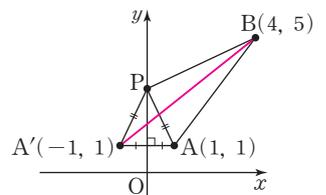
답 2

채점 기준	비율
① 직선 $y=x-2$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
② 직선 $y=x+2$ 를 y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
③ m 의 값을 구할 수 있다.	40%

025

삼각형 ABP에서 변 AB의 길이는 일정하므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 값이 최소일 때, 삼각형 ABP의 둘레의 길이도 최소이다.

오른쪽 그림과 같이 점 A(1, 1)을 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면 A'(-1, 1) 이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$ 이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP} \geq \overline{A'B}$



따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 선분 A'B의 길이와 같으므로
 $\overline{A'B}=\sqrt{(4+1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{41}$
 또, $\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(5-1)^2}=5$ 이므로 삼각형 ABP의 둘레의 길이의 최솟값은 $5+\sqrt{41}$ 이다.

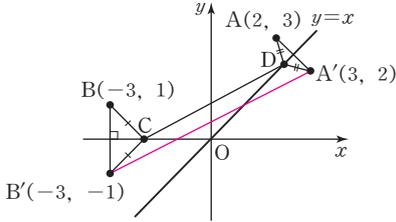
답 $5+\sqrt{41}$

참고

점 B를 y축에 대하여 대칭이동하여 계산해도 결과는 같다.

026

점 A(2, 3)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A',
점 B(-3, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면
A'(3, 2), B'(-3, -1)



이때 $\overline{AD} = \overline{A'D}$, $\overline{BC} = \overline{B'C}$ 이므로
 $\overline{AD} + \overline{CD} + \overline{BC} = \overline{A'D} + \overline{CD} + \overline{B'C}$
 $\geq \overline{A'B'}$

따라서 $\overline{AD} + \overline{CD} + \overline{BC}$ 의 최솟값은 선분 A'B'의 길이와 같으므로
 $\overline{A'B'} = \sqrt{(-3-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

답 ④

실력을 높이는 연습문제

본문 055쪽

01

점 (-4, 6)이 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x-2, y+1)$ 에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(-4-2, 6+1)$, 즉 $(-6, 7)$

이 점이 직선 $y=mx-11$ 위의 점이므로

$7 = -6m - 11, 6m = -18 \quad \therefore m = -3$

답 ②

02

직선 $y=4x+1$ 을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-k=4(x-1)+1 \quad \therefore y=4x-3+k$

$y=0$ 을 대입하면

$0=4x-3+k \quad \therefore x = \frac{3-k}{4}$

$x=0$ 을 대입하면 $y=-3+k$

즉, 평행이동한 직선의 x절편은 $\frac{3-k}{4}$, y절편은 $-3+k$ 이고, 이

직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2} \times \left| \frac{3-k}{4} \right| \times |-3+k| = 8, (k-3)^2 = 64$

$k-3 = \pm 8 \quad \therefore k=11$ 또는 $k=-5$

이때 k는 양수이므로 $k=11$

답 11

032 정답과 풀이

03

원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$ 을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 원 C의 방정식은

$(x-3-a)^2 + (y+8-b)^2 = b^2$

원 C가 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|a+3| = |b|, |b-8| = |b|$

a, b가 양수이므로 $a+3=b, |b-8|=b$

$|b-8|=b$ 에서 $b-8 = \pm b$

(i) $b-8=b$ 일 때

이를 만족시키는 양수 b의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $b-8=-b$ 일 때

$2b=8$ 에서 $b=4$

(i), (ii)에서 $b=4$

$b=4$ 를 $a+3=b$ 에 대입하면 $a=1$

$\therefore a+b=1+4=5$

답 ①

04

원점을 점 (3, 5)로 옮기는 평행이동은

$(x, y) \rightarrow (x+3, y+5)$

이 평행이동에 의하여 포물선 $y=x^2+4x-8$ 을 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-5=(x-3)^2+4(x-3)-8$

$\therefore y=x^2-2x-6=(x-1)^2-7$

이때 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (1, -7)이므로

$m=1, n=-7$

$\therefore m+n=1+(-7)=-6$

답 -6

05

점 P(4, 2)를 x축에 대하여 대칭이동한

점 Q의 좌표는

$(4, -2)$

점 P(4, 2)를 원점에 대하여 대칭이동한

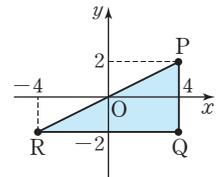
점 R의 좌표는

$(-4, -2)$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \{4-(-4)\} \times \{2-(-2)\} = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$

답 ③



06

$P(3, 4) \xrightarrow{(가)} (-3, 4) \xrightarrow{(나)} (-3, -4) \xrightarrow{(다)} (3, 4)$

즉, 점 P를 (가) \rightarrow (나) \rightarrow (다)의 순서로 대칭이동하면 자기 자신으로 돌아온다.

$100 = 3 \times 33 + 1$ 에서 점 P를 99번 대칭이동한 후의 점의 좌표가 (3, 4)이므로 100번 대칭이동한 후의 점의 좌표는 (-3, 4)이다.

따라서 $a=-3, b=4$ 이므로

$a-b=-3-4=-7$

답 -7

07

직선 $5x+3y+1=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $5 \times (-x) + 3 \times (-y) + 1 = 0$
 $\therefore 5x+3y-1=0$
 이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $5y+3x-1=0 \quad \therefore 3x+5y-1=0$

답 ④

08

$x^2+y^2+6x-8y+24=0$ 에서 $(x+3)^2+(y-4)^2=1$
 이 원을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(-x+3)^2+(y-4)^2=1$
 $\therefore (x-3)^2+(y-4)^2=1$
 이 원이 직선 $y=mx$ 에 접하므로 원의 중심 $(3, 4)$ 와 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같다.

즉, $\frac{|3m-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$ 이므로

$$\frac{|3m-4|}{\sqrt{m^2+1}}=1, |3m-4|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2-24m+16=m^2+1$$

$$\therefore 8m^2-24m+15=0$$

> 판별식을 D 라고 하면 $\frac{D}{4}=12^2-8 \times 15=24 > 0$
 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 m 의 값의 합은

$$-\frac{-24}{8}=3$$

답 ⑤

09

포물선 $y=x^2-2ax+4$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=(-x)^2-2a \times (-x)+4 = x^2+2ax+4 = (x+a)^2-a^2+4$$

이 포물선의 꼭짓점 $(-a, -a^2+4)$ 가 직선 $y=x-8$ 위에 있으므로

$$-a^2+4=-a-8, a^2-a-12=0$$

$$(a+3)(a-4)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=4$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a=4$

답 ①

10

점 $A(-3, 4)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 B 의 좌표는 $(4, -3)$

점 $B(4, -3)$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 점 C 의 좌표는

$$(4+2, -3+k), \text{ 즉 } (6, -3+k)$$

세 점 A, B, C 가 한 직선 위에 있으므로 (직선 AB 의 기울기) = (직선 BC 의 기울기)

$$\frac{-3-4}{4+3} = \frac{-3+k+3}{6-4}$$

$$-1 = \frac{k}{2} \quad \therefore k = -2$$

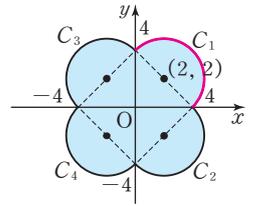
답 ④

11

문제 접근하기

도형 C_1 을 그리고 x 축, y 축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 도형 C_2, C_3, C_4 를 그린다.

원 $(x-2)^2+(y-2)^2=8$ 에서 도형 C_1 은 오른쪽 그림의 빨간색 곡선과 같고, 이것을 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 C_2, C_3, C_4 는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 네 도형 C_1, C_2, C_3, C_4 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & (\text{합동인 직각이등변삼각형 4개의 넓이}) + (\text{합동인 반원 4개의 넓이}) \\ &= 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \right) + 4 \times \left\{ \frac{1}{2} \times \pi \times (2\sqrt{2})^2 \right\} \\ &= 32 + 16\pi \end{aligned}$$

답 $32+16\pi$

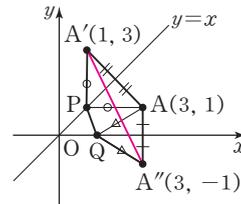
12

문제 접근하기

삼각형 APQ 의 둘레의 길이의 최솟값은 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최솟값이므로 점 A 를 직선 $y=x$, x 축에 대하여 각각 대칭이동한 점을 이용한다.

다음 그림과 같이 점 $A(3, 1)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' , x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A'' 이라고 하면

$$A'(1, 3), A''(3, -1)$$



이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{AQ} = \overline{A''Q}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QA''} \geq \overline{A'A''}$$

따라서 삼각형 APQ 의 둘레의 길이의 최솟값은 선분 $A'A''$ 의 길이와 같으므로

$$\overline{A'A''} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

답 ④

05

집합

기본을 다지는 유형

본문 060쪽

001

- (1) '잘하는'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 알 수 없으므로 집합이 아니다.
- (2) 집합이고, 원소는 6, 12, 18, 24, 30이다.
- (3) 집합이고, 원소는 -8, 8이다.
- (4) '가까운'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 알 수 없으므로 집합이 아니다.

답 집합인 것: (2), (3)

원소: (2) 6, 12, 18, 24, 30 (3) -8, 8

002

- ④ '높은'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 알 수 없으므로 집합이 아니다.
- 따라서 집합이 아닌 것은 ④이다.

답 ④

003

- $x^2 - x - 2 \leq 0$ 에서
 $(x+1)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 2$
 즉, 집합 A의 원소는 -1, 0, 1, 2이므로
 가. $-2 \notin A$ (거짓) 나. $-1 \in A$ (거짓)
 다. $1 \in A$ (참) 라. $2 \in A$ (참)
- 따라서 옳은 것은 다, 라이다.

답 ⑤

004

- ① $\frac{1}{3}$ 은 정수가 아니므로 $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$
 - ② $\sqrt{25} = 5$ 에서 $\sqrt{25}$ 는 유리수이므로 $\sqrt{25} \in \mathbb{Q}$
 - ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 은 실수이므로 $\frac{\sqrt{3}}{3} \in \mathbb{R}$
 - ④ $\sqrt{5} - 1$ 은 무리수이므로 $\sqrt{5} - 1 \notin \mathbb{Q}$
 - ⑤ $i^2 = -1$ 에서 i^2 은 실수이므로 $i^2 \in \mathbb{R}$
- 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

005

- ① $2000 = 4 \times 500$ 이므로 $2000 \notin A$
 - ② $2027 = 4 \times 506 + 3$ 이므로 $2027 \in A$
 - ③ $2043 = 4 \times 510 + 3$ 이므로 $2043 \in A$
 - ④ $2069 = 4 \times 517 + 1$ 이므로 $2069 \notin A$
 - ⑤ $2091 = 4 \times 522 + 3$ 이므로 $2091 \in A$
- 따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

006

- ⑤ $\{21, 22, 23, \dots\} \Rightarrow \{x | x \text{는 } 20 \text{보다 큰 정수}\}$
 $\{x | x \text{는 } 20 \text{ 이상의 정수}\} \Rightarrow \{20, 21, 22, \dots\}$
- 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

007

- 가. 8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이고 이 중에서 1보다 큰 수는 2, 4, 8이므로 $A = \{2, 4, 8\}$
 - 나. 10보다 작은 짝수는 2, 4, 6, 8이므로
 $A = \{2, 4, 6, 8\}$
 - 다. $(x-2)(x-4)(x-8) = 0$ 에서
 $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = 8 \quad \therefore A = \{2, 4, 8\}$
- 따라서 옳은 것은 가, 다이다.

답 가, 다

008

- 오른쪽 표를 이용하여 $a + b$ 의 값을 모두 구하면
 0, 1, 2, 3, 4
 $\therefore X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$a \setminus b$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

답 ③

009

- $a \in A$ 이므로 $2^a = 2, 4$
 $b \in A$ 이므로 $3^b = 3, 9$ ①
- 오른쪽 표를 이용하여 $2^a \times 3^b$ 의 값을 모두 구하면 6, 12, 18, 36
 $\therefore X = \{6, 12, 18, 36\}$ ②
- 따라서 집합 X의 모든 원소의 합은
 $6 + 12 + 18 + 36 = 72$ ③

$2^a \setminus 3^b$	3	9
2	6	18
4	12	36

답 72

채점 기준	비율
① $2^a, 3^b$ 의 값을 모두 구할 수 있다.	40%
② 집합 X를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40%
③ 집합 X의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20%

010

- $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$ 이므로 i^n (n 은 자연수)은 $i, -1, -i, 1$ 이 순서대로 반복되어 나타난다.
 $\therefore A = \{i, -1, -i, 1\}$
 $i^2 = -1, (-1)^2 = 1, (-i)^2 = -1, 1^2 = 1$ 이므로
 $z_1^2 = -1, 1$ 이고 $z_2^2 = -1, 1$ 이다.
- 오른쪽 표를 이용하여 $z_1^2 - z_2^2$ 의 값을 모두 구하면 -2, 0, 2
 $\therefore B = \{-2, 0, 2\}$
- 따라서 집합 B의 원소인 것은 ③이다.

$z_1^2 \setminus z_2^2$	-1	1
-1	0	-2
1	2	0

답 ③

011

- ① 5보다 작은 7의 양의 배수는 없으므로 공집합이다.
- ② -1과 0 사이에는 무수히 많은 유리수가 있으므로 무한집합이다.
- ③ 1보다 작은 자연수는 없으므로 공집합이다.
- ④ 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \times 5 = -4 < 0$$

즉, 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 은 실근을 갖지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다.

- ⑤ 2보다 크고 4보다 작은 짝수는 없으므로 공집합이다.
- 따라서 공집합이 아닌 것은 ②이다.

답 ②

풍샘 개념 CHECK

이차방정식의 근의 판별_高 公統수학 1

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 판별식을 $D = b^2 - 4ac$ 라고 할 때,

- (1) $D > 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- (2) $D = 0$ 이면 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다. } 실근을 갖는다.
- (3) $D < 0$ 이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

012

- ㄱ. $n(\{0\}) = 1$ (거짓)
 - ㄴ. $n(\{3, 4\}) = 2$, $n(\{4\}) = 1$ 이므로
 $n(\{3, 4\}) - n(\{4\}) = 2 - 1 = 1$ (거짓)
 - ㄷ. $20 = 2^2 \times 5$ 이므로 $A = \{2, 5\}$ $\therefore n(A) = 2$ (참)
- 따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

013

- $x^2 = 9$ 에서 $x^2 - 9 = 0$, $(x+3)(x-3) = 0$
 즉, $x = -3$ 또는 $x = 3$ 이므로 $A = \{-3, 3\}$
 $|x| \leq 3$ 에서 $-3 \leq x \leq 3$ 이므로 $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 $x^3 - 9x = 0$ 에서 $x(x+3)(x-3) = 0$
 즉, $x = -3$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 3$ 이므로 $C = \{-3, 0, 3\}$
 $\therefore A \subset C \subset B$

답 ②

014

- $(x-5)(x-a) = 0$ 에서 $x = 5$ 또는 $x = a$
 (i) $a = 5$ 일 때
 $A = \{5\}$ 이므로 $A \subset B$ 를 만족시킨다.
 (ii) $a \neq 5$ 일 때
 $A = \{5, a\}$ 이므로 $A \subset B$ 를 만족시키는 양수 a 의 값은 존재하지 않는다.
 (i), (ii)에서 $a = 5$

답 5

015

$B = \{5, 10, 15, \dots\}$ 이고 주어진 벤 다이어그램에서 $A \subset B$ 이므로 k 는 5의 양의 배수이어야 한다. ①

이때 k 는 $5 < k < 50$ 인 자연수이므로 자연수 k 의 값이 될 수 있는 수는 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45이다. ②
 따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 k 의 개수는 8이다.

③
 답 8

채점 기준	비율
① k 의 조건을 구할 수 있다.	40%
② k 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ k 의 개수를 구할 수 있다.	20%

016

$C \subset B$ 에서 $6 \in B$ 이어야 하므로 $a = 6$
 또, $B \subset A$ 에서 $3 \in A$ 이어야 하므로 $b = 3$
 $\therefore a - b = 6 - 3 = 3$

답 ⑤

참고

$A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 6\}$, $C = \{1, 6\}$

017

$A \subset B$ 에서 $-1 \in B$ 이어야 하므로
 $a^2 - 1 = -1$ 또는 $2a - 3 = -1$
 (i) $a^2 - 1 = -1$ 일 때
 $a^2 = 0 \quad \therefore a = 0$
 이때 $A = \{-1, 3\}$, $B = \{-3, -1, 4\}$ 이므로 $A \not\subset B$
 (ii) $2a - 3 = -1$ 일 때
 $2a = 2 \quad \therefore a = 1$
 이때 $A = \{-1, 4\}$, $B = \{-1, 0, 4\}$ 이므로 $A \subset B$
 (i), (ii)에서 $a = 1$

답 ④

018

- ① \emptyset 은 집합 A 의 원소이므로 $\{\emptyset\} \subset A$
 - ② 1, $\{1\}$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\{1\} \subset A$, $\{1\} \in A$
 - ③ 3은 집합 A 의 원소이므로 $\{3\} \subset A$
 - ④ 1, 3은 집합 A 의 원소이므로 $\{1, 3\} \subset A$
 - ⑤ 1, $\{1\}$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\{1, \{1\}\} \subset A$
- 따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

019

- ㄱ. 1은 집합 A 의 원소이므로 $1 \in A$ (참)
 - ㄴ. 2는 집합 A 의 원소가 아니고 $\{2\}$ 는 집합 A 의 원소이므로
 $\{2\} \not\subset A$, $\{2\} \in A$ (거짓)
 - ㄷ. $\{1, 2\}$ 는 집합 A 의 원소이므로
 $\{1, 2\} \in A$ (참)
 - ㄹ. $\{1\}$ 은 집합 A 의 원소이지만 2는 집합 A 의 원소가 아니므로
 $\{2, \{1\}\} \not\subset A$ (거짓)
- 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

030

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ ①
 $2 \notin X, 5 \in X, 11 \in X$ 이므로 집합 X 는 5, 11은 반드시 원소로 갖고 2는 원소로 갖지 않는다. ②
 따라서 집합 A 의 부분집합 중에서 5, 11은 반드시 원소로 갖고, 2는 원소로 갖지 않는 집합 X 의 개수는
 $2^{6-2-1} = 2^3 = 8$ ③
 답 8

채점 기준	비율
① 집합 A 를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20%
② $2 \notin X, 5 \in X, 11 \in X$ 의 의미를 알 수 있다.	30%
③ 집합 X 의 개수를 구할 수 있다.	50%

031

집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$
 홀수 1, 3, 5를 원소로 갖지 않는 집합 A 의 부분집합의 개수는
 $2^{5-3} = 2^2 = 4$
 따라서 집합 A 의 부분집합 중에서 홀수인 원소가 한 개 이상 속해 있는 집합의 개수는 $32 - 4 = 28$
 답 ④

|다른 풀이|

- (i) 홀수인 원소가 1개 속해 있는 집합
 $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\},$
 $\{3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\},$
 $\{5\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 4, 5\}$
 \therefore 12개
 - (ii) 홀수인 원소가 2개 속해 있는 집합
 $\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\},$
 $\{3, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\},$
 $\{1, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}$
 \therefore 12개
 - (iii) 홀수인 원소가 3개 속해 있는 집합
 $\{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 \therefore 4개
- (i)~(iii)에서 홀수가 한 개 이상 속해 있는 집합의 개수는
 $12 + 12 + 4 = 28$

032

$A = \{1, 5\}, B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ 이므로 $A \subset X \subset B$ 를 만족시키는 집합 X 는 1, 5를 반드시 원소로 갖는 집합 B 의 부분집합이다.
 따라서 집합 X 의 개수는 $2^{6-2} = 2^4 = 16$
 답 ④

033

$x^2 - 6x + 8 = 0$ 에서 $(x-2)(x-4) = 0 \quad \therefore x = 2$ 또는 $x = 4$
 $\therefore A = \{2, 4\}$
 한편, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ 이므로 $A \subset X \subset B$,
 $X \neq A, X \neq B$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합 B 의 부분집합 중에서 집합 A, B 를 제외한 개수와 같다.

따라서 집합 X 의 개수는
 $2^{9-2} - 2 = 2^7 - 2 = 128 - 2 = 126$

답 ④

034

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\},$
 $C = \{3, 6, 9, 12\}$
 (1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 (2) $B \cap C = \{6\}$
 (3) $(A \cup B) \cap C = \{3, 6, 12\}$
 (4) $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
 답 (1) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12\}$ (2) $\{6\}$
 (3) $\{3, 6, 12\}$ (4) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

035

$C = \{1, 2, 4\}$
 ③ $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ 이므로 $(A \cap B) \cap C = \{1\}$
 ④ $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로
 $A \cap (B \cup C) = \{1, 3, 5\} \rightarrow C \subset B$ 이므로 $B \cup C = B$
 ⑤ $B \cap C = \{1, 2, 4\}$ 이므로 $\rightarrow C \subset B$ 이므로 $B \cap C = C$
 $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
 따라서 옳지 않은 것은 ③이다.
 답 ③

036

$A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ 이고 주어진 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $A \cap B$ 이다.
 따라서 구하는 집합은 $\{1, 2, 4\}$
 답 ③

037

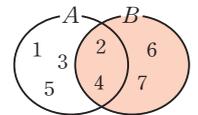
$A \cap B = \{15, 30, 45, \dots\}$
 $= \{x | x \text{는 } 15 \text{의 양의 배수}\}$
 $\therefore a = 15$
 답 ②

참고

집합 A 는 3의 양의 배수의 집합이고 집합 B 는 5의 양의 배수의 집합이므로 $A \cap B$ 는 3과 5의 공배수, 즉 15의 양의 배수의 집합이다.
 \rightarrow 3과 5의 최소공배수

038

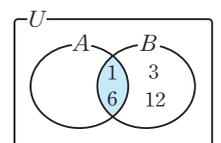
주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면
 오른쪽 그림과 같으므로
 $B = \{2, 4, 6, 7\}$



답 $\{2, 4, 6, 7\}$

039

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면
 오른쪽 그림과 같으므로
 $A \cap B = \{1, 6\}$



답 $\{1, 6\}$

|다른 풀이|

$$A \cap B = B - (B - A)$$

$$= \{1, 3, 6, 12\} - \{3, 12\}$$

$$= \{1, 6\}$$

040

$U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ 이므로
 $B^c = \{2, 6, 10, 14, 18\}$
 $\therefore A \cup B^c = \{2, 4, 6, 10, 12, 14, 18\}$
 따라서 집합 $A \cup B^c$ 의 원소의 개수는 7이다.

답 ⑤

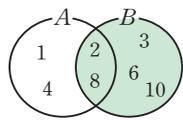
041

$B - C = \{c, d\}$ 이므로 $A - (B - C) = \{a, b\}$
 $\therefore n(A - (B - C)) = 2$

답 2

042

$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ 이고
 $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 3, 4, 6, 10\}$ 에서 1, 4가 집합 A 의 원소이므로 3, 6, 10은 집합 $B - A$ 의 원소이다.
 따라서 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다. ①
 즉, $B = \{2, 3, 6, 8, 10\}$ 이므로 집합 B 의 모든 원소의 합은
 $2 + 3 + 6 + 8 + 10 = 29$ ②



$A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이고 2, 8이 집합 $(A - B) \cup (B - A)$ 의 원소가 아니므로 2, 8은 $A \cap B$ 의 원소이다.

답 29

채점 기준	비율
① 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타낼 수 있다.	50%
② 집합 B 의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	50%

043

$B = (B - A) \cup (A \cap B)$, $(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$ 이고
 $B - A = \{5, 6\}$ 이므로
 $A \cap B = \{1\}$ ① \rightarrow 집합 B 의 모든 원소의 합이 12이고 $5 + 6 = 11$ 이므로 $A \cap B = \{1\}$ 이어야 한다.
 $\therefore A - B = A - (A \cap B) = \{2, 3, 4\}$
 따라서 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합은
 $2 + 3 + 4 = 9$

답 ⑤

044

- ① $A \cap B = \{4\}$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.
- ② $A \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.
- ③ $x^2 = 1$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$
 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 에서 $(x - 1)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$
 즉, $A = \{-1, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ 이므로 $A \cap B = \{1\}$
 따라서 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.
- ④ $A = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ 이므로
 $A \cap B = \{2\}$

즉, 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.
 ⑤ $A = \{1, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, \dots\}$ 이므로 $A \cap B = \emptyset$
 즉, 두 집합 A, B 는 서로소이다.
 따라서 두 집합 A, B 가 서로소인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

045

구하는 집합의 개수는 집합 A 의 부분집합 중에서 10, 15를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로 구하는 집합의 개수는
 $2^{5-2} = 2^3 = 8$

답 8

046

$A = \{1, 2\}$, $A \cup B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
 두 집합 A, B 가 서로소이므로 $A \cap B = \emptyset$
 따라서 $B = \{4, 8, 16\}$ 이므로 집합 B 의 모든 원소의 합은
 $4 + 8 + 16 = 28$

답 ⑤

047

$A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ 이므로 집합 B 의 원소의 개수를 n 이라고 하면
 $2^{6-n} = 16 = 2^4$
 즉, $6 - n = 4$ 이므로 $n = 2$
 따라서 집합 B 의 원소의 개수는 2이다.

답 ②

048

두 집합 A, B 가 서로소이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로
 $a \geq 1$ ①
 따라서 a 의 최솟값은 1이다. ②



답 1

채점 기준	비율
① a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	70%
② a 의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

049

$A \cap B = \{2, 4\}$ 이므로 $4 \in A$, $2 \in B$
 따라서 $a = 4$, $b + 2 = 2$ 이므로 $a = 4$, $b = 0$
 $\therefore a + b = 4 + 0 = 4$

답 4

050

$A - B = \{6\}$ 이므로 집합 A 의 원소 중 6을 제외한 나머지 원소인 3, 5, $a - b$ 는 모두 집합 B 의 원소이어야 한다.
 즉, $5 \in B$, $a - b \in B$ 이므로 $a - b = 8$, $2a - 1 = 5$
 $\therefore a = 3$, $b = -5$
 $\therefore ab = 3 \times (-5) = -15$

답 ②

051

$A \cup B = \{6, 8, 10\}$ 이므로 $10 \in B$

$\therefore a = 10$ 또는 $a + 2 = 10$

(i) $a = 10$ 일 때

$A = \{6, 8\}, B = \{10, 12\}$ 이므로 $A \cup B = \{6, 8, 10, 12\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a + 2 = 10$, 즉 $a = 8$ 일 때

$A = \{6, 8\}, B = \{8, 10\}$ 이므로 $A \cup B = \{6, 8, 10\}$

따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a = 8$

답 8

052

$A \cap B = \{4\}$ 이므로 $4 \in A, 4 \in B$

$4 \in A$ 에서 $4^2 - 3 \times 4 + a = 0 \quad \therefore a = -4$

$4 \in B$ 에서 $4^2 + 4b + 12 = 0, 4b = -28 \quad \therefore b = -7$

$x^2 - 3x - 4 = 0$ 에서 $(x+1)(x-4) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 4 \quad \therefore A = \{-1, 4\}$

$x^2 - 7x + 12 = 0$ 에서 $(x-3)(x-4) = 0$

$\therefore x = 3$ 또는 $x = 4 \quad \therefore B = \{3, 4\}$

ㄱ. $A - B = \{-1\}$ (거짓)

ㄴ. $B - A = \{3\}$ (거짓)

ㄷ. $A \cup B = \{-1, 3, 4\}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 3

053

$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 3, 6\}$ 에서 1, 3, 6을 제외한 A, B의 나머지 원소는 $A \cap B$ 에 속하므로

$2 \in (A \cap B), 4 \in (A \cap B)$

즉, $2 \in A$ 이므로

$a^2 - 2 = 2, a^2 = 4 \quad \therefore a = -2$ 또는 $a = 2$

(i) $a = -2$ 일 때

$A = \{1, 2, 4\}, B = \{-6, -5, 0, 2\}$ 이므로

$A - B = \{1, 4\}, B - A = \{-6, -5, 0\}$

$\therefore (A - B) \cup (B - A) = \{-6, -5, 0, 1, 4\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 2$ 일 때

$A = \{1, 2, 4\}, B = \{2, 3, 4, 6\}$ 이므로

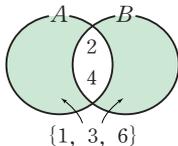
$A - B = \{1\}, B - A = \{3, 6\}$

$\therefore (A - B) \cup (B - A) = \{1, 3, 6\}$

따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a = 2$

답 5



054

$B - A^c = B \cap (A^c)^c = B \cap A = A \cap B$

따라서 $B - A^c$ 과 항상 같은 집합은 3이다.

답 3

055

$(A \cap U) - B^c = A - B^c = A \cap (B^c)^c$

$= A \cap B$ 1

$= \{1, 5\}$ 2

따라서 집합 $(A \cap U) - B^c$ 의 모든 원소의 합은

$1 + 5 = 6$ 3

답 6

채점 기준	비율
1 집합 $(A \cap U) - B^c$ 을 간단히 할 수 있다.	50%
2 집합 $(A \cap U) - B^c$ 을 구할 수 있다.	30%
3 집합 $(A \cap U) - B^c$ 의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20%

|다른 풀이|

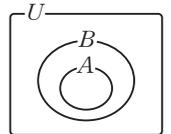
$U = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$ 이므로 $B^c = \{25, 50\}$

$\therefore (A \cap U) - B^c = A - B^c = \{1, 5\}$

따라서 집합 $(A \cap U) - B^c$ 의 모든 원소의 합은 $1 + 5 = 6$

056

$A \subset B$ 이므로 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $A \cap B = A$

② $(A \cup B) \cap A = B \cap A = A$

③ $(A \cap B) \cup A = A \cup A = A$

④ $(A - B) \cup A = \emptyset \cup A = A$

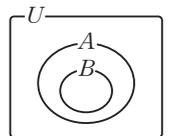
⑤ $(A \cap B) \cup (A \cup B) = A \cup B = B$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 5이다.

답 5

057

$B \subset A$ 이므로 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $B - A = \emptyset$

② $A \cap B = B$ 이고 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이므로

$B \subset (A \cap B)$

③ $A \cup B^c = U$

④ $A^c \subset B^c$ 이므로 $A^c \cap B^c = A^c$

⑤ $A^c \cup B \neq U$

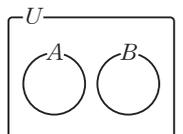
따라서 옳지 않은 것은 5이다.

답 5

058

① $A - B = A$ 이므로 $A \cap B = \emptyset$

따라서 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



② $A \not\subset B, B \not\subset A$

③ $B - A = B$

④, ⑤ $A \subset B^c, B \subset A^c$

따라서 옳지 않은 것은 2이다.

답 2

059

A ∩ B = {c, d, e}

A ∪ B = {a, b, c, d, e, f, g, h}

따라서 집합 X의 개수는 집합 A ∪ B의 부분집합 중에서 c, d, e를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

2^{8-3} = 2^5 = 32

답 32

060

A ∪ X = A이므로 X ⊂ A

B ∩ X = ∅이므로 X ⊂ B^c

즉, 집합 X는 집합 A ∩ B^c = A - B의 부분집합이다.

이때 집합 A - B는 50 이하의 6의 배수 중에서 4의 배수를 제외한 수의 집합이므로

A - B = {6, 18, 30, 42}

따라서 집합 X의 개수는 2^4 = 16

답 2

061

A = {1, 3, 5, 6, 9, 10}, A - B = {3, 9, 10}이므로

A ∩ B = A - (A - B) = {1, 5, 6} 1

∴ A^c ∪ B^c = (A ∩ B)^c 2
= {2, 3, 4, 7, 8, 9, 10}

답 {2, 3, 4, 7, 8, 9, 10}

채점 기준	비율
1 집합 A ∩ B를 구할 수 있다.	70%
2 집합 A^c ∪ B^c을 구할 수 있다.	30%

062

(A ∪ B) ∩ A^c = (A ∩ A^c) ∪ (B ∩ A^c)
= ∅ ∪ (B ∩ A^c)
= B ∩ A^c
= B - A
= {2, 6, 18}

답 4

063

(A - B) - (A ∩ C^c)
= (A ∩ B^c) ∩ (A ∩ C^c)^c
= (A ∩ B^c) ∩ (A^c ∪ C)
= {(A ∩ B^c) ∩ A^c} ∪ {(A ∩ B^c) ∩ C}
→ A ∩ A^c = ∅이므로 (A ∩ B^c) ∩ A^c = ∅
= ∅ ∪ {(A ∩ C) ∩ B^c} = (A ∩ C) - B

따라서 집합 (A - B) - (A ∩ C^c)과 항상 같은 집합은 4이다.

답 4

064

(A - B)^c ∩ B = (A ∩ B^c)^c ∩ B
= (A^c ∪ B) ∩ B
= (A^c ∩ B) ∪ (B ∩ B)
= (B - A) ∪ B = B

따라서 집합 (A - B)^c ∩ B를 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 5이다.

답 5

065

A ∩ ((B - A) ∪ (A ∩ B)) = {A ∩ (B ∩ A^c)} ∪ {A ∩ (A ∩ B)}
= ∅ ∪ (A ∩ B) = A ∩ B

따라서 A ∩ B = B이므로 항상 성립하는 것은 2이다.

