풍산자

확률과 통계

정답과 풀이

I 경우의 수

1 순열과 조합

1 순열 12~23쪽

002

A도시에서 C도시로 가는 경우의 수는

(A → B → C) ➡ $3\times2=6$

(A → D → C) ➡ $2\times4=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$6+8=14$ 답 14

004

(1) ${}_5P_r$는 5부터 1씩 줄여가며 r개를 곱한 것이다.

그런데 ${}_5P_r=60=5\times4\times3$이므로 $r=3$

(2) ${}_nP_2$는 n부터 1씩 줄여가며 2개를 곱한 것이다.

그런데 ${}_nP_2=30=6\times5$이므로 $n=6$

(3) 주어진 식의 양변을 풀어 쓰면

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

$=30n(n-1)(n-2)$ ㉠

그런데 ${}_nP_5$에서 $n\geq5$이므로

$n(n-1)(n-2)\neq0$

㉠의 양변을 $n(n-1)(n-2)$로 나누면

$(n-3)(n-4)=30$, $n^2-7n-18=0$

$(n-9)(n+2)=0$

$n\geq5$이므로 $n+2\neq0$ $\therefore n=9$

답 (1) $r=3$ (2) $n=6$ (3) $n=9$

006

(1) 6명에서 6명을 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_6P_6=6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

(2) 10명에서 2명을 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_{10}P_2=10\times9=90$

(3) 서로 다른 n권에서 2권을 택하는 순열의 수가 56이므로

${}_nP_2=56=8\times7$ $\therefore n=8$

답 (1) 720 (2) 90 (3) 8

008

[1단계] 국어책 2권, 영어책 3권을 각각 한 덩어리로 보면 총 4묶음

국어1 국어2 | 영어1 영어2 영어3 | 수학1 | 수학2

4묶음을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $4!=24$

[2단계] 묶음 안의 국어책 2권, 영어책 3권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 각각

$2!=2$, $3!=6$

[3단계] 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$24\times2\times6=288$ 답 288

010

서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$ 답 81

참고

중복순열 ${}_n\Pi_r$에서 $n=3$, $r=4$이므로 $n<r$인 경우이다.

이와 같이 중복순열에서는 $n<r$일 수도 있다.

$n\geq r$라 생각하여 $4^3=64$로 계산하지 않도록 주의하자.

012

천의 자리: 0이 올 수 없으므로 1, 2의 2가지가 올 수 있다.

백의 자리: 중복을 허용하므로 3가지 모두 올 수 있다.

십의 자리: 중복을 허용하므로 3가지 모두 올 수 있다.

일의 자리: 중복을 허용하므로 3가지 모두 올 수 있다.

$\therefore 2\times3\times3\times3=54$ 답 54

014

서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$ 답 81

016

(1) X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_5P_2=5\times4=20$

(2) X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_2=5^2=25$ 답 (1) 20 (2) 25

018

서로 다른 2개의 우체통에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_5=2^5=32$ 답 32

참고

집합 $\{a, b, c, d, e\}$에서 집합 $\{1, 2\}$로의 함수의 개수와 같다.

020

서로 다른 2명의 후보 이름에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_6=2^6=64$ 답 64

참고

집합 $\{a, b, c, d, e, f\}$에서 집합 $\{1, 2\}$로의 함수의 개수와 같다.

022

1, 1, 1, 2, 2, 2에서 숫자 4개를 택하는 경우는 (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 2), (1, 2, 2, 2)로 3가지가 있다. 각각의 경우에 4개의 숫자로 만들 수 있는 네 자리 정수의 개수는

(i) (1, 1, 1, 2)의 경우: $\dfrac{4!}{3!}=4$

(ii) (1, 1, 2, 2)의 경우: $\dfrac{4!}{2!2!}=6$

(iii) (1, 2, 2, 2)의 경우: $\dfrac{4!}{3!}=4$

(i)~(iii)에서 구하는 네 자리 정수의 개수는

$4+6+4=14$ 답 14

024

(i) 전체 경우의 수는 0, 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{2!3!}=60$

(ii) 0으로 시작하는 경우의 수는 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!3!}=10$

(i), (ii)에서 구하는 여섯 자리 정수의 개수는

$60-10=50$ 답 50

026

(1) 6개의 문자 중에서 a가 3개, n이 2개이므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!2!}=60$

(2) a□□□□ a와 같이 양 끝에 a를 놓은 후, 중간에 b, n, n, a를 일렬로 나열하면 되는데, 이때 n이 2개이므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

(3) a, a, a가 이웃하므로 한 문자 A로 바꾸어 생각하면 A, b, n, n을 일렬로 나열하면 되는데, 이때 n이 2개이므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$ 답 (1) 60 (2) 12 (3) 12

028

c, d의 순서가 정해져 있으므로 c, d를 모두 x로 생각하여 5개의 문자 a, b, e, x, x를 일렬로 나열한 다음 두 개의 자리에 c, d를 순서대로 넣으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 5개의 문자 a, b, e, x, x를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!}=60$ 답 60

030

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하자.

(1) A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, a, a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{8!}{5!3!}=56$

(2) A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{3!}{2!}=3$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{3!2!}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times10=30$

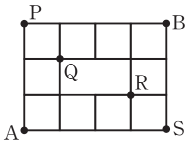
(3) A에서 P를 거치지 않고 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$56-30=26$

답 (1) 56 (2) 30 (3) 26

032

(1) 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우는



A → P → B, A → Q → B, A → R → B, A → S → B의 4가지이다.

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는 $1\times1=1$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times\frac{4!}{3!}=12$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

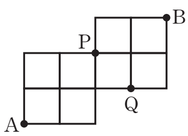
$\frac{4!}{3!}\times\frac{3!}{2!}=12$

(iv) A → S → B로 가는 경우의 수는 $1\times1=1$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+12+12+1=26$

(2) 오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우는



A → P → B, A → Q → B의 2가지이다.

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!2!}\times\frac{3!}{2!}=18$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

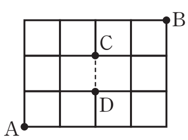
$\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=9$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $18+9=27$

답 (1) 26 (2) 27

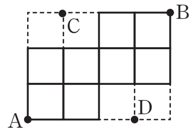
다른 풀이

(1) 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하여 두 지점 C, D를 잡으면 구하는 경우의 수는 A → B로 가는 경우의 수에서 A → D → C → B로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로



$\frac{7!}{4!3!}-\left(\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\right)=35-9=26$

(2) 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하여 두 지점 C, D를 잡으면 구하는 경우의 수는 A → B로 가는 경우의 수에서 A → C → B 또는 A → D → B로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로



$\frac{7!}{4!3!}-\left(\frac{4!}{3!}\times1+1\times\frac{4!}{3!}\right)=35-8=27$

● 필수 확인 문제

24쪽

033

(i) 세 자리 자연수의 개수

백의 자리: 0이 올 수 없으므로 1, 2, 3, 4, 5의 5가지가 올 수 있다.