답 2

066

(1) n(A ∩ B) = n(A) + n(B) - n(A ∪ B) = 16 + 8 - 20 = 4

(2) n(A^c) = n(U) - n(A) = 25 - 16 = 9

(3) n(B^c) = n(U) - n(B) = 25 - 8 = 17

(4) n(A - B) = n(A) - n(A ∩ B) = 16 - 4 = 12

(5) n((A ∪ B)^c) = n(U) - n(A ∪ B) = 25 - 20 = 5

(6) n((A ∩ B)^c) = n(U) - n(A ∩ B) = 25 - 4 = 21

답 (1) 4 (2) 9 (3) 17 (4) 12 (5) 5 (6) 21

067

B ∪ (A - B) = A ∪ B, B ∩ (A - B) = ∅이므로

n(A ∪ B) = n(B) + n(A - B) = 35 + 15 = 50

∴ n(A^c ∩ B^c) = n((A ∪ B)^c)
= n(U) - n(A ∪ B)
= 60 - 50 = 10

답 3

068

n(A ∩ B^c) = n(A - B) = n(A) - n(A ∩ B)

한편, n(B - A) = n(B) - n(A ∩ B)이므로

n(A ∩ B) = n(B) - n(B - A) = 12 - 8 = 4

∴ n(A ∩ B^c) = n(A) - n(A ∩ B)
= 16 - 4 = 12

답 5

069

A^c ∪ B = (A ∩ B^c)^c = (A - B)^c

A = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, B = {3, 6, 9, ..., 48}

∴ A - B = {1, 2, 5, 10}

따라서 n(U) = 50, n(A - B) = 4이므로

n(A^c ∪ B) = n((A - B)^c)
= n(U) - n(A - B)
= 50 - 4 = 46

답 4

070

B ⊂ A일 때 n(A ∩ B)는 최댓값을 가지므로

M = n(B) = 15 1

A ∪ B = U일 때 n(A ∩ B)는 최솟값을 갖는다.

n(A ∩ B) = n(A) + n(B) - n(A ∪ B)이므로

m = 22 + 15 - 30 = 7 2

∴ $M+m=15+7=22$ ③

답 22

채점 기준	비율
① M 의 값을 구할 수 있다.	40%
② m 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $M+m$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

|다른 풀이|

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 22 + 15 - n(A \cup B) \\ &= 37 - n(A \cup B) \end{aligned}$$

이때 $A \subset (A \cup B) \subset U$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A) &\leq n(A \cup B) \leq n(U) \\ \text{즉, } 22 &\leq n(A \cup B) \leq 30 \text{이므로} \\ 7 &\leq 37 - n(A \cup B) \leq 15 \\ \therefore 7 &\leq n(A \cap B) \leq 15 \end{aligned}$$

따라서 $M=15, m=7$ 이므로

$$M+m=22$$

참고

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(B) < n(A)$ 일 때

- ① $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우
 - $B \subset A$ 일 때이다.
 - $n(A \cap B) = n(B)$
- ② $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우
 - $n(A \cup B)$ 가 최대일 때, 즉 $A \cup B = U$ 일 때이다.

071

제주도를 여행해 본 회원의 집합을 A , 부산을 여행해 본 회원의 집합을 B 라고 하면

$$\begin{aligned} n(A) &= 34, n(B) = 26, n(A \cup B) = 50 \\ \text{제주도만 여행해 본 회원의 집합은 } A - B \text{이고} \\ n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 34 + 26 - 50 = 10 \end{aligned}$$

이므로 제주도만 여행해 본 회원의 수는

$$\begin{aligned} n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \\ &= 34 - 10 = 24 \end{aligned}$$

답 24

072

A 영화를 본 학생의 집합을 A , B 영화를 본 학생의 집합을 B 라고 하면

$$\begin{aligned} n(U) &= 35, n(A) = 22, n(B) = 10, n(A \cap B) = 5 \\ \therefore n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 22 + 10 - 5 = 27 \end{aligned}$$

이때 A, B 두 영화 중 어느 것도 보지 않은 학생의 집합은 $(A \cup B)^c$ 이므로

$$\begin{aligned} n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 35 - 27 = 8 \end{aligned}$$

답 8

실력을 높이는 연습문제

01

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 2x &= 0 \text{에서} \\ x(x^2 - x - 2) &= 0, x(x+1)(x-2) = 0 \\ \therefore x &= -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2 \end{aligned}$$

즉, 집합 A 의 원소는 $-1, 0, 2$ 이다.

- ① $-2 \notin A$ ③ $0 \in A$ ④ $1 \notin A$ ⑤ $2 \in A$

따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

02

- ①, ②, ④, ⑤ $\{2, 4, 6, 8\}$
- ③ $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

답 ③

03

문제 접근하기

$\frac{12}{8-n}$ 가 자연수이므로 $8-n$ 은 12의 양의 약수이어야 함을 이용한다.

$\frac{12}{8-n}$ 가 자연수이므로 $8-n$ 은 12의 양의 약수이어야 한다.

즉, $8-n=1, 2, 3, 4, 6, 12$ 이므로

$$n=7, 6, 5, 4, 2 (\because n \text{은 자연수})$$

(i) $n=2$ 일 때 $\rightarrow 8-n=12$ 이면 $n=-4$ 이다. 이것은 n 이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$x = \frac{12}{8-2} = \frac{12}{6} = 2$$

(ii) $n=4$ 일 때

$$x = \frac{12}{8-4} = \frac{12}{4} = 3$$

(iii) $n=5$ 일 때

$$x = \frac{12}{8-5} = \frac{12}{3} = 4$$

(iv) $n=6$ 일 때

$$x = \frac{12}{8-6} = \frac{12}{2} = 6$$

(v) $n=7$ 일 때

$$x = \frac{12}{8-7} = \frac{12}{1} = 12$$

(i)~(v)에서 $A = \{2, 3, 4, 6, 12\}$

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은

$$2+3+4+6+12=27$$

답 27

04

오른쪽 표를 이용하여 $x+y$ 의 값을 모두 구하면

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a+1, a+3, a+5$$

이때 $n(X) = 10$ 이므로

$$a+1=8 \text{ 또는 } a+1=9$$

이어야 한다.

$x \setminus y$	1	3	5
1	2	4	6
2	3	5	7
3	4	6	8
4	5	7	9
a	$a+1$	$a+3$	$a+5$

즉, $a=7$ 또는 $a=8$ 이므로 자연수 a 의 최댓값은 8이다.

답 8

참고

$2 \leq a+1 \leq 7$ 이면

$4 \leq a+3 \leq 9, 6 \leq a+5 \leq 11$

이 되므로 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 $a+1, a+3, a+5$ 와 같은 수가 2개 이상 존재하게 되어 $n(X)=10$ 을 만족시키지 않는다.

따라서 $a+1=8$ 또는 $a+1=9$ 이어야 한다.

05

$B=\{1, 3, 9, 27\}$ 이므로 $A \subset B$ 이려면

$3a=3$ 또는 $3a=9$ 또는 $3a=27$

이어야 한다.

즉, $a=1$ 또는 $a=3$ 또는 $a=9$ 이므로 $A \subset B$ 를 만족시키는 모든 자연수 a 의 값의 합은

$1+3+9=13$

답 13

06

① \emptyset 은 집합 A 의 원소이므로 $\emptyset \in A, \{\emptyset\} \subset A$

② c 는 집합 A 의 원소가 아니므로 $c \notin A$

③ a 는 집합 A 의 원소이고, $\{a\}$ 는 집합 A 의 원소가 아니므로 $a \in A, \{a\} \notin A$

④ a, b 는 집합 A 의 원소이고, $\{a, b\}$ 는 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{a, b\} \subset A, \{a, b\} \notin A$

⑤ $\{b, c\}$ 는 집합 A 의 원소이고, b 는 집합 A 의 원소이나 c 는 집합 A 의 원소가 아니므로

$\{b, c\} \in A, \{b, c\} \notin A$

따라서 옳은 것은 ①이다.

답 ①

07

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이므로 $A=B$

따라서 두 집합 A, B 의 원소가 같아야 하므로

$a=10, a+b=24$

$\therefore b=14$

답 ④

08

문제 접근하기

원소의 합이 16 이상인 부분집합은 원소가 2개 이상임을 이용하여 원소가 2개, 3개, 4개인 경우로 나누어 생각한다.

집합 A 의 부분집합 중에서 원소의 합이 16 이상이 되려면 원소가 2개 이상이어야 한다.

(i) 원소가 2개일 때

$\{7, 9\}$ 의 1개

(ii) 원소가 3개일 때

$\{3, 5, 9\}, \{3, 7, 9\}, \{5, 7, 9\}$ 의 3개

(iii) 원소가 4개일 때

$\{3, 5, 7, 9\}$ 의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 집합의 개수는

$1+3+1=5$

답 ③

09

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ 이므로 가장 큰 원소가 16인 부분집합은 16을 반드시 원소로 갖고 24, 48은 원소로 갖지 않아야 한다.

따라서 원소의 개수가 4이고 가장 큰 원소가 16인 부분집합의 개수는 16, 24, 48을 제외한 7개의 원소 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}^7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

답 35

10

$A=\{a, b, c, d, e, f\}, B=\{a, b\}$ 이므로 $B \subset X \subset A$ 를 만족시키는 집합 X 중에서 e 를 반드시 원소로 갖는 집합은 집합 A 의 부분집합 중에서 a, b, e 를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$$2^{6-3} = 2^3 = 8$$

답 8

11

$U=\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}, A=\{1, 2, 4, 8\},$

$B=\{4, 5, 10\}$ 이므로

① $A \cap B = \{4\}$

② $A^C = \{5, 10, 20, 40\}$

④ $B^C = \{1, 2, 8, 20, 40\}$ 이므로 $B^C - A = \{20, 40\}$

⑤ $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$

따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

12

$A - B = \{3, 5\}$ 이므로 $5 \in A \therefore x=5$

따라서 $A = \{2, 3, 5\}, B = \{-2, 2, 7\}$ 이므로

$B - A = \{-2, 7\}$

답 $\{-2, 7\}$

13

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$ 이고 $B = \{1, 4, 2a-3\}$ 이므로

$2a-3=3$ 또는 $2a-3=5 \therefore a=3$ 또는 $a=4$

(i) $a=3$ 일 때

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 4\}$ 이므로

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=4$ 일 때

$A = \{1, 3, 4\}, B = \{1, 4, 5\}$ 이므로

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$

따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$$A = \{1, 3, 4\}, B = \{1, 4, 5\}$$

이므로 집합 A의 모든 원소의 합은

$$1+3+4=8$$

답 ⑤

14

문제 접근하기

부등식 $x^2 - 4x - 12 \leq 0$ 을 풀어 집합 A를 수직선 위에 나타낸 후 주어진 조건을 만족시키도록 집합 B를 수직선 위에 나타내어 본다.

$$x^2 - 4x - 12 \leq 0 \text{에서}$$

$$(x+2)(x-6) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 6$$

$$\therefore A = \{x \mid -2 \leq x \leq 6\}$$

$$A \cap B = \{x \mid 1 < x \leq 6\},$$

$$A \cup B = \{x \mid -2 \leq x < 8\} \text{이므로}$$

오른쪽 그림에서

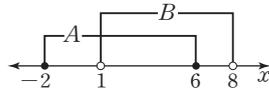
$$B = \{x \mid 1 < x < 8\}$$

$$= \{x \mid (x-1)(x-8) < 0\}$$

$$= \{x \mid x^2 - 9x + 8 < 0\}$$

따라서 $a = -9, b = 8$ 이므로

$$a+b = -9+8 = -1$$



답 -1

15

두 집합 A, B가 서로소이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

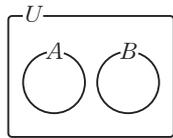
$$\neg. A \subset B^c \text{ (참)}$$

$$\neg. A \cap B^c = A \text{ (거짓)}$$

$$\neg. A \cup B \neq U \text{ (거짓)}$$

$$\neg. A \cup B^c = B^c \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 \neg, κ 이다.



답 ②

16

문제 접근하기

$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset$ 의 좌변을 정리하여 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 파악한다.

$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset \text{에서}$$

$$A \cap B^c = A - B,$$

$$A^c \cap B = B \cap A^c = B - A$$

이므로

$$(A - B) \cup (B - A) = \emptyset$$

즉, $A - B = \emptyset, B - A = \emptyset$ 이므로

$$A \subset B, B \subset A \quad \therefore A = B$$

따라서 $B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로

$$n(B) = 4$$

답 4

17

$\{3, 4, 5\} \cap A = \emptyset$ 이므로 집합 A는 전체집합 U의 부분집합 중에서 3, 4, 5를 원소로 갖지 않는 집합이어야 한다.

따라서 집합 A의 개수는

$$2^{5-3} = 2^2 = 4$$

답 ②

18

$$|x| < 4 \text{에서 } -4 < x < 4$$

$$\therefore U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$(A - B) \cup X = X \text{이므로 } (A - B) \subset X$$

$$\text{이때 } A - B = \{-1\} \text{이므로 } \{-1\} \subset X$$

$$\text{또, } B \cup X = X \text{이므로 } B \subset X$$

$$\therefore \{0, 1, 2\} \subset X$$

따라서 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중에서 -1, 0, 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X의 개수는

$$2^{7-4} = 2^3 = 8$$

답 ③

19

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A \cup X = X \text{이므로 } A \subset X$$

$$B - A = \{1, 2, 6, 8\} \text{이고 } (B - A) \cap X = \{2\} \text{이므로}$$

$$1 \notin X, 2 \in X, 6 \notin X, 8 \notin X$$

따라서 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중에서 2, 3, 5, 7은 반드시 원소로 갖고 1, 6, 8은 원소로 갖지 않는 집합이므로 집합 X의 개수는

$$2^{9-4-3} = 2^2 = 4$$

답 4

20

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 20\}, A = \{4, 8, 12, 16, 20\},$$

$$B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

$$\therefore (A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A - B = \{8, 12, 16\}$$

따라서 집합 $(A^c \cup B)^c$ 의 모든 원소의 합은

$$8+12+16=36$$

답 36

21

$$A \subset (A \cup B) \text{이므로 } A \cap (A \cup B) = A$$

$$\textcircled{1} (B - A) \subset B \text{이므로 } (B - A) \cup B = B$$

$$\textcircled{2} A \cap (A - B)^c = A \cap (A \cap B^c)^c$$

$$= A \cap (A^c \cup B)$$

$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B)$$

$$= \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

$$\textcircled{3} A \cap (B - A) = \emptyset \text{이므로 } A - (B - A) = A$$

$$\textcircled{4} B - (A \cap B) = B \cap (A \cap B)^c$$

$$= B \cap (A^c \cup B^c)$$

$$= (B \cap A^c) \cup (B \cap B^c)$$

$$= (B \cap A^c) \cup \emptyset$$

$$= B \cap A^c = B - A$$

$$\begin{aligned} ⑤ (A-B) \cup B &= (A \cap B^c) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap U \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

따라서 $A \cap (A \cup B)$ 와 항상 같은 집합은 ③이다.

답 ③

22

$$\begin{aligned} ① n(A^c) &= n(U) - n(A) \\ &= 40 - 18 = 22 \\ ② n(A-B) &= n(A) - n(A \cap B) \text{이므로} \\ n(A \cap B) &= n(A) - n(A-B) \\ &= 18 - 14 = 4 \\ ③ n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 18 + 22 - 4 = 36 \\ ④ n(B-A) &= n(B) - n(A \cap B) \\ &= 22 - 4 = 18 \\ ⑤ n(B^c) &= n(U) - n(B) = 40 - 22 = 18 \text{이므로} \\ n(A \cup B^c) &= n(A) + n(B^c) - n(A \cap B^c) \\ &= n(A) + n(B^c) - n(A-B) \\ &= 18 + 18 - 14 = 22 \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

23

$(A-B) \cup (B-A)$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

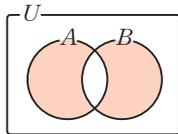
$$\begin{aligned} n((A-B) \cup (B-A)) &= n(A \cup B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) \\ &= n(U) - n(A^c \cap B^c) \\ &= 48 - 7 = 41 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} n((A-B) \cup (B-A)) &= n(A \cup B) - n(A \cap B) \\ &= 41 - 10 = 31 \end{aligned}$$



답 ②

24

등 번호가 2의 배수인 선수의 집합을 A, 등 번호가 3의 배수인 선수의 집합을 B라고 하면 등 번호가 6의 배수인 선수의 집합은 $A \cap B$ 이다.

등 번호가 3의 배수인 선수의 수를 a라고 하면 등 번호가 2의 배수인 선수의 수는 $a+3$ 이므로

$$n(A) = a+3, n(B) = a, n(A \cap B) = 5, n(A \cup B) = 30$$

이때 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로

$$30 = (a+3) + a - 5, 2a = 32$$

$$\therefore a = 16$$

따라서 등 번호가 3의 배수인 선수의 수는 16이다.

답 16

06

명제

기본을 다지는 유형

본문 081쪽

001

- ㄱ. x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
 - ㄴ. 참인 명제이다.
 - ㄷ. 2는 짝수이지만 소수이므로 거짓인 명제이다.
 - ㄹ. 참, 거짓을 명확하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
- 따라서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

002

- ①~④ x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 조건이다.
 - ⑤ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ 이므로 참인 명제이다.
- 따라서 조건이 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

003

조건 ' $x < 2$ 그리고 $y \geq -1$ '의 부정은 $x \geq 2$ 또는 $y < -1$

답 ⑤

004

각 명제의 부정을 구하여 그 참, 거짓을 판별하면 다음과 같다.

- ① 5는 소수가 아니다. (거짓)
- ② 정사각형은 직사각형이 아니다. (거짓)
- ③ 6은 24의 약수가 아니다. (거짓)
- ④ $3 \notin \{4, 5, 6\}$ (참)
- ⑤ 8의 배수는 4의 배수가 아니다. (거짓)

따라서 명제의 부정이 참인 것은 ④이다.

답 ④

다른 풀이

명제가 거짓이면 그 부정은 참이므로 명제가 거짓인 것을 찾는다.

- ①, ②, ③, ⑤는 참인 명제이고 ④는 거짓인 명제이므로 그 부정이 참인 것은 ④이다.

005

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면

$$P = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \text{에서 } (x-2)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 6 \quad \therefore Q = \{2, 6\}$$

$$(1) \sim p \text{의 진리집합은 } P^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$(2) \sim q \text{의 진리집합은 } Q^c = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

$$(3) p \text{ 그리고 } q \text{의 진리집합은 } P \cap Q = \{2, 6\}$$

- (4) $\sim p$ 또는 q 의 진리집합은 $P^c \cup Q = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$
 [답] (1) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (2) $\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$
 (3) $\{2, 6\}$ (4) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

006

실수 x 에 대한 조건
 'x는 음이 아닌 실수이다.', 즉 'x는 0 또는 양의 실수이다.'
 의 진리집합은 $\{x|x \geq 0\}$

[답] ④

007

조건 ' $-3 < x \leq 1$ '은 ' $x > -3$ 그리고 $x \leq 1$ '이므로
 $\sim p$ 그리고 $\sim q$
 따라서 이 조건의 진리집합은 $P^c \cap Q^c$

[답] ⑤

008

$\sim p$ 는 'x는 짝수가 아니고 3의 배수가 아니다.', 즉 'x는 홀수이고 3의 배수가 아니다.'이므로 $\sim p$ 의 진리집합의 원소는 3의 배수가 아닌 홀수이다.
 따라서 조건 $\sim p$ 의 진리집합은 $\{1, 5, 7\}$ 이므로 구하는 모든 원소의 합은 $1+5+7=13$

[답] ③

다른 풀이

조건 p 의 진리집합을 P 라고 하면
 $P = \{x|x \text{는 짝수}\} \cup \{x|x \text{는 3의 배수}\}$
 $= \{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 6, 9\}$
 $= \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$
 따라서 조건 $\sim p$ 의 진리집합은 $P^c = \{1, 5, 7\}$ 이므로 구하는 모든 원소의 합은 $1+5+7=13$

009

$U = \{-5, -4, -3, \dots, 5\}$
 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하자.
 $x^3 - 4x = 0$ 에서 $x(x^2 - 4) = 0, x(x+2)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$
 $\therefore P = \{-2, 0, 2\}$ ①
 $q: |x+3| > 1$ 에서 $\sim q: |x+3| \leq 1$ 이므로
 $-1 \leq x+3 \leq 1 \quad \therefore -4 \leq x \leq -2$
 $\therefore Q^c = \{-4, -3, -2\}$ ②
 따라서 조건 ' p 또는 $\sim q$ '의 진리집합은
 $P \cup Q^c = \{-4, -3, -2, 0, 2\}$
 이므로 구하는 원소의 개수는 5이다. ③

[답] 5

채점 기준	비율
① 조건 p 의 진리집합을 구할 수 있다.	40%
② 조건 $\sim q$ 의 진리집합을 구할 수 있다.	40%
③ 조건 ' p 또는 $\sim q$ '의 진리집합의 원소의 개수를 구할 수 있다.	20%

010

④ [반례] $n=2$ 이면 n 은 소수이지만 짝수이다.
 따라서 거짓인 명제는 ④이다.

[답] ④

011

$\neg. x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x=0, y=0$ 이므로 $x+y=0$ 이다.
 즉, 주어진 명제는 참이다.
 나. [반례] $x=1, y=-1, z=0$ 이면 $xz=yz$ 이지만 $x \neq y$ 이다.
 다. [반례] $x=\sqrt{2}$ 이면 x^2 은 유리수이지만 x 는 무리수이다.
 르. [반례] $x=-1, y=1$ 이면 $x+y=0$ 이지만 $x \neq 0, y \neq 0$ 이다.
 따라서 참인 명제는 \neg 이다.

[답] \neg

012

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $P \subset Q$ 이고 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓이면 $P \not\subset Q$ 이다.
 따라서 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P 의 원소이면서 집합 Q 의 원소가 아니어야 한다. 즉, 구하는 원소는 2이다.
 \rightarrow 집합 $P-Q$ 의 원소이어야 한다.

[답] ②

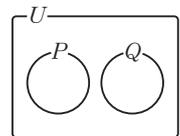
013

① $P \not\subset Q$ 이므로 $p \rightarrow q$ 는 거짓인 명제이다.
 ② $Q \not\subset P$ 이므로 $q \rightarrow p$ 는 거짓인 명제이다.
 ③ $R \not\subset Q$ 이므로 $r \rightarrow q$ 는 거짓인 명제이다.
 ④ $Q^c \not\subset P$ 이므로 $\sim q \rightarrow p$ 는 거짓인 명제이다.
 ⑤ $Q \subset R^c$ 이므로 $q \rightarrow \sim r$ 는 참인 명제이다.
 따라서 항상 참인 명제는 ⑤이다.

[답] ⑤

014

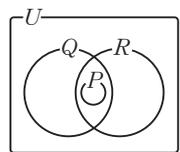
명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로
 $P \subset Q^c$
 즉, 두 집합 P, Q 는 오른쪽 그림과 같으므로
 $P \cup Q \neq U$
 따라서 옳지 않은 것은 ③이다.



[답] ③

015

$P \subset (Q \cap R)$ 이므로 세 집합 P, Q, R 는 오른쪽 그림과 같다.
 $\neg. P \subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.
 나. $Q^c \subset P^c$ 이므로 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 참이다.
 다. $R \not\subset Q^c$ 이므로 명제 $r \rightarrow \sim q$ 는 거짓이다.
 르. $R^c \not\subset P$ 이므로 명제 $\sim r \rightarrow p$ 는 거짓이다.
 따라서 참인 명제인 것은 $\neg, 나$ 이다.



[답] ①

016

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $P = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로
 $P^c = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$

명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P^c \subset Q$ 이어야 한다.
 즉, 집합 Q 는 전체집합 U 의 부분집합 중에서 3, 5, 6, 7, 9, 10을 반드시 원소로 갖는 집합이어야 하므로 집합 Q 의 개수는
 $2^{10-6} = 2^4 = 16$

답 16

017

명제 ' $x = -2$ 이면 $x^2 = a$ 이다.'가 참이 되려면 $x = -2$ 가 방정식
 $x^2 = a$ 의 근이어야 한다.
 $\therefore a = (-2)^2 = 4$

답 4

018

명제 ' $x = k$ 이면 $x^2 - 6x - 16 = 0$ 이다.'가 참이 되려면 $x = k$ 가 방
 정식 $x^2 - 6x - 16 = 0$ 의 근이어야 한다. ①
 즉, $k^2 - 6k - 16 = 0$ 이므로
 $(k+2)(k-8) = 0 \quad \therefore k = -2$ 또는 $k = 8$
 이때 k 는 양수이므로 $k = 8$ ②

답 8

채점 기준	비율
① 주어진 명제가 참이 되기 위한 조건을 구할 수 있다.	40%
② 양수 k 의 값을 구할 수 있다.	60%

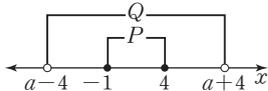
019

명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓이므로 $P \not\subset Q$
 즉, $3 \notin Q$ 이므로 $a \neq 3$
 명제 $q \rightarrow r$ 가 참이므로 $Q \subset R$
 즉, $5 \in R$ 이므로 $b = 5$
 또, $a \in R$ 이고 $a \neq 3$, $a \neq b$ 이므로 $a = 7$
 $\therefore a - b = 7 - 5 = 2$

답 4

020

$P = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$, $Q = \{x | a-4 < x < a+4\}$ 라고 하자.
 이때 명제 ' $-1 \leq x \leq 4$ 이면 $a-4 < x < a+4$ 이다.'가 참이 되려면
 $P \subset Q$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서
 $a-4 < -1$, $a+4 > 4$
 $a < 3$, $a > 0$
 $\therefore 0 < a < 3$

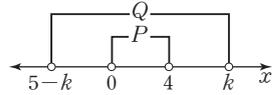


답 $0 < a < 3$

021

$|x-2| < 2$ 에서 $-2 < x-2 < 2$
 $\therefore 0 < x < 4$
 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면
 $P = \{x | 0 < x < 4\}$, $Q = \{x | 5-k < x < k\}$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$
 이어야 하므로 오른쪽 그림에서
 $5-k \leq 0$, $k \geq 4$
 $k \geq 5$, $k \geq 4 \quad \therefore k \geq 5$
 따라서 실수 k 의 최솟값은 5이다.



답 2

022

- ① $x = 2$ 일 때 $x^2 - 2x = 2^2 - 2 \times 2 = 0$ 이므로 참이다.
 - ② [반례] $x = 1$ 이면 $\sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$ 은 유리수이다.
 - ③ $x = 1$ 이면 $x^2 = 1^2 = 1$ 이므로 $x^2 \leq x$ 이다.
 즉, 주어진 명제는 참이다.
 - ④ $6 \times 1 = 6$, $6 \times 2 = 12$, $6 \times 3 = 18$, $6 \times 4 = 24$, $6 \times 5 = 30$ 이므로
 모든 x 에 대하여 $6x \leq 30$ 이다.
 즉, 주어진 명제는 참이다.
 - ⑤ $x = 5$ 이면 $x^2 = 5^2 = 25 > 20$ 이므로 참이다.
- 따라서 거짓인 명제는 ②이다.

답 2

참고

- (1) 모든 x 에 대하여 p 이다.
 → 전체집합의 모든 원소 x 가 p 를 만족시키면 참이다.
 → 전체집합의 원소 중에서 p 를 만족시키지 않는 x 가 하나라도 존재하면 거짓이다.
- (2) 어떤 x 에 대하여 p 이다.
 → 전체집합의 원소 중에서 p 를 만족시키는 원소 x 가 하나라도 존재하면 참이다.
 → 전체집합의 원소 중에서 p 를 만족시키는 원소 x 가 하나도 존재하지 않으면 거짓이다.

023

주어진 명제가 거짓이려면 주어진 명제의 부정
 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 8x + 2k - 1 > 0$ 이다.'
 가 참이어야 한다.
 즉, 이차방정식 $x^2 + 8x + 2k - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라고 할 때,
 $D < 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4} = 4^2 - (2k-1) < 0$ 에서 $k > \frac{17}{2}$
 따라서 정수 k 의 최솟값은 9이다.

답 9

풍샘 개념 CHECK

이차부등식이 항상 성립할 조건 高 公 通 数 学 1

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 $D = b^2 - 4ac$ 라고 할 때

- (1) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + bx + c > 0$ 이 성립하려면
 $a > 0$, $D < 0$
- (2) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 이 성립하려면
 $a > 0$, $D \leq 0$
- (3) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + bx + c < 0$ 이 성립하려면
 $a < 0$, $D < 0$
- (4) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 이 성립하려면
 $a < 0$, $D \leq 0$

024

명제 $p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이므로 주어진 명제의 대우는 'x≠0이고 y≠0이면 xy≠0이다.'

답 ④

025

주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

주어진 명제의 대우는

'x=3이면 x²-ax+9=0이다.'

이 명제가 참이므로 x=3은 방정식 x²-ax+9=0의 근이다.

즉, 3²-3a+9=0이므로 3a=18 ∴ a=6

답 ②

026

각 명제의 역을 구하여 그 참, 거짓을 판별하면 다음과 같다.

ㄱ. x=2이면 x³=8이다. (참)

ㄴ. x²+y²=0이면 x=0, y=0이다. (참)

ㄷ. x가 무리수이면 x는 무한소수이다. (참)

ㄹ. x>0이면 x>2이다. (거짓) → 무리수는 순환하지 않는 무한소수이다.

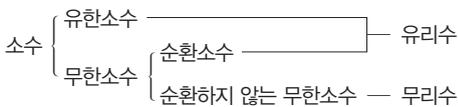
[반례] x=1이면 x>0이지만 x<2이다.

따라서 역이 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

풍뎡 개념 CHECK

소수의 분류 中 수학 3



027

주어진 명제가 참이므로 그 대우

'x≤a이고 y≤5이면 x+y≤9이다.'

..... ㉠

도 참이다. 조건p 조건q

x≤a, y≤5이면 x+y≤a+5이므로 ㉠이 참이 되려면

a+5≤9 ∴ a≤4 조건p p→q

따라서 실수 a의 최댓값은 4이다.

p→q이므로 a+5≤9이다.

답 4

028

주어진 명제가 참이므로 그 대우

'|x-2|<1이면 |x-k|<5이다.'

도 참이다.

이때 p: |x-2|<1, q: |x-k|<5라 하고, 두 조건 p, q의 진리 집합을 각각 P, Q라고 하면 명제 p→q가 참이므로 P⊂Q이어야 한다. ①

|x-2|<1에서 -1<x-2<1

∴ 1<x<3

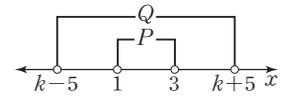
|x-k|<5에서 -5<x-k<5

∴ k-5<x<k+5

즉, P={x|1<x<3},

Q={x|k-5<x<k+5}이고

P⊂Q이므로 오른쪽 그림에서



k-5≤1, k+5≥3

k≤6, k≥-2 ∴ -2≤k≤6 ②

따라서 정수 k는 -2, -1, 0, 1, ..., 6의 9개이다. ③

답 9

채점 기준	비율
① 주어진 명제의 대우를 구하고 그 대우가 참이 되기 위한 조건을 구할 수 있다.	30%
② k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
③ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20%

029

두 명제 p→~r, q→r가 참이므로 그 대우 r→~p, ~r→~q도 참이다.

이때 두 명제 p→~r, ~r→~q가 모두 참이므로

p→~q도 참이고, 두 명제 q→r, r→~p가 모두 참이므로 q→~p도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

030

명제 p→~q가 참일 때 명제 p→~r가 참이 되려면 명제 ~q→~r도 참이어야 한다.

또, 명제 ~q→~r가 참이면 그 대우 r→q도 참이므로 (ㄱ)에 들어갈 수 있는 명제는 ④이다.

답 ④

031

세 조건 p, q, r를

p: 노래를 좋아한다.

q: 영화를 좋아한다.

r: 자연을 좋아한다.

라고 하면 명제 (ㄱ), (ㄴ)는 각각

p→q, ~p→~r

이다.

이때 각 보기의 문장을 조건 p, q, r를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

① p→r ② q→r ③ r→q

④ ~p→~q ⑤ ~r→~p

두 명제 p→q, ~p→~r가 모두 참이므로 그 대우

~q→~p, r→p도 참이다.

또, r→p, p→q가 참이므로 r→q와 그 대우

~q→~r도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

답 ③

참고

031과 같이 문장으로 주어진 명제는 주어진 문장에서 조건 p, q 를 찾아 $p \rightarrow q$ 의 꼴로 나타낸 후 명제가 참일 때 그 대우도 참임과 삼단논법을 이용하면 참인 명제를 쉽게 찾을 수 있다.

032

네 조건 p, q, r, s 를
 p : 10대, 20대에게 선호도가 높다.
 q : 판매량이 많다.
 r : 가격이 싸다.
 s : 기능이 많다.

라고 하면 명제 (㉠), (㉡), (㉢)는 각각

$p \rightarrow q, r \rightarrow q, s \rightarrow p$

이다.

이때 각 보기의 문장을 조건 p, q, r, s 를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

- ① $s \rightarrow \sim r$ ② $\sim r \rightarrow \sim q$ ③ $\sim q \rightarrow \sim s$
- ④ $p \rightarrow s$ ⑤ $p \rightarrow \sim r$

세 명제 $p \rightarrow q, r \rightarrow q, s \rightarrow p$ 가 모두 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p, \sim q \rightarrow \sim r, \sim p \rightarrow \sim s$ 도 참이다.
또, 두 명제 $s \rightarrow p, p \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 $s \rightarrow q$ 와 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim s$ 도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

답 ③

033

- (1) $p \rightarrow q: |x| < 1$, 즉 $-1 < x < 1$ 이면 $x < 1$ (참)
 $q \rightarrow p$: [반례] $x = -2$ 이면 $x < 1$ 이지만 $|x| > 1$
따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
- (2) $p \rightarrow q$: [반례] $x = -2, y = -1$ 이면 $x^2 > y^2$ 이지만 $x < y < 0$
 $q \rightarrow p$: $x > y > 0$ 이면 $x^2 > y^2$ (참)
따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- (3) $p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow p$, 즉 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) 충분조건 (2) 필요조건 (3) 필요충분조건

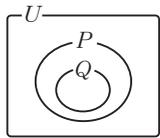
034

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로
 $p \Rightarrow q \quad \therefore P \subset Q$ ㉠
 q 는 r 이기 위한 충분조건이므로
 $q \Rightarrow r \quad \therefore Q \subset R$ ㉡
㉠, ㉡에서 $P \subset Q \subset R$

답 ①

035

p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니므로 $Q \subset P, P \neq Q$
③ $P - Q \neq \emptyset$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.



답 ③

036

$$\begin{aligned}
 A \cap (B - A)^c &= A \cap (B \cap A^c)^c \\
 &= A \cap (B^c \cup A) \\
 &= (A \cap B^c) \cup (A \cap A) \\
 &= (A - B) \cup A \\
 &= A \quad (\because (A - B) \subset A)
 \end{aligned}$$

따라서 $A \cap (B - A)^c = A \cap B$, 즉 $A = A \cap B$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 $A \subset B$ 이다.

답 ①

037

p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로
 $p \Rightarrow \sim q$
 q 는 r 이기 위한 필요조건이므로
 $r \Rightarrow q$
각 명제가 참이면 그 대우도 참이므로
 $q \Rightarrow \sim p, \sim q \Rightarrow \sim r$
 $p \Rightarrow \sim q, \sim q \Rightarrow \sim r$ 이므로
 $p \Rightarrow \sim r$
 $r \Rightarrow q, q \Rightarrow \sim p$ 이므로
 $r \Rightarrow \sim p$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

038

p 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이므로
 $p \Rightarrow \sim r$
 p 는 q 이기 위한 필요조건이므로
 $q \Rightarrow p$
즉, $q \Rightarrow p, p \Rightarrow \sim r$ 이므로
 $q \Rightarrow \sim r$
또, 각 명제가 참이면 그 대우도 참이므로
 $r \Rightarrow \sim p, \sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow \sim q$
따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

039

p 는 r 이기 위한 필요조건이므로
 $r \Rightarrow p$
 q 는 r 이기 위한 충분조건이므로
 $q \Rightarrow r$
즉, $q \Rightarrow r, r \Rightarrow p$ 이므로
 $q \Rightarrow p$
또, 각 명제가 참이면 그 대우도 참이므로
 $\sim p \Rightarrow \sim r, \sim r \Rightarrow \sim q, \sim p \Rightarrow \sim q$
따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

040

$x = -1$ 이 $x^2 + ax + b = 0$ 이기 위한 필요충분조건이라면 $x = -1$ 은 방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 중근이어야 한다.

즉, $(x+1)^2 = x^2 + ax + b$ 이므로
 $x^2 + 2x + 1 = x^2 + ax + b$
 따라서 $a=2, b=1$ 이므로
 $ab=2 \times 1=2$

답 2

041

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로
 $p \Rightarrow q$
 이때 그 대우도 참이므로
 $\sim q \Rightarrow \sim p$
 즉, $x = -4$ 이면 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이므로
 $(-4)^2 - a \times (-4) + 4 = 0$
 $4a = -20 \quad \therefore a = -5$

답 ①

042

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면 p 가 q 이기 위한 필요조건이므로
 $Q \subset P$
 $P = \{x | -1 \leq x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 7\}, Q = \{x | x \geq k\}$ 이므로 다음 그림에서



$k \geq 7$
 따라서 실수 k 의 최솟값은 7이다.

답 ④

043

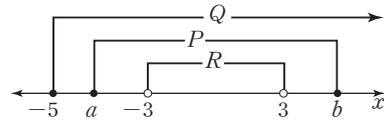
두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면 p 가 q 이기 위한 충분조건이므로
 $P \subset Q$
 $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ 에서 $(x-3)^2 \leq 0 \quad \therefore x=3$
 $|x-a| \leq 2$ 에서 $-2 \leq x-a \leq 2$
 $\therefore a-2 \leq x \leq a+2$
 즉, $P = \{3\}, Q = \{x | a-2 \leq x \leq a+2\}$ 이므로
 $a-2 \leq 3 \leq a+2$
 $a-2 \leq 3$ 에서 $a \leq 5$ ㉠
 $3 \leq a+2$ 에서 $a \geq 1$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 $1 \leq a \leq 5$
 따라서 실수 a 의 최댓값은 5, 최솟값은 1이므로 구하는 합은
 $5+1=6$

답 ①

044

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라고 하면 p 가 q 이기 위한 충분조건이고 r 이기 위한 필요조건이므로
 $P \subset Q, R \subset P$
 $\therefore R \subset P \subset Q$ ①

$P = \{x | a \leq x \leq b\}, Q = \{x | x \geq -5\}, R = \{x | -3 < x < 3\}$ 이므로 다음 그림에서



$-5 \leq a \leq -3, b \geq 3$ ②
 따라서 a 의 최댓값은 $-3, b$ 의 최솟값은 3이므로 구하는 합은
 $-3+3=0$ ③

답 0

채점 기준	비율
① 세 조건 p, q, r 의 진리집합 사이의 포함 관계를 구할 수 있다.	40%
② a, b 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20%

045

(1) 주어진 명제의 대우는
 'n이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다.'
 (2) n 이 3의 배수가 아니므로
 $n = 3k - 1$ 또는 $n = 3k - 2$ (k 는 자연수)
 로 나타낼 수 있다.
 (i) $n = 3k - 1$ 일 때
 $n^2 = (3k - 1)^2 = 9k^2 - 6k + 1 = 3(3k^2 - 2k) + 1$
 즉, n^2 은 3의 배수가 아니다.
 (ii) $n = 3k - 2$ 일 때
 $n^2 = (3k - 2)^2 = 9k^2 - 12k + 4 = 3(3k^2 - 4k + 1) + 1$
 즉, n^2 은 3의 배수가 아니다.
 (i), (ii)에서 n^2 은 3의 배수가 아니다.
 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

046

$\sqrt{2}$ 를 ^(가) 유리수 라고 가정하면
 $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 자연수) ㉠
 으로 놓을 수 있다.
 ㉠의 양변을 제곱하면
 $2 = \frac{n^2}{m^2} \quad \therefore n^2 = 2m^2$ ㉡
 이때 n^2 이 ^(나) 짝수 이므로 n 도 ^(나) 짝수 이다.
 \hookrightarrow (^(가) 짝수)² = (^(나) 짝수)², (^(홀수) 홀수)² = (^(홀수) 홀수)이므로 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.
 $n = 2k$ (k 는 자연수)로 놓고 ㉡에 대입하면
 $4k^2 = 2m^2 \quad \therefore m^2 = 2k^2$
 이때 m^2 이 ^(나) 짝수 이므로 m 도 ^(나) 짝수 이다.
 즉, m, n 이 모두 ^(나) 짝수 이므로 m, n 이 ^(다) 서로소 라는 가정에 모순이다.
 따라서 $\sqrt{2}$ 는 무리수이다.
 \therefore (가): 유리수, (나): 짝수, (다): 서로소

답 (가): 유리수 (나): 짝수 (다): 서로소

047

주어진 명제의 결론을 부정하여 a, b, c 가 모두 $(가) 홀수$ 라고 가정하면 홀수의 제곱은 홀수이므로 a^2, b^2, c^2 도 모두 $(가) 홀수$ 이다.
 이때 $(홀수) + (홀수) = (짝수)$ 이므로 $a^2 + b^2$ 은 $(나) 짝수$ 이고, c^2 은 $(가) 홀수$ 이므로 $a^2 + b^2 \neq c^2$ 이 되어 모순이다.
 따라서 $a^2 + b^2 = c^2$ 이면 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수이다.
 $\therefore (가): 홀수, (나): 짝수, (다): 홀수$

답 ③

048

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$
 $= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2)$
 $= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$
 $= ((가) ay - bx)^2 \geq 0$
 $\therefore (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
 이때 등호는 $ay - bx = 0$, 즉 $(나) ay = bx$ 일 때 성립한다.
 $\therefore (가): ay - bx, (나): ay = bx$

답 (가): $ay - bx$ (나): $ay = bx$

049

$|a| + |b| \geq 0, |a - b| \geq 0$ 이므로
 $(가) (|a| + |b|)^2 \geq |a - b|^2$
 이 성립함을 증명하면 된다.
 이때
 $(|a| + |b|)^2 - |a - b|^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a - b)^2$
 $= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$
 $= (나) 2(|ab| + ab) \geq 0$
 $\hookrightarrow |ab| \geq -ab$ 이므로 $2(|ab| + ab) \geq 0$
 이므로
 $(|a| + |b|)^2 \geq |a - b|^2$
 $\therefore |a| + |b| \geq |a - b|$
 여기서 등호는 $|ab| = -ab$, 즉 $(다) ab \leq 0$ 일 때 성립한다.
 $\therefore (가): (|a| + |b|)^2 \geq |a - b|^2, (나): 2(|ab| + ab), (다): ab \leq 0$
 답 (가): $(|a| + |b|)^2 \geq |a - b|^2$ (나): $2(|ab| + ab)$ (다): $ab \leq 0$

050

$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$
 $= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
 $= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$
 $= \frac{1}{2}\{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\}$
 $= \frac{1}{2}\{(가) (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$
 이때 $(a - b)^2 \geq 0, (나) (b - c)^2 \geq 0, (c - a)^2 \geq 0$ 이므로
 $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
 여기서 등호는 $a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$, 즉 $(다) a = b = c$ 일 때 성립한다.
 $\therefore (가): (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2, (나): b - c, (다): a = b = c$
 답 (가): $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ (나): $b - c$ (다): $a = b = c$

050 정답과 풀이

051

$x > 0, \frac{9}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{9}{x}} = 2 \times 3 = 6$ (단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립한다.)
 $\hookrightarrow x = \frac{9}{x}$ 에서 $x^2 = 9$
 $\therefore x = 3 (\because x > 0)$
 따라서 $x + \frac{9}{x}$ 의 최솟값은 6이다.
 답 ①

052

$4a > 0, 5b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $4a + 5b \geq 2\sqrt{4a \times 5b} = 2\sqrt{20ab}$
 $= 2 \times 20 = 40 (\because ab = 20)$
 이때 등호는 $4a = 5b$ 일 때 성립한다.
 따라서 $4a + 5b$ 의 최솟값은 40이다.
 답 40

참고

$4a + 5b \geq 2\sqrt{20ab}$ 에서 등호는 $4a = 5b$ 일 때 성립한다.
 이때 $ab = 20$ 이므로 등호는 $a = 5, b = 4$ 일 때 성립한다.

053

$3x > 0, 2y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $3x + 2y \geq 2\sqrt{3x \times 2y}$
 $= 2\sqrt{6xy}$ (단, 등호는 $3x = 2y$ 일 때 성립한다.) ①
 이때 $3x + 2y = 18$ 이므로
 $2\sqrt{6xy} \leq 18, \sqrt{6xy} \leq 9$
 양변을 제곱하면 $6xy \leq 81$
 $\therefore xy \leq \frac{27}{2}$ ②
 따라서 xy 의 최댓값은 $\frac{27}{2}$ 이다. ③
 답 $\frac{27}{2}$

채점 기준	비율
① 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 부등식을 세울 수 있다.	40%
② xy 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ xy 의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

참고

$3x + 2y \geq 2\sqrt{6xy}$ 에서 등호는 $3x = 2y$ 일 때 성립한다.
 이때 $3x + 2y = 18$ 이므로 등호는 $x = 3, y = \frac{9}{2}$ 일 때 성립한다.

054

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $2x + 5y + \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 2x + \frac{2}{x} + 5y + \frac{5}{y}$
 $\geq 2\sqrt{2x \times \frac{2}{x}} + 2\sqrt{5y \times \frac{5}{y}}$
 $= 2 \times 2 + 2 \times 5 = 14$
 (단, 등호는 $x = 1, y = 1$ 일 때 성립한다.)
 따라서 $2x + 5y + \frac{2}{x} + \frac{5}{y}$ 의 최솟값은 14이다.
 답 ⑤

055

$$(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=4+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}+1$$

$$=2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+5$$

이때 $\frac{a}{b}>0, \frac{b}{a}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+5 \geq 2 \times 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}}+5$$

$$=4+5=9$$

(단, 등호는 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$, 즉 $a=b$ 일 때 성립한다.)

따라서 $(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값은 9이다.

답 ③

056

$$(\sqrt{5x}+\sqrt{3y})^2=5x+2\sqrt{5x}\sqrt{3y}+3y$$

$$=5x+3y+2\sqrt{5x \times 3y}$$

$$=15+2\sqrt{5x \times 3y} \quad (\because 5x+3y=15) \quad \text{----- ①}$$

$5x>0, 3y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5x+3y \geq 2\sqrt{5x \times 3y} \quad (\text{단, 등호는 } 5x=3y \text{일 때 성립한다.})$$

이때 $5x+3y=15$ 이므로

$$2\sqrt{5x \times 3y} \leq 15$$

따라서 ①에서

$$(\sqrt{5x}+\sqrt{3y})^2=15+2\sqrt{5x \times 3y}$$

$$\leq 15+15=30$$

(단, 등호는 $x=\frac{3}{2}, y=\frac{5}{2}$ 일 때 성립한다.)

$$\therefore 0 \leq \sqrt{5x}+\sqrt{3y} \leq \sqrt{30}$$

즉, 구하는 최댓값은 $\sqrt{30}$ 이다.

답 ③

057

오른쪽 그림과 같이 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 a, b 라 하고 높이를 4라고 하면 부피가 96이므로

$$4ab=96 \quad \therefore ab=24$$

이 직육면체의 대각선의 길이를 l 이라고 하면

$$l=\sqrt{a^2+b^2+4^2} \quad \therefore l^2=a^2+b^2+16$$

이때 $a^2>0, b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2+b^2+16 \geq 2\sqrt{a^2 \times b^2}+16$$

$$=2ab+16 \quad (\because a>0, b>0)$$

$$=2 \times 24+16=64 \quad (\because ab=24)$$

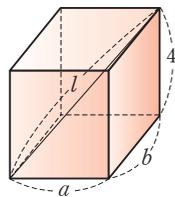
(단, 등호는 $a=b=2\sqrt{6}$ 일 때 성립한다.)

따라서 $l=\sqrt{a^2+b^2+16} \geq \sqrt{64}=8$ 이므로 구하는 대각선의 길이의 최솟값은 8이다.

답 8

참고

산술평균과 기하평균의 관계를 도형에 활용할 때에는 변하는 값을 각각 a, b 로 놓고 주어진 값 또는 구하는 값을 $a+b, ab$ 로 나타낸다. 이때 a, b 가 양수 조건을 만족하는지 확인한다.



058

직선 OP의 기울기는 $\frac{b}{a}$ 이므로 점 P(a, b)를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$$y-b=-\frac{a}{b}(x-a) \quad \therefore y=-\frac{a}{b}x+b+\frac{a^2}{b}$$

$$\therefore Q\left(0, b+\frac{a^2}{b}\right)$$

삼각형 OQR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{a} \times \left(b+\frac{a^2}{b}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

$a>0, b>0$ 에서 $\frac{b}{a}>0, \frac{a}{b}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) \geq \frac{1}{2} \times 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}}$$

$$=1 \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립한다.})$$

따라서 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 1이다.

답 ②

059

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(4^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (4x+3y)^2$$

(단, 등호는 $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}$ 일 때 성립한다.)

이때 $4x+3y=10$ 이므로

$$25(x^2+y^2) \geq 10^2 \quad \therefore x^2+y^2 \geq 4$$

따라서 x^2+y^2 의 최솟값은 4이다.

답 ④

060

$$x^2+y^2=4 \text{이므로}$$

$$x^2+4x+y^2+2y=4x+2y+4 \quad \text{----- ①}$$

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(4^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (4x+2y)^2$$

$$(4x+2y)^2 \leq (4^2+2^2)(x^2+y^2)$$

$$=20 \times 4=80 \quad (\because x^2+y^2=4)$$

(단, 등호는 $\frac{x}{4}=\frac{y}{2}$ 일 때 성립한다.)

$$\therefore -4\sqrt{5} \leq 4x+2y \leq 4\sqrt{5}$$

이때 $4-4\sqrt{5} \leq 4x+2y+4 \leq 4+4\sqrt{5}$ 이므로 ①에 의하여

$$4-4\sqrt{5} \leq x^2+4x+y^2+2y \leq 4+4\sqrt{5}$$

따라서 x^2+4x+y^2+2y 의 최댓값은 $4+4\sqrt{5}$, 최솟값은 $4-4\sqrt{5}$ 이므로 구하는 곱은

$$(4+4\sqrt{5})(4-4\sqrt{5})=4^2-(4\sqrt{5})^2=16-80=-64$$

답 ②

061

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2 \quad (\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{2} \text{일 때 성립한다.})$$

①

$$x^2+y^2=a \text{이므로}$$

$$(x+2y)^2 \leq (1^2+2^2)(x^2+y^2)=5a$$

∴ $-\sqrt{5a} \leq x+2y \leq \sqrt{5a}$ ②
 따라서 $x+2y$ 의 최댓값은 $\sqrt{5a}$, 최솟값은 $-\sqrt{5a}$ 이고 최댓값과 최솟값의 차가 10이므로
 $\sqrt{5a} - (-\sqrt{5a}) = 10, 2\sqrt{5a} = 10, \sqrt{5a} = 5$
 양변을 제곱하면
 $5a = 25 \quad \therefore a = 5$ ③

답 5

채점 기준	비율
① 코시-슈바르츠 부등식을 이용하여 부등식을 세울 수 있다.	30%
② $x+2y$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	40%

062

x, y, z 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여
 $(2^2+3^2+5^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (2x+3y+5z)^2$
 (단, 등호는 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ 일 때 성립한다.)
 이때 $x^2+y^2+z^2=38$ 이므로
 $(2x+3y+5z)^2 \leq (2^2+3^2+5^2)(x^2+y^2+z^2)$
 $= 38 \times 38 = 38^2$
 ∴ $-38 \leq 2x+3y+5z \leq 38$
 따라서 $M=38, m=-38$ 이므로
 $M-m=38-(-38)=76$

답 ③

실력을 높이는 연습 문제

본문 095쪽

01

- x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 조건이다. 즉, 명제가 아니다.
 - 오각형의 대각선의 개수는 $\frac{5 \times (5-3)}{2} = 5$ 이므로 참인 명제이다.
 - 2는 짝수이지만 소수이다. 즉, 거짓인 명제이다.
 - 직사각형의 두 대변은 각각 평행하므로 평행사변형이다. 즉, 참인 명제이다.
 - 참인 명제이다.
- 따라서 명제가 아닌 것은 ①이다.

답 ①

공백 개념 CHECK

- n 각형의 대각선의 개수_중 수학 1
 $\frac{n(n-3)}{2}$
- 여러 가지 사각형의 대각선의 성질_중 수학 2
 - 평행사변형: 두 대각선이 서로를 이등분한다.
 - 직사각형: 두 대각선의 길이가 같고 서로를 이등분한다.
 - 마름모: 두 대각선이 서로를 수직이등분한다.
 - 정사각형: 두 대각선의 길이가 같고 서로를 수직이등분한다.
 - 등변사다리꼴: 두 대각선의 길이가 같다.

02

조건 ' $x \in A$ 또는 $x \in B$ '의 부정은
 $x \notin A$ 그리고 $x \notin B$

답 ③

03

문제 접근하기

실수 x, y, z 에 대하여 $xyz=0$ 이면 $x=0$ 또는 $y=0$ 또는 $z=0$ 임을 이용하여 주어진 조건을 변형한 후 그 부정을 구한다.

$(a-b)(b-c)(c-a)=0$ 이면
 $a-b=0$ 또는 $b-c=0$ 또는 $c-a=0$
 ∴ $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$
 따라서 주어진 조건의 부정은
 $a \neq b$ 이고 $b \neq c$ 이고 $c \neq a$

답 $a \neq b$ 이고 $b \neq c$ 이고 $c \neq a$

04

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면
 $P = \{1, 2, 3, 4, 6\}, Q = \{1, 2, 3, 6, 9\}$
 이므로 조건 ' p 그리고 q '의 진리집합은
 $P \cap Q = \{1, 2, 3, 6\}$
 → 12와 18의 공약수, 즉 6의 약수의 집합이다. 답 $\{1, 2, 3, 6\}$

05

조건 ' $\sim(p$ 또는 $\sim q)$ '는 $\sim p$ 그리고 q
 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면
 조건 $\sim p: x \leq 10$ 의 진리집합은 $P^c = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$
 조건 q 의 진리집합은 $Q = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
 따라서 조건 ' $\sim(p$ 또는 $\sim q)$ '의 진리집합은
 $P^c \cap Q = \{4, 8\}$
 이므로 구하는 모든 원소의 합은
 $4+8=12$

답 ②

06

명제 ' p 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P 에는 속하고 Q^c 에는 속하지 않으므로 구하는 집합은
 $P \cap (Q^c)^c = P \cap Q$

답 ①

07

- $P \not\subset Q$ 이므로 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.
 - $Q \not\subset R$ 이므로 $q \rightarrow r$ 는 거짓이다.
 - $R \not\subset P^c$ 이므로 $r \rightarrow \sim p$ 는 거짓이다.
 - $Q \not\subset (P \cup R)$ 이므로 $q \rightarrow (p$ 또는 $r)$ 는 거짓이다.
 - $(P \cap R) \subset Q$ 이므로 $(p$ 이고 $r) \rightarrow q$ 는 참이다.
- 따라서 항상 참인 명제는 ⑤이다.

답 ⑤

08

$P \cap Q = Q$ 이므로 $Q \subset P$ ㉠
 $P - R = \emptyset$ 이므로 $P \subset R$ ㉡

㉠, ㉡에서 $Q \subset P \subset R$
 따라서 $q \rightarrow p, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ 가 참이고 그 대우
 $\sim p \rightarrow \sim q, \sim r \rightarrow \sim p, \sim r \rightarrow \sim q$ 도 참이므로 항상 참인
 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

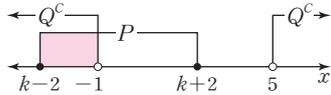
09

문제 접근하기

명제 $p \rightarrow q$ 와 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 모두 거짓이 되려면 $P \not\subset Q$,
 $P \not\subset Q^c$ 이어야 하므로 P, Q, Q^c 을 구하여 조건을 만족시키도록 P 와
 Q^c 을 수직선 위에 나타낸다.

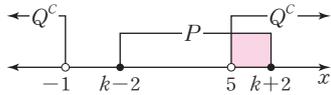
$|x - k| \leq 2$ 에서 $-2 \leq x - k \leq 2$
 $\therefore k - 2 \leq x \leq k + 2$
 $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ 에서 $(x + 1)(x - 5) \leq 0$
 $\therefore -1 \leq x \leq 5$
 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면
 $P = \{x \mid k - 2 \leq x \leq k + 2\}$
 $Q = \{x \mid -1 \leq x \leq 5\}$
 $Q^c = \{x \mid x < -1 \text{ 또는 } x > 5\}$
 명제 $p \rightarrow q$ 와 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 모두 거짓이므로
 $P \not\subset Q$ 이고 $P \not\subset Q^c$
 이때 $k - 2 \geq -1$ 이고 $k + 2 \leq 5$, 즉 $1 \leq k \leq 3$ 이면 $P \subset Q$ 이므로
 $P \not\subset Q$ 이려면 $k < 1$ 또는 $k > 3$ 이어야 한다.

(i) $k < 1$ 일 때
 $P \not\subset Q^c$ 을 만족시키는 두 집합 P, Q^c 을 수직선 위에 나타내면
 다음 그림과 같다.



즉, $k + 2 \geq -1$ 이어야 하므로 $k \geq -3$
 이때 $k < 1$ 이므로 $-3 \leq k < 1$

(ii) $k > 3$ 일 때
 $P \not\subset Q^c$ 을 만족시키는 두 집합 P, Q^c 을 수직선 위에 나타내면
 다음 그림과 같다.



즉, $k - 2 \leq 5$ 이어야 하므로 $k \leq 7$
 이때 $k > 3$ 이므로 $3 < k \leq 7$

(i), (ii)에서 $-3 \leq k < 1$ 또는 $3 < k \leq 7$
 따라서 구하는 모든 정수 k 의 값의 합은
 $-3 + (-2) + (-1) + 0 + 4 + 5 + 6 + 7 = 16$

답 ㉡

10

① [반례] $x=1$ 이면 $3x=3$

- ② 전체집합 U 의 모든 원소 x 에 대하여 $x^2 > 0$ (거짓)
 - ③ [반례] $x=10$ 이면 $4x^2=400 > 200$
 - ④ $x=1, 2, 4, 5, 10$ 은 20의 약수이다. (참)
 - ⑤ [반례] $x=1$ 이면 $x = \frac{1}{x}$
- 따라서 참인 명제는 ④이다.

답 ④

11

$f(x) = x^2 - 8x + n$ 이라고 하면
 $f(x) = x^2 - 8x + n = (x - 4)^2 + n - 16$
 함수 $f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(4, n - 16)$ 이므로
 $2 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값 $n - 12$ 를 갖는다.
 이때 주어진 명제가 참이 되려면 $2 \leq x \leq 5$ 에서 $f(x) \geq 0$ 인 실수 x
 가 적어도 하나 존재해야 하므로 최댓값이 0 이상이어야 한다.
 $f(2) = n - 12 \geq 0 \therefore n \geq 12$
 따라서 자연수 n 의 최솟값은 12이다.

답 ①

참고

$2 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값 $n - 12$ 를 $x=4$ 일 때 최솟값
 $n - 16$ 을 갖는다.

12

- ㄱ. $x=y$ 이면 $x+z=y+z$ 이다. (참)
 역: $x+z=y+z$ 이면 $x=y$ 이다. (참)
 - ㄴ. $|x|=1$ 이면 $x=1$ 이다. (거짓)
 [반례] $x=-1$ 이면 $|x|=1$ 이지만 $x \neq 1$ 이다.
 역: $x=1$ 이면 $|x|=1$ 이다. (참)
 - ㄷ. $x=0$ 또는 $y=0$ 이면 $xy=0$ 이다. (참)
 역: $xy=0$ 이면 $x=0$ 또는 $y=0$ 이다. (참)
- 따라서 명제와 그 역이 모두 참인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

13

주어진 명제가 참이므로 그 대우
 ‘ $x - a = 0$ 이면 $x^2 - 3x - 10 = 0$ 이다.’
 도 참이다.
 즉, $x=a$ 가 방정식 $x^2 - 3x - 10 = 0$ 의 근이므로
 $a^2 - 3a - 10 = 0, (a + 2)(a - 5) = 0$
 $\therefore a = -2$ 또는 $a = 5$
 따라서 모든 상수 a 의 값의 합은
 $-2 + 5 = 3$

답 ①

14

각 명제의 대우를 구하여 그 참, 거짓을 판별하면 다음과 같다.
 ㄱ. $x \leq 3$ 이면 $x^2 \leq 9$ 이다. (거짓)
 [반례] $x = -4$ 이면 $x \leq 3$ 이지만 $x^2 > 9$ 이다.
 ㄴ. $x \leq 0$ 또는 $y \leq 2$ 이면 $x + y \leq 2$ 이다. (거짓)
 [반례] $x = -1, y = 4$ 이면 $x \leq 0$ 또는 $y \leq 2$ 를 만족시키지만
 $x + y > 2$ 이다.

ㄷ. $x \neq -1$ 이고 $y \neq 2$ 이면 $(x+1)(y-2) \neq 0$ 이다. (참)
따라서 대우가 참인 것은 ㄷ이다.

답 ③

|다른 풀이|

대우가 참이면 그 명제도 참이므로 명제가 참인 것을 찾는다.
ㄱ. [반례] $x = -4$ 이면 $x^2 > 9$ 이지만 $x < 3$ 이다.
ㄴ. [반례] $x = -1, y = 4$ 이면 $x + y > 2$ 이지만 $x < 0$ 이다.
ㄷ. 참인 명제이다.

15

명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 의 역 $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참이므로 그 대우 $p \rightarrow q$ 도 참이다.
즉, $P \subset Q$ 이므로
 $P - Q = \emptyset, P \cap Q = P, Q^c \subset P^c$
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

16

두 명제 $p \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow r$ 가 모두 참이므로 그 대우 $q \rightarrow \sim p, \sim r \rightarrow p$ 도 참이다.
두 명제 $q \rightarrow \sim p, \sim p \rightarrow r$ 가 모두 참이므로 $q \rightarrow r$ 와 그 대우 $\sim r \rightarrow \sim q$ 도 참이다.
따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

17

문제 접근하기

세 사람 중에서 한 사람의 말만이 참이므로 현진, 영수, 진희가 각각 참 말을 했을 경우로 나누어 p 가 참이면 $\sim p$ 는 거짓이고, p 가 거짓이면 $\sim p$ 는 참이 됨을 이용하여 항상 참인 문장을 찾는다.

- (i) 현진의 말만 참인 경우
영수와 진희의 말은 거짓이므로 다음은 참이다.
영수는 등산을 갔었다.
진희는 등산을 가지 않았다.
 - (ii) 영수의 말만 참인 경우
현진과 진희의 말은 거짓이므로 다음은 참이다.
영수는 등산을 가지 않았다.
진희는 등산을 가지 않았다.
 - (iii) 진희의 말만 참인 경우
현진과 영수의 말은 거짓이므로 다음은 참이다.
영수는 등산을 가지 않았다.
영수는 등산을 갔었다.
그런데 위의 두 문장은 서로 모순이므로 진희의 말은 참이 될 수 없다.
- (i)~(iii)에서 참인 말을 한 사람은 현진 또는 영수이고, 이때 항상 참인 문장은
'진희는 등산을 가지 않았다.'
이다.

답 ⑤

18

- ① $p \rightarrow q: xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0, y \neq 0$ 이므로 $x^2 + y^2 \neq 0$ (참)
 $q \rightarrow p$: [반례] $x = 0, y = 1$ 이면 $x^2 + y^2 \neq 0$ 이지만 $xy = 0$
따라서 $p \rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ② $p \rightarrow q$ 이고 $q \rightarrow p$, 즉 $p \leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ③ $p \rightarrow q$: [반례] $x = -2, y = -1$ 이면 $x^2 + y^2 > 0$ 이지만 $x < 0, y < 0$
 $q \rightarrow p$: $x > 0, y > 0$ 이면 $x^2 + y^2 > 0$ (참)
따라서 $q \rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ④ $p \rightarrow q: x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = 0, y = 0$ 이므로 $x + y = 0$ (참)
 $q \rightarrow p$: [반례] $x = -1, y = 1$ 이면 $x + y = 0$ 이지만 $x^2 + y^2 \neq 0$
따라서 $p \rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ⑤ $p \rightarrow q: x = y = 0$ 이면 $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ (참)
 $q \rightarrow p$: [반례] $x = y = 1$ 이면 $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ 이지만 $x \neq 0, y \neq 0$
따라서 $p \rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
따라서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 ②이다.

답 ②

19

문제 접근하기

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 로 놓으면 r 가 ' p 이고 q '이기 위한 충분조건이므로 $R \subset (P \cap Q)$ 이어야 함을 이용한다.

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라고 하자.

$$|x| \leq 7 \text{에서 } -7 \leq x \leq 7$$

$$|x - a| \leq 3 \text{에서 } -3 \leq x - a \leq 3$$

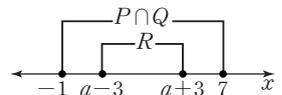
$$\therefore a - 3 \leq x \leq a + 3$$

$$\therefore P = \{x \mid -7 \leq x \leq 7\}, Q = \{x \mid x \geq -1\},$$

$$R = \{x \mid a - 3 \leq x \leq a + 3\}$$

r 가 ' p 이고 q '이기 위한 충분조건이므로
 $R \subset (P \cap Q)$

이때
 $P \cap Q = \{x \mid -1 \leq x \leq 7\}$
이므로 오른쪽 그림에서
 $a - 3 \geq -1, a + 3 \leq 7$
 $a \geq 2, a \leq 4$
 $\therefore 2 \leq a \leq 4$



따라서 a 의 최댓값은 4, 최솟값은 2이므로 구하는 합은
 $4 + 2 = 6$

답 6

20

주어진 명제의 대우는
' a, b 가 모두 $\boxed{(\text{가})}$ 홀수'이면 ab 는 $\boxed{(\text{나})}$ 홀수'이다.'
 a, b 가 모두 $\boxed{(\text{가})}$ 홀수'이므로
 $a = 2m - 1, b = 2n - 1$ (m, n 은 자연수)
로 나타낼 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned}
 ab &= (2m-1)(2n-1) \\
 &= 4mn - 2m - 2n + 1 \\
 &= 2(\overset{(\text{㉔})}{2mn - m - n}) + 1
 \end{aligned}$$

이므로 ab 는 $\boxed{\text{㉔}}$ 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

\therefore (가): 홀수, (나): 홀수, (다): $2mn - m - n$

$\boxed{\text{답}}$ (가): 홀수 (나): 홀수 (다): $2mn - m - n$

21

$a > b > 0$ 이므로

$X > 0, Y > 0$

$$\begin{aligned}
 \therefore X^2 - Y^2 &= (\sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \\
 &= a-b - (a-2\sqrt{ab}+b) \\
 &= 2\sqrt{ab} - 2b \quad \rightarrow \sqrt{b} > 0, \sqrt{a}-\sqrt{b} > 0 \\
 &= 2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) > 0
 \end{aligned}$$

즉, $X^2 > Y^2$ 이고 $X > 0, Y > 0$ 이므로

$X > Y$

$\boxed{\text{답}}$ ①

22

두 직선 $y=f(x), y=g(x)$ 의 기울기가 각각 $\frac{a}{2}, \frac{1}{b}$ 이고 두 직선이 서로 평행하므로

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{b} \quad \therefore ab = 2 \quad \dots\dots\dots \text{㉑}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (a+1)(b+2) &= ab + 2a + b + 2 \\
 &= 4 + 2a + b \quad (\because \text{㉑})
 \end{aligned}$$

이때 $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2a + b \geq 2\sqrt{2ab} = 4 \quad (\because \text{㉑})$$

(단, 등호는 $a=1, b=2$ 일 때 성립한다.)