십의 자리: 중복을 허용하므로 6가지 모두 올 수 있다.

일의 자리: 중복을 허용하므로 6가지 모두 올 수 있다.

∴ $5\times6\times6=180$

(ii) 세 자리 홀수의 개수

백의 자리: 0이 올 수 없으므로 1, 2, 3, 4, 5의 5가지가 올 수 있다.

십의 자리: 중복을 허용하므로 6가지 모두 올 수 있다.

일의 자리: 홀수이어야 하므로 1, 3, 5의 3가지가 올 수 있다.

∴ $5\times6\times3=90$

(i), (ii)에서 만들 수 있는 세 자리 자연수는 180개이고, 이 중에서 홀수는 90개이다.

답 세 자리 자연수의 개수: 180
세 자리 자연수 중 홀수의 개수: 90

034

$f(1)$, $f(2)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3가지이다.

또, $f(3)\le2$이므로 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2의 2가지이다.

따라서 구하는 함수의 개수는

${}_3\Pi_3\times2=3^3\times2=54$ 답 54

035

서로 다른 3개의 우체통에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$ 답 81

036

1반 학생을 1, 2반 학생을 2, 3반 학생을 3이라고 하면 구하는 경우의 수는 양 끝의 2개의 2를 제외한 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{7!}{2!2!3!}=210$ 답 210

037

모음이 자음보다 뒤에 와야 하므로 자음을 모두 앞쪽에 나열한 후, 모든 모음을 뒤쪽에 나열한다.

자음 d, f, f, r, n, t를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

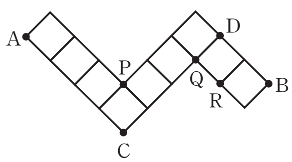
모음 i, e, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$360\times3=1080$ 답 1080

038



위의 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡자.

두 지점 C, D를 모두 지나지 않으면 세지점 P, Q, R는 반드시 지난다.

따라서 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우는 A → P → Q → R → B를 지날 때이므로 구하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times\frac{3!}{2!}\times1\times2=24$ 답 24

2 조합

040

(1) ${}_7C_r={}_7C_{7-r}$이므로

$7-r=r-3\qquad\therefore r=5$

(2) ${}_nC_4={}_nC_{n-4}$이므로

$n-4=6\qquad\therefore n=10$

(3) ${}_nC_2=10$에서 $\frac{n(n-1)}{2\times1}=10$

$n(n-1)=5\times4\qquad\therefore n=5$

(4) $n(n-1)(n-2)=2\times\frac{n(n-1)}{2\times1}+n(n-1)$

그런데 $n\geq3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$n-2=1+1\qquad\therefore n=4$

답 (1) $r=5$ (2) $n=10$ (3) $n=5$ (4) $n=4$

042

(1) 1반 학생 7명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

2반 학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$21\times10=210$

(2) 1반 학생 7명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_7C_4={}_7C_3=35$

2반 학생 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$35+5=40$ 답 (1) 210 (2) 40

044

(1) 빨강과 노랑 2가지 색을 미리 뽑아 놓고 나머지 5가지 색에서 2가지를 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

(2) 빨강과 노랑 2가지 색을 제외한 나머지 5가지 색에서 4가지 색을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$ 답 (1) 10 (2) 5

046

전체 9권 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

(1) 소설책 4권 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-4=80$

(2) 시집 5권 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

소설책 4권 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-(10+4)=70$

답 (1) 80 (2) 70

048

(1) $_6H_1={}_{6+1-1}C_1={}_6C_1=6$

(2) $_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=15$

(3) $_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

(4) $_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

답 (1) 6 (2) 15 (3) 84 (4) 10

참고

중복하여 택하므로 $_nH_r$에서 $n<r$일 수도 있다.

050

(1) 서로 다른 4종류의 꽃 중에서 5송이의 꽃을 택하는 것이므로 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

(2) 서로 다른 3명의 후보에게 8명이 투표하는 것이므로 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

답 (1) 56 (2) 45

052

(1) $(a+b)^7$의 전개식에서 각 항은 다음과 같은 꼴이다.

$a^7,\ a^6b,\ \cdots,\ a^3b^4,\ \cdots,\ ab^6,\ a^7$

따라서 구하는 항의 개수는 2개의 문자 a, b에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_2H_7={}_{2+7-1}C_7={}_8C_7={}_8C_1=8$

(2) $(a+b+c)^5$의 전개식에서 각 항은 다음과 같은 꼴이다.

$a^5,\ a^4b,\ \cdots,\ ab^2c^2,\ \cdots,\ bc^4,\ c^5$

따라서 구하는 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

답 (1) 8 (2) 21

+ 풍산자 비법

$(a+b+c)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수 ➡ $_3H_n$

054

(1) $a=1,\ b=4,\ c=5,\ d=0$ ➡ $abbbbccccc$와 같이 주어진 방정식의 해를 문자로 나타내면 구하는 해의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허용하여 10개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_{10}={}_{4+10-1}C_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=286$

(2) 구하는 해의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허용하여 $(10-4)$개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_{10-4}={}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

답 (1) 286 (2) 84

+ 풍산자 비법

방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$에 대하여

① 음이 아닌 정수해의 개수 ➡ $_nH_r$

② 양의 정수해의 개수 ➡ $_nH_{r-n}$ (단, $n\le r$)

056

주어진 조건에 의하여

$2\le f(5)\le f(4)\le f(3)\le f(2)\le f(1)$

따라서 집합 X의 원소 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하고, 크거나 같은 수부터 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

답 56

+ 풍산자 비법

두 집합 X, Y에 대하여 $n(X)=r$, $n(Y)=n$이고 $i\in X$, $j\in X$일 때 함수 $f: X \to Y$의 개수는 다음과 같다.

(1) X에서 Y로의 함수의 개수 ➡ $_n\Pi_r$

(2) $i\ne j$이면 $f(i)\ne f(j)$인 함수의 개수 ➡ $_nP_r$

(3) $i<j$이면 $f(i)<f(j)$인 함수의 개수 ➡ $_nC_r$

(4) $i<j$이면 $f(i)\le f(j)$인 함수의 개수 ➡ $_nH_r$

필수 확인 문제

32쪽

057

서로 다른 4명의 학생에게 8개의 초콜릿을 나누어 주는 것이므로 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_4H_8={}_{4+8-1}C_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

답 165

참고

나누어 준다는 표현에서 순열의 수로 생각하지 않도록 주의한다.