등호는 $2a=b$ 일 때 성립하므로 ㉑에 대입하면 $a=1, b=2$ 이다.

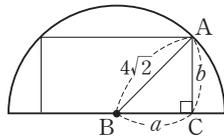
$$\begin{aligned}
 \therefore (a+1)(b+2) &= 4 + 2a + b \\
 &\geq 4 + 4 = 8
 \end{aligned}$$

따라서 $(a+1)(b+2)$ 의 최솟값은 8이다.

$\boxed{\text{답}}$ 8

23

직사각형의 가로 길이를 $2a$, 세로 길이를 b 라고 하면 반원의 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여



$$a^2 + b^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$$

이때 직사각형의 넓이는 $2ab$ 이고, $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab \quad \rightarrow a > 0, b > 0 \text{이므로 } \sqrt{a^2b^2} = ab$$

즉, $2ab \leq 32$ 이므로 넓이의 최댓값은 32이다.

이때 등호가 성립하는 경우는 $a^2 = b^2$ 일 때이므로

$$a^2 + b^2 = 32 \text{에서}$$

$$a = b = 4 \quad (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 구하는 직사각형의 둘레의 길이는

$$2(2a + b) = 2(2 \times 4 + 4) = 24$$

$\boxed{\text{답}}$ 24

24

a, b 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{5} \right)^2 \right\} (a^2 + b^2) \geq \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{5} \right)^2$$

(단, 등호는 $3a = 5b$ 일 때 성립한다.)

이때 $\frac{a}{3} + \frac{b}{5} = \sqrt{34}$ 이므로

$$\frac{34}{225} (a^2 + b^2) \geq 34$$

$$\therefore a^2 + b^2 \geq 225$$

따라서 $a^2 + b^2$ 의 최솟값은 225이다.

$\boxed{\text{답}}$ 225

참고

$a^2 + b^2 \geq 225$ 에서 등호는 $3a = 5b$ 일 때 성립한다.

이때 $\frac{a}{3} + \frac{b}{5} = \sqrt{34}$ 이므로 등호는 $a = \frac{75\sqrt{34}}{34}, b = \frac{45\sqrt{34}}{34}$ 일 때 성립한다.

07

함수

기본을 다지는 유형

본문 102쪽

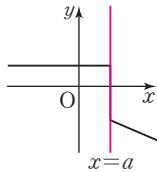
001

- ㄱ. X 의 원소 -1 에 대응하는 Y 의 원소가 2, 4로 2개이므로 함수가 아니다.
- ㄴ. X 의 각 원소에 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
- ㄷ. X 의 원소 1에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
- ㄹ. X 의 각 원소에 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다. 따라서 함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

002

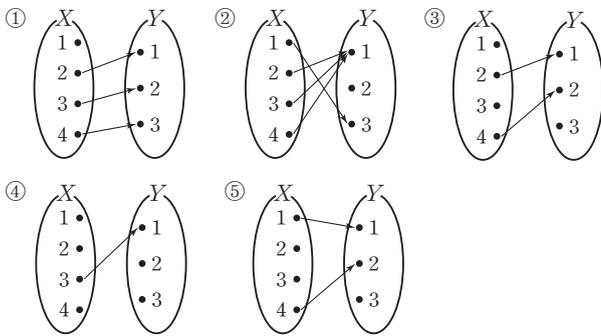
- ④ 오른쪽 그림과 같이 실수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 주어진 그래프가 여러 점에서 만나는 경우가 생기므로 함수의 그래프가 아니다. 따라서 함수의 그래프가 아닌 것은 ④이다.



답 ④

003

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수인 것은 ②이다.

답 ②

004

$f(-2)=2$ 이므로 $-3 \times (-2) + k = 2 \quad \therefore k = -4$
 따라서 $f(x) = -3x - 4$ 이므로
 $f(2) = -3 \times 2 - 4 = -10$

답 ①

005

$\frac{3-x}{2} = -3$ 에서 $3-x = -6 \quad \therefore x = 9$ ①
 $x=9$ 를 $f\left(\frac{3-x}{2}\right) = 4x-3$ 에 대입하면
 $f(-3) = 4 \times 9 - 3 = 33$ ②

답 33

채점 기준	비율
① $\frac{3-x}{2} = -3$ 을 만족시키는 x 의 값을 구할 수 있다.	50%
② $f(-3)$ 의 값을 구할 수 있다.	50%

다른 풀이

$\frac{3-x}{2} = t$ 로 놓으면 $3-x=2t \quad \therefore x=3-2t$
 $x=3-2t$ 를 $f\left(\frac{3-x}{2}\right) = 4x-3$ 에 대입하면
 $f(t) = 4(3-2t) - 3 = 9 - 8t$
 $\therefore f(-3) = 9 - 8 \times (-3) = 33$

006

$f(1)=4, f(2)=4, f(3)=6$ 이므로 함수 f 의 치역은 $\{4, 6\}$
 따라서 치역의 모든 원소의 합은
 $4+6=10$

답 10

007

$y=-5$ 일 때, $3x-2=-5, 3x=-3 \quad \therefore x=-1$
 $y=1$ 일 때, $3x-2=1, 3x=3 \quad \therefore x=1$
 $y=4$ 일 때, $3x-2=4, 3x=6 \quad \therefore x=2$
 따라서 구하는 정의역은 $\{-1, 1, 2\}$

답 ③

008

$f(1)=6-1=5, f(2)=\frac{2}{2}-1=0, f(3)=6-3=3,$
 $f(4)=\frac{4}{2}-1=1, f(5)=6-5=1, f(6)=\frac{6}{2}-1=2,$
 $f(7)=6-7=-1, f(8)=\frac{8}{2}-1=3, f(9)=6-9=-3,$
 $f(10)=\frac{10}{2}-1=4$
 따라서 구하는 치역은 $\{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
 [답] $\{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

009

$-\frac{1}{2}x^2+2x=-6$ 에서 $x^2-4x=12, x^2-4x-12=0$
 $(x+2)(x-6)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=6$
 $-\frac{1}{2}x^2+2x=0$ 에서 $x^2-4x=0, x(x-4)=0$
 $\therefore x=0$ 또는 $x=4$
 $-\frac{1}{2}x^2+2x=2$ 에서 $x^2-4x=-4, x^2-4x+4=0$
 $(x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$
 따라서 정의역이 $\{-2, 0, 2, 4, 6\}$ 이므로
 $a=4, b=6 (\because a < b)$
 $\therefore b-a=6-4=2$

답 ②

010

$f(x)=ax+b$ 로 놓으면 $a<0$ 이므로 일차함수 f 는 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소한다.

$\therefore f(1)=6, f(4)=-3$ ①

즉, $a+b=6, 4a+b=-3$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3, b=9$ ②

$\therefore ab=-3 \times 9 = -27$ ③

답 -27

채점 기준	비율
① $f(1), f(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	50%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ ab 의 값을 구할 수 있다.	10%

011

ㄱ. $f(-1)=g(-1)=0, f(0)=g(0)=1, f(1)=g(1)=0$

$\therefore f=g$

ㄴ. $f(-1)=g(-1)=-1, f(0)=g(0)=0, f(1)=g(1)=1$

$\therefore f=g$

ㄷ. $f(-1)=g(-1)=-3, f(0)=g(0)=-1, f(1)=g(1)=1$

$\therefore f=g$

따라서 $f=g$ 인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

두 함수 f, g 가 서로 같다는 것은 두 함수 f, g 의 함수식이 같다는 것이 아니라 정의역의 각 원소에 대하여 두 함수의 함수값이 같다는 뜻이다.

012

$f(-1)=g(-1)$ 에서

$1-a+2=-1+b \quad \therefore a+b=4$ ㉠

$f(1)=g(1)$ 에서

$1+a+2=1+b \quad \therefore a-b=-2$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$

따라서 $f(x)=x^2+x+2$ 이므로

$f(-1)=(-1)^2-1+2=2, f(1)=1^2+1+2=4$

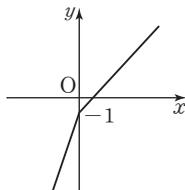
즉, 함수 f 의 치역은 $\{2, 4\}$

답 $\{2, 4\}$

013

함수 f 가 일대일함수가 되려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, $x \geq 0$ 에서 함수 $y=ax-1$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가해야 하므로 $a > 0$



답 $a > 0$

014

함수 f 가 일대일함수이고 $f(1)=1$ 이므로 $f(2), f(3)$ 의 값은 각각 0, 2, 3 중에서 하나이어야 하고 $f(2) \neq f(3)$ 이어야 한다.

따라서 $f(2)+f(3)$ 의 값은

$f(2)=0, f(3)=2$ 또는 $f(2)=2, f(3)=0$

일 때 최솟값 2를 갖는다.

답 ②

참고

$f(2)+f(3)$ 의 값은 $f(2)=2, f(3)=3$ 또는 $f(2)=3, f(3)=2$ 일 때 최댓값 5를 갖는다.

015

ㄱ. 치역과 공역이 실수 전체의 집합으로 같고, 실수 a 에 대하여 직선 $y=a$ 와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응을 나타내는 그래프이다.

ㄴ. 치역이 $\{y|y>0\}$ 으로 공역과 다르므로 일대일대응을 나타내는 그래프가 아니다.

ㄷ. 치역과 공역이 실수 전체의 집합으로 같고, 실수 a 에 대하여 직선 $y=a$ 와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응을 나타내는 그래프이다.

ㄹ. 실수 a 에 대하여 직선 $y=a$ 와 그래프가 2개 또는 3개의 점에서 만나기도 하므로 일대일대응을 나타내는 그래프가 아니다.

따라서 일대일대응을 나타내는 그래프인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

016

$f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$ 이므로 $x \geq 1$ 에서 함수 f 는 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가한다. ①

따라서 함수 f 가 일대일대응이 되려면

$f(1)=2$

이어야 한다. ②

즉, $f(1)=1-2+k=2$ 이므로 $k=3$ ③

답 3

채점 기준	비율
① $x \geq 1$ 에서 함수 f 가 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하는 함수임을 알 수 있다.	40%
② 함수 f 가 일대일대응이 될 조건을 구할 수 있다.	40%
③ k 의 값을 구할 수 있다.	20%

017

\rightarrow y 의 원소에서 7을 제외만 5, 6, 8 중 차가 3인 두 수를 찾는다.

함수 f 가 일대일대응이고 $f(1)=7, f(2)-f(3)=3$ 이므로

$f(2)=8, f(3)=5$

따라서 $f(4)=6$ 이므로 $f(3)+f(4)=5+6=11$

답 ①

018

함수 f 가 상수함수이고 $f(10)=2$ 이므로

$f(1)=f(3)=f(5)=f(7)=f(9)=f(11)=2$

$\therefore f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)+f(11)=6 \times 2=12$

답 12

019

함수 f 가 항등함수이므로 $f(2)=2, f(5)=5$

$\therefore g(2)=f(2)=2$

이때 함수 g 가 상수함수이므로 $g(7)=g(2)=2$
 $\therefore f(5)+g(7)=5+2=7$

답 ③

020

$f(0)=2$ 이고 함수 f 가 상수함수이므로 $f(x)=2$
 $f(2)=4+2a+b=2$ 이므로
 $2a+b=-2$ ㉠
 $f(4)=16+4a+b=2$ 이므로
 $4a+b=-14$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6, b=10$
 $\therefore a+b=-6+10=4$

답 ④

021

함수 g 가 항등함수이므로 $g(1)=1, g(2)=2, g(3)=3$
 $\therefore f(3)=h(1)=g(2)=2$
 함수 h 가 상수함수이므로 $h(1)=h(2)=h(3)=2$ ①
 $f(2)+f(3)=f(1)$ 에서
 $f(2)+2=f(1)$ $\rightarrow f(3)=2$ 이므로 X 의 원소에서 2를 제외한 1, 3 중 $f(2)+2=f(1)$ 을 만족시키도록 $f(1), f(2)$ 의 값을 찾는다.
 함수 f 가 일대일대응이므로
 $f(1)=3, f(2)=1$ ②
 $\therefore f(1)+g(3)+h(2)=3+3+2=8$ ③

답 8

채점 기준	비율
① 함수 g, h 의 모든 함수값과 $f(3)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
② $f(1), f(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $f(1)+g(3)+h(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

022

함수 f 가 항등함수이므로 $f(x)=x$ 이어야 한다.
 즉, $x^3-3x=x$ 이어야 하므로
 $x^3-4x=0, x(x^2-4)=0, x(x+2)(x-2)=0$
 $\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
 따라서 집합 $\{-2, 0, 2\}$ 의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 집합을 X 로 정하면 함수 f 는 항등함수가 되므로 집합 X 의 개수는
 $2^3-1=8-1=7$

답 ④

023

X 에서 X 로의 함수의 개수는 $3^3=27$
 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수는 ${}_3P_3=3 \times 2 \times 1=6$
 X 에서 X 로의 상수함수의 개수는 3
 따라서 $p=27, q=6, r=3$ 이므로
 $p+q-r=27+6-3=30$

답 ④

024

$f(2)=c$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 집합 $\{1, 4, 8\}$ 에서 $\{a, b, d\}$ 로의 일대일대응의 개수와 같다.
 따라서 구하는 함수 f 의 개수는
 ${}_3P_3=3 \times 2 \times 1=6$

답 ④

025

$f(0)f(2) \neq 0$ 이므로 $f(0) \neq 0, f(2) \neq 0$
 $f(-2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $-2, 0, 2$ 의 3개
 $f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $-2, 2$ 의 2개
 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $-2, 2$ 의 2개
 따라서 구하는 함수 f 의 개수는
 $3 \times 2 \times 2=12$

답 12

026

조건 (가)에 의하여 함수 f 는 일대일함수이다.
 조건 (나)에 의하여 함수값 $f(x)$ 는 $-3 \leq f(x) \leq 1$ 이다. ①
 따라서 함수 f 는 집합 $\{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$ 로의 일대일함수이다. ②
 즉, 구하는 함수 f 의 개수는
 ${}_5P_3=5 \times 4 \times 3=60$ ③

답 60

채점 기준	비율
① 조건 (가), (나)의 의미를 이해할 수 있다.	30%
② 함수 f 가 어떤 함수인지 알 수 있다.	40%
③ 함수 f 의 개수를 구할 수 있다.	30%

027

$x+f(x) \geq 4$ 이므로
 (i) $x=1$ 일 때
 $1+f(1) \geq 4$ 에서 $f(1) \geq 3$
 즉, $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 3, 4의 2개이다.
 (ii) $x=2$ 일 때
 $2+f(2) \geq 4$ 에서 $f(2) \geq 2$
 즉, $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4의 3개이다.
 (iii) $x=3$ 일 때
 $3+f(3) \geq 4$ 에서 $f(3) \geq 1$
 즉, $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개이다.
 (iv) $x=4$ 일 때
 $4+f(4) \geq 4$ 에서 $f(4) \geq 0$
 즉, $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개이다.
 (i)~(iv)에서 함수 f 의 개수는
 $2 \times 3 \times 4 \times 4=96$

답 96

028

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4) = 3$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1) = 5$$

$$\therefore (g \circ f)(3) - (f \circ g)(3) = 3 - 5 = -2$$

답 ③

029

$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-2) = -8$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 13$$

$$\therefore (f \circ g)(-1) + (g \circ f)(2) = -8 + 13 = 5$$

답 ⑤

030

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(4) = 16$$

$$(f \circ f)(\sqrt{3}) = f(f(\sqrt{3})) = f(2) = 8$$

$$\therefore (f \circ f)(1) - (f \circ f)(\sqrt{3}) = 16 - 8 = 8$$

답 ⑤

031

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 5 \times \frac{2}{3} - 3 = \frac{1}{3}$ 이고 함수의 합성에서 결합법칙이 성립하므로

$$(h \circ (g \circ f))\left(\frac{2}{3}\right) = ((h \circ g) \circ f)\left(\frac{2}{3}\right) = (h \circ g)\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$= (h \circ g)\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \times \frac{1}{3} + 5 = 7$$

답 ③

032

$f(1) = 2, (g \circ f)(1) = 3$ 이므로
 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 3$
 $g(3) = 2, (f \circ g)(3) = 3$ 이므로
 $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(2) = 3$ ①
 함수 f 가 일대일대응이고 $f(1) = 2, f(2) = 3$ 이므로
 $f(3) = 1$
 함수 g 가 일대일대응이고 $g(2) = 3, g(3) = 2$ 이므로
 $g(1) = 1$ ②
 $\therefore f(3) + g(1) = 1 + 1 = 2$ ③

답 2

채점 기준	비율
① $f(2), g(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
② $f(3), g(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $f(3) + g(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

033

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 3a + 2$$

즉, $3a + 2 = 8$ 이므로 $3a = 6 \quad \therefore a = 2$
 따라서 $g(x) = 2x + 2$ 이므로
 $g(5) = 2 \times 5 + 2 = 12$

답 ④

034

$$f(2) = 4 - 4 + a = a \text{이므로}$$

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(a) = a^2 - 2a + a = a^2 - a$$

$$f(4) = 16 - 8 + a = a + 8 \text{이므로}$$

$$(f \circ f)(4) = f(f(4)) = f(a + 8)$$

$$= (a + 8)^2 - 2(a + 8) + a = a^2 + 15a + 48$$

이때 $(f \circ f)(2) = (f \circ f)(4)$ 이므로
 $a^2 - a = a^2 + 15a + 48$
 $16a = -48 \quad \therefore a = -3$
 따라서 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 이므로
 $f(6) = 36 - 12 - 3 = 21$

답 ①

035

$$(f \circ (g \circ h))(a) = ((f \circ g) \circ h)(a) = (f \circ g)(h(a))$$

$$= (f \circ g)(-2a + 1) = 3(-2a + 1) - 1$$

$$= -6a + 2$$

즉, $-6a + 2 = 14$ 이므로
 $6a = -12 \quad \therefore a = -2$

답 ①

036

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + b)$$

$$= a(2x + b) - 2 = 2ax + ab - 2$$

모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = x$, 즉 $2ax + ab - 2 = x$ 가 성립하므로

$$2a = 1, ab - 2 = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}, b = 4$$

$$\therefore 2(a + b) = 2\left(\frac{1}{2} + 4\right) = 9$$

답 9

풍샘 개념 CHECK

항등식의 성질 高 公 통 수학 1

- (1) $ax^2 + bx + c = 0$ 이 x 에 대한 항등식이면 $a = b = c = 0$ 이다.
- (2) $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ 이 x 에 대한 항등식이면 $a = a', b = b', c = c'$ 이다.
- (3) $ax + by + c = 0$ 이 x, y 에 대한 항등식이면 $a = b = c = 0$ 이다.

037

$$f(3) = 7 \text{이므로 } 3a - 2 = 7, 3a = 9 \quad \therefore a = 3$$

즉, $f(x) = 3x - 2, g(x) = bx + 3$ 이므로
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(bx + 3)$
 $= 3(bx + 3) - 2 = 3bx + 7$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2)$
 $= b(3x - 2) + 3 = 3bx - 2b + 3$
 이때 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 이므로
 $3bx + 7 = 3bx - 2b + 3$
 $7 = -2b + 3, 2b = -4 \quad \therefore b = -2$
 $\therefore a - b = 3 - (-2) = 5$

답 ⑤

038

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 2h(x) - 5$$

$$(g \circ h)(x) = f(x) \text{에서}$$

$$2h(x) - 5 = 4x^2 + 1$$

$$2h(x) = 4x^2 + 6$$

$$\therefore h(x) = 2x^2 + 3$$

답 $h(x) = 2x^2 + 3$

039

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x+a)$$

$$= 2(2x+a) + a = 4x + 3a$$

$(f \circ f)(x)$ 가 $x-3$ 으로 나누어떨어지므로

$$(f \circ f)(3) = 0$$

즉, $4 \times 3 + 3a = 0$ 이므로

$$3a = -12 \quad \therefore a = -4$$

따라서 $f(x) = 2x - 4$, $(f \circ f)(x) = 4x - 12$ 이므로

$$f(1) + (f \circ f)(2) = -2 + (-4) = -6$$

답 ③

풍샘 개념 CHECK

인수 정리 高 公 通 数 学 1

다항식 $P(x)$ 에 대하여

- (1) $P(a) = 0$ 이면 $P(x)$ 는 일차식 $x-a$ 로 나누어떨어진다.
- (2) $P(x)$ 가 일차식 $x-a$ 로 나누어떨어지면 $P(a) = 0$ 이다.

040

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3)$$

$$= (x-3)^2 - 6(x-3) + a$$

$$= x^2 - 12x + 27 + a$$

$$= (x-6)^2 + a - 9$$

모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) \geq 0$, 즉 $(x-6)^2 + a - 9 \geq 0$ 이어야 하므로

$$a - 9 \geq 0 \quad \therefore a \geq 9$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 9이다.

답 9

041

$$f(x) = -x + 2 \text{이므로}$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(-x+2) = -(-x+2) + 2 = x$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x) = -x + 2$$

$$\vdots$$

$$\therefore f^n(x) = \begin{cases} -x + 2 & (n \text{은 홀수}) \\ x & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore f^{20}(3) + f^{21}(5) = 3 + (-5 + 2) = 0$$

답 ③

042

$$f(x) = 2x \text{이므로}$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(2x) = 2 \times 2x = 2^2x$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(2^2x) = 2 \times 2^2x = 2^3x$$

$$\vdots$$

060 정답과 풀이

$$\therefore f^{10}(x) = 2^{10}x \dots\dots\dots ①$$

$$f^{10}(a) = 2048 \text{에서}$$

$$2^{10}a = 2048, 2^{10}a = 2^{11}$$

$$\therefore a = 2 \dots\dots\dots ②$$

답 2

채점 기준	비율
① $f^{10}(x)$ 를 구할 수 있다.	70%
② a 의 값을 구할 수 있다.	30%

043

주어진 그래프에서 $f(0) = -1$, $f(-1) = 3$ 이므로

$$(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(-1) = 3$$

답 ⑤

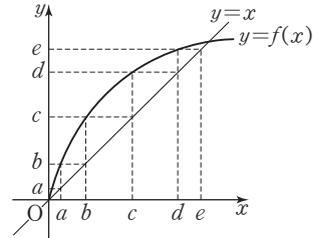
044

직선 $y=x$ 를 이용하여 y 축과 점선이 만나는 점의 y 좌표를 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$(f \circ f \circ f)(b) = f(f(f(b)))$$

$$= f(f(c))$$

$$= f(d)$$

$$= e$$


답 ⑤

참고

직선 $y=x$ 위의 점은 x 좌표와 y 좌표가 같음을 이용하여 y 축과 점선이 만나는 점의 y 좌표를 구할 수 있다.

045

$$(f \circ f)(a) = 6 \text{에서}$$

$$f(f(a)) = 6$$

주어진 그래프에서 $f(2) = 6$ 이므로

$$f(a) = 2$$

또, 주어진 그래프에서 $f(4) = 2$ 이므로

$$a = 4$$

답 ④

046

주어진 그림에서 $f(3) = 1$

$$f^{-1}(3) = k \text{라고 하면 } f(k) = 3$$

주어진 그림에서 $f(7) = 3$ 이므로 $k = 7$

$$\therefore f^{-1}(3) = 7$$

$$\therefore f(3) + f^{-1}(3) = 1 + 7 = 8$$

답 ③

047

$$f^{-1}(7) = 2 \text{이므로 } f(2) = 7$$

즉, $5 \times 2 + a = 7$ 이므로 $a = -3$

따라서 $f(x) = 5x - 3$ 이므로

$$f(5) = 5 \times 5 - 3 = 22$$

답 ③

048

$g^{-1}(3) = -1$ 이므로 $g(-1) = 3$
 즉, $-4 + k = 3$ 이므로 $k = 7$
 $\therefore f(x) = 7x - 3, g(x) = 4x + 7$
 $f^{-1}(4) = a$ 라고 하면 $f(a) = 4$ 이므로
 $7a - 3 = 4, 7a = 7 \quad \therefore a = 1$
 $\therefore f^{-1}(4) = 1$
 $\therefore f^{-1}(4) + g(-2) = 1 + (-1) = 0$

답 0

049

$\frac{3x-1}{4} = t$ 로 놓으면 $3x-1 = 4t \quad \therefore x = \frac{4t+1}{3}$
 $\therefore f(t) = 12 \times \frac{4t+1}{3} - 3 = 16t + 1$
 $f^{-1}(33) = k$ 라고 하면 $f(k) = 33$ 이므로
 $16k + 1 = 33, 16k = 32 \quad \therefore k = 2$
 $\therefore f^{-1}(33) = 2$

답 5

050

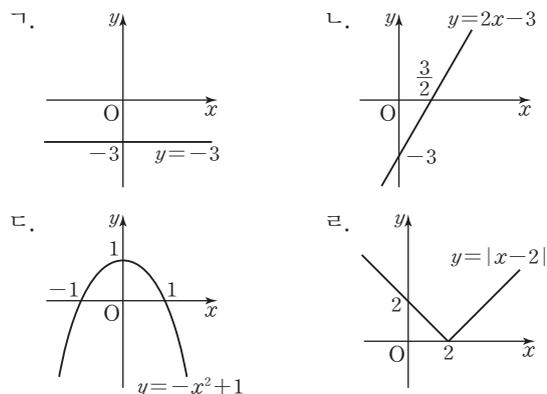
$x \geq 0$ 일 때 $f(x) = -2x + 1 \leq 1$
 $x < 0$ 일 때 $f(x) = x^2 + 1 > 1$ ①
 $f^{-1}(10) = a$ 라고 하면 $f(a) = 10 > 1$ 이므로
 $a < 0$
 즉, $a^2 + 1 = 10$ 이므로
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = -3 (\because a < 0) \quad \therefore f^{-1}(10) = -3$
 $f^{-1}(-3) = b$ 라고 하면 $f(b) = -3 < 1$ 이므로 $b > 0$
 즉, $-2b + 1 = -3$ 이므로
 $2b = 4 \quad \therefore b = 2 \quad \therefore f^{-1}(-3) = 2$ ②
 $\therefore f^{-1}(10) + f^{-1}(-3) = -3 + 2 = -1$ ③

답 -1

채점 기준	비율
① $x \geq 0, x < 0$ 일 때 $f(x)$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
② $f^{-1}(10), f^{-1}(-3)$ 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $f^{-1}(10) + f^{-1}(-3)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

051

역함수가 존재하려면 그 함수는 일대일대응이어야 한다.
 보기의 각 함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 일대일대응인 함수의 그래프는 나이므로 역함수가 존재하는 것은 나이다.

답 2

052

$f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$
 함수 f 의 역함수가 존재하려면 f 가 일대일대응이어야 하므로
 $a \geq 2, f(a) = a$
 이어야 한다.
 $f(a) = a$ 에서 $a^2 - 4a + 4 = a$
 $a^2 - 5a + 4 = 0, (a - 1)(a - 4) = 0$
 $\therefore a = 4 (\because a \geq 2)$

답 4

053

(1) $y = \frac{1}{3}x - 4$ 에서
 $\frac{1}{3}x = y + 4 \quad \therefore x = 3y + 12$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
 $y = 3x + 12$
 (2) 함수 $y = -x - 3$ 의 정의역이 $\{x | x \leq 2\}$ 이므로 치역은
 $\{y | y \geq -5\}$ 이다. \rightarrow 역함수의 정의역은 $\{x | x \geq -5\}$,
 치역은 $\{y | y \leq 2\}$ 이다.
 $y = -x - 3$ 에서
 $x = -y - 3$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
 $y = -x - 3 (x \geq -5)$
 답 (1) $y = 3x + 12$ (2) $y = -x - 3 (x \geq -5)$

참고

(1)과 같이 역함수의 정의역이 실수 전체의 집합이면 별도로 언급하지 않아도 된다. 그러나 (2)와 같이 역함수의 정의역이 실수 전체의 집합이 아닐 경우에는 반드시 정의역을 써주어야 한다.

054

$y = ax + b$ 로 놓으면
 $ax = y - b \quad \therefore x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$
 x 와 y 를 서로 바꾸면
 $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$
 따라서 $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ 이므로
 $\frac{1}{a} = \frac{2}{3}, -\frac{b}{a} = -1 \quad \therefore a = \frac{3}{2}, b = \frac{3}{2}$
 $\therefore ab = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

답 3

055

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1)$
 $= -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$
 $y = -6x - 1$ 로 놓으면
 $6x = -y - 1 \quad \therefore x = -\frac{1}{6}y - \frac{1}{6}$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$$

$$\therefore h^{-1}(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$$

답 ③

056

ㄱ. $y = x - 2$ 로 놓으면 $x = y + 2$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = x + 2$

즉, $f^{-1}(x) = x + 2$ 이므로 $f \neq f^{-1}$

ㄴ. $y = -x + 5$ 로 놓으면 $x = -y + 5$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -x + 5$

즉, $f^{-1}(x) = -x + 5$ 이므로 $f = f^{-1}$

ㄷ. $y = 2x$ 로 놓으면 $x = \frac{1}{2}y$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{2}x$

즉, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ 이므로 $f \neq f^{-1}$

ㄹ. $y = \frac{1}{x}$ 로 놓으면 $x = \frac{1}{y}$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{x}$

즉, $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ 이므로 $f = f^{-1}$

따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

[다른 풀이]

$$f = f^{-1} \text{이므로 } (f \circ f)(x) = x$$

각 보기의 함수에 대하여 $(f \circ f)(x)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\text{ㄱ. } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x-2) = (x-2)-2 = x-4$$

$$\text{ㄴ. } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x+5) = -(-x+5)+5 = x$$

$$\text{ㄷ. } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x) = 2(2x) = 4x$$

$$\text{ㄹ. } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

따라서 $(f \circ f)(x) = x$, 즉 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

057

$y = \frac{1}{2}x + 1$ 로 놓으면

$$\frac{1}{2}x = y - 1 \quad \therefore x = 2y - 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 2x - 2$

$$\therefore f^{-1}(x) = 2x - 2 \quad \dots\dots\dots ①$$

$$(g \circ f^{-1})(x) = 4x + 3 \text{에서 } g(f^{-1}(x)) = 4x + 3$$

$$\therefore g(2x - 2) = 4x + 3$$

$2x - 2 = t$ 로 놓으면

$$2x = t + 2 \quad \therefore x = \frac{1}{2}t + 1$$

$$\therefore g(t) = 4\left(\frac{1}{2}t + 1\right) + 3 = 2t + 7$$

$$\therefore g(x) = 2x + 7 \quad \dots\dots\dots ②$$

답 $g(x) = 2x + 7$

062 정답과 풀이

채점 기준	비율
① $f^{-1}(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
② $g(x)$ 를 구할 수 있다.	60%

058

주어진 그림에서 $g(4) = 6$ 이므로

$$(f^{-1} \circ g)(4) = f^{-1}(g(4)) = f^{-1}(6)$$

$$f^{-1}(6) = a \text{라고 하면 } f(a) = 6$$

주어진 그림에서 $f(2) = 6$ 이므로 $a = 2$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)(4) = 2$$

답 ②

059

$$(f^{-1} \circ g)(-4) = f^{-1}(g(-4)) = f^{-1}(-2)$$

$$f^{-1}(-2) = a \text{라고 하면 } f(a) = -2$$

즉, $2a - 3 = -2$ 이므로

$$2a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)(-4) = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

[다른 풀이]

$y = 2x - 3$ 으로 놓으면

$$2x = y + 3 \quad \therefore x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (f^{-1} \circ g)(-4) &= f^{-1}(g(-4)) = f^{-1}(-2) \\ &= -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

060

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{4}x - 1\right)$$

$$= 8\left(\frac{1}{4}x - 1\right) + a = 2x + a - 8$$

이때 $(f \circ g)(x) = 2x + 3$ 이므로

$$a - 8 = 3 \quad \therefore a = 11$$

따라서 $f(x) = 8x + 11$ 이므로 $f^{-1}(-5) = k$ 라고 하면

$$f(k) = -5$$

즉, $8k + 11 = -5$ 이므로

$$8k = -16 \quad \therefore k = -2$$

$$\therefore f^{-1}(-5) = -2$$

$$\begin{aligned} \therefore (g \circ f^{-1})(-5) &= g(f^{-1}(-5)) = g(-2) \\ &= -\frac{1}{2}(-2) - 1 = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ②

061

$f^{-1}(4)=1$ 이므로 $f(1)=4$
 즉, $a+1=4$ 이므로 $a=3 \quad \therefore f(x)=3x+1$
 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+1)$
 $=b(3x+1)+3=3bx+b+3$
 이때 $(g \circ f)(x)=3x+c$ 이므로
 $3b=3, b+3=c \quad \therefore b=1, c=4$
 $\therefore g(x)=x+3, (g \circ f)(x)=3x+4$
 $g^{-1}(f(-2))=k$ 라고 하면
 $g(k)=f(-2)=-6+1=-5$
 즉, $k+3=-5$ 이므로 $k=-8$
 $\therefore g^{-1}(f(-2))=-8$

답 ②

062

$g^{-1}(48)=a$ 라고 하면 $g(a)=48$
 $a < 20$ 일 때 $g(a)=3a=48 \quad \therefore a=16$
 $a \geq 20$ 일 때 $g(a)=2a+20=48$ 을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.
 $\rightarrow a \geq 20$ 일 때 $g(a) \geq 60$
 $\therefore g^{-1}(48)=16$
 $\therefore f(g^{-1}(48))=f(16)=64+16=80$ ①
 $f^{-1}(g(48))=b$ 라고 하면
 $f(b)=g(48)=96+20=116$
 즉, $4b+16=116$ 이므로 $4b=100 \quad \therefore b=25$
 $\therefore f^{-1}(g(48))=25$ ②
 $\therefore f(g^{-1}(48))+f^{-1}(g(48))=80+25=105$ ③

답 105

채점 기준	비율
① $f(g^{-1}(48))$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
② $f^{-1}(g(48))$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $f(g^{-1}(48))+f^{-1}(g(48))$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

063

$(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(a)=f^{-1}((f \circ f^{-1})(a))=f^{-1}(a)$ 이므로
 $(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(a)=3$ 에서 $f^{-1}(a)=3$
 따라서 $f(3)=a$ 이므로
 $a=3^3+1=28$

답 28

064

$(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(14)=(f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(14)$
 $=f \circ g^{-1}(14)$
 $=f(g^{-1}(14))$
 $g^{-1}(14)=k$ 라고 하면 $g(k)=14$
 즉, $3k+5=14$ 이므로 $3k=9 \quad \therefore k=3$
 $\therefore g^{-1}(14)=3$
 $\therefore (f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(14)=f(g^{-1}(14))$
 $=f(3)=3+4=7$

답 ③

065

함수 $f \circ g^{-1}$ 의 역함수는 $(f \circ g^{-1})^{-1}=g \circ f^{-1}$
 $y=4x-1$ 로 놓으면
 $4x=y+1 \quad \therefore x=\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$
 $\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$
 $\therefore h(x)=(g \circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))$
 $=g\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)=8\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)+4$
 $=2x+6$

답 ②

|다른 풀이

$y=8x+4$ 로 놓으면
 $8x=y-4 \quad \therefore x=\frac{1}{8}y-\frac{1}{2}$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}$
 $\therefore g^{-1}(x)=\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}$
 $\therefore (f \circ g^{-1})(x)=f(g^{-1}(x))=f\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}\right)$
 $=4\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}\right)-1=\frac{1}{2}x-3$
 $y=\frac{1}{2}x-3$ 으로 놓으면
 $\frac{1}{2}x=y+3 \quad \therefore x=2y+6$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=2x+6$
 $\therefore h(x)=2x+6$

066

$(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(-3)=(f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(-3)$
 $=f \circ g^{-1}(-3)$
 $=f(g^{-1}(-3))$
 $g^{-1}(-3)=k$ 라고 하면 $g(k)=-3$
 즉, $k-2=-3$ 이므로 $k=-1$
 $\therefore (f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(-3)=f(g^{-1}(-3))$
 $=f(-1)=-1+1=0$
 $-1 < 0$ 이므로 $f(x)=x+1$ 에 $x=-1$ 대입

답 0

067

$(h \circ f \circ g)(x)=h((f \circ g)(x))=h(x)$ 이므로
 $(f \circ g)(x)=x$
 이때 함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이므로 함수 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.
 따라서 $g(6)=k$ 라고 하면 $f(k)=6$
 즉, $5k+1=6$ 이므로 $5k=5 \quad \therefore k=1$
 $\therefore g(6)=1$

답 ④

068

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점의 좌표는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표와 같다.
 교점의 x 좌표가 -2 이므로 교점의 좌표는 $(-2, -2)$
 따라서 함수 $f(x)=4x+k$ 의 그래프가 점 $(-2, -2)$ 를 지나므로 $-8+k=-2 \quad \therefore k=6$

답 6

069

함수 $f(x)=ax+b$ 의 그래프가 점 $(3, -6)$ 을 지나므로 $3a+b=-6$ ㉠
 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프도 점 $(3, -6)$ 을 지나므로 함수 $f(x)=ax+b$ 의 그래프는 점 $(-6, 3)$ 을 지난다.
 $\therefore -6a+b=3$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=-3$
 따라서 $f(x)=-x-3$ 이므로 $f(-1)=-1-3=-2$

답 2

070

함수 $f(x)=ax+b$ 의 그래프가 점 $(-2, 3)$ 을 지나므로 $-2a+b=3$ ㉠
 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 $(4, -1)$ 을 지나므로 함수 $f(x)=ax+b$ 의 그래프는 점 $(-1, 4)$ 을 지난다.
 $\therefore -a+b=4$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=5$
 $\therefore a+b=1+5=6$

답 3

071

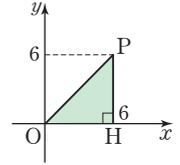
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점의 좌표는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표와 같다.
 $x^2-8x=x$ 에서 $x^2-9x=0, x(x-9)=0$
 $\therefore x=9 (\because x \geq 4)$
 따라서 교점의 좌표는 $(9, 9)$ 이므로 $a=9, b=9$
 $\therefore a+b=9+9=18$

답 18

072

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점의 좌표는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표와 같다.

$2x-6=x$ 에서 $x=6$
 $\therefore P(6, 6), H(6, 0)$
 따라서 삼각형 OPH의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$



답 3

073

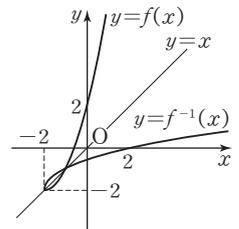
함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 점 $(3, -1)$ 을 지난다.
 이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(-1, 3), (3, -1)$ 을 지난다. 1
 $f(x)=ax+b$ ($a \neq 0, a, b$ 는 상수)라고 하면 $-a+b=3, 3a+b=-1$
 위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$
 이므로 $f(x)=-x+2$ 2
 $\therefore f(5)=-5+2=-3$ 3

답 -3

채점 기준	비율
1 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(-1, 3), (3, -1)$ 을 지남을 알 수 있다.	40%
2 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
3 $f(5)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

074

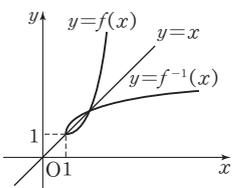
$f(x)=x^2+4x+2=(x+2)^2-2$ ($x \geq -2$)
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 두 교점 P, Q는 직선 $y=x$ 위에 있다.
 $x^2+4x+2=x$ 에서 $x^2+3x+2=0, (x+1)(x+2)=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=-2$



따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(-1, -1), (-2, -2)$ 이므로 $PQ = \sqrt{\{-2-(-1)\}^2 + \{-2-(-1)\}^2} = \sqrt{2}$
 $P(-1, -1), Q(-2, -2)$ 또는 $P(-2, -2), Q(-1, -1)$ 2

075

방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$ 의 근은 두 함수 $y=f(x), y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.
 이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$ 의 근은 방정식 $f(x)=x$ 의 근과 같다.
 $f(x)=x$ ($x \geq 1$)에서 $x^2-2x+2=x$
 $x^2-3x+2=0, (x-1)(x-2)=0$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=2$



따라서 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$ 의 모든 근의 합은
 $1+2=3$

답 ③

076

직선 $y=x$ 를 이용하여 y 축과
 점선이 만나는 점의 y 좌표를
 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$f^{-1}(8)=a$ 라고 하면
 $f(a)=8$
 오른쪽 그래프에서
 $f(10)=8$ 이므로 $a=10$

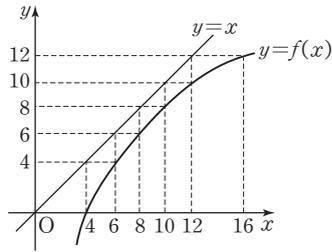
$\therefore f^{-1}(8)=10$
 $(f^{-1} \circ f^{-1})(10)=f^{-1}(f^{-1}(10))$ 에서 $f^{-1}(10)=b$ 라고 하면
 $f(b)=10$

위의 그래프에서 $f(12)=10$ 이므로 $b=12$
 $\therefore f^{-1}(10)=12$

$f^{-1}(12)=c$ 라고 하면 $f(c)=12$
 위의 그래프에서 $f(16)=12$ 이므로 $c=16$
 $\therefore f^{-1}(12)=16$

즉, $(f^{-1} \circ f^{-1})(10)=f^{-1}(f^{-1}(10))=f^{-1}(12)=16$ 이므로
 $f^{-1}(8)+(f^{-1} \circ f^{-1})(10)=10+16=26$

답 ⑤



077

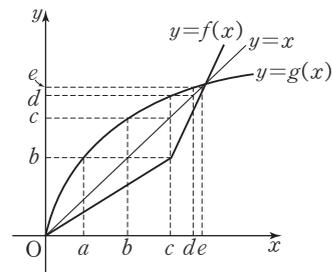
직선 $y=x$ 를 이용하여 y 축과
 점선이 만나는 점의 y 좌표를
 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

오른쪽 그래프에서
 $f(c)=b$ 이므로
 $g^{-1}(f(c))=g^{-1}(b)$
 $g^{-1}(b)=k$ 라고 하면
 $g(k)=b$

위의 그래프에서 $g(a)=b$ 이므로 $k=a$

$\therefore g^{-1}(b)=a$
 $\therefore g^{-1}(f(c))=g^{-1}(b)=a$

답 ①



실력을 높이는 연습 문제

본문 119쪽

01

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 각 함수의 y 의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

① $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $1 \leq x+2 \leq 4$

$$\therefore 1 \leq y \leq 4$$

② $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $0 \leq x^2 \leq 4$, $-4 \leq -x^2 \leq 0$

$$-1 \leq -x^2+3 \leq 3 \quad \therefore -1 \leq y \leq 3$$

③ $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $-2 \leq x-1 \leq 1$, $0 \leq |x-1| \leq 2$

$$4 \leq |x-1|+4 \leq 6 \quad \therefore 4 \leq y \leq 6$$

④ $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $-3 \leq x-2 \leq 0$, $0 \leq (x-2)^2 \leq 9$

$$-5 \leq (x-2)^2-5 \leq 4 \quad \therefore -5 \leq y \leq 4$$

⑤ $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $-1 \leq x^3 \leq 8$, $-3 \leq x^3-2 \leq 6$

$$\therefore -3 \leq y \leq 6$$

따라서 치역이 집합 Y 의 부분집합인 것은 ②뿐이므로 X 에서 Y 로
 의 함수인 것은 ②이다.

답 ②

02

$2n-1=2025$ 에서

$$2n=2026 \quad \therefore n=1013$$

$$\therefore f(2025)=\frac{1013+1}{2}=507$$

$2026=2 \times 1013$ 이고 $2n-1=1013$ 에서

$$2n=1014 \quad \therefore n=507$$

$$\therefore f(2026)=f(1013)=\frac{507+1}{2}=254$$

$$\therefore f(2025)+f(2026)=507+254=761$$

답 761

|다른 풀이|

$f(2n-1)=\frac{n+1}{2}$ 에서 $2n-1=t$ 라고 하면

$$2n=t+1 \quad \therefore n=\frac{t+1}{2}$$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{t+1}{2}+1\right)=\frac{t+3}{4} \quad (t \text{는 홀수})$$

$$\begin{aligned} \therefore f(2025)+f(2026) &= \frac{2025+3}{4} + f(1013) \\ &= 507 + \frac{1013+3}{4} \\ &= 507 + 254 = 761 \end{aligned}$$

03

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $Y=\{0, 2, 4, 6, 8\}$ 로의 함수
 f 가 $f(x)=(2x^2)$ 의 일의 자리의 숫자)이므로

$$f(1)=2, f(2)=8, f(3)=8, f(4)=2, f(5)=0$$

$$f(1)=f(4)=2 \text{이므로 } a=1 \text{ 또는 } a=4$$

$$f(2)=f(3)=8 \text{이므로 } b=2 \text{ 또는 } b=3$$

a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2), (1, 3), (4, 2), (4, 3)$ 이므로

$a+b$ 의 값은 각각 3, 4, 6, 7

따라서 $a+b$ 의 최댓값은 7이다.

답 ③

04

$f(-1)=-a+5, f(1)=a+5, f(2)=2a+5$ ($a \neq 0$)이므로
 함수 $f(x)$ 의 치역은

$$\{-a+5, a+5, 2a+5\}$$

치역의 모든 원소의 합이 11이므로

$$(-a+5)+(a+5)+(2a+5)=11$$

$2a+15=11 \quad \therefore a=-2$

답 -2

참고

$a=0$ 이면 함수 $f(x)$ 의 치역은 $\{5\}$ 이므로 치역의 모든 원소의 합이 11임을 만족시키지 않는다.

05

문제 접근하기

$a > 0$ 일 때와 $a < 0$ 일 때로 나누어 치역이 공역의 부분집합이어야 함을 이용하여 a 의 값의 범위를 구한다.

(i) $a > 0$ 일 때

함수 $f(x)$ 의 치역은 $\{y \mid f(1) \leq y \leq f(3)\}$, 즉 $\{y \mid a+1 \leq y \leq 3a+1\}$ 이므로

$a+1 \geq 2, 3a+1 \leq 5 \quad \therefore 1 \leq a \leq \frac{4}{3}$

(ii) $a < 0$ 일 때

함수 $f(x)$ 의 치역은 $\{y \mid f(3) \leq y \leq f(1)\}$, 즉 $\{y \mid 3a+1 \leq y \leq a+1\}$ 이므로

$3a+1 \geq 2, a+1 \leq 5 \quad \therefore \frac{1}{3} \leq a \leq 4$

그런데 $a < 0$ 이어야 하므로 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 $1 \leq a \leq \frac{4}{3}$

답 ②

06

두 함수 f 와 g 가 서로 같으므로

$f(1)=g(1), f(2)=g(2), f(3)=g(3)$

$f(1)=g(1)$ 에서 $a+b=2$

$f(2)=g(2)$ 에서 $b=1$

$f(3)=g(3)$ 에서 $a+b=2$

$\therefore a=1, b=1$

$\therefore 4a-b=4 \times 1 - 1 = 3$

답 3

07

문제 접근하기

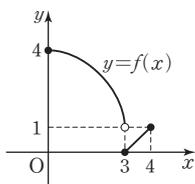
주어진 함수가 일대일대응이 되도록 $y=ax^2+b$ 의 그래프를 그려 그래프의 모양을 파악한다.

집합 $\{x \mid 3 \leq x \leq 4\}$ 에서 정의된 함수 $y=x-3$ 의 치역이 $\{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면 집합 $\{x \mid 0 \leq x < 3\}$ 에서 정의된 함수 $y=ax^2+b$ 의 치역이 $\{y \mid 1 < y \leq 4\}$ 가 되어야 한다.

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 함수 $y=ax^2+b$ 의 그래프가 두 점 $(0, 4), (3, 1)$ 을 지나야 한다.

즉, $4=b, 1=9a+b$ 이므로

$a=-\frac{1}{3}, b=4$



066 정답과 풀이

따라서 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^2+4 & (0 \leq x < 3) \\ x-3 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$ 이므로

$f(1) = -\frac{1}{3} + 4 = \frac{11}{3}$

답 ⑤

08

$1 \leq n \leq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $f(n)f(n+1)$ 의 값이 항상 짝수이므로 $f(1)f(2), f(2)f(3)$ 의 값은 모두 짝수이다.

집합 X 의 원소 중에서 짝수는 2의 한 개이고 함수 f 가 일대일대응이므로 함수값이 짝수인 것도 한 개이어야 한다.

이때 $f(1)f(2)$ 의 값이 짝수이려면 $f(1)$ 과 $f(2)$ 의 값 중에서 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

또, $f(2)f(3)$ 의 값이 짝수이려면 $f(2)$ 와 $f(3)$ 의 값 중에서 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

따라서 $f(2)=2$ 이므로

$f(1)=1, f(3)=3$ 또는 $f(1)=3, f(3)=1$

$\therefore f(1)+f(3)=4$

답 4

09

함수 $f(x)$ 가 항등함수이므로 정의역의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=x$ 가 성립해야 한다. 즉,

$f(-2)=-2, f(-1)=-1, f(1)=1, f(2)=2$

이어야 한다.

$f(-2)=-2$ 에서

$4a-2b+2=-2$

$\therefore 2a-b=-2$ ㉠

$f(-1)=-1$ 에서

$a-b+2=-1$

$\therefore a-b=-3$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1, b=4$

$\therefore a+b=1+4=5$

답 ③

$x \geq 1$ 이면 $f(x)=x$ 이므로 $f(1)=1, f(2)=2$ 는 항상 성립한다.

10

집합 Y 의 원소의 개수를 n 이라고 하면 X 에서 Y 로의 일대일함수 f 의 개수가 120이므로

${}_nP_3=120, n(n-1)(n-2)=6 \times 5 \times 4$

$\therefore n=6$

따라서 집합 Y 의 원소의 개수는 6이다.

답 ④

11

$f(x+4)=f(x)$ 이므로

$f(18)=f(14)=f(10)=f(6)=f(2)$
 $=-2^2+6 \times 2-4=4$

$\therefore (f \circ f)(18)=f(f(18))=f(4)$
 $=-2 \times 4+11=3$

답 ③

12

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(3a-4) \\ = (3a-4)^2 + 1$$

이므로

$$(3a-4)^2 + 1 = 65, (3a-4)^2 = 64$$

$$3a-4 = \pm 8$$

$$3a-4 = -8 \text{에서 } a = -\frac{4}{3}$$

$$3a-4 = 8 \text{에서 } a = 4$$

이때 a 는 양수이므로

$$a = 4$$

답 4

13

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax+b) \\ = 2(ax+b) + 5 = 2ax + 2b + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+5) \\ = a(2x+5) + b = 2ax + 5a + b$$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \text{이므로}$$

$$2ax + 2b + 5 = 2ax + 5a + b$$

$$2b + 5 = 5a + b$$

$$\therefore b = 5a - 5$$

$g(x) = ax + b$ 에 $b = 5a - 5$ 를 대입하면

$$g(x) = ax + 5a - 5 = a(x+5) - 5$$

따라서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 a 의 값에 관계없이 점 $(-5, -5)$ 를 지난다.

답 5

14

$$f^1(160) = f(160) = \frac{160}{2} = 80$$

$$f^2(160) = (f \circ f)(160) = f(f(160)) \\ = f(80) = \frac{80}{2} = 40$$

$$f^3(160) = (f \circ f^2)(160) = f(f^2(160)) \\ = f(40) = \frac{40}{2} = 20$$

$$f^4(160) = (f \circ f^3)(160) = f(f^3(160)) \\ = f(20) = \frac{20}{2} = 10$$

$$f^5(160) = (f \circ f^4)(160) = f(f^4(160)) \\ = f(10) = \frac{10}{2} = 5$$

$$f^6(160) = (f \circ f^5)(160) = f(f^5(160)) \\ = f(5) = \frac{5+3}{2} = 4$$

$$f^7(160) = (f \circ f^6)(160) = f(f^6(160)) \\ = f(4) = \frac{4}{2} = 2$$

$$f^8(160) = (f \circ f^7)(160) = f(f^7(160)) \\ = f(2) = \frac{2}{2} = 1$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

답 8

15

$$g^{-1}(3) = a \text{라고 하면 } g(a) = 3$$

주어진 그림에서 $g(5) = 3$ 이므로 $a = 5$

$$\therefore g^{-1}(3) = 5$$

한편, $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(7) = 2$ 이므로

$$g^{-1}(2) + (g \circ f)(4) = 5 + 2 = 7$$

답 2

16

$$f(-2) = 4 \text{이므로 } -2a + b = 4$$

$$f^{-1}(14) = 3 \text{에서 } f(3) = 14 \text{이므로}$$

$$3a + b = 14$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 8$

$$\therefore a + b = 2 + 8 = 10$$

..... ㉠

..... ㉡

답 10

17

$$(f \circ g^{-1})(a) = f(g^{-1}(a)) = 5g^{-1}(a) - 4$$

이때 $(f \circ g^{-1})(a) = 6$ 이므로

$$5g^{-1}(a) - 4 = 6$$

$$\therefore g^{-1}(a) = 2$$

따라서 $g(2) = a$ 이므로

$$a = g(2) = -6 + 4 = -2$$

답 1

|다른 풀이|

$y = -3x + 4$ 로 놓으면

$$3x = -y + 4 \quad \therefore x = -\frac{1}{3}y + \frac{4}{3}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\therefore g^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\therefore (f \circ g^{-1})(a) = f(g^{-1}(a)) = f\left(-\frac{1}{3}a + \frac{4}{3}\right) \\ = 5\left(-\frac{1}{3}a + \frac{4}{3}\right) - 4 = -\frac{5}{3}a + \frac{8}{3}$$

$$(f \circ g^{-1})(a) = 6 \text{에서 } -\frac{5}{3}a + \frac{8}{3} = 6$$

$$-5a + 8 = 18 \quad \therefore a = -2$$

18

함수 f 의 역함수가 존재하므로 f 는 일대일대응이다.

$$f(1) + 2f(3) = 12 \text{에서}$$

$$f(1) = 2, f(3) = 5 \text{ 또는 } f(1) = f(3) = 4 \rightarrow 2f(3) \text{과 } 12 \text{가 짝수이므로}$$

이때 함수 f 가 일대일대응이므로

$$f(1) = 2, f(3) = 5$$

$$f^{-1}(1) = a, f^{-1}(3) = b \text{라고 하면}$$

$$f(a) = 1, f(b) = 3 \text{이고, } a - b = 2$$

함수 f 는 일대일대응이므로

$$a = 4, b = 2$$

$f(1)$ 도 짝수이다.
 $\therefore f(1) = 2$ 또는 $f(1) = 4$

즉, $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=5, f(4)=1$ 이므로
 $f(5)=4$
 $\therefore f^{-1}(4)=5$
 $\therefore f(4)+f^{-1}(4)=1+5=6$

답 ②

19

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이다.
 따라서 경계인 $x=5$ 에서의 함숫값이 같아야 하므로

$$5+7=3 \times 5 - a \quad \therefore a=3$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x+7 & (x \geq 5) \\ 3x-3 & (x < 5) \end{cases}$$

$$x \geq 5 \text{ 일 때, } f(x) = x+7 \geq 12$$

$$x < 5 \text{ 일 때, } f(x) = 3x-3 < 12$$

$$f^{-1}(16) = p \text{ 라고 하면 } f(p) = 16$$

$$16 > 12 \text{ 이므로}$$

$$p+7=16 \quad \therefore p=9$$

$$f^{-1}(9) = q \text{ 라고 하면 } f(q) = 9$$

$$9 < 12 \text{ 이므로}$$

$$3q-3=9 \quad \therefore q=4$$

$$\text{따라서 } f^{-1}(16) = 9, f^{-1}(9) = 4 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} (f \circ f)^{-1}(16) &= (f^{-1} \circ f^{-1})(16) \\ &= f^{-1}(f^{-1}(16)) \\ &= f^{-1}(9) = 4 \end{aligned}$$

답 4

|다른 풀이|

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이다.
 따라서 경계인 $x=5$ 에서의 함숫값이 같아야 하므로

$$5+7=3 \times 5 - a \quad \therefore a=3$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x+7 & (x \geq 5) \\ 3x-3 & (x < 5) \end{cases}$$

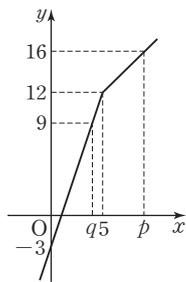
함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $f^{-1}(16) = p$ 라고 하면

$$f(p) = p+7 = 16 \quad \therefore p=9$$

$$f^{-1}(9) = q \text{ 라고 하면}$$

$$f(q) = 3q-3 = 9 \quad \therefore q=4$$

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ f)^{-1}(16) &= f^{-1}(f^{-1}(16)) \\ &= f^{-1}(p) \\ &= f^{-1}(9) \\ &= q = 4 \end{aligned}$$



20

주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$f(1)=3, f(2)=1, f(3)=2, f(4)=5, f(5)=4$$

주어진 함수 $y=(f \circ g)(x)$ 의 그래프에서

$$(f \circ g)(1)=1 \text{ 이므로 } f(g(1))=1$$

$$\therefore g(1)=2 \quad (\because f(2)=1)$$

$$(f \circ g)(2)=5 \text{ 이므로 } f(g(2))=5$$

$$\therefore g(2)=4 \quad (\because f(4)=5)$$

$$(f \circ g)(3)=2 \text{ 이므로 } f(g(3))=2$$

$$\therefore g(3)=3 \quad (\because f(3)=2)$$

$$(f \circ g)(4)=4 \text{ 이므로 } f(g(4))=4$$

$$\therefore g(4)=5 \quad (\because f(5)=4)$$

$$(f \circ g)(5)=3 \text{ 이므로 } f(g(5))=3$$

$$\therefore g(5)=1 \quad (\because f(1)=3)$$

$$(g \circ f)^{-1}(2) = (f^{-1} \circ g^{-1})(2) = f^{-1}(g^{-1}(2)) \text{ 이므로}$$

$$g^{-1}(2) = a \text{ 라고 하면}$$

$$g(a) = 2 \quad \therefore a = 1 \quad (\because g(1) = 2)$$

$$f^{-1}(1) = b \text{ 라고 하면}$$

$$f(b) = 1 \quad \therefore b = 2 \quad (\because f(2) = 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore g(3) + (g \circ f)^{-1}(2) &= g(3) + f^{-1}(g^{-1}(2)) \\ &= 3 + f^{-1}(1) \\ &= 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

답 5

21

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, 두 함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이의 2배이다.

$$f(4)=9 \text{ 이므로 } 4a+b=9 \quad \text{..... ㉠}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 점 $(7, 2)$ 를 지나므로

$$g(7)=2 \text{ 에서 } f(2)=7$$

$$\therefore 2a+b=7 \quad \text{..... ㉡}$$

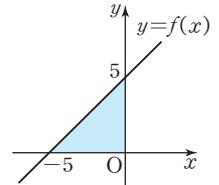
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=5$

$$\therefore f(x) = x+5$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$$



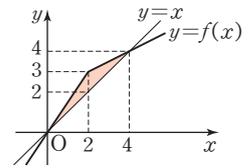
답 ②

22

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 두 함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이의 2배이다.

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \right) &= 2(1+1) = 4 \end{aligned}$$



답 4

참고

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표를 구하면 다음과 같다.

(i) $x < 2$ 일 때

$$\frac{3}{2}x = x \text{ 에서 } x = 0$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때

$$\frac{1}{2}x + 2 = x \text{ 에서 } \frac{1}{2}x = 2 \quad \therefore x = 4$$

(i), (ii)에서 두 교점의 좌표는 $(0, 0), (4, 4)$

23

문제 접근하기

$h(x)=g(2x)$, $k(x)=2x$ 로 놓고 $h(x)$ 를 $g(x)$ 와 $k(x)$ 의 합성함수로 나타낸 후 역함수의 성질을 이용하여 함수 $g(2x)$ 의 역함수를 구한다.

$$g(x)=f^{-1}(x) \text{이므로}$$

$$h(x)=g(2x), k(x)=2x \text{로 놓으면}$$

$$h(x)=g(2x)=g(k(x))$$

$$=(g \circ k)(x)=(f^{-1} \circ k)(x)$$

따라서 함수 $g(2x)$ 의 역함수는

$$h^{-1}(x)=(f^{-1} \circ k)^{-1}(x)$$

$$=(k^{-1} \circ f)(x)=k^{-1}(f(x))$$

$y=2x$ 로 놓으면 $x=\frac{1}{2}y$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x$

$$\therefore k^{-1}(x)=\frac{1}{2}x$$

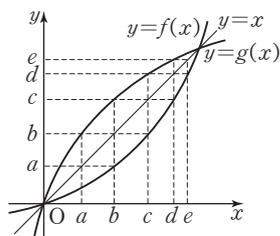
따라서 함수 $g(2x)$ 의 역함수는

$$h^{-1}(x)=k^{-1}(f(x))=\frac{1}{2}f(x)$$

답 ⑤

24

직선 $y=x$ 를 이용하여 y 축과 점선이 만나는 점의 y 좌표를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
 $f^{-1}(d)=p$ 라고 하면
 $f(p)=d$
 오른쪽 그래프에서
 $f(e)=d$ 이므로 $p=e$
 $\therefore f^{-1}(d)=e$
 $g^{-1}(e)=q$ 라고 하면
 $g(q)=e$
 위의 그래프에서 $g(d)=e$ 이므로 $q=d$
 $\therefore g^{-1}(e)=d$
 $\therefore (f \circ g^{-1} \circ f^{-1})(d)=f(g^{-1}(f^{-1}(d)))$



$$=f(g^{-1}(e))$$

$$=f(d)=c$$

답 ③

08

유리식과 유리함수

기본을 다지는 유형

본문 125쪽

001

$$(1) \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-4} = \frac{3(x-4)+2(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{5x-10}{(x+1)(x-4)}$$

$$(2) \frac{1}{x+3} - \frac{x-2}{x^2+2x-3} = \frac{1}{x+3} - \frac{x-2}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x+3)}$$

$$(3) \frac{3x-6}{x^2+x} \times \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{3(x-2)}{x(x+1)} \times \frac{x+1}{(x+2)(x-2)} = \frac{3}{x(x+2)}$$

$$(4) \frac{x+4}{x^2-5x+4} \div \frac{x^2+2x-8}{x-4}$$

$$= \frac{x+4}{(x-1)(x-4)} \times \frac{x-4}{(x-2)(x+4)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

답 (1) $\frac{5x-10}{(x+1)(x-4)}$ (2) $\frac{1}{(x-1)(x+3)}$
 (3) $\frac{3}{x(x+2)}$ (4) $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$

002

$$\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)}$$

$$= \frac{-1}{(x-y)(z-x)} + \frac{-1}{(y-z)(x-y)} + \frac{-1}{(z-x)(y-z)}$$

$$= \frac{-(y-z)-(z-x)-(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$= \frac{-y+z-z+x-x+y}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0$$

답 ③

003

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$$

$$= \frac{x-1-(x+1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x-2-(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{-2}{x^2-1} + \frac{-4}{x^2-4} = \frac{-2(x^2-4)-4(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-4)}$$

$$= \frac{-2x^2+8-4x^2+4}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{-6x^2+12}{(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)} \dots \dots \dots ①$$

따라서 $a=-6$, $b=12$ 이므로

$$a+b=-6+12=6 \dots \dots \dots ②$$

답 6

채점 기준	비율
① 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	80%
② $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

004

$$\begin{aligned} & \frac{3x^2-5x-2}{x^2-1} \times \frac{x^2+2x-3}{3x^2+x} \div \frac{x^2+x-6}{2x^2+2x} \\ &= \frac{(3x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} \times \frac{(x-1)(x+3)}{x(3x+1)} \times \frac{2x(x+1)}{(x-2)(x+3)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

답 ②

005

주어진 등식의 우변을 계산하면

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+1} + \frac{bx+1}{x^2-x+1} &= \frac{a(x^2-x+1) + (bx+1)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (-a+b+1)x + a+1}{x^3+1} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{5x^2+4}{x^3+1} = \frac{(a+b)x^2 + (-a+b+1)x + a+1}{x^3+1}$ 이 x 에 대한

항등식이므로

$$a+b=5, -a+b+1=0, a+1=4$$

$$\therefore a=3, b=2$$

$$\therefore a^2-2b=9-4=5$$

답 ③

006

주어진 등식의 우변을 계산하면

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} &= \frac{a(x-1)^2 + bx(x-1) + cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^2 - 2ax + a + bx^2 - bx + cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 - (2a+b-c)x + a}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{x+4}{x(x-1)^2} = \frac{(a+b)x^2 - (2a+b-c)x + a}{x(x-1)^2}$ 가 x 에 대한 항

등식이므로

$$a+b=0, 2a+b-c=-1, a=4$$

$$\therefore a=4, b=-4, c=5$$

$$\therefore ab+c=4 \times (-4) + 5 = -11$$

답 -11

007

$$\begin{aligned} (1) \frac{x+1}{x-4} - \frac{x+5}{x+3} &= \frac{(x-4)+5}{x-4} - \frac{(x+3)+2}{x+3} \\ &= \left(1 + \frac{5}{x-4}\right) - \left(1 + \frac{2}{x+3}\right) \\ &= \frac{5}{x-4} - \frac{2}{x+3} \\ &= \frac{5(x+3) - 2(x-4)}{(x-4)(x+3)} \\ &= \frac{3x+23}{(x-4)(x+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{x}{x-1} - \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} &= \frac{x}{x-1} - \frac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{(x-1)+1}{x-1} - \frac{(x+2)+1}{x+2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{3}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} \frac{3x+23}{(x-4)(x+3)} \quad (2) \frac{3}{(x-1)(x+2)}$$