058

$(x+y)^5$의 전개식에서 각 항은 x^5, x^4y, c , x^2y^3, c , xy^4, y^5과 같은 꼴이므로 전개식의 항의 개수는 2개의 문자 x, y에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

$(a+b+c)^3$의 전개식에서 각 항은 a^3, a^2b, c , abc, c , bc^2, c^3과 같은 꼴이므로 전개식의 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 항의 개수는

$6\times10=60$

답 60

059

(i) 음이 아닌 정수해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$a={}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$

(ii) 양의 정수인 해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 $(10-3)$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$b={}_3H_{10-3}={}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$a-b=66-36=30$

답 30

060

1회, 2회, 3회에 갚는 금액을 각각 x만 원, y만 원, z만 원이라 하면

$x+y+z=15$ (단, $x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$) …… ㉠

$a=x-1$, $b=y-1$, $c=z-1$이라 하면

$x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$

이를 ㉠에 대입하면

$a+b+c=12$ (단, $a\geq0$, $b\geq0$, $c\geq0$)

따라서 구하는 방법의 수는 방정식 $a+b+c=12$의 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같다.

즉, 3개의 문자 a, b, c에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{12}={}_{3+12-1}C_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=91$

답 91

061

딸기 맛, 오렌지 맛, 레몬 맛, 포도 맛 사탕의 개수를 각각 x, y, z, w라 하면

$x+y+z+w=15$ (단, $x\geq4$, $y\geq3$, $z\geq2$, $w\geq1$)

…… ㉠

$a=x-4$, $b=y-3$, $c=z-2$, $d=w-1$이라 하면

$x=a+4$, $y=b+3$, $z=c+2$, $w=d+1$

이를 ㉠에 대입하면

$a+b+c+d=5$ (단, $a\geq0$, $b\geq0$, $c\geq0$, $d\geq0$)

따라서 구하는 경우의 수는 방정식 $a+b+c+d=5$의 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같다.

즉, 4개의 문자 a, b, c, d에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

답 56

062

주어진 조건에 의하여

$f(1)\leq f(2)=3\leq f(3)\leq f(4)=5\leq f(5)\leq f(6)$

이므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하면 된다.

집합 X의 원소 1에 집합 Y의 원소 1, 3에서 1개를 택하여 대응시키는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

집합 X의 원소 3에 집합 Y의 원소 3, 5에서 1개를 택하여 대응시키는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

집합 X의 원소 5, 6에 집합 Y의 원소 5, 7에서 중복을 허용하여 2개를 택하고, 작거나 같은 수부터 대응시키는 경우의 수는

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

따라서 구하는 함수의 개수는

$2\times2\times3=12$

답 12

실전 연습문제

34~36쪽

063

${}_n\Pi_2=n^2$, ${}_nP_2=n(n-1)$이므로 주어진 식에서

$n^2+2n(n-1)=65$

$3n^2-2n-65=0$, $(3n+13)(n-5)=0$

이때 n은 자연수이므로 $n=5$

답 ③

064

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만든 네 자리 자연수가 5의 배수인 경우는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5일 때이다.

따라서 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리를 택할 수 있는 경우는 각각 5가지, 일의 자리의 수는 5로 1가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3\times1=5^3=125$

답 125

065

(i) 1개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_1=2^1=2$

(ii) 2개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

(iii) 3개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

(iv) 4개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

(i)~(iv)에서 구하는 신호의 개수는

$2+4+8+16=30$

답 30

066

서로 다른 색연필 6개 중에서 필통 A에 넣을 색연필을 택하는 경우의 수는

${}_6P_1=6$

남은 색연필 5개를 필통 B, C에 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times32=192$

답 192

067

순서가 정해진 수들을 같은 문자로 생각하여

2, 4를 모두 a라 하고 1, 3, 5를 모두 b라 하면 구하는 경우의 수는 a, a, b, b, b, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{6!}{2!3!}=60$

답 60

068

주어진 조건을 만족시키려면 1, 2와 2, 2가 서로 이웃하지 않아야 한다. 즉, 2개의 2는 반드시 0과 서로 이웃해야 한다.

2개의 1은 서로 이웃하거나 이웃하지 않으므로 두 가지 경우로 나누어 파악한다.

(i) 1, 1이 서로 이웃하지 않는 경우

□0□0□0□과 같이 0을 배치한 후,

4개의 □에 2개의 1과 2개의 2를 나열하면 되므로

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$

(ii) 1, 1이 서로 이웃하는 경우

□0□0□0□과 같이 0을 배치한 후,

4개의 □ 중 1개에 서로 이웃한 1, 1을 배치하고,

3개의 □ 중 2개에 2개의 2를 나열하면 되므로

${}_4C_1\times{}_3C_2=4\times3=12$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6+12=18$

답 ⑤

참고

전체 경우의 수를 구한 후 1, 2와 2, 2가 서로 이웃하는 경우의 수를 빼는 방법도 생각할 수 있지만, 1과 2가 적힌 카드가 많아 따져 보아야 하는 경우가 많다. 그래서 1, 2와 2, 2가 서로 이웃하지 않는 경우에서 따져 보아야 하는 상황을 나누어 구하는 것이 좋다.

069

구하는 경우는 다음 세 가지이다.

A → B → D: $\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{6!}{3!3!}=120$

A → C → D: $\dfrac{7!}{4!3!}\times\dfrac{3!}{2!}=105$

A → B → C → D: $\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{3!}{2!}=54$

따라서 A지점을 출발하여 B지점 또는 C지점을 지나 D지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$120+105-54=171$

답 171

070

① ${}_4H_{10}$

② ${}_4H_{10}$

③ ${}_4H_{10}$

④ ${}_4H_{10}$

⑤ ${}_4\Pi_{10}$ 답 ⑤

071

$2<a\le b\le c\le 9$는 등호가 포함되어 있는 부등식이므로 순서가 정해져 있고 중복을 허용하여 택해야 한다.

따라서 7개의 숫자 3, 4, 5, c , 9 중에서 중복을 허용하여 3개의 자연수를 택하여 작거나 같은 순서대로 a, b, c의 값을 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_7H_3={}_{7+3-1}C_3={}_9C_3=84$ 답 84

072

주어진 전개식에서 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_n={}_{3+n-1}C_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_{n+2-n}={}_{n+2}C_2$

$\quad=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}=66$

$n^2+3n+2=132$, $n^2+3n-130=0$

$(n+13)(n-10)=0$

이때 n은 자연수이므로 $n=10$ 답 10

073

5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$

세 수의 합이 20보다 큰 경우는 8, 8, 8 또는 8, 8, 6이므로 이 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는

$35-2=33$ 답 ④

074

$x'=x+1$, $y'=y+1$, $z'=z+1$로 놓으면 x, y, z가 -1 이상의 정수이므로 x', y', z'은 0 이상의 정수이다.