008

$$\begin{aligned} \frac{2x^2+4x+1}{x^2+2x} - \frac{4x^2-2x+2}{2x^2-x} &= \frac{2(x^2+2x)+1}{x^2+2x} - \frac{2(2x^2-x)+2}{2x^2-x} \\ &= \left(2 + \frac{1}{x^2+2x}\right) - \left(2 + \frac{2}{2x^2-x}\right) \\ &= \frac{1}{x(x+2)} - \frac{2}{x(2x-1)} \\ &= \frac{(2x-1) - 2(x+2)}{x(x+2)(2x-1)} \\ &= -\frac{5}{x(x+2)(2x-1)} \end{aligned}$$

$$\text{답} -\frac{5}{x(x+2)(2x-1)}$$

009

$$\begin{aligned} \frac{x^2-x+2}{x-1} - \frac{x^2+x+2}{x+1} &= \frac{x(x-1)+2}{x-1} - \frac{x(x+1)+2}{x+1} \\ &= \left(x + \frac{2}{x-1}\right) - \left(x + \frac{2}{x+1}\right) \\ &= \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} \\ &= \frac{2(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{x^2-1} \end{aligned}$$

$$\therefore k=4$$

답 ④

010

주어진 등식의 좌변을 계산하면

$$\begin{aligned} \frac{x^2-2x-2}{x-3} + \frac{2x+3}{x+2} &= \frac{(x+1)(x-3)+1}{x-3} + \frac{2(x+2)-1}{x+2} \\ &= \left(x+1 + \frac{1}{x-3}\right) + \left(2 - \frac{1}{x+2}\right) \\ &= x+3 + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \\ &= x+3 + \frac{(x+2) - (x-3)}{(x+2)(x-3)} \\ &= x+3 + \frac{5}{(x+2)(x-3)} \end{aligned}$$

따라서 $x+3+\frac{5}{(x+2)(x-3)}=x+a+\frac{b}{(x+2)(x-3)}$ 가 x 에 대한 항등식이므로
 $a=3, b=5$
 $\therefore a+b=3+5=8$

답 8

011

$$\begin{aligned} (1) & \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{3}{x(x+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \frac{2}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{3}{(x+2)(x+5)} \\ &= \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+5}\right) \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5} \\ &= \frac{6}{(x-1)(x+5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) & \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+6}\right) \\ &= \frac{3}{x(x+6)} \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{3}{x(x+3)}$ (2) $\frac{6}{(x-1)(x+5)}$ (3) $\frac{3}{x(x+6)}$

012

주어진 등식의 좌변을 계산하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+8x+12} + \frac{1}{x^2+16x+60} \\ &= \frac{1}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+10)} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+6}\right) \\ & \quad + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+10}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+10}\right) \\ &= \frac{3}{(x-2)(x+10)} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{3}{(x-2)(x+10)} = \frac{b}{(x-2)(x+a)}$ 가 x 에 대한 항등식이므로 $a=10, b=3$
 $\therefore ab=10 \times 3=30$

답 ③

013

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \dots + \frac{1}{24 \times 26} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{26}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{26}\right) \\ &= \frac{3}{13} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{13}$

014

$f(n)=n^2+n=n(n+1)$ 이므로

$$\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \dots\dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore & \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \dots + \frac{1}{f(20)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{21}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{21} \\ &= \frac{20}{21} \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$

따라서 $a=21, b=20$ 이므로

$$a+b=21+20=41 \dots\dots\dots ③$$

답 41

채점 기준	비율
① $\frac{1}{f(n)}$ 을 부분분수로 변형할 수 있다.	30%
② $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \dots + \frac{1}{f(20)}$ 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

015

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} &= \frac{(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\ \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} &= \frac{(x+2)+(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{4}{2x} = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{x}$

016

먼저 주어진 식을 간단히 한 후 $x=2026$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{x} &= \frac{x+2}{x} = \frac{x+2}{x} \\ 1 - \frac{4}{x^2} &= \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2} \\ &= \frac{x}{x-2} \\ &= \frac{2026}{2026-2} \\ &= \frac{1013}{1012} \end{aligned}$$

답 ①

017

$$\frac{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x-1}}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x+1}}} = \frac{1 + \frac{1}{\frac{(x-1)+1}{x-1}}}{1 - \frac{1}{\frac{(x+1)-1}{x+1}}} = \frac{1 + \frac{x-1}{x}}{1 - \frac{x+1}{x}}$$

$$= \frac{\frac{x+(x-1)}{x}}{\frac{x-(x+1)}{x}} = \frac{2x-1}{-\frac{1}{x}} = 1-2x$$

답 ②

018

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1}$$

$$= \frac{(x+1)+x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

즉, $x = \frac{2x+1}{x+1}$ 이므로 양변에 $x+1$ 을 곱하면

$$x(x+1) = 2x+1, \quad x^2+x = 2x+1$$

$$\therefore x^2-x = 1$$

답 ④

019

$$\frac{50}{23} = \frac{2 \times 23 + 4}{23} = 2 + \frac{4}{23}$$

$$= 2 + \frac{1}{\frac{23}{4}} = 2 + \frac{1}{\frac{5 \times 4 + 3}{4}}$$

$$= 2 + \frac{1}{5 + \frac{3}{4}} = 2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{4}{3}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} \dots \dots \dots \text{①}$$

따라서 $a=2, b=5, c=1, d=3$ 이므로

$$ab - cd = 2 \times 5 - 1 \times 3 = 7 \dots \dots \dots \text{②}$$

답 7

채점 기준	비율
① $\frac{50}{23}$ 을 번분수식으로 나타낼 수 있다.	60%
② $ab - cd$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

020

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \times x \times \frac{1}{x}$
 $= 3^2 - 2 = 7$

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \times x \times \frac{1}{x} \times \left(x + \frac{1}{x}\right)$
 $= 3^3 - 3 \times 3 = 18$

(3) $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 \times x^2 \times \frac{1}{x^2}$
 $= 7^2 - 2 = 47$

(4) $x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$
 $= 7 \times 18 - 3 = 123$

답 (1) 7 (2) 18 (3) 47 (4) 123

021

$x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$ 이므로

$$\frac{15}{4} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \times \frac{3}{2} \quad \therefore x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \times x \times \frac{1}{x} \times \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3 \times \frac{5}{2} = \frac{65}{8}$$

답 ⑤

022

$x \neq 0$ 이므로 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면
 $\rightarrow x=0$ 을 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 에 대입하면 $-1 \neq 0$ 이므로 $x \neq 0$

$$x - 2 - \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x - \frac{1}{x} = 2$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 4 \quad \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$$

$$\therefore 2x^2 + 3x - 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 1$$

$$= 2 \times 6 + 3 \times 2 - 1$$

$$= 17$$

답 ③

023

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 14 \text{이므로}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 14 + 2 = 16$$

이때 $x > 0$ 이므로 $x + \frac{1}{x} = 4$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \times x \times \frac{1}{x} \times \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 4^3 - 3 \times 4 = 52$$

답 52

024

$a + b + c = 0$ 이므로

$$b + c = -a, \quad c + a = -b, \quad a + b = -c$$

$$\therefore \frac{a}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{b}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$= \frac{a}{2b} + \frac{a}{2c} + \frac{b}{2c} + \frac{b}{2a} + \frac{c}{2a} + \frac{c}{2b}$$

$$= \frac{c+a}{2b} + \frac{a+b}{2c} + \frac{b+c}{2a}$$

$$= \frac{-b}{2b} + \frac{-c}{2c} + \frac{-a}{2a}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

답 $-\frac{3}{2}$

다른 풀이

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{a}{2}\times\frac{b+c}{bc}+\frac{b}{2}\times\frac{c+a}{ca}+\frac{c}{2}\times\frac{a+b}{ab} \\ &= \frac{a}{2}\times\frac{-a}{bc}+\frac{b}{2}\times\frac{-b}{ca}+\frac{c}{2}\times\frac{-c}{ab} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)=-\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} \end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc \\ &= 3abc \quad (\because a+b+c=0) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{a}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) &= -\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} \\ &= -\frac{3abc}{2abc} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

025

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \text{에서 } \frac{xy+yz+zx}{xyz}=0$$

$$\therefore xy+yz+zx=0 \quad (\because xyz \neq 0) \quad \text{..... ㉠}$$

$$\begin{aligned} \therefore & \frac{2x}{(x+y)(x+z)}+\frac{2y}{(y+z)(y+x)}+\frac{2z}{(z+x)(z+y)} \\ &= \frac{2x(y+z)+2y(z+x)+2z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{4(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=0 \quad (\because \text{㉠}) \quad \text{..... ㉡} \end{aligned}$$

답 0

채점 기준	비율
① $xy+yz+zx$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
② 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60%

026

$a:b:c=2:3:4$ 이므로

$$a=2k, b=3k, c=4k \quad (k \neq 0)$$

로 놓으면

$$\begin{aligned} \frac{-3a+2b-c}{a-b+c} &= \frac{-3 \times 2k+2 \times 3k-4k}{2k-3k+4k} \\ &= \frac{-4k}{3k} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

답 ②

027

$$\frac{x+2y}{4x+5y}=\frac{1}{3} \text{에서}$$

$$3x+6y=4x+5y \quad \therefore x=y$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2-3xy+3y^2}{x^2+y^2} &= \frac{y^2-3 \times y \times y+3y^2}{y^2+y^2} \\ &= \frac{y^2}{2y^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ③

028

$3a=2b, 3b=4c$ 에서

$$a=\frac{2}{3}b, c=\frac{3}{4}b$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2a-b-2c}{a+b+c} &= \frac{2 \times \frac{2}{3}b-b-2 \times \frac{3}{4}b}{\frac{2}{3}b+b+\frac{3}{4}b} \\ &= \frac{-\frac{7}{6}b}{\frac{12}{12}b} = -\frac{14}{29} \end{aligned}$$

답 $-\frac{14}{29}$

029

$(x+y):(y+z):(z+x)=4:3:5$ 이므로

$$x+y=4k, y+z=3k, z+x=5k \quad (k \neq 0) \quad \text{..... ㉠}$$

로 놓고 세 식을 변끼리 더하면

$$2(x+y+z)=12k \quad \therefore x+y+z=6k \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$x=3k, y=k, z=2k \quad \text{..... ㉢}$$

$$\therefore \frac{xy-yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{3k \times k - k \times 2k + 2k \times 3k}{(3k)^2 + k^2 + (2k)^2}$$

$$= \frac{7k^2}{14k^2} = \frac{1}{2} \quad \text{..... ㉣}$$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① x, y, z 를 한 문자로 나타낼 수 있다.	60%
② $\frac{xy-yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

030

$$\begin{cases} 3x+y-2z=0 & \text{..... ㉠} \\ x-2y+z=0 & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

㉠+2×㉡을 하면

$$5x-3y=0 \quad \therefore y=\frac{5}{3}x$$

2×㉠+㉡을 하면

$$7x-3z=0 \quad \therefore z=\frac{7}{3}x$$

$$\therefore \frac{x+y}{x+z} = \frac{x+\frac{5}{3}x}{x+\frac{7}{3}x} = \frac{\frac{8}{3}x}{\frac{10}{3}x} = \frac{4}{5}$$

답 ④

031

$$\frac{5x-y}{2} = \frac{2y-z}{3} = \frac{3z-x}{5} = k \quad (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$5x-y=2k \quad \text{..... ㉠}$$

$$2y-z=3k \quad \text{..... ㉡}$$

$$3z-x=5k \quad \text{..... ㉢}$$

2×㉠+3×㉡+㉢을 하면

$$9x+4y=18k$$

이때 $\frac{9x+4y}{a}=k$ 이므로

$$a=\frac{9x+4y}{k}=\frac{18k}{k}=18$$

답 ④

032

$$\frac{x+y}{2z}=\frac{y+2z}{x}=\frac{2z+x}{y}=k (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$x+y=2kz, y+2z=kx, 2z+x=ky \quad \dots\dots ①$$

위의 세 식을 변끼리 더하면

$$2(x+y+2z)=k(x+y+2z)$$

이때 $x+y+2z \neq 0$ 이므로 위의 식의 양변을 $x+y+2z$ 로 나누면 $k=2$

$k=2$ 를 ①에 대입하면

$$x+y=4z \quad \dots\dots ②$$

$$y+2z=2x \quad \dots\dots ③$$

$$2z+x=2y \quad \dots\dots ④$$

②-③을 하면

$$x-2z=4z-2x, 3x=6z \quad \therefore x=2z$$

②-④을 하면

$$y-2z=4z-2y, 3y=6z \quad \therefore y=2z$$

$$\therefore \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\frac{(2z)^3+(2z)^3+z^3}{2z \times 2z \times z}=\frac{17z^3}{4z^3}=\frac{17}{4}$$

답 ①

033

ㄱ. $y=\frac{2x+1}{5}$ 은 다항함수이다.

ㄴ. $y=\frac{1}{3x+5}$ 은 다항함수가 아닌 유리함수이다.

ㄷ. $y=3x^2-1$ 은 다항함수이다.

ㄹ. $y=\frac{x-1}{x^2-1}$ 은 다항함수가 아닌 유리함수이다.

(1) 다항함수는 ㄱ, ㄷ이다.

(2) 다항함수가 아닌 유리함수는 ㄴ, ㄹ이다.

답 (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄴ, ㄹ

034

(1) $3x-2=0$ 에서 $x=\frac{2}{3}$

따라서 주어진 유리함수의 정의역은

$$\left\{x \mid x \neq \frac{2}{3} \text{인 실수}\right\}$$

(2) $x^2-1=0$ 에서 $x=\pm 1$

따라서 주어진 유리함수의 정의역은

$$\{x \mid x \neq \pm 1 \text{인 실수}\}$$

(3) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+3 > 0$ 이므로 주어진 유리함수의 정의역은 $\{x \mid x \text{는 실수}\}$

답 (1) $\left\{x \mid x \neq \frac{2}{3} \text{인 실수}\right\}$ (2) $\{x \mid x \neq \pm 1 \text{인 실수}\}$ (3) $\{x \mid x \text{는 실수}\}$

035

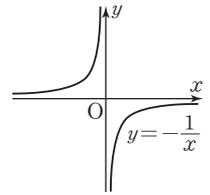
(1) 함수 $y=-\frac{1}{x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로

정의역은 $\{x \mid x \neq 0 \text{인 실수}\}$

치역은 $\{y \mid y \neq 0 \text{인 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x=0, y=0$



(2) 함수 $y=\frac{2}{x-2}+1$ 의 그래프는 함수

$y=\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행

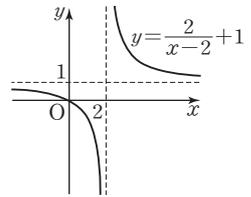
이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽

그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x \mid x \neq 2 \text{인 실수}\}$

치역은 $\{y \mid y \neq 1 \text{인 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x=2, y=1$



(3) 함수 $y=-\frac{3}{x-2}-4$ 의 그래프는

함수 $y=-\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방

향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -4

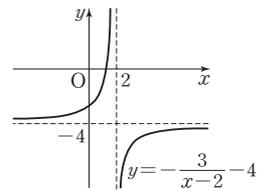
만큼 평행이동한 것이므로 그 그래

프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x \mid x \neq 2 \text{인 실수}\}$

치역은 $\{y \mid y \neq -4 \text{인 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x=2, y=-4$



답 풀이 참조

036

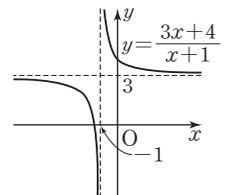
(1) $y=\frac{3x+4}{x+1}=\frac{3(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}+3$

이므로 함수 $y=\frac{3x+4}{x+1}$ 의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\frac{3x+4}{x+1}$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은

$x=-1, y=3$ 이다.



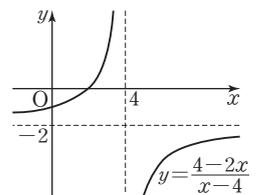
(2) $y=\frac{4-2x}{x-4}=\frac{-2(x-4)-4}{x-4}=-\frac{4}{x-4}-2$

이므로 함수 $y=\frac{4-2x}{x-4}$ 의 그래프는 함수 $y=-\frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\frac{4-2x}{x-4}$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식

은 $x=4, y=-2$ 이다.



답 풀이 참조

037

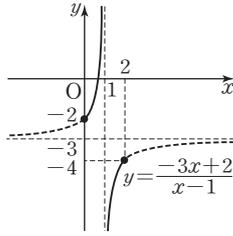
$$y = \frac{-3x+2}{x-1} = \frac{-3(x-1)-1}{x-1} = -\frac{1}{x-1}-3$$

이므로 함수 $y = \frac{-3x+2}{x-1}$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주어진 정의역에서 함수

$$y = \frac{-3x+2}{x-1}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 치역은 $\{y | y \leq -4 \text{ 또는 } y \geq -2\}$



답 ⑤

038

함수 $y = \frac{3}{x-1} - 2$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2 \leq x \leq a$ 에서 함수

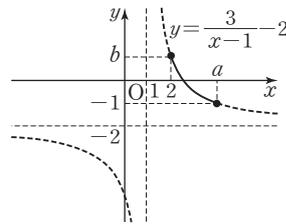
$$y = \frac{3}{x-1} - 2$$

는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 오른쪽 그림과 같이 $x=2$ 일 때 $y=b$ 이고 $x=a$ 일 때 $y=-1$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \frac{3}{2-1} - 2 = b, \frac{3}{a-1} - 2 = -1$$

이므로

$$a=4, b=1 \quad \therefore a+b=4+1=5$$



답 ①

039

함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{2}{x-a} + b = \frac{2+b(x-a)}{x-a} = \frac{bx-ab+2}{x-a}$$

이것이 $y = \frac{3x-1}{x-1}$ 과 일치해야 하므로

$$a=1, b=3 \quad \therefore a+b=1+3=4$$

답 ②

다른 풀이

$$y = \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 3$$

따라서 함수 $y = \frac{3x-1}{x-1}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$$a=1, b=3 \quad \therefore a+b=1+3=4$$

참고

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-q=f(x-p)$$

↪ x 대신 $x-p$ 대입, y 대신 $y-q$ 대입

040

함수 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{k}{x+1} + 4$$

이 함수의 그래프가 점 $(-2, 6)$ 을 지나므로

$$6 = \frac{k}{-2+1} + 4 \quad \therefore k = -2$$

답 -2

041

$$\textcircled{1} y = \frac{3x-5}{x-1} = \frac{3(x-1)-2}{x-1} = -\frac{2}{x-1} + 3$$

즉, 함수 $y = \frac{3x-5}{x-1}$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$$\textcircled{2} y = \frac{5-x}{x-2} = \frac{-(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 1$$

즉, 함수 $y = \frac{5-x}{x-2}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

$$\textcircled{3} y = \frac{10-3x}{x-3} = \frac{-3(x-3)+1}{x-3} = \frac{1}{x-3} - 3$$

즉, 함수 $y = \frac{10-3x}{x-3}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

$$\textcircled{4} y = \frac{x+6}{x+4} = \frac{(x+4)+2}{x+4} = \frac{2}{x+4} + 1$$

즉, 함수 $y = \frac{x+6}{x+4}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$\textcircled{5} y = -\frac{x+4}{x+5} = \frac{-(x+5)+1}{x+5} = \frac{1}{x+5} - 1$$

즉, 함수 $y = -\frac{x+4}{x+5}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -5만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ②이다.

답 ②

참고

두 함수 $y = \frac{a}{x-p} + q, y = \frac{b}{x-m} + n$ 의 그래프가 평행이동에 의하여 겹쳐지려면 $a=b$ 이어야 한다.

042

함수 $y = \frac{5}{x+2} - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{5}{x-a+2} + b - 1$$

..... ①

한편,

$$y = \frac{5x-25}{x-6} = \frac{5(x-6)+5}{x-6} = \frac{5}{x-6} + 5$$

이고 이것이 ㉠과 일치해야 하므로
 $-a+2=-6, b-1=5 \quad \therefore a=8, b=6$
 $\therefore a+b=8+6=14$

답 14

043

함수 $y = \frac{bx+3}{x+a} = \frac{b(x+a)-ab+3}{x+a} = \frac{3-ab}{x+a} + b$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{3-ab}{x-5+a} + b - 2$$

이것이 $y = -\frac{7}{x}$ 과 일치해야 하므로

$$3-ab = -7, -5+a=0, b-2=0 \quad \therefore a=5, b=2$$

$$\therefore a+b=5+2=7$$

답 ③

044

$y = \frac{1}{2x-6} + m = \frac{1}{2(x-3)} + m$ 이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=3, y=m$$

따라서 $m=-4, n=3$ 이므로

$$mn = -4 \times 3 = -12$$

답 ③

045

$y = \frac{x+b}{x-a} = \frac{(x-a)+a+b}{x-a} = \frac{a+b}{x-a} + 1$ 이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=a, y=1$$

이때 주어진 함수의 그래프의 한 점근선이 직선 $x=4$ 이므로

$$a=4 \dots\dots\dots ①$$

또, 함수 $y = \frac{x+b}{x-a}$, 즉 $y = \frac{x+b}{x-4}$ 의 그래프가 점 $(3, 5)$ 를 지나므로

$$\frac{3+b}{3-4} = 5 \quad \therefore b = -8 \dots\dots\dots ②$$

$$\therefore a+b = 4 + (-8) = -4 \dots\dots\dots ③$$

답 -4

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	40%
② b의 값을 구할 수 있다.	40%
③ a+b의 값을 구할 수 있다.	20%

046

$f(x) = \frac{ax-1}{x+b} = \frac{a(x+b)-ab-1}{x+b} = -\frac{ab+1}{x+b} + a$ 이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-b, y=a$$

076 정답과 풀이

따라서 $a=3, b=-1$ 이므로

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$$

$$\therefore f(3) = \frac{3 \times 3 - 1}{3 - 1} = 4$$

답 4

047

$$y = \frac{ax}{3x+1} = \frac{\frac{a}{3}x}{x+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{a}{3}(x+\frac{1}{3}) - \frac{a}{9}}{x+\frac{1}{3}} = -\frac{\frac{a}{9}}{x+\frac{1}{3}} + \frac{a}{3}$$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{1}{3}, y = \frac{a}{3}$$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-\frac{1}{3}, \frac{a}{3})$ 이므로

$$-\frac{1}{3} = b, \frac{a}{3} = \frac{1}{3} \quad \therefore a=1, b = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore a+b = 1 + (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$

답 ②

048

유리함수 $f(x) = \frac{3}{x-2a} + a+2$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=2a, y=a+2$$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표는 $(2a, a+2)$ 이고, 직선 $y=x$ 가 이 점을 지나므로

$$a+2=2a \quad \therefore a=2$$

답 ⑤

049

$$y = \frac{6-3x}{x+3} = \frac{-3(x+3)+15}{x+3} = \frac{15}{x+3} - 3$$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-3, y=-3 \dots\dots\dots ㉠$$

$$y = \frac{bx-2}{3x+a} = \frac{\frac{b}{3}x - \frac{2}{3}}{x+\frac{a}{3}}$$

$$= \frac{\frac{b}{3}(x+\frac{a}{3}) - \frac{ab}{9} - \frac{2}{3}}{x+\frac{a}{3}}$$

$$= -\frac{\frac{ab}{9} + \frac{2}{3}}{x+\frac{a}{3}} + \frac{b}{3}$$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{a}{3}, y = \frac{b}{3} \dots\dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡이 서로 일치해야 하므로

$$-\frac{a}{3} = -3, \frac{b}{3} = -3 \quad \therefore a=9, b=-9$$

$$\therefore a-b = 9 - (-9) = 18$$

답 18

050

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4, y=-2$ 이므로
함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-4} - 2 \quad (k \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

이때 이 함수의 그래프가 점 $(1, -3)$ 을 지나므로

$$-3 = \frac{k}{1-4} - 2, \quad \frac{k}{-3} = -1 \quad \therefore k=3$$

즉, 주어진 함수의 식은

$$y = \frac{3}{x-4} - 2 = \frac{3-2(x-4)}{x-4} = \frac{-2x+11}{x-4}$$

이므로 $a=-4, b=-2, c=11$

$$\therefore a+b+c = -4+(-2)+11=5$$

답 ⑤

|다른 풀이|

$$y = \frac{bx+c}{x+a} = \frac{b(x+a)-ab+c}{x+a} = \frac{c-ab}{x+a} + b \text{이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은}$$

$x=-a, y=b \quad \therefore a=-4, b=-2$

이때 함수 $y = \frac{bx+c}{x+a}$, 즉 $y = \frac{-2x+c}{x-4}$ 의 그래프가 점 $(1, -3)$

을 지나므로

$$-3 = \frac{-2+c}{1-4}, \quad -2+c=9 \quad \therefore c=11$$

$$\therefore a+b+c = -4+(-2)+11=5$$

051

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \text{에서 } y=0 \text{일 때}$$

$$0 = \frac{k}{x-2} + 1, \quad x-2 = -k \quad \therefore x=2-k$$

$$\therefore A(2-k, 0)$$

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \text{에서 } x=0 \text{일 때}$$

$$y = -\frac{k}{2} + 1$$

$$\therefore B\left(0, -\frac{k}{2} + 1\right)$$

곡선 $y = \frac{k}{x-2} + 1$ 의 점근선의 방정식은 $x=2, y=1$ 이므로

$C(2, 1)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{1-0}{2-(2-k)} = \frac{1-\left(-\frac{k}{2}+1\right)}{2-0} \quad \rightarrow \text{두 직선 AC, BC의 기울기가 서로 같다.}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{k}{4}, \quad k^2=4 \quad \therefore k=-2 \quad (\because k < 0)$$

답 ④

052

$$y = \frac{3x-2}{-x+2} = \frac{-3x+2}{x-2} = \frac{-3(x-2)-4}{x-2} = -\frac{4}{x-2} - 3 \text{이므로}$$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=2, y=-3$$

따라서 함수 $y = \frac{3x-2}{-x+2}$ 의 그래프는 점 $(2, -3)$ 에 대하여 대칭이다.

즉, $a=2, b=-3$ 이므로

$$ab = 2 \times (-3) = -6$$

답 -6

053

$$y = \frac{4x+3}{x-1} = \frac{4(x-1)+7}{x-1} = \frac{7}{x-1} + 4 \text{이므로 이 함수의 그래프}$$

의 점근선의 방정식은

$$x=1, y=4$$

이때 주어진 함수의 그래프가 직선 $y=x+k$ 에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+k$ 는 두 점근선의 교점 $(1, 4)$ 를 지난다.

$$\text{즉, } 4=1+k \text{이므로 } k=3$$

답 ③

054

점 $(1, 3)$ 에 대하여 대칭인 유리함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-1} + 3 \quad (k \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수})$$

으로 놓을 수 있다. ①

이 함수의 그래프가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = \frac{k}{0-1} + 3, \quad -k = -4$$

$$\therefore k=4 \text{ ②}$$

즉, 주어진 함수의 식은

$$y = \frac{4}{x-1} + 3 = \frac{4+3(x-1)}{x-1} = \frac{3x+1}{x-1}$$

이므로

$$a=-1, b=3, c=1 \text{ ③}$$

$$\therefore a+b+c = -1+3+1=3 \text{ ④}$$

답 3

채점 기준	비율
① 점 $(1, 3)$ 에 대하여 대칭인 유리함수의 식을 $y = \frac{k}{x-1} + 3$ 으로 놓을 수 있다.	30%
② k 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ a, b, c 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $a+b+c$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

|다른 풀이|

$$y = \frac{bx+c}{x+a} = \frac{b(x+a)-ab+c}{x+a} = \frac{c-ab}{x+a} + b \text{이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은}$$

$x=-a, y=b$

$$x=-a, y=b$$

이때 이 함수의 그래프가 점 $(1, 3)$ 에 대하여 대칭이므로

$$-a=1, b=3 \quad \therefore a=-1, b=3$$

또, 함수 $y = \frac{bx+c}{x+a}$, 즉 $y = \frac{3x+c}{x-1}$ 의 그래프가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = \frac{c}{-1} \quad \therefore c=1$$

$$\therefore a+b+c = -1+3+1=3$$

055

주어진 함수의 그래프가 두 직선 $y=x+3$, $y=-x-1$ 에 대하여 대칭이므로 이 두 직선의 교점은 주어진 함수의 그래프의 두 점근선의 교점과 같다.

두 식 $y=x+3$, $y=-x-1$ 을 연립하여 풀면

$$x=-2, y=1$$

따라서 주어진 함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x=-2, y=1$$

$$y = \frac{bx+3}{x-a} = \frac{b(x-a)+ab+3}{x-a} = \frac{ab+3}{x-a} + b \text{이므로 이 함수의}$$

그래프의 점근선의 방정식은

$$x=a, y=b$$

따라서 $a=-2, b=1$ 이므로

$$a+b=-2+1=-1$$

답 ②

056

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 곡선 $y=-\frac{2}{x}$ 를 평행이동한 것이므로

$$f(x) = -\frac{2}{x-a} + b \text{ (} a, b \text{는 상수)}$$

로 놓을 수 있다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식이

$$x=a, y=b$$

이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x$ 는 두 점근선의 교점 (a, b) 를 지난다.

$$\therefore b=a$$

한편, 함수 $f(x)$ 의 정의역이 $\{x|x \neq -2 \text{인 모든 실수}\}$ 이므로

$$a=-2$$

즉, $a=b=-2$ 이므로

$$f(x) = -\frac{2}{x+2} - 2$$

$$\therefore f(4) = -\frac{2}{4+2} - 2 = -\frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}$$

답 ②

057

주어진 그래프에서 점근선의 방정식은

$$x=2, y=3$$

함수 $y = \frac{k}{x+a} + b$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-a, y=b \quad \therefore a=-2, b=3$$

함수 $y = \frac{k}{x+a} + b$, 즉 $y = \frac{k}{x-2} + 3$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{k}{0-2} + 3, -\frac{k}{2} = -1 \quad \therefore k=2$$

$$\therefore ab+k = -2 \times 3 + 2 = -4$$

답 ②

058

주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이

$$x=-3, y=-1$$

078 정답과 풀이

이므로 함수의 식을

$$f(x) = \frac{k}{x+3} - 1 \text{ (} k \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수)}$$

로 놓을 수 있다. ①

이 함수의 그래프가 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{-2+3} - 1$$

$\therefore k=1$ ②

따라서 구하는 함수의 식은

$$f(x) = \frac{1}{x+3} - 1 = \frac{1-(x+3)}{x+3} \\ = \frac{-x-2}{x+3} = -\frac{x+2}{x+3}$$

$$\text{답 } f(x) = -\frac{x+2}{x+3}$$

채점 기준	비율
① $f(x) = \frac{k}{x+3} - 1$ 로 놓을 수 있다.	40%
② k 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $f(x)$ 를 구할 수 있다.	20%

059

주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이

$$x=-1, y=1$$

이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x+1} + 1 \text{ (} k \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수)}$$

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{2+1} + 1, \frac{k}{3} = -1$$

$$\therefore k=-3$$

따라서 함수의 식은

$$y = \frac{-3}{x+1} + 1 = \frac{-3+(x+1)}{x+1} = \frac{x-2}{x+1}$$

이므로 $a=-1, b=1, c=2$

$$\therefore a+b+c = -1+1+2=2$$

답 ⑤

060

$$y = \frac{bx+c}{x+a} = \frac{b(x+a)-ab+c}{x+a} = \frac{-ab+c}{x+a} + b \text{이므로 이 함수의}$$

그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-a, y=b$$

이때 주어진 그래프에 의하여

$$-a < 0, b > 0$$

$$\therefore a > 0, b > 0$$

주어진 그래프가 y 축과 원점 아래에서 만나므로 $x=0$ 일 때 y 좌표가 0보다 작아야 한다.

$$y = \frac{bx+c}{x+a} \text{에 } x=0 \text{을 대입하면 } y = \frac{c}{a}$$

즉, $\frac{c}{a} < 0, a > 0$ 이므로 $c < 0$

답 ③

061

함수 $y = \frac{k}{x}$ (k 는 0이 아닌 상수)의 그래프는 $k > 0$ 이면 제1사분면과 제3사분면 위에 있고, $k < 0$ 이면 제2사분면과 제4사분면 위에 있다. 따라서 그 그래프가 제1사분면과 제3사분면을 지나는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

062

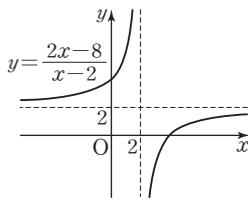
② 정의역과 치역은 모두 0을 제외한 실수 전체의 집합이다. 따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

답 ②

063

$$y = \frac{2x-8}{x-2} = \frac{2(x-2)-4}{x-2} = -\frac{4}{x-2} + 2$$

따라서 함수 $y = \frac{2x-8}{x-2}$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것으로 오른쪽 그림과 같다. 즉, 함수 $y = \frac{2x-8}{x-2}$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다.

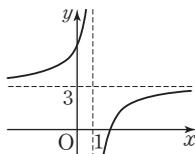


답 제3사분면

064

함수 $y = \frac{k}{x-1} + 3$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1, y=3$

$k < 0$ 이면 함수 $y = \frac{k}{x-1} + 3$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제3사분면을 지나지 않는다. 따라서 $k > 0$ 이어야 한다.



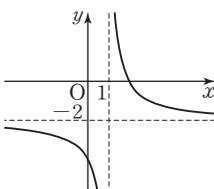
이때 함수 $y = \frac{k}{x-1} + 3$ 의 그래프가 모든 사분면을 지나야 하므로 오른쪽 그림과 같이 그래프가 y 축과 원점 아래에서 만나야 한다. 즉, $x=0$ 일 때의 y 의 값이 0보다 작아야 하므로

$$\frac{k}{0-1} + 3 < 0 \quad \therefore k > 3$$

답 ⑤

065

ㄱ. 함수 $y = \frac{2}{x-1} - 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 3, 4사분면을 지난다. (참)



ㄴ. 함수 $y = \frac{2}{x-1} - 2$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1, y=-2$ 이므로

그 그래프는 두 직선 $y=(x-1)-2, y=-(x-1)-2$, 즉 $y=x-3, y=-x-1$ 에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 정의역은 $\{x|x \neq 1 \text{인 실수}\}$ 이다. (거짓)

ㄹ. 함수 $y = \frac{2}{x-1} - 2$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

참고

함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프가 두 직선 $y=x, y=-x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y = \frac{2}{x-1} - 2$ 의 그래프는 두 직선 $y=x, y=-x$ 를 각각 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 두 직선 $y=x-3, y=-x-1$ 에 대하여 대칭이다.

066

$$y = \frac{bx+4}{x+a} = \frac{b(x+a)-ab+4}{x+a} = \frac{4-ab}{x+a} + b$$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x \neq -a \text{인 실수}\}$, 치역은 $\{y|y \neq b \text{인 실수}\}$ 이다.

즉, $-a=3, b=-5$ 이므로

$$a=-3, b=-5$$

$$\therefore ab = -3 \times (-5) = 15$$

답 15

067

두 함수 $y = \frac{a}{x}, y = \frac{b}{x}$ 의 그래프가 제1사분면 위에 있으므로 $a > 0, b > 0$

이때 함수 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프가 함수 $y = \frac{b}{x}$ 의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$$|a| > |b| \quad \therefore a > b > 0 \quad \text{..... ㉠}$$

두 함수 $y = \frac{c}{x}, y = \frac{d}{x}$ 의 그래프가 제2사분면 위에 있으므로

$$c < 0, d < 0$$

이때 함수 $y = \frac{c}{x}$ 의 그래프가 함수 $y = \frac{d}{x}$ 의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$$|c| > |d| \quad \therefore c < d < 0 \quad \text{..... ㉡}$$

음수는 절댓값이 클수록 작아진다.

㉠, ㉡에 의하여

$$c < d < b < a$$

답 $c < d < b < a$

068

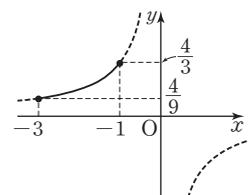
$-3 \leq x \leq -1$ 에서 함수 $y = -\frac{4}{3x}$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x = -1$ 일 때 최댓값 $\frac{4}{3}$,

$x = -3$ 일 때 최솟값 $\frac{4}{9}$

를 갖는다.



즉, $M = \frac{4}{3}$, $m = \frac{4}{9}$ 이므로

$$\frac{M}{m} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{9}} = 3$$

답 ③

069

$\frac{1}{2} \leq x \leq a$ 에서 최댓값이 b , 최솟값이 $\frac{1}{2}$

이므로 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같다. 즉,

$x = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 b ,

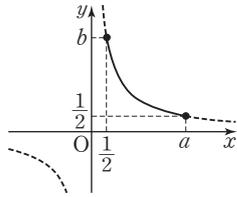
$x = a$ 일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$

을 갖는다.

따라서 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프가 두 점 $(\frac{1}{2}, b)$, $(a, \frac{1}{2})$ 을 지나므로

$$b = \frac{3}{2 \times \frac{1}{2}}, \frac{1}{2} = \frac{3}{2a} \quad \therefore a=3, b=3$$

$$\therefore a+b=3+3=6$$



답 ③

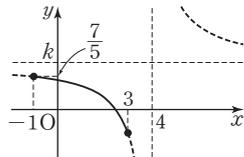
070

함수 $y = \frac{3}{x-4} + k$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

$-1 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y = \frac{3}{x-4} + k$ 의

최댓값이 $\frac{7}{5}$ 이려면 그 그래프는 오른쪽

그림과 같아야 한다.



①

즉, 함수의 그래프가 점 $(-1, \frac{7}{5})$ 을 지나므로

$$\frac{7}{5} = \frac{3}{-1-4} + k \quad \therefore k=2 \quad \dots\dots\dots ②$$

또, 함수 $y = \frac{3}{x-4} + k$, 즉 $y = \frac{3}{x-4} + 2$ 가 $x=3$ 에서 최솟값을 가지므로 최솟값은

$$\frac{3}{3-4} + 2 = -1 \quad \dots\dots\dots ③$$

답 $k=2$, 최솟값: -1

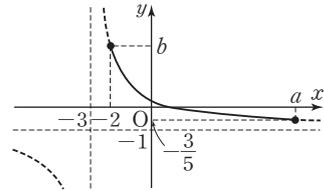
채점 기준	비율
① 조건을 만족시키는 그래프를 그릴 수 있다.	40%
② k 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ 최솟값을 구할 수 있다.	30%

071

$$y = \frac{-x+1}{x+3} = \frac{-(x+3)+4}{x+3} = \frac{4}{x+3} - 1$$

080 정답과 풀이

따라서 함수 $y = \frac{-x+1}{x+3}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.



정의역이 $\{x | -2 \leq x \leq a\}$ 일 때, 함수 $y = \frac{-x+1}{x+3}$ 의 그래프는 위의 그림과 같으므로

$x = -2$ 에서 최댓값 b , $x = a$ 에서 최솟값 $-\frac{3}{5}$

을 갖는다.

따라서 함수 $y = \frac{-x+1}{x+3}$ 의 그래프가 두 점 $(-2, b)$, $(a, -\frac{3}{5})$ 을 지나므로

$$b = \frac{-(-2)+1}{-2+3}, -\frac{3}{5} = \frac{-a+1}{a+3} \quad \therefore a=7, b=3$$

$$\therefore a-b=7-3=4$$

답 ④

072

(1) $y = \frac{x-1}{x+2}$ 에서

$$y(x+2) = x-1, (y-1)x = -2y-1$$

$$\therefore x = \frac{-2y-1}{y-1}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \frac{-2x-1}{x-1}$$

(2) $y = \frac{2x+3}{x-3}$ 에서

$$y(x-3) = 2x+3, (y-2)x = 3y+3$$

$$\therefore x = \frac{3y+3}{y-2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \frac{3x+3}{x-2}$$

$$\text{답 (1) } y = \frac{-2x-1}{x-1} \quad (2) y = \frac{3x+3}{x-2}$$

073

$y = \frac{ax-1}{2x+1}$ 로 놓으면

$$y(2x+1) = ax-1, (2y-a)x = -y-1$$

$$\therefore x = \frac{-y-1}{2y-a}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{-x-1}{2x-a}$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{2x-a} \quad \dots\dots\dots ①$$

$f = f^{-1}$ 이므로

$$\frac{ax-1}{2x+1} = \frac{-x-1}{2x-a}$$

∴ $a = -1$ ②

답 -1

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 를 구할 수 있다.	70%
② a 의 값을 구할 수 있다.	30%

| 다른 풀이 |

$f = f^{-1}$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = x$$

이때

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= f\left(\frac{ax-1}{2x+1}\right) \\ &= \frac{a \times \frac{ax-1}{2x+1} - 1}{2 \times \frac{ax-1}{2x+1} + 1} \\ &= \frac{a(ax-1) - (2x+1)}{2(ax-1) + (2x+1)} \\ &= \frac{(a^2-2)x - a - 1}{(2a+2)x - 1} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{(a^2-2)x - a - 1}{(2a+2)x - 1} &= x \\ \therefore (a^2-2)x - a - 1 &= (2a+2)x^2 - x \\ \text{이것이 } x \text{에 대한 항등식이므로} \\ 2a+2=0, a^2-2 &= -1, -a-1=0 \\ \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

074

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 모두 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(-1, 3)$, $(3, -1)$ 을 지난다.

$$\begin{aligned} \text{즉, } 3 &= \frac{-a+b}{-1+4}, -1 = \frac{3a+b}{3+4} \text{이므로} \\ -a+b &= 9, 3a+b = -7 \\ \text{위의 두 식을 연립하여 풀면} \\ a &= -4, b = 5 \\ \therefore a+b &= -4+5=1 \end{aligned}$$

답 ④

075

$$f(x) = \frac{2x+5}{x+3} = \frac{2(x+3)-1}{x+3} = -\frac{1}{x+3} + 2$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식이

$$x = -3, y = 2$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(-3, 2)$ 에 대하여 대칭이다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 점 $(2, -3)$ 에 대하여 대칭이다.

$$\begin{aligned} \text{즉, } p &= 2, q = -3 \text{이므로} \\ p-q &= 2 - (-3) = 5 \end{aligned}$$

답 ⑤

01 실력을 높이는 연습문제

본문 142쪽

$$\begin{aligned} \frac{a^2-9b^2}{a^2-6ab+9b^2} \times \frac{a-3b}{a^2+3ab} &= \frac{(a+3b)(a-3b)}{(a-3b)^2} \times \frac{a-3b}{a(a+3b)} \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{a}$

02

주어진 식의 양변에 $(x+2)^{11}$ 을 곱하여 정리하면

$$x^{10} + 1 = a_1(x+2)^{10} + a_2(x+2)^9 + \dots + a_{10}(x+2)$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^{10} + 1 = a_1(-1+2)^{10} + a_2(-1+2)^9 + \dots + a_{10}(-1+2)$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 2$$

답 ②

풍샘 개념 CHECK

미정계수법 高 公 通 数 学 1

항등식의 뜻과 성질을 이용하여 등식에서 미지의 계수를 정하는 방법을 미정계수법이라고 한다.

- (1) 계수 비교법: 등식의 양변의 동류항의 계수를 비교하여 미지의 계수를 정하는 방법
- (2) 수치 대입법: 등식의 양변의 문자에 적당한 수를 대입하여 미지의 계수를 정하는 방법

03

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x-2} - \frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} \\ &= \frac{(x-2)+1}{x-2} - \frac{(x-1)+1}{x-1} - \frac{x+1}{x} + \frac{(x+1)+1}{x+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x-2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \\ &= \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) \\ &= \frac{2}{x(x-2)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(x-1)(x+1) - 2x(x-2)}{x(x-1)(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{4x-2}{x(x-1)(x-2)(x+1)} \end{aligned}$$

따라서 $a=4, b=-2$ 이므로

$$a+b = 4 + (-2) = 2$$

답 ①

| 다른 풀이 |

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x-2} - \frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} \\ &= \left(\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x}\right) + \left(\frac{x+2}{x+1} - \frac{x}{x-1}\right) \\ &= \frac{x(x-1) - (x+1)(x-2)}{x(x-2)} + \frac{(x+2)(x-1) - x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{2}{x(x-2)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2(x-1)(x+1) - 2x(x-2)}{x(x-1)(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{4x-2}{x(x-1)(x-2)(x+1)} \end{aligned}$$

04

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{483} \\ &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{21 \times 23} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{23}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{23}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{22}{23} = \frac{11}{23} \end{aligned}$$

답 ③

05

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} &= \frac{(n+3) - (n+1)}{(n+1)(n+3)} = \frac{n+5}{(n+1)(n+3)} \\ \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+5} &= \frac{(n+5) - (n+3)}{(n+3)(n+5)} = \frac{n+5}{(n+3)(n+5)} \\ \frac{n+5}{n+1} &= k \quad (k \text{는 자연수}) \text{로 놓으면} \\ n+5 &= k(n+1), \quad (k-1)n = 5-k \quad \begin{matrix} \curvearrowright k=1 \text{이면 } 0 \times n = 4 \text{ 이므로 모순이다.} \\ \therefore k \neq 1 \end{matrix} \\ k-1 &\neq 0 \text{ 이므로 양변을 } k-1 \text{ 로 나누면} \\ n &= \frac{5-k}{k-1} = \frac{-(k-1)+4}{k-1} = -1 + \frac{4}{k-1} \\ n &\text{이 정수이려면 } k-1 \text{이 } 4 \text{의 약수이어야 하고, } k-1 > 0 \text{ 이므로} \\ k-1 &= 1, 2, 4 \\ \therefore k &= 2, 3, 5 \end{aligned}$$

따라서 정수 n 은 3, 1, 0의 3개이다.

답 3

06

$x \neq 0$ 이므로 $x^2 + 4x + 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x + 4 + \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = -4$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \text{ 이므로}$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (-4)^2 - 4 = 12$$

이때 $-1 < x < 0$ 이므로

$$x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} > 0$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}$$

또, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = (-4)^2 - 2 = 14$ 이므로

$$\begin{aligned} x^4 - \frac{1}{x^4} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= 14 \times (-4) \times 2\sqrt{3} = -112\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 $-112\sqrt{3}$

07

$$\frac{4}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c} = 0 \text{ 이므로 } \frac{5ab + 4bc + 3ca}{abc} = 0$$

$$\therefore 5ab + 4bc + 3ca = 0 \quad (\because abc \neq 0) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2a}{(a+b)(a+c)} + \frac{3b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} \\ &= \frac{2a(b+c) + 3b(c+a) + c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{5ab + 4bc + 3ca}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= 0 \quad (\because \text{㉠}) \end{aligned}$$

답 0

08

ㄱ. $3x + 2 = 0$ 에서 $x = -\frac{2}{3}$
따라서 주어진 유리함수의 정의역은
 $\left\{x \mid x \neq -\frac{2}{3} \text{인 실수}\right\}$

ㄴ. $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 이므로 주어진 유리함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

ㄷ. $x^2 - 9 = 0$ 에서 $x = \pm 3$
따라서 주어진 유리함수의 정의역은
 $\{x \mid x \neq \pm 3 \text{인 실수}\}$

ㄹ. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 1 > 0$ 이므로 주어진 유리함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

따라서 정의역이 실수 전체의 집합인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

09

함수 $y = \frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{5}{x-3} + 2$$

이 함수의 그래프가 점 $(a, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \frac{5}{a-3} + 2, \quad \frac{5}{a-3} = 1$$

$$a-3 = 5 \quad \therefore a = 8$$

답 ⑤

10

$$y = -\frac{kx}{x+2} = \frac{-k(x+2) + 2k}{x+2} = \frac{2k}{x+2} - k \text{ 이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은}$$

$$x = -2, y = -k$$

$$y = \frac{x+3}{x-k} = \frac{(x-k) + k+3}{x-k} = \frac{k+3}{x-k} + 1 \text{ 이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은}$$

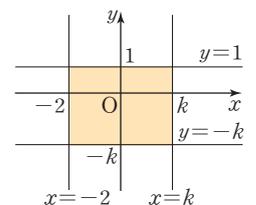
$$x = k, y = 1$$

k 가 양수이므로 두 함수의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.
이 부분의 넓이가 12이므로

$$\{k - (-2)\} \{1 - (-k)\} = 12$$

$$(k+2)(k+1) = 12$$

$$k^2 + 3k - 10 = 0$$



$$(k+5)(k-2)=0$$

$$\therefore k=2 (\because k>0)$$

답 2

11

곡선 $y=g(x)$ 는 유리함수 $f(x)=\frac{3x+k}{x+4}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로

$$g(x)=\frac{3(x+2)+k}{(x+2)+4}+3=\frac{3x+6+k}{x+6}+3$$

$$=\frac{3(x+6)+k-12}{x+6}+3=\frac{k-12}{x+6}+6$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 의 점근선의 방정식은 $x=-6, y=6$

이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-6, 6)$ 이다.

점 $(-6, 6)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$6=\frac{3 \times (-6)+k}{-6+4}, -18+k=-12 \quad \therefore k=6$$

답 5

12

문제 접근하기

함수 $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이라면 함수 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$ 의 그래프의 점근선이 x 축, y 축이어야 함을 이용한다.

함수 $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0, y=0$ 이어야 한다.

$$f(x)=\frac{a}{x-6}+b \text{이므로}$$

$$f(x+a)+\frac{a}{2}=\frac{a}{x+a-6}+b+\frac{a}{2}$$

따라서 함수 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=6-a, y=b+\frac{a}{2}$$

이므로

$$6-a=0, b+\frac{a}{2}=0 \quad \therefore a=6, b=-3$$

$$\text{즉, } f(x)=\frac{6}{x-6}-3 \text{이므로}$$

$$f(b)=f(-3)=\frac{6}{-3-6}-3=-\frac{11}{3}$$

답 4

13

함수 $y=\frac{a}{x-b}+c$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=b, y=c$$

주어진 그래프에 의하여 $b<0, c<0$

함수 $y=\frac{a}{x-b}+c$ 의 그래프는 함수 $y=\frac{a}{x}$ 의 그래프를 평행이동

한 것이고 함수 $y=\frac{a}{x-b}+c$ 의 그래프에서 함수 $y=\frac{a}{x}$ 의 그래프

가 제1사분면과 제3사분면 위에 그려짐을 알 수 있다.

$$\therefore a>0$$

$$a>0, b<0 \text{이므로 } a-b>0$$

또, 주어진 그래프가 원점을 지나므로

$$0=\frac{a}{0-b}+c, \frac{a}{b}=c \quad \therefore a=bc$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 4

14

문제 접근하기

주어진 함수의 식을 $y=-\frac{k}{x-p}+q$ 의 꼴로 변형하여 그래프의 점근선의 방정식을 구한 후 그래프가 제4사분면을 지나도록 하는 조건을 찾는다.

$$y=\frac{2x+n-8}{x+2}=\frac{2(x+2)+n-12}{x+2}=\frac{n-12}{x+2}+2$$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-2, y=2$$

$n-12>0$, 즉 $n>12$ 이면 함수

$$y=\frac{2x+n-8}{x+2}$$
의 그래프는 오른쪽 그림과

같이 제4사분면을 지나지 않는다.

따라서 $n<12$ 이어야 한다.

$$\text{이때 함수 } y=\frac{2x+n-8}{x+2}$$
의 그래프가 제4

사분면을 지나야 하므로 오른쪽 그림과 같이 그래프가 y 축과 원점 아래에서 만나야 한다.

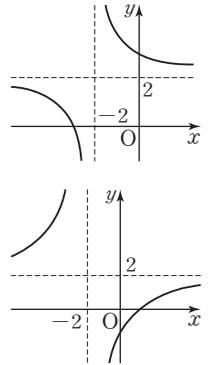
즉, $x=0$ 일 때의 y 의 값이 0보다 작아야 하므로

$$\frac{0+n-8}{0+2}<0 \quad \therefore n<8$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$1+2+3+4+5+6+7=28$$

답 28



15

$$f(x)=\frac{x+c}{ax+b}=\frac{\frac{1}{a}x+\frac{c}{a}}{x+\frac{b}{a}}=\frac{\frac{1}{a}\left(x+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a}}{x+\frac{b}{a}}$$

$$=\frac{-\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a}}{x+\frac{b}{a}}+\frac{1}{a}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-\frac{b}{a}, y=\frac{1}{a}$$

이므로 그 그래프는 점 $\left(-\frac{b}{a}, \frac{1}{a}\right)$ 에 대하여 대칭이다.

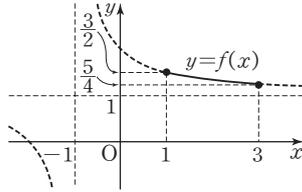
즉, $-\frac{b}{a} = -1, \frac{1}{a} = 1$ 이므로 $a=1, b=1$

함수 $f(x) = \frac{x+c}{ax+b}$, 즉 $f(x) = \frac{x+c}{x+1}$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를

지나므로

$$2 = \frac{0+c}{0+1} \quad \therefore c=2$$

$$\therefore f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$



$1 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위의 그림과 같으므로 $f(x)$ 는

$$x=1 \text{에서 최댓값 } \frac{3}{2}, x=3 \text{에서 최솟값 } \frac{5}{4}$$

를 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$$

답 $\frac{11}{4}$

|다른 풀이|

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(-1, 1)$ 에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은 $x=-1, y=1$ 이다.

따라서

$$f(x) = \frac{k}{a(x+1)} + 1 \quad (k \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수})$$

로 놓을 수 있다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{k}{a(0+1)} + 1, \frac{k}{a} = 1 \quad \therefore k=a$$

$$\therefore f(x) = \frac{a}{a(x+1)} + 1 = \frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x+2}{x+1}$$

$$\therefore a=1, b=1, c=2$$

16

$$y = \frac{2x}{x+3} = \frac{2(x+3)-6}{x+3} = -\frac{6}{x+3} + 2$$

따라서 함수 $y = \frac{2x}{x+3}$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{6}{x}$ 의 그래프를 x 축

의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y=mx+2$ 는 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 2)$ 를 지나므로 다음과 같이 나누어 생각해 보자.

(i) $m=0$ 일 때

직선 $y=mx+2$, 즉 $y=2$ 는 함수 $y = \frac{2x}{x+3}$ 의 그래프의 한 점

근선이므로 함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

(ii) $m \neq 0$ 일 때

$$\frac{2x}{x+3} = mx+2 \text{에서}$$

$$2x = (mx+2)(x+3) \quad \therefore mx^2 + 3mx + 6 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = (3m)^2 - 4 \times m \times 6 < 0$$

$$9m^2 - 24m < 0, 3m(3m-8) < 0$$

$$\therefore 0 < m < \frac{8}{3}$$

(i), (ii)에서 $0 < m < \frac{8}{3}$

답 ②

참고

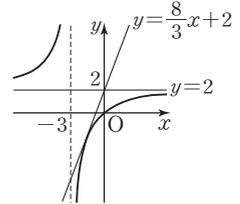
$m=0$ 일 때와 $m = \frac{8}{3}$ 일 때의 직선

$y=mx+2$ 는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y = \frac{2x}{x+3}$ 의 그래프와 직선

$y=mx+2$ 가 만나지 않으려면 $0 < m < \frac{8}{3}$ 이

여야 한다.



17

문제 접근하기

$f^1(5), f^2(5), f^3(5), \dots$ 의 값을 차례대로 구한 후 그 규칙성을 파악하여 $f^{2021}(5)$ 의 값을 구한다.

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \text{이므로}$$

$$f^1(5) = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$f^2(5) = (f \circ f)(5) = f(f(5)) = f\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{\frac{4}{5}-1}{\frac{4}{5}} = -\frac{1}{4}$$

$$f^3(5) = (f \circ f^2)(5) = f(f^2(5)) = f\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}-1}{-\frac{1}{4}} = 5$$

$$f^4(5) = (f \circ f^3)(5) = f(f^3(5)) = f(5)$$

$$= \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$$

⋮

즉, $f^n(5)$ 의 값은 $\frac{4}{5}, -\frac{1}{4}, 5$ 가 이 순서대로 반복되고

$$1022 = 3 \times 340 + 2 \text{이므로}$$

$$f^{1022}(5) = f^2(5) = -\frac{1}{4}$$

답 ②

|다른 풀이|

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \text{이므로}$$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$= \frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{x-1}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f\left(-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{-\frac{1}{x-1}-1}{-\frac{1}{x-1}} = x$$

09

무리식과 무리함수

기본을 다지는 유형

본문 147쪽

따라서 $f^{3n}(x)$ (n 은 자연수)는 항등함수이므로

$$f^1(x) = f^4(x) = f^7(x) = \dots = \frac{x-1}{x}$$

$$f^2(x) = f^5(x) = f^8(x) = \dots = -\frac{1}{x-1}$$

$$f^3(x) = f^6(x) = f^9(x) = \dots = x$$

즉, $f^{1022}(x) = f^{3 \times 340 + 2}(x) = f^2(x) = -\frac{1}{x-1}$ 이므로

$$f^{1022}(5) = -\frac{1}{5-1} = -\frac{1}{4}$$

18

$$(f \circ g^{-1})^{-1}(4) = (g \circ f^{-1})(4) = g(f^{-1}(4))$$

$f^{-1}(4) = k$ 라고 하면 $f(k) = 4$ 이므로

$$\frac{k}{k+2} = 4, k = 4k+8$$

$$\therefore k = -\frac{8}{3}$$

따라서 $f^{-1}(4) = -\frac{8}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} (f \circ g^{-1})^{-1}(4) &= g(f^{-1}(4)) = g\left(-\frac{8}{3}\right) \\ &= \frac{3 \times \left(-\frac{8}{3}\right) - 2}{-\frac{8}{3}} = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{15}{4}$

|다른 풀이|

$y = \frac{x}{x+2}$ 로 놓으면

$$(x+2)y = x, (y-1)x = -2y$$

$$\therefore x = -\frac{2y}{y-1}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -\frac{2x}{x-1}$

$$\therefore f^{-1}(x) = -\frac{2x}{x-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ g^{-1})^{-1}(4) &= (g \circ f^{-1})(4) = g(f^{-1}(4)) \\ &= g\left(-\frac{2 \times 4}{4-1}\right) = g\left(-\frac{8}{3}\right) \\ &= \frac{3 \times \left(-\frac{8}{3}\right) - 2}{-\frac{8}{3}} = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

001

(1) $x+5 \geq 0$ 에서 $x \geq -5$

(2) $x-3 \geq 0$ 에서 $x \geq 3$ ㉠

$x+2 \geq 0$ 에서 $x \geq -2$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x \geq 3$

(3) $6+3x \geq 0$ 에서 $3x \geq -6$

$\therefore x \geq -2$ ㉢

$4-x \geq 0$ 에서 $x \leq 4$ ㉣

㉢, ㉣에서 $-2 \leq x \leq 4$

(4) $x+3 \geq 0$ 에서 $x \geq -3$ ㉤

$6-x > 0$ 에서 $x < 6$ ㉥

㉤, ㉥에서 $-3 \leq x < 6$

답 (1) $x \geq -5$ (2) $x \geq 3$

(3) $-2 \leq x \leq 4$ (4) $-3 \leq x < 6$

002

$3-x \geq 0$ 에서 $x \leq 3$ ㉦

$3x+7 > 0$ 에서 $3x > -7$

$\therefore x > -\frac{7}{3}$ ㉧

㉦, ㉧에서

$-\frac{7}{3} < x \leq 3$

따라서 모든 정수 x 의 값의 합은

$-2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 = 3$

답 3

003

$8-2x \geq 0$ 에서 $2x \leq 8$

$\therefore x \leq 4$ ㉨

$x-3 \neq 0$ 에서 $x \neq 3$ ㉩

㉨, ㉩에서

$x < 3$ 또는 $3 < x \leq 4$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 4의 3개이다.

답 ③

004

$x+2 \geq 0$ 에서 $x \geq -2$ ㉪

$1-x \geq 0$ 에서 $x \leq 1$ ㉫

㉪, ㉫에서 $-2 \leq x \leq 1$ ㉬

$-2 \leq x \leq 1$ 에서 $x-3 < 0, x+4 > 0$ 이므로

$|x-3| + |x+4| = -(x-3) + x+4 = 7$ ㉭

답 7

채점 기준	비율
① $\sqrt{x+2}-\sqrt{1-x}$ 의 값이 실수가 되도록 하는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
② $ x-3 + x+4 $ 를 간단히 할 수 있다.	50%

005

(1) $(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1) = (\sqrt{2x+1})^2 - 1^2$
 $= 2x+1-1=2x$

(2) $(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}) = (\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{x-3})^2$
 $= x+3-(x-3)=6$

답 (1) $2x$ (2) 6

006

(1) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$
 $= \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$

(2) $\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}$
 $= \frac{x+2+x+2\sqrt{x^2+2x}}{(x+2)-x}$
 $= \frac{2(x+1)+2\sqrt{x^2+2x}}{2}$
 $= x+1+\sqrt{x^2+2x}$

답 (1) $\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$ (2) $x+1+\sqrt{x^2+2x}$

007

$-2 < a < 1$ 이므로
 $a+2 > 0, a-1 < 0$
 $\therefore \sqrt{a^2+4a+4} + \sqrt{a^2-2a+1} = \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(a-1)^2}$
 $= |a+2| + |a-1|$
 $= a+2 - (a-1)$
 $= 3$

답 ④

008

$x^2-4 = (a+\frac{1}{a})^2 - 4 = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = (a-\frac{1}{a})^2$ ①

이때 $a > 1$ 이므로 $0 < \frac{1}{a} < 1$
 $\therefore a - \frac{1}{a} > 0$ ②

$\therefore \sqrt{x^2-4} - x = \sqrt{(a-\frac{1}{a})^2} - (a+\frac{1}{a})$
 $= |a-\frac{1}{a}| - (a+\frac{1}{a})$
 $= a - \frac{1}{a} - a - \frac{1}{a}$
 $= -\frac{2}{a}$ ③

답 $-\frac{2}{a}$

채점 기준	비율
① x^2-4 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② $a-\frac{1}{a}$ 의 부호를 구할 수 있다.	30%
③ $\sqrt{x^2-4}-x$ 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%

009

$$\frac{1}{a+\sqrt{ab}} + \frac{1}{b+\sqrt{ab}} = \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} + \frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}$$

$$= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

답 ④

010

$\sqrt{x+1}\sqrt{4-y} = -\sqrt{(x+1)(4-y)}$ 이고 $x \neq -1, y \neq 4$ 이므로
 $x+1 < 0, 4-y < 0$
따라서 $x < -1, y > 4$ 이므로
 $x-y < 0$
 $\therefore \sqrt{(x+1)^2} + |4-y| - \sqrt{(x-y)^2}$
 $= |x+1| + |4-y| - |x-y|$
 $= -(x+1) - (4-y) + (x-y)$
 $= -5$

답 -5

011

$\frac{\sqrt{a-3}}{\sqrt{a-7}} = -\sqrt{\frac{a-3}{a-7}}$ 이므로
 $a-3 > 0, a-7 < 0$ 또는 $a-3 < 0$
 $\therefore \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(a-7)^2} = |a-3| + |a-7|$
 $= a-3 - (a-7)$
 $= 4$

답 ②

012

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} + \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})}$$

$$+ \frac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

$$= \frac{(2+x) + (2-x) - 2\sqrt{4-x^2}}{(2+x) - (2-x)} + \frac{(2+x) + (2-x) + 2\sqrt{4-x^2}}{(2+x) - (2-x)}$$

$$= \frac{4-2\sqrt{4-x^2}}{2x} + \frac{4+2\sqrt{4-x^2}}{2x}$$

$$= \frac{8}{2x} = \frac{4}{x}$$

$\therefore k=4$

답 ⑤

013

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} &= \frac{(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{x-1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

014

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} &= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) + (\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} \\ &= \frac{2\sqrt{x+1}}{(x+1)-x} = 2\sqrt{x+1} \\ &= 2\sqrt{8+1} = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

답 ②

015

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(x+2)-(x+1)} \\ &= \sqrt{x+2}-\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

①

이므로

$$\begin{aligned} f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(398) &= (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}-\sqrt{4}) + \dots + (\sqrt{400}-\sqrt{399}) \\ &= \sqrt{400}-\sqrt{2} = 20-\sqrt{2} \end{aligned}$$

②

따라서 $a=20, b=-1$ 이므로

$$a+b = 20 + (-1) = 19$$

③

답 19

채점 기준	비율
① $f(x)$ 의 분모를 유리화할 수 있다.	40%
② $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(398)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

016

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2 \\ \therefore \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} &= \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}+1 + (x-2\sqrt{x}+1)}{x-1} \\ &= \frac{2(x+1)}{x-1} = \frac{2\{(\sqrt{5}+2)+1\}}{(\sqrt{5}+2)-1} \\ &= \frac{2(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} \\ &= \frac{2(2+2\sqrt{5})}{4} = 1+\sqrt{5} \end{aligned}$$

답 ④

017

$$\begin{aligned} x &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\ &= \frac{4+3-4\sqrt{3}}{4-3} = 7-4\sqrt{3} \\ y &= \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{4+3+4\sqrt{3}}{4-3} = 7+4\sqrt{3} \\ \therefore \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - \sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\ &= \frac{x+\sqrt{xy}-\sqrt{xy}+y}{x-y} \\ &= \frac{x+y}{x-y} = \frac{(7-4\sqrt{3})+(7+4\sqrt{3})}{(7-4\sqrt{3})-(7+4\sqrt{3})} \\ &= \frac{14}{-8\sqrt{3}} = -\frac{7}{4\sqrt{3}} \\ &= -\frac{7\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

답 ①

018

$c, y=\sqrt{2}x-1$ 은 다항함수이다.

따라서 무리함수인 것은 \neg, ι, κ 이다.