이때 $x=x'-1$, $y=y'-1$, $z=z'-1$이므로 이를 $x+y+z=4$에 대입하면

$(x'-1)+(y'-1)+(z'-1)=4$

$x'+y'+z'=7$ (단, $x'\ge 0$, $y'\ge 0$, $z'\ge 0$) c c ㉠

따라서 구하는 -1 이상의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 순서쌍 (x', y', z')의 개수와 같으므로 구하는 개수는

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$ 답 36

075

깃발을 1번 들어 올려 만들 수 있는 신호의 개수는 서로 다른 2개에서 1개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_1=2^1=2$

깃발을 2번 들어 올려 만들 수 있는 신호의 개수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_2=2^2=4$

깃발을 3번 들어 올려 만들 수 있는 신호의 개수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

깃발을 n번 들어 올려 만들 수 있는 신호의 개수는 서로 다른 2개에서 n개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_n=2^n$

따라서 깃발을 n번 이하로 들어 올려 만들 수 있는 신호의 개수는

$2+2^2+2^3+$ c $+2^n$

$n=7$일 때, $2+2^2+2^3+$ c $+2^7=254$

$n=8$일 때, $2+2^2+2^3+$ c $+2^8=510$

따라서 구하는 n의 최솟값은 8이다. 답 8

참고

$2+2^2+2^3+$ c $+2^n$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의 합과 같으므로

$\dfrac{2\times(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$

$n=7$일 때, $2^8-2=254$

$n=8$일 때, $2^9-2=510$

076

조건 ㈐에서 $f(1)$, $f(3)$의 값은 모두 홀수이므로 치역에 최소 1개의 홀수가 포함되어야 한다.

(i) 치역에 홀수가 1개 포함된 경우

치역에 포함되는 홀수가 1이면 조건 ㈏를 만족시키는 $f(2)$의 값이 존재하지 않으므로 치역에 포함되는 홀수는 3 또는 5이어야 한다.

$f(1)=f(3)=3$이면 조건 ㈏에 의하여 $f(2)=2$이어야 하고, 치역의 원소의 개수가 2이므로

$f(2)=f(4)=f(5)=2$

$f(1)=f(3)=5$이면 조건 ㈏에 의하여 $f(2)$의 값은 2 또는 4이고, 치역의 원소의 개수가 2이므로

$f(2)=f(4)=f(5)=2$ 또는 $f(2)=f(4)=f(5)=4$

이다.

따라서 함수의 개수는

$1+2=3$

(ii) 치역에 홀수가 2개 포함되는 경우

치역에 포함되는 홀수 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

조건 ㈏에 의하여 $f(1)$, $f(2)$의 값은 정해지고, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

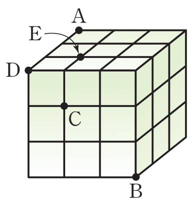
따라서 함수의 개수는

$3\times8=24$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$3+24=27$ 답 27

077



오른쪽 그림과 같이 경우를 나누면

(D를 지나는 경우)+(E를 지나는 경우)

$=\left(1\times2!\times\dfrac{4!}{2!2!}\right)+\left(\dfrac{3!}{2!}\times1\times\dfrac{4!}{2!2!}\right)$

$=12+18=30$ 답 30

078

흰 구슬 2개를 두 상자에 나누어 넣을 때, 흰 구슬을 넣을 상자 2개를 정하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

빈 상자가 없어야 하므로 검은 구슬 1개를 흰 구슬이 들어 있지 않은 상자에 넣은 다음, 남은 4개의 검은 구슬을 3개의 상자에 넣는 경우의 수는

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times15=45$ 답 45

079

x, y, z가 모두 양의 정수이므로

$x+y+z\geq3$

따라서 $3\leq x+y+z<5$이므로

$x+y+z=3$ 또는 $x+y+z=4$ …… ㉠

(단, $x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$)

$a=x-1$, $b=y-1$, $c=z-1$이라 하면

$x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$

이를 ㉠에 대입하면

$a+b+c=0$ 또는 $a+b+c=1$ (단, $a\geq0$, $b\geq0$, $c\geq0$)

(i) $x+y+z=3$을 만족시키는 양의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$a+b+c=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

${}_3H_0=1$

(ii) $x+y+z=4$를 만족시키는 양의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$a+b+c=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$1+3=4$ 답 4

2 이항정리

1 이항정리

38~40쪽

081

(1) $(3x+y)^4$의 전개식의 일반항은

$_4C_r(3x)^{4-r}y^r={_4C_r}3^{4-r}x^{4-r}y^r$

이때 x^2y^2항이 되려면

$4-r=2 \qquad \therefore r=2$

따라서 x^2y^2의 계수는

$_4C_2\times 3^{4-2}=6\times 9=54$

(2) $\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$_6C_r(3x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={_6C_r}3^{6-r}\frac{x^{12-2r}}{x^r}$

이때 상수항이 되려면

$(12-2r)-r=0 \qquad \therefore r=4$

따라서 상수항은

$_6C_4\times 3^{6-4}=15\times 9=135$

답 (1) 54 (2) 135

083

$\left(mx^3+\frac{2}{x^2}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$_4C_r(mx^3)^{4-r}\left(\frac{2}{x^2}\right)^r={_4C_r}m^{4-r}2^r\frac{x^{12-3r}}{x^{2r}}$

이때 x^2항이 되려면

$(12-3r)-2r=2,\ 5r=10 \qquad \therefore r=2$

x^2의 계수가 6이므로

$_4C_2\times m^{4-2}\times 2^2=6,\ m^2=\frac{1}{4}$

$\therefore m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=-\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$

085

$(1+x)^4$의 전개식의 일반항은

$_4C_r1^{4-r}x^r={_4C_r}x^r$

$(2+x)^5$의 전개식의 일반항은

$_5C_s2^{5-s}x^s$

즉, $(1+x)^4(2+x)^5$의 전개식의 일반항은

$_4C_r{_5C_s}2^{5-s}x^{r+s}$

이때 x항이 되려면

$r+s=1$ (r, s는 $0\le r\le 4$, $0\le s\le 5$인 정수)이어야 하고, 이것을 만족시키는 순서쌍 (r, s)는

$(0, 1)$ 또는 $(1, 0)$

따라서 x의 계수는

$_4C_0\times {_5C_1}\times 2^{5-1}+{_4C_1}\times {_5C_0}\times 2^{5-0}=80+128=208$

답 208

참고

x의 계수는 $(1+x)^4$의 상수항과 $(2+x)^5$의 x항의 계수를 곱한 경우와 $(1+x)^4$의 x항의 계수와 $(2+x)^5$의 상수항을 곱한 경우의 합이다.