답 ④

019

(1) $x+3 \geq 0$ 에서 $x \geq -3$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x | x \geq -3\}$

(2) $5-2x \geq 0$ 에서 $x \leq \frac{5}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x | x \leq \frac{5}{2}\}$

(3) $4x-3 \geq 0$ 에서 $x \geq \frac{3}{4}$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x | x \geq \frac{3}{4}\}$

(4) $-3x+6 \geq 0$ 에서 $x \leq 2$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x | x \leq 2\}$

답 (1) $\{x | x \geq -3\}$ (2) $\{x | x \leq \frac{5}{2}\}$

(3) $\{x | x \geq \frac{3}{4}\}$ (4) $\{x | x \leq 2\}$

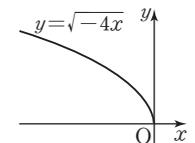
020

(1) 함수 $y=\sqrt{-4x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로

정의역은 $\{x | x \leq 0\}$

치역은 $\{y | y \geq 0\}$



(2) 함수 $y=\sqrt{2(x-1)}+1$ 의 그래프는 함수

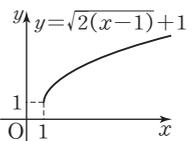
$y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만

큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것

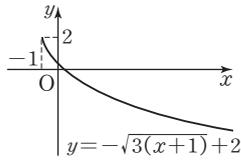
이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x | x \geq 1\}$

치역은 $\{y | y \geq 1\}$



- (3) 함수 $y = -\sqrt{3(x+1)} + 2$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x \geq -1\}$
치역은 $\{y|y \leq 2\}$

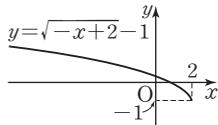


답 풀이 참조

021

(1) $y = \sqrt{-x+2} - 1 = \sqrt{-(x-2)} - 1$

즉, 함수 $y = \sqrt{-x+2} - 1$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

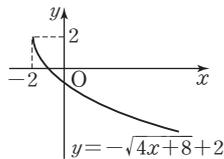


따라서 정의역은 $\{x|x \leq 2\}$

치역은 $\{y|y \geq -1\}$

(2) $y = -\sqrt{4x+8} + 2 = -\sqrt{4(x+2)} + 2$

즉, 함수 $y = -\sqrt{4x+8} + 2$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x \geq -2\}$

치역은 $\{y|y \leq 2\}$

답 풀이 참조

022

$y = \sqrt{3x+9} - 1 = \sqrt{3(x+3)} - 1$

따라서 함수 $y = \sqrt{3x+9} - 1$ 의 정의역은 $\{x|x \geq -3\}$, 치역은

$\{y|y \geq -1\}$ 이므로

$p = -3, q = -1$

$\therefore \frac{p}{q} = \frac{-3}{-1} = 3$

답 ②

023

함수 $y = -\sqrt{x-a} + a + 2$ 의 그래프가 점 $(a, -a)$ 를 지나므로

$-a = -\sqrt{a-a} + a + 2, -2a = 2 \quad \therefore a = -1$

따라서 주어진 함수는 $y = -\sqrt{x+1} + 1$ 이므로 치역은

$\{y|y \leq 1\}$

답 ①

024

$mx + 12 \geq 0$ 에서

$mx \geq -12$

이 부등식의 해가 $x \geq -3$ 이므로 $m > 0$

$\therefore x \geq -\frac{12}{m}$

088 정답과 풀이

즉, $-\frac{12}{m} = -3$ 이므로

$m = 4$ ①

함수 $y = -\sqrt{mx+12} + n$, 즉 $y = -\sqrt{4x+12} + n$ 의 그래프가 점 $(-2, 3)$ 을 지나므로

$3 = -\sqrt{4 \times (-2) + 12} + n, 3 = -\sqrt{4} + n$

$\therefore n = 5$ ②

$\therefore m + n = 4 + 5 = 9$ ③

답 9

채점 기준	비율
① m 의 값을 구할 수 있다.	40%
② n 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $m+n$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

025

함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = \sqrt{2(x-1)} + 3$

이 함수의 그래프가 점 $(9, a)$ 를 지나므로

$a = \sqrt{2(9-1)} + 3 = 4 + 3 = 7$

답 ③

026

함수 $y = \sqrt{a-3x} - 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = \sqrt{a-3(x+2)} - 2 + 1 = \sqrt{a-6-3x} - 1$

이 함수의 그래프가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$2 = \sqrt{a-6-3 \times (-1)} - 1, \sqrt{a-3} = 3$

양변을 제곱하면

$a-3=9 \quad \therefore a=12$

답 12

027

함수 $y = -\sqrt{2x-3} + 1$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y = -\sqrt{-2x-3} + 1$

$\therefore y = \sqrt{-2x-3} - 1$

이 함수의 그래프가 점 $(-2, a)$ 를 지나므로

$a = \sqrt{-2 \times (-2) - 3} - 1 = 1 - 1 = 0$

답 ③

참고

함수 $y = f(x)$ 의 그래프를

(1) x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y = f(x)$

y 대신 $-y$ 대입

(2) y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y = f(-x)$

x 대신 $-x$ 대입

(3) 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y = f(-x)$

x 대신 $-x$ 대입, y 대신 $-y$ 대입

(4) 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $x = f(y)$

x 대신 y 대입, y 대신 x 대입

028

함수 $y = \sqrt{3-x} - 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{3-(x-k)} - 2 = \sqrt{3+k-x} - 2$$

이 함수의 그래프가 y 축과 만나는 점의 y 좌표는 $\sqrt{3+k} - 2$ 이고 이 것이 양수이므로

$$\sqrt{3+k} - 2 > 0, \sqrt{3+k} > 2$$

양변을 제곱하면

$$3+k > 4 \quad \therefore k > 1$$

답 $k > 1$

029

함수 $y = \sqrt{a(x+2)} - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{a(x-b+2)} - 3 + c = \sqrt{ax-ab+2a} - 3 + c$$

이것이 $y = \sqrt{18-6x} + 5$ 와 일치하므로

$$a = -6, -ab + 2a = 18, -3 + c = 5$$

$$\therefore a = -6, b = 5, c = 8$$

$$\therefore a + b + c = -6 + 5 + 8 = 7$$

답 ②

030

함수 $y = -\sqrt{2x+1}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = -\sqrt{2x+1} \quad \therefore y = \sqrt{2x+1}$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{2(x-3)+1} - 2 \quad \therefore y = \sqrt{2x-5} - 2$$

답 $y = \sqrt{2x-5} - 2$

031

① 함수 $y = \sqrt{2x-1} = \sqrt{2(x-\frac{1}{2})}$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

② 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

③ 함수 $y = -\sqrt{4-2x} + 1 = -\sqrt{-2(x-2)} + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

④ 함수 $y = \sqrt{4x-8} + 2 = \sqrt{4(x-2)} + 2$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-4x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 함수 $y = \sqrt{2x-6} - 5 = \sqrt{2(x-3)} - 5$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프와 겹쳐지지 않는 것은 ④이다.

답 ④

032

함수 $y = \sqrt{-x+3}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-(x+1)+3} + 3$$

$$\therefore y = \sqrt{-x+2} + 3 \quad \text{..... ①}$$

이 함수의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-(-x)+2} + 3$$

$$\therefore y = \sqrt{x+2} + 3 \quad \text{..... ②}$$

이것이 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 와 일치하므로

$$a = 1, b = 2, c = 3$$

$$\therefore a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6 \quad \text{..... ③}$$

답 6

채점 기준	비율
① 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40%
② 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30%
③ $a+b+c$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

033

주어진 그래프는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 1$$

$$\therefore f(7) = \sqrt{7+2} - 1 = 3 - 1 = 2$$

답 ②

034

주어진 그래프는 함수 $y = a\sqrt{-x}$ ($a < 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$$y = a\sqrt{-(x-4)} + 1 \quad (a < 0)$$

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, -3)$ 을 지나므로

$$-3 = a\sqrt{4} + 1, 2a = -4 \quad \therefore a = -2$$

즉, 주어진 그래프의 식은

$$y = -2\sqrt{-(x-4)} + 1 = -2\sqrt{-x+4} + 1$$

$$\text{이므로 } a = -2, b = 4, c = 1$$

$$\therefore a + b + c = -2 + 4 + 1 = 3$$

답 3

035

주어진 그래프는 함수 $y = \sqrt{bx}$ ($b < 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로

$$y = \sqrt{b(x-2)} + \frac{1}{2} \quad (b < 0)$$

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, \frac{5}{2})$ 를 지나므로

$$\frac{5}{2} = \sqrt{-2b} + \frac{1}{2}, \sqrt{-2b} = 2$$

$$-2b = 4 \quad \therefore b = -2$$

즉, 주어진 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-2(x-2)} + \frac{1}{2}$$

이므로 $a=-2, b=-2, c=\frac{1}{2}$

$\therefore (a+b)c = \{-2+(-2)\} \times \frac{1}{2} = -2$

답 -2

036

주어진 그래프는 함수 $y=a\sqrt{x}$ ($a<0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=a\sqrt{x+1}+3$ ($a<0$)

으로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$1=a+3 \quad \therefore a=-2$

$\therefore f(x)=-2\sqrt{x+1}+3$

$f(k)=-3$ 에서

$-2\sqrt{k+1}+3=-3$

$2\sqrt{k+1}=6, \sqrt{k+1}=3$

양변을 제곱하면

$k+1=9 \quad \therefore k=8$

답 8

037

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$

의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이므로 주어진 그래프에서

$a<0, -\frac{b}{a}<0, c>0$

$-\frac{b}{a}<0$ 에서 $\frac{b}{a}>0$

$\therefore b<0$ ($\because a<0$)

답 ⑤

038

ㄱ. $a>0$ 이면 정의역은 $\{x|x\leq 0\}$, 치역은 $\{y|y\geq 0\}$ 이므로 그래프는 제2사분면을 지난다. (참)

ㄴ. 정의역은 a 의 값에 관계없이 항상 $\{x|x\leq 0\}$ 이다. (참)

ㄷ. $a<0$ 이면 정의역은 $\{x|x\leq 0\}$, 치역은 $\{y|y\leq 0\}$ 이다. (거짓)

ㄹ. 그래프는 함수 $y=a\sqrt{x}$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

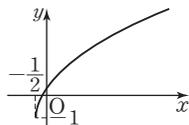
039

함수 $y=\sqrt{4x+2}-1=\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}-1$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{4x}$

의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

$x=0$ 일 때 y 의 값은 $\sqrt{2}-1>0$ 이므로 함수

$y=\sqrt{4x+2}-1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지난다.

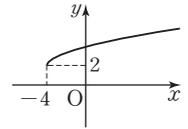


답 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면

040

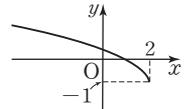
① 함수 $y=\sqrt{x+4}+2$ 의 그래프는 함수

$y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



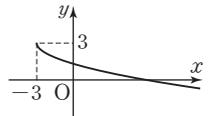
따라서 제2사분면을 지난다.

② 함수 $y=\sqrt{2-x}-1=\sqrt{-(x-2)}-1$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 제2사분면을 지난다.

③ 함수 $y=-\sqrt{x+3}+3$ 의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

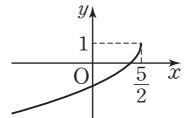


따라서 제2사분면을 지난다.

④ 함수 $y=-\sqrt{5-2x}+1=-\sqrt{-2\left(x-\frac{5}{2}\right)}+1$ 의 그래프는 함수

$y=-\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$\frac{5}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

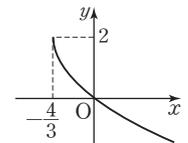


따라서 제2사분면을 지나지 않는다.

⑤ 함수 $y=-\sqrt{3x+4}+2=-\sqrt{3\left(x+\frac{4}{3}\right)}+2$ 의 그래프는 함수

$y=-\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$-\frac{4}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 제2사분면을 지난다.

따라서 그래프가 제2사분면을 지나지 않는 것은 ④이다.

답 ④

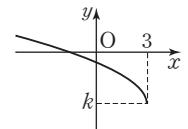
041

$y=\sqrt{-2x+6}+k=\sqrt{-2(x-3)}+k$

함수 $y=\sqrt{-2x+6}+k$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

..... ①

따라서 함수 $y=\sqrt{-2x+6}+k$ 의 그래프가 제3사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 y 축과 원점 아래에서 만나야 한다.



즉, $x=0$ 일 때 y 의 값이 0 보다 작아야 하므로

$\sqrt{6}+k<0 \quad \therefore k<-\sqrt{6}$ ②

이때 $-\sqrt{6}=-2.\times\times\times$ 이므로 정수 k 의 최댓값은 -3 이다. ③

답 -3

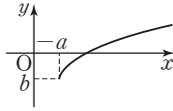
채점 기준	비율
① 함수 $y=\sqrt{-2x+6}+k$ 의 그래프가 함수 $y=\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 평행이동한 것임을 알 수 있다.	30%
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
③ 정수 k 의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

042

주어진 직선은 오른쪽 아래로 향하고 y 축과 원점 아래에서 만나므로 $a < 0, b < 0$

함수 $y = \sqrt{x+a} + b$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a < 0$, 즉 $-a > 0$ 이고, $b < 0$ 이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1사분면, 제4사분면을 지난다.



답 제1사분면, 제4사분면

043

두 함수 $y = \sqrt{ax}, y = \sqrt{bx}$ 의 그래프가 제1사분면 위에 있으므로 $a > 0, b > 0$

또, 함수 $y = \sqrt{bx}$ 의 그래프가 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프보다 x 축으로부터 더 멀리 떨어져 있으므로

$$|b| > |a| \quad \therefore b > a > 0 \quad \text{..... ㉠}$$

두 함수 $y = \sqrt{cx}, y = \sqrt{dx}$ 의 그래프가 제2사분면 위에 있으므로 $c < 0, d < 0$

또, 함수 $y = \sqrt{dx}$ 의 그래프가 함수 $y = \sqrt{cx}$ 의 그래프보다 x 축으로부터 더 멀리 떨어져 있으므로

$$|d| > |c| \quad \therefore d < c < 0 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 $d < c < a < b$

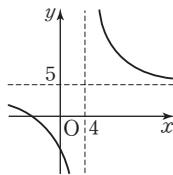
답 ㉤

044

함수 $y = \frac{k}{x-4} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

이때 $k < 0$ 이면 제3사분면을 지나지 않으므로 $k > 0$ 이어야 한다.

또, 함수 $y = \frac{k}{x-4} + 5$ 의 그래프가 모든 사분면을 지나야 하므로 오른쪽 그림과 같이 y 축과 원점 아래에서 만나야 한다.



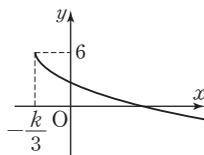
즉, $x=0$ 일 때 y 의 값이 0보다 작아야 하므로

$$-\frac{k}{4} + 5 < 0, \frac{k}{4} > 5 \quad \therefore k > 20 \quad \text{..... ㉠}$$

함수 $y = -\sqrt{3x+k} + 6 = -\sqrt{3\left(x + \frac{k}{3}\right)} + 6$ 의 그래프는 함수

$y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{k}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y = -\sqrt{3x+k} + 6$ 의 그래프가 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 지나야 하므로 오른쪽 그림과 같이 y 축과 원점 위에서 만나야 한다.



즉, $x=0$ 일 때의 y 의 값이 0보다 커야 하므로

$$-\sqrt{k} + 6 > 0, \sqrt{k} < 6 \quad \text{..... ㉡}$$

양변을 제곱하면 $k < 36$

$$\text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서 $20 < k < 36$

따라서 정수 k 는 21, 22, 23, ..., 35의 15개이다.

답 15

045

$$y = \sqrt{-8-4x+a} = \sqrt{-4(x+2)+a}$$

함수 $y = \sqrt{-8-4x+a}$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = \sqrt{-8-4x+a}$ 는 $x = -2$ 에서 최솟값 a 를 가지므로

$$a = -3, b = -2$$

$$\therefore a - b = -3 - (-2) = -1$$

답 ㉡

046

$$f(x) = -\sqrt{2x+a} + 5 = -\sqrt{2\left(x + \frac{a}{2}\right)} + 5$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{a}{2}$ 에서 최댓값 5를 가지므로

$$-\frac{a}{2} = -3, b = 5 \quad \therefore a = 6, b = 5$$

따라서 $f(x) = -\sqrt{2x+6} + 5$ 이므로

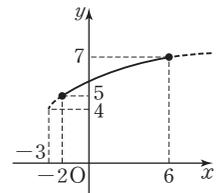
$$f(3b) = f(15) = -\sqrt{30+6} + 5 = -6 + 5 = -1$$

답 -1

047

함수 $y = \sqrt{x+3} + 4$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

$-2 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $y = \sqrt{x+3} + 4$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x = -2$ 에서 최솟값 5를 갖는다.



답 ㉠

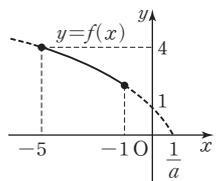
048

$$f(x) = \sqrt{-ax+1} = \sqrt{-a\left(x - \frac{1}{a}\right)}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{a}$ 만큼 평행이동한 것이다.

$-5 \leq x \leq -1$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x = -5$ 에서 최댓값 4를 갖는다.

즉, $\sqrt{5a+1} = 4$ 이므로 양변을 제곱하면 $5a+1=16 \quad \therefore a=3$



답 3

049

$$y = \sqrt{1-2x} + 3 = \sqrt{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)} + 3$$

함수 $y = \sqrt{1-2x} + 3$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$-4 \leq x \leq a$ 에서 함수 $y = \sqrt{1-2x+3}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x = -4$ 에서 최댓값을 갖고 $x = a$ 에서 최솟값을 갖는다. ①

즉, $x = -4$ 에서 최댓값 b 를 가지므로

$$b = \sqrt{1-2 \times (-4)+3} = \sqrt{9+3} = 3+3=6$$

또, $x = a$ 에서 최솟값 4를 가지므로

$$4 = \sqrt{1-2a+3}, \sqrt{1-2a}=1$$

양변을 제곱하면 $1-2a=1$

$$\therefore a=0 \quad \text{②}$$

$$\therefore a+b=0+6=6 \quad \text{③}$$

답 6

채점 기준	비율
① $x = -4$ 에서 최댓값을 갖고 $x = a$ 에서 최솟값을 가짐을 알 수 있다.	40%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

050

(1) 함수 $y = \sqrt{x+1}$ 의 치역은 $\{y|y \geq 0\}$ 이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x \geq 0\}$ 이다.

$$y = \sqrt{x+1} \text{에서 } y^2 = x+1$$

$$\therefore x = y^2 - 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 주어진 함수의 역함수는

$$y = x^2 - 1 \quad (x \geq 0)$$

(2) 함수 $y = -\sqrt{x-4}+3$ 의 치역은 $\{y|y \leq 3\}$ 이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x \leq 3\}$ 이다.

$$y = -\sqrt{x-4}+3 \text{에서 } y-3 = -\sqrt{x-4}$$

$$(y-3)^2 = x-4$$

$$\therefore x = y^2 - 6y + 13$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 주어진 함수의 역함수는

$$y = x^2 - 6x + 13 \quad (x \leq 3)$$

답 (1) $y = x^2 - 1 \quad (x \geq 0)$ (2) $y = x^2 - 6x + 13 \quad (x \leq 3)$

051

$f^{-1}(7) = k$ 라고 하면 $f(k) = 7$ 이므로

$$\sqrt{k-2}+2=7, \sqrt{k-2}=5$$

$$k-2=25 \quad \therefore k=27$$

$$\therefore f^{-1}(7)=27$$

답 27

052

함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 (3, 2)를 지나므로 함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 그래프는 두 점 (3, 2), (2, 3)을 지난다. ①

따라서 $2 = \sqrt{3a+b}, 3 = \sqrt{2a+b}$ 이므로

$$3a+b=4, 2a+b=9$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-5, b=19 \quad \text{②}$$

092 정답과 풀이

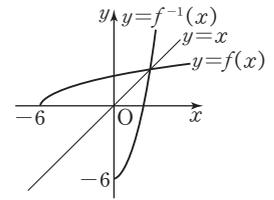
$$\therefore a+b = -5+19=14 \quad \text{③}$$

답 14

채점 기준	비율
① 함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 그래프가 두 점 (3, 2), (2, 3)을 지나음을 알 수 있다.	40%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

053

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y = f(x), y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



$$\sqrt{x+6} = x \text{에서 } x+6 = x^2$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0 \rightarrow \sqrt{x+6} \geq 0 \text{이므로 } x \geq 0$$

$$\therefore x=3 \quad (\because x \geq 0)$$

따라서 두 함수 $y = f(x), y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 (3, 3)이므로 $a=3, b=3$

$$\therefore ab = 3 \times 3 = 9$$

답 ③

실력을 높이는 연습 문제

본문 158쪽

01

$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 이므로 $x^2 - x + 1$ 은 모든 실수 x 에 대하여 양수이다. ㉠

$$4 - 2x \geq 0 \text{에서}$$

$$2x \leq 4 \quad \therefore x \leq 2 \quad \text{㉡}$$

$$3x - 4 > 0 \text{에서}$$

$$3x > 4 \quad \therefore x > \frac{4}{3} \quad \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$\frac{4}{3} < x \leq 2$$

답 ④

02

모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt{(k+2)x^2 - (k+2)x + 3}$ 의 값이 실수가 되려면 부등식

$$(k+2)x^2 - (k+2)x + 3 \geq 0 \quad \text{㉠}$$

이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 한다.

- (i) $k = -2$ 일 때
 $3 \geq 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 ㉠이 성립한다.
- (ii) $k \neq -2$ 일 때
 이차방정식 $(k+2)x^2 - (k+2)x + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라고 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 ㉠이 성립하려면
 $k+2 > 0, D \leq 0$
 이어야 한다.
 $k+2 > 0$ 에서 $k > -2$ ㉡
 $D = (k+2)^2 - 4 \times (k+2) \times 3 \leq 0$ 에서
 $k^2 - 8k - 20 \leq 0, (k+2)(k-10) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq k \leq 10$ ㉢
 ㉡, ㉢에서 $-2 < k \leq 10$
- (i), (ii)에서
 $-2 \leq k \leq 10$
 이므로 정수 k 는 $-2, -1, 0, \dots, 10$ 의 13개이다.

답 ③

풍뎡 개념 CHECK

이차부등식이 항상 성립할 조건 高 公通 수학 1

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 $D = b^2 - 4ac$ 라고 할 때

- (1) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + bx + c > 0$ 이 성립하려면
 $a > 0, D < 0$
- (2) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 이 성립하려면
 $a > 0, D \leq 0$
- (3) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + bx + c < 0$ 이 성립하려면
 $a < 0, D < 0$
- (4) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 이 성립하려면
 $a < 0, D \leq 0$

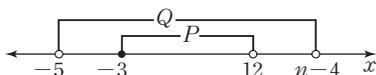
03

$x+4 \geq 0$ 에서 $x \geq -4$
 $5-x \geq 0$ 에서 $x \leq 5$
 따라서 $\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x}$ 의 값이 실수가 되려면
 $-4 \leq x \leq 5$
 이때 $x-5 \leq 0, x+6 > 0$ 이므로
 $\sqrt{x^2 - 10x + 25} + |x+6| = \sqrt{(x-5)^2} + |x+6|$
 $= |x-5| + |x+6|$
 $= -(x-5) + x+6$
 $= 11$

답 11

04

조건 p 에서 $x-12 < 0, x+3 \geq 0$ 이므로
 $x < 12, x \geq -3$
 $\therefore -3 \leq x < 12$
 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면 p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$ 이어야 한다.



위의 그림에서 $12 \leq n-4$ 이어야 하므로 $n \geq 16$

따라서 n 의 최솟값은 16이다.

답 16

05

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$

$$= \frac{x+y}{\sqrt{xy}}$$

이때
 $x+y = (\sqrt{6}+\sqrt{5}) + (\sqrt{6}-\sqrt{5}) = 2\sqrt{6}$
 $xy = (\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5}) = (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2 = 1$

이므로

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{x+y}{\sqrt{xy}}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{1}} = 2\sqrt{6}$$

답 ⑤

06

$x = \sqrt{5} - 2$ 에서 $x+2 = \sqrt{5}$
 양변을 제곱하면
 $x^2 + 4x + 4 = 5 \quad \therefore x^2 + 4x = 1$
 $\therefore (x-1)(x+5)(x^2 + 4x + 9) = (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 9)$
 $= (1-5)(1+9)$
 $= -40$

답 -40

07

$y = \frac{bx+4}{x+a} = \frac{b(x+a) - ab + 4}{x+a} = \frac{4-ab}{x+a} + b$ 이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은
 $x = -a, y = b$
 $\therefore a = -2, b = -3$
 따라서 함수 $y = \sqrt{ax+b}$, 즉 $y = \sqrt{-2x-3}$ 의 정의역은
 $\{x \mid x \leq -\frac{3}{2}\}$ 이다.

답 $\{x \mid x \leq -\frac{3}{2}\}$

08

$$y = \frac{-2x+5}{x-3}$$

$$= \frac{-2(x-3) - 6 + 5}{x-3}$$

$$= -\frac{1}{x-3} - 2$$

함수 $y = \frac{-2x+5}{x-3}$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore a = -1, b = 3, c = -2$
 따라서 함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$, 즉 $y = \sqrt{-x+3} - 2$ 의 치역은 $\{y \mid y \geq -2\}$ 이다.

답 ③

|다른 풀이|

함수 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{a}{x-b} + c = \frac{cx+a-bc}{x-b}$$

이것이 $y = \frac{-2x+5}{x-3}$ 와 일치하므로

$$c = -2, a - bc = 5, b = 3$$

$$\therefore a = -1, b = 3, c = -2$$

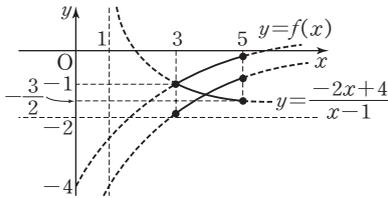
09

$$y = \frac{-2x+4}{x-1}$$

$$= \frac{-2(x-1)-2+4}{x-1}$$

$$= \frac{2}{x-1} - 2$$

함수 $y = \frac{-2x+4}{x-1}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $3 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = \frac{-2x+4}{x-1}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x) = \sqrt{3x+k}$ 라고 할 때, 두 함수 $y = \frac{-2x+4}{x-1}$, $y = f(x)$ 의 그래프가 한 점에서 만나려면 위의 그림과 같이

$$f(3) \leq -1, f(5) \geq -\frac{3}{2}$$

이어야 한다.

$$f(3) \leq -1 \text{에서 } \sqrt{9+k} \leq -1$$

$$3+k \leq -1 \quad \therefore k \leq -4 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(5) \geq -\frac{3}{2} \text{에서 } \sqrt{15+k} \geq -\frac{3}{2}$$

$$\therefore k \geq -\frac{3}{2} - \sqrt{15} \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$-\frac{3}{2} - \sqrt{15} \leq k \leq -4$$

따라서 k 의 최댓값은 -4 이므로 $M = -4$

$$\therefore M^2 = (-4)^2 = 16$$

답 16

10

함수 $y = \sqrt{-2x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-2(x-p)+1+q}$$

$$\therefore y = \sqrt{-2x+2p+1+q}$$

이 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-2 \times (-x) + 2p + 1 + q}$$

$$\therefore y = \sqrt{2x + 2p + 1 + q}$$

이것이 $y = \sqrt{2x+7}-1$ 과 일치하므로

$$2p+1=7, q=-1$$

$$\therefore p=3, q=-1$$

$$\therefore y = \frac{6x+q}{px+6} = \frac{6x-1}{3x+6}$$

$$= \frac{2(3x+6)-13}{3x+6}$$

$$= -\frac{13}{3(x+2)} + 2$$

따라서 함수 $y = \frac{6x-1}{3x+6}$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x = -2, y = 2$$

즉, 함수 $y = \frac{6x-1}{3x+6}$ 의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-2, 2)$ 에 대하여 대칭이므로

$$a = -2, b = 2$$

$$\therefore pq + ab = 3 \times (-1) + (-2) \times 2 = -7$$

답 -7

11

문제 접근하기

먼저 주어진 유리함수의 그래프에서 a, b, c 의 부호를 구한 후 이를 이용하여 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프의 개형을 그려 본다.

함수 $y = \frac{b}{x+a} + c$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{b}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이므로 주어진 그래프에서

$$-a > 0, b < 0, c > 0$$

$$\therefore a < 0, b < 0, c > 0$$

$$\text{함수 } y = \sqrt{ax+b}+c = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c \text{의 그래프는 함수 } y = \sqrt{ax}$$

의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a < 0, -\frac{b}{a} < 0, c > 0$ 이므로 함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프의 개형은 ㉤와 같다.

답 ㉤

12

ㄴ. 함수 $y = \sqrt{1-x} = \sqrt{-(x-1)}$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 함수 $y = -\sqrt{4-x} = -\sqrt{-(x-4)}$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㉢

13

문제 접근하기

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-f(-x)$ 임을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 확인하고, $k < 0$ 일 때 주어진 두 함수의 그래프의 개형을 그려서 ㄴ의 참, 거짓을 확인한다.
 ㄱ, ㄴ에서 확인한 내용을 바탕으로 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k 의 최댓값을 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 확인한다.

ㄱ. 함수 $y = -\sqrt{kx+2k}+4$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = -\sqrt{-kx+2k}+4$$

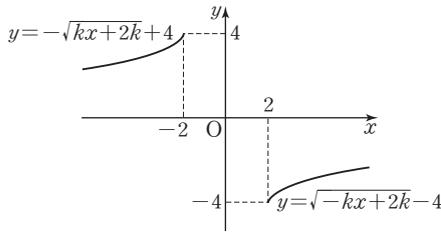
$$\therefore y = \sqrt{-kx+2k}-4$$

따라서 주어진 두 곡선은 서로 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. 함수 $y = -\sqrt{kx+2k}+4 = -\sqrt{k(x+2)}+4$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{kx}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y = \sqrt{-kx+2k}-4 = \sqrt{-k(x-2)}-4$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-kx}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이다.

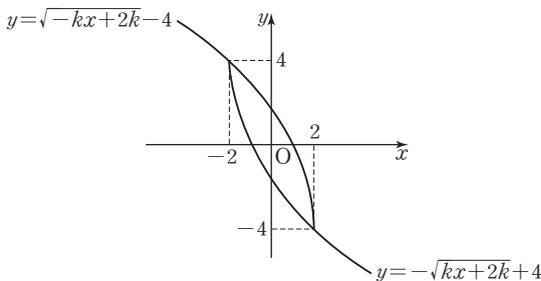
따라서 $k < 0$ 이면 주어진 두 곡선은 다음 그림과 같이 만나지 않는다. (거짓)



ㄷ. ㄴ에 의하여 $k < 0$ 이면 두 곡선이 만나지 않으므로 두 곡선이 만나려면 $k > 0$ 이어야 한다.

$k > 0$ 일 때 k 의 값이 커질수록 함수 $y = -\sqrt{kx+2k}+4$ 의 그래프는 직선 $y=4$ 와 멀어지고 함수 $y = \sqrt{-kx+2k}-4$ 의 그래프는 직선 $y=-4$ 와 멀어진다.

따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값이 최대가 되는 경우는 다음 그림과 같이 함수 $y = -\sqrt{kx+2k}+4$ 의 그래프가 함수 $y = \sqrt{-kx+2k}-4$ 의 그래프 위의 점 $(2, -4)$ 를 지날 때이다.



즉, $-4 = -\sqrt{2k+2k}+4$ 이므로

$$\sqrt{4k} = 8, 4k = 64$$

$$\therefore k = 16 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

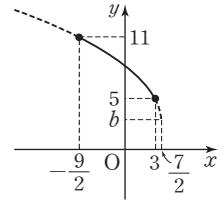
14

$$f(x) = a\sqrt{7-2x}+b$$

$$= a\sqrt{-2\left(x-\frac{7}{2}\right)}+b$$

(i) $a > 0$ 일 때

$-\frac{9}{2} \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x = -\frac{9}{2}$ 일 때 최댓값 11 , $x=3$ 일 때 최솟값 5 를 갖는다. 즉,



$$f\left(-\frac{9}{2}\right) = 4a+b=11,$$

$$f(3) = a+b=5$$

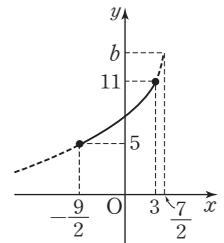
이므로 위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, b=3$$

$$\therefore a-b=-1$$

(ii) $a < 0$ 일 때

$-\frac{9}{2} \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=3$ 일 때 최댓값 11 , $x = -\frac{9}{2}$ 일 때 최솟값 5 를 갖는다. 즉,



$$f(3) = a+b=11,$$

$$f\left(-\frac{9}{2}\right) = 4a+b=5$$

이므로 위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=13$$

$$\therefore a-b=-15$$

(i), (ii)에서 $a-b$ 의 최솟값은 -15 이다.

답 -15

15

함수 $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\sqrt{a(x-2)}-3$$

$$\therefore y = -\sqrt{ax-2a}-3$$

이 함수의 그래프가 직선 $y=x-6$ 에 접하므로

$$-\sqrt{ax-2a}-3 = x-6, \sqrt{ax-2a} = 3-x$$

$$ax-2a = x^2-6x+9$$

$$\therefore x^2-(a+6)x+2a+9=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (a+6)^2 - 4(2a+9) = 0$$

$$a^2+4a=0, a(a+4)=0$$

$$\therefore a = -4 (\because a \neq 0)$$

답 -4

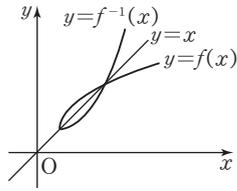
16

문제 접근하기

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있음을 이용한다.

$$f(x) = \sqrt{2x-a} + 1 = \sqrt{2\left(x - \frac{a}{2}\right)} + 1$$

이고 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 도 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$\sqrt{2x-a} + 1 = x \text{에서}$$

$$\sqrt{2x-a} = x-1, 2x-a = x^2 - 2x + 1$$

$$\therefore x^2 - 4x + a + 1 = 0$$

이 이차방정식의 두 근을 α, β 라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = a + 1$$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표는 (α, α) , (β, β) 이므로 두 교점 사이의 거리는

$$\begin{aligned} \sqrt{(\beta-\alpha)^2 + (\beta-\alpha)^2} &= \sqrt{2(\beta-\alpha)^2} \\ &= \sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}} \\ &= \sqrt{2\{4^2 - 4(a+1)\}} \\ &= \sqrt{24-8a} \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{24-8a} = 2\sqrt{2}$ 이므로 양변을 제곱하면

$$24 - 8a = 8, 8a = 16$$

$$\therefore a = 2$$

답 ②

17

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(4) &= (f \circ \overbrace{f^{-1} \circ g^{-1}}^{\text{함수역사}} \circ f)(4) \\ &= (g^{-1} \circ f)(4) \\ &= g^{-1}(f(4)) \\ &= g^{-1}\left(\frac{4+2}{4-2}\right) \\ &= g^{-1}(3) \end{aligned}$$

$g^{-1}(3) = k$ 라고 하면 $g(k) = 3$ 이므로

$$\sqrt{4k-2} = 3, 4k-2=9$$

$$4k = 11 \quad \therefore k = \frac{11}{4}$$

$$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(4) = g^{-1}(3) = \frac{11}{4}$$

답 ④

|다른 풀이|

$y = \sqrt{4x-2}$ 로 놓으면

$$y^2 = 4x - 2, 4x = y^2 + 2$$

$$\therefore x = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore g^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \quad (x \geq 0)$$

$$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(4) = g^{-1}(3) = \frac{1}{4} \times 9 + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$$