087

[1단계] $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

$_{10}C_rx^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={_{10}C_r}(-1)^r\frac{x^{10-r}}{x^r} \qquad \cdots\cdots ㉠$

주어진 식을 분배법칙을 이용하여 변형하면

$(x+1)\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}=x\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}+\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$

이 전개식에서 x^2항은

$x\times$(㉠의 x항)$+$(㉠의 x^2항)일 때 나타난다.

[2단계] (i) ㉠에서 x항이 되려면 $(10-r)-r=1$

$\therefore r=\frac{9}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le 5$인 정수이므로 ㉠의 x항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠에서 x^2항이 되려면 $(10-r)-r=2$

$\therefore r=4$

[3단계] (i), (ii)에서 구하는 x^2의 계수는

$_{10}C_4\times(-1)^4=210$

답 210

필수 확인 문제

41쪽

088

$\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$_5C_r(2x^3)^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={_5C_r}2^{5-r}(-1)^r\frac{x^{15-3r}}{x^r}$

이때 x^3항이 되려면 $(15-3r)-r=3 \qquad \therefore r=3$

따라서 x^3의 계수는

${}_5C_3\times2^2\times(-1)^3=-40$ 답 -40

089

$(2x+ay)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}(ay)^r={}_5C_r2^{5-r}a^rx^{5-r}y^r$

이때 x^3y^2항이 되려면 $r=2$

x^3y^2의 계수가 80이므로

${}_5C_2\times2^{5-2}\times a^2=80$, $80a^2=80$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$) 답 ①

090

$\left(x-\dfrac{a}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_rx^{7-r}\left(-\dfrac{a}{x}\right)^r={}_7C_ra^r(-1)^r\dfrac{x^{7-r}}{x^r}$

x항이 되려면 $(7-r)-r=1$, $2r=6$ $\quad\therefore r=3$

따라서 x의 계수는 ${}_7C_3\times a^3\times(-1)^3=-35a^3$

x^5항이 되려면 $(7-r)-r=5$, $2r=2$ $\quad\therefore r=1$

따라서 x^5의 계수는 ${}_7C_1\times a\times(-1)=-7a$

이때 x의 계수가 x^5의 계수의 20배이므로

$-35a^3=-140a$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 2

091

$(3+x)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_r3^{4-r}x^r$

$(1-x^2)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_s1^{3-s}(-x^2)^s={}_3C_s(-1)^sx^{2s}$

즉, $(3+x)^4(1-x^2)^3$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r\,{}_3C_s3^{4-r}(-1)^sx^{r+2s}$

이때 x^4항이 되려면

$r+2s=4$ (r, s는 $0\le r\le4$, $0\le s\le3$인 정수)이어야 하고, 이것을 만족시키는 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2)$ 또는 $(2, 1)$ 또는 $(4, 0)$

따라서 x^4의 계수는

${}_4C_0\times{}_3C_2\times3^4\times(-1)^2+{}_4C_2\times{}_3C_1\times3^2\times(-1)^1$
$+{}_4C_4\times{}_3C_0\times3^0\times(-1)^0$

$=243-162+1=82$ 답 82

092

$(1+2x)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r1^{6-r}(2x)^r={}_6C_r2^rx^r$ …… ㉠

주어진 식을 분배법칙을 이용하여 변형하면

$(1+2x)^6(1-x)=(1+2x)^6-x(1+2x)^6$

이 전개식에서 x^3항은 (㉠의 x^3항)$-x\times$(㉠의 x^2항)일 때 나타난다.

㉠에서 x^3항이 되려면 $r=3$이므로 x^3의 계수는

${}_6C_3\times2^3=20\times8=160$

㉠에서 x^2항이 되려면 $r=2$이므로 x^3의 계수는

${}_6C_2\times2^2=15\times4=60$

따라서 구하는 x^3의 계수는

$160-60=100$ 답 100

093

$\left(2x+\dfrac{1}{x^n}\right)^9$의 전개식의 일반항은

${}_9C_r(2x)^{9-r}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)^r={}_9C_r2^{9-r}\dfrac{x^{9-r}}{x^{nr}}$

이때 $\dfrac{1}{x}$항이 되려면

$nr-(9-r)=1$, $(n+1)r=10$

에서 r는 $0\le r\le9$인 정수, n은 자연수이므로

$n+1=10$, $r=1$ 또는 $n+1=5$, $r=2$

또는 $n+1=2$, $r=5$이어야 한다.

즉, $\dfrac{1}{x}$항이 존재하도록 하는 자연수 n은 9, 4, 1이므로 그 합은

$9+4+1=14$ 답 14

2 이항계수의 성질 42~45쪽

095

${}_2C_2={}_3C_3$이고, ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$이므로

파스칼의 삼각형을 이용하면

${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\ c\ \ +{}_{10}C_2$

$=\underline{{}_3C_3+{}_3C_2}+{}_4C_2+{}_5C_2+\ c\ \ +{}_{10}C_2$

$=\underline{{}_4C_3+{}_4C_2}+{}_5C_2+\ c\ \ +{}_{10}C_2$

$=\underline{{}_5C_3+{}_5C_2}+\ c\ \ +{}_{10}C_2$

$\vdots$

$=\underline{{}_{10}C_3+{}_{10}C_2}={}_{11}C_3$

따라서 주어진 식의 값은 ④와 같다.

답 ④

097

(1) ${}_{n}C_0+{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+\cdots+{}_{n}C_n=2^n$이고, ${}_{n}C_0=1$이므로

${}_{n}C_1+{}_{n}C_2+{}_{n}C_3+\cdots+{}_{n}C_n=2^n-1$

즉, 주어진 부등식은

$500<2^n-1<1000$

$\therefore\ 501<2^n<1001$

그런데 $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n=9$

(2) ${}_{n}C_0-{}_{n}C_1+{}_{n}C_2-\cdots+(-1)^n{}_{n}C_n=0$이므로

${}_{11}C_0-{}_{11}C_1+{}_{11}C_2-{}_{11}C_3+\cdots-{}_{11}C_{11}=0$

위의 식의 양변에 -1을 곱하면

${}_{11}C_{11}-{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_9-{}_{11}C_8+\cdots-{}_{11}C_0=0$

(3) ${}_{n}C_1+{}_{n}C_2+{}_{n}C_3+\cdots+{}_{n}C_{n-1}=62$의 양변에

${}_{n}C_0+{}_{n}C_n$을 더하면

${}_{n}C_0+{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+{}_{n}C_3+\cdots+{}_{n}C_{n-1}+{}_{n}C_n$

$={}_{n}C_0+62+{}_{n}C_n$

이때 ${}_{n}C_0+{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+\cdots+{}_{n}C_n=2^n$이고,

${}_{n}C_0=1$, ${}_{n}C_n=1$이므로

$2^n=1+62+1=64$

$2^6=64$이므로 $n=6$

답 (1) 9 (2) 0 (3) 6

+ 풍산자 비법

이항계수의 성질의 공식을 기억하는 것도 좋지만,
$(1+x)^n={}_{n}C_0+{}_{n}C_1x+{}_{n}C_2x^2+\cdots+{}_{n}C_nx^n$
에서 파생되었음을 잊지 말자.
이 식의 x와 n에 무엇을 대입하는지 파악하는 것이 중요하다.

필수 확인 문제 46쪽

098

${}_{1}C_0={}_{2}C_0$이고, ${}_{n}C_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$이므로

파스칼의 삼각형을 이용하면

${}_{1}C_0+{}_{2}C_1+{}_{3}C_2+{}_{4}C_3+\cdots+{}_{10}C_9$

$={}_{2}C_0+{}_{2}C_1+{}_{3}C_2+{}_{4}C_3+\cdots+{}_{10}C_9$

$={}_{3}C_1+{}_{3}C_2+{}_{4}C_3+\cdots+{}_{10}C_9$

$={}_{4}C_2+{}_{4}C_3+\cdots+{}_{10}C_9$

$\vdots$

$={}_{10}C_8+{}_{10}C_9={}_{11}C_9$

답 ④

099

${}_{3}C_3={}_{4}C_4$이고, ${}_{n}C_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$이므로 파스칼의 삼각형을 이용하면

${}_{3}C_3+{}_{4}C_3+{}_{5}C_3+{}_{6}C_3+\cdots+{}_{10}C_3$

$={}_{4}C_4+{}_{4}C_3+{}_{5}C_3+{}_{6}C_3+\cdots+{}_{10}C_3$

$={}_{5}C_4+{}_{5}C_3+{}_{6}C_3+\cdots+{}_{10}C_3$

$={}_{6}C_4+{}_{6}C_3+\cdots+{}_{10}C_3$

$\vdots$

$={}_{10}C_4+{}_{10}C_3$

$={}_{11}C_4$

따라서 ${}_{n}C_4={}_{11}C_4$이므로 $n=11$이다.

답 11

100

${}_{n}C_0+{}_{n}C_1x+{}_{n}C_2x^2+\cdots+{}_{n}C_nx^n=(1+x)^n$

이 식에 $x=3$을 대입하면

${}_{n}C_0+{}_{n}C_1\times3+{}_{n}C_2\times3^2+{}_{n}C_3\times3^3+\cdots+{}_{n}C_n\times3^n$

$=(1+3)^n=4^n=2^{2n}$

이므로 $2^{2n}=2^{100}$에서

$2n=100 \qquad \therefore\ n=50$

답 50

101

$(1+x)$부터 $(1+x)^4$의 전개식에서는 x^5항이 나오지 않는다.

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_{n}C_rx^r$이므로 x^5항은 $r=5$일 때이다.

$(1+x)^5$에서 x^5의 계수는 ${}_{5}C_5$

$(1+x)^6$에서 x^5의 계수는 ${}_{6}C_5$

$\vdots$

$(1+x)^{10}$에서 x^5의 계수는 ${}_{10}C_5$

즉, 주어진 식에서 x^5의 계수는

${}_{5}C_5+{}_{6}C_5+{}_{7}C_5+\cdots+{}_{10}C_5$

$={}_{6}C_6+{}_{6}C_5+{}_{7}C_5+\cdots+{}_{10}C_5$

$={}_{7}C_6+{}_{7}C_5+\cdots+{}_{10}C_5$

$\vdots$

$={}_{10}C_6+{}_{10}C_5={}_{11}C_6$

답 ④

102

ㄱ은 옳다.

${}_{7}C_0+{}_{7}C_1+{}_{7}C_2+\cdots+{}_{7}C_7=2^7$

ㄴ은 옳지 않다.

$${}_6C_0+{}_6C_2+{}_6C_4+{}_6C_6={}_6C_1+{}_6C_3+{}_6C_5=\frac{2^6}{2}=2^5$$

이므로 ${}_6C_0-{}_6C_1+{}_6C_2-\cdots+{}_6C_6=0$

ㄷ도 옳지 않다.

${}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8=2^8$에서

${}_8C_0={}_8C_8,\ {}_8C_1={}_8C_7,\ {}_8C_2={}_8C_6,\ {}_8C_3={}_8C_5$이므로

${}_8C_4+2({}_8C_5+{}_8C_6+{}_8C_7+{}_8C_8)=2^8$

$2({}_8C_5+{}_8C_6+{}_8C_7+{}_8C_8)=186$

$\therefore\ {}_8C_5+{}_8C_6+{}_8C_7+{}_8C_8=93$

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. **답** ㄱ

103

$12^{20}=(1+11)^{20}$

$\quad={}_{20}C_0+{}_{20}C_1\times 11+{}_{20}C_2\times 11^2+\cdots+{}_{20}C_{20}\times 11^{20}$

이때 ${}_{20}C_r 11^r$에서 $r\geq 2$이면 190으로 나누어떨어지므로 12^{20}을 190으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{20}C_0+11{}_{20}C_1$을 190으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 ${}_{20}C_0+11{}_{20}C_1=1+220=221$이므로 구하는 나머지는 31이다. **답** 31

● 실전 연습문제 48~50쪽

104

$(x+2)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r x^{7-r}2^r={}_7C_r 2^r x^{7-r}$

이때 x^5항이 되려면 $7-r=5$ $\quad\therefore\ r=2$

따라서 x^5의 계수는

${}_7C_2\times 2^2=21\times 4=84$ **답** ④

105

$(x+a)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}a^r={}_5C_r a^r x^{5-r}$

x^3의 계수는 ${}_5C_2\times a^2=10a^2$

x^4의 계수는 ${}_5C_1\times a=5a$

따라서 $10a^2=5a$에서

$5a(2a-1)=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}\ (\because\ a>0)$ **답** $\frac{1}{2}$

106

$(2x-1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}(-1)^r={}_5C_r 2^{5-r}(-1)^r x^{5-r}$

이때 계수가 양수이려면 r가 0 또는 짝수이어야 하므로

$r=0$ 또는 $r=2$ 또는 $r=4$

따라서 구하는 계수의 합은

${}_5C_0\times 2^5\times(-1)^0+{}_5C_2\times 2^3\times(-1)^2+{}_5C_4\times 2^1\times(-1)^4$

$=32+80+10=122$ **답** 122

107

$\left(2x^3+\frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(2x^3)^{4-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r={}_4C_r 2^{4-r}a^r\frac{x^{12-3r}}{x^{2r}}$

이때 x^2항이 되려면

$(12-3r)-2r=2$ $\quad\therefore\ r=2$

그런데 x^2의 계수가 12이므로

${}_4C_2\times 2^{4-2}\times a^2=12,\ 24a^2=12$

$\therefore\ a^2=\frac{1}{2}$ **답** $\frac{1}{2}$

108

$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(x^2)^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_6C_r 2^r\frac{x^{12-2r}}{x^r}$

이때 x^3항이 되려면

$(12-2r)-r=3,\ 3r=9$ $\quad\therefore\ r=3$

즉, x^3의 계수는

$a_3={}_6C_3\times 2^3=160$

또, x^0항, 즉 상수항이 되려면

$(12-2r)-r=0,\ 3r=12$ $\quad\therefore\ r=4$

즉, 상수항은

$a_0={}_6C_4\times 2^4=240$

$\therefore\ \frac{a_3}{a_0}=\frac{160}{240}=\frac{2}{3}$ **답** ⑤

109

$\left(3x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(3x)^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r 3^{4-r}\frac{x^{4-r}}{x^r}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

주어진 식을 분배법칙을 이용하여 변형하면

$$(1-x+2x^2)\left(3x+\frac{1}{x}\right)^4$$

$$=\left(3x+\frac{1}{x}\right)^4-x\left(3x+\frac{1}{x}\right)^4+2x^2\left(3x+\frac{1}{x}\right)^4$$

이 전개식에서 x^2항은

(㉠의 x^2항)$-x\times$(㉠의 x항)$+2x^2\times$(㉠의 상수항)일 때 나타난다.

(ⅰ) ㉠에서 x^2항이 되려면 $(4-r)-r=2$

$\therefore r=1$

(ⅱ) ㉠에서 x항이 되려면 $(4-r)-r=1$

$\therefore r=\frac{3}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le 4$인 정수이므로 ㉠의 x항은 존재하지 않는다.

(ⅲ) ㉠에서 상수항이 되려면 $(4-r)-r=0$

$\therefore r=2$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 x^2의 계수는

${}_4C_1\times3^3+2\times{}_4C_2\times3^2=108+108=216$

답 ②

110

${}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+{}_3H_3+{}_3H_4+{}_3H_5$

$={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$

$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$

$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$

$\vdots$

$={}_7C_4+{}_7C_5$

$={}_8C_5={}_8C_3=56$

답 56

111

$({}_2C_1+{}_2C_2)+({}_3C_2+{}_3C_3)+({}_4C_3+{}_4C_4)+\cdots+({}_{10}C_9+{}_{10}C_{10})$

$={}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+\cdots+{}_{11}C_{10}$

$=3+4+5+\cdots+11=63$

답 ③

112

${}_{10}C_2+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^{10-1}=2^9$,

${}_5C_1+{}_5C_3+{}_5C_5=2^{5-1}=2^4$

이므로

$\frac{2^9}{2^4}=2^5=2^n\qquad\therefore n=5$

답 5

113

서로 다른 색연필 17개 중에서 9개 이상의 색연필을 택하는 경우의 수는

${}_{17}C_9+{}_{17}C_{10}+{}_{17}C_{11}+\cdots+{}_{17}C_{17}$

이때

${}_{17}C_0+{}_{17}C_1+{}_{17}C_2+\cdots+{}_{17}C_{17}=2^{17}$이고,

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

${}_{17}C_0+{}_{17}C_1+{}_{17}C_2+\cdots+{}_{17}C_8$

$={}_{17}C_9+{}_{17}C_{10}+{}_{17}C_{11}+\cdots+{}_{17}C_{17}$

$\therefore {}_{17}C_9+{}_{17}C_{10}+{}_{17}C_{11}+\cdots+{}_{17}C_{17}=\frac{2^{17}}{2}=2^{16}$

답 ②

114

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$, $n=10$을 대입하면

$(1+2)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\times2+{}_{10}C_2\times2^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times2^{10}$

$\therefore {}_{10}C_0+2\times{}_{10}C_1+2^2\times{}_{10}C_2+\cdots+2^{10}\times{}_{10}C_{10}=3^{10}$

답 ②

115

$\left(x+\frac{p}{x}\right)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r\,x^{n-r}\left(\frac{p}{x}\right)^r={}_nC_r\,p^r x^{n-2r}\ \frac{x^{n-r}}{x^r}$

상수항은 $(n-r)-r=0$일 때이므로 $r=\frac{n}{2}$

즉, 상수항은

${}_nC_{\frac{n}{2}}\,p^{\frac{n}{2}}=160=2^5\times5$

이때 $\frac{n}{2}$은 음이 아닌 정수이어야 하므로 n은 짝수이다.

$n=2$ 또는 $n=4$일 때, 위의 식은 성립하지 않는다.

$n=6$일 때, ${}_6C_3p^3=5\times2^2\times p^3=2^5\times5$이므로

$p=2$

$\therefore np=6\times2=12$

답 12

116

$(x^2+1)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(x^2)^r1^{4-r}={}_4C_r\,x^{2r}$

$(x^3+1)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_s(x^3)^s1^{n-s}={}_nC_s\,x^{3s}$

즉, $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r\,{}_nC_s\,x^{2r+3s}$

이때 x^5항이 되려면

$2r+3s=5$ (r, s는 $0\le r\le 4$, $0\le s\le n$인 정수)이어야 하므로

$r=1$, $s=1$

x^5의 계수가 12이므로

${}_4C_1\times{}_nC_1=12$, $4n=12$ $\quad\therefore n=3$

이때 x^6항이 되려면

$2r+3s=6$ (r, s는 $0\le r\le 4$, $0\le s\le n$인 정수)이어야 하므로 이를 만족시키는 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2)$ 또는 $(3, 0)$

따라서 x^6의 계수는

${}_4C_0\times{}_3C_2+{}_4C_3\times{}_3C_0=3+4=7$

답 ②

117

$(1+x)^{50}(1+x)^{50}$의 전개식의 일반항은

${}_{50}C_r x^r\times{}_{50}C_s x^s={}_{50}C_r\times{}_{50}C_s x^{r+s}$

x^{50}항은

$r+p=50$ (r, s는 $0\le r\le 50$, $0\le s\le 50$인 정수)

이어야 하므로 이를 만족시키는 순서쌍 (r, s)는

$(0, 50)$, $(1, 49)$, $(2, 48)$, $(3, 47)$, $\cdots$, $(47, 3)$, $(48, 2)$, $(49, 1)$, $(50, 0)$

즉 x^{50}의 계수는

${}_{50}C_0\times{}_{50}C_{50}+{}_{50}C_1\times{}_{50}C_{49}+{}_{50}C_2\times{}_{50}C_{48}+\cdots+{}_{50}C_{50}\times{}_{50}C_0$

$={}_{50}C_0\times{}_{50}C_0+{}_{50}C_1\times{}_{50}C_1+{}_{50}C_2\times{}_{50}C_2+\cdots+{}_{50}C_{50}\times{}_{50}C_{50}$

$=({}_{50}C_0)^2+({}_{50}C_1)^2+({}_{50}C_2)^2+\cdots+({}_{50}C_{50})^2$

따라서 주어진 식은 $(1+x)^{50}(1+x)^{50}$, 즉 $(1+x)^{100}$의 전개식에서 x^{50}의 계수 ${}_{100}C_{50}$와 같으므로 구하는 값은 ${}_{100}C_{50}$이다.

답 ${}_{100}C_{50}$

118

$(1+x^3)$부터 $(1+x^3)^3$의 전개식에서는 x^{12}항이 나오지 않는다.

$(1+x^3)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^{3r}$이므로 x^{12}항은 $r=4$일 때이다.

$(1+x^3)^4$에서 x^{12}의 계수는 ${}_4C_4$

$(1+x^3)^5$에서 x^{12}의 계수는 ${}_5C_4$

$(1+x^3)^6$에서 x^{12}의 계수는 ${}_6C_4$

$\vdots$

$(1+x^3)^{15}$에서 x^{12}의 계수는 ${}_{15}C_4$

즉, 주어진 식에서 x^{12}의 계수는

${}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{15}C_4$

$={}_5C_5+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{15}C_4$

$={}_6C_5+{}_6C_4+\cdots+{}_{15}C_4$

$\vdots$

$={}_{15}C_5+{}_{15}C_4={}_{16}C_5$

답 ⑤

119

원소의 개수가 1인 부분집합의 개수는 ${}_{100}C_1$

원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는 ${}_{100}C_3$

원소의 개수가 5인 부분집합의 개수는 ${}_{100}C_5$

$\vdots$

원소의 개수가 99인 부분집합의 개수는 ${}_{100}C_{99}$

$\therefore {}_{100}C_1+{}_{100}C_3+{}_{100}C_5+\cdots+{}_{100}C_{99}=2^{100-1}=2^{99}$

답 2^{99}

120

$10^7=(1+9)^7$

$\quad={}_7C_0+{}_7C_1\times 9+{}_7C_2\times 9^2+\cdots+{}_7C_7\times 9^7$

이때 ${}_7C_1\times 9+{}_7C_2\times 9^2+\cdots+{}_7C_6\times 9^6$은 7로 나누어떨어지므로 10^7을 7로 나누었을 때의 나머지는

${}_7C_0+{}_7C_7\times 9^7$을 7로 나누었을 때의 나머지와 같다.

${}_7C_0+{}_7C_7\times 9^7=9^7+1$에서 오늘부터 9^7일째 되는 날이 금요일이므로 10^7일째 되는 날은 토요일이다.

답 토요일

121

$N=23^5+5\times 23^4+10\times 23^3+10\times 23^2+5\times 23+1$

$\quad={}_5C_0\times 23^5+{}_5C_1\times 23^4+{}_5C_2\times 23^3+{}_5C_3\times 23^2+{}_5C_4\times 23+{}_5C_5$

$\quad=(1+23)^5=24^5$

$\quad=(2^3\times 3)^5=2^{15}\times 3^5$

이때 N은 자연수 A로 나누어떨어지므로 A는 N의 약수이다.

따라서 구하는 A의 개수는 N의 약수의 개수와 같으므로

$(15+1)\times(5+1)=16\times 6=96$

답 96

Ⅱ 확률

1 확률의 뜻과 활용

1 확률의 뜻 54~61쪽

002

표본공간을 S라 하면

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 4\}$

(1) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

(2) $A\cap B=\{2\}$

(3) $A^C=\{4,\ 5\}$

답 (1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ (2) $\{2\}$ (3) $\{4,\ 5\}$

004

표본공간을 S라 하면

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{5,\ 6\}$, $C=\{1,\ 3,\ 5\}$에서

$A\cap B=\{6\}$, $B\cap C=\{5\}$, $C\cap A=\varnothing$

따라서 서로 배반사건인 두 사건은 A와 C이다.

답 A와 C

006

세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6\times6=216$

(1) 나오는 세 눈의 수가 모두 같은 경우는

$(1,\ 1,\ 1)$, $(2,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 3,\ 3)$, $(4,\ 4,\ 4)$, $(5,\ 5,\ 5)$, $(6,\ 6,\ 6)$으로 6가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$

(2) 나오는 세 눈의 수의 합이 5 이하인 경우는 5 또는 4 또는 3이다.

(ⅰ) 세 눈의 수의 합이 5인 경우

$(1,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 2)$, $(1,\ 3,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 1)$, $(3,\ 1,\ 1)$로 6가지

(ⅱ) 세 눈의 수의 합이 4인 경우

$(1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 1)$로 3가지

(ⅲ) 세 눈의 수의 합이 3인 경우

$(1,\ 1,\ 1)$로 1가지

(ⅰ)~(ⅲ)에서 세 눈의 수의 합이 5 이하인 경우의 수는

$6+3+1=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$

답 (1) $\frac{1}{36}$ (2) $\frac{5}{108}$

008

(ⅰ) 8개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $8!$

(ⅱ) t를 맨 처음에, l을 맨 뒤에 나열하는 경우의 수는 t, l을 제외한 나머지 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $6!$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{6!}{8!}=\frac{1}{56}$

답 $\frac{1}{56}$

010

(ⅰ) 7명이 일렬로 서는 경우의 수는 $7!$

(ⅱ)

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{\text{한1}\ \ \text{한2}}}_{2!}\ \underbrace{\boxed{\text{중1}\ \ \text{중2}\ \ \text{중3}}}_{3!}\ \boxed{\text{일1}}\ \boxed{\text{일2}}}^{4!}$$

한국인 2명과 중국인 3명이 각각 이웃하는 경우의 수는 한국인 2명과 중국인 3명을 각각 한 묶음으로 생각하여 세운 후 한국인 2명끼리, 중국인 3명끼리 각각 자리를 바꾸는 경우의 수와 같으므로

$4!\times2!\times3!$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{4!\times2!\times3!}{7!}=\frac{2}{35}$

답 $\frac{2}{35}$

012

(ⅰ) 전체 10개의 공 중에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_4=210$

(ⅱ) 꺼낸 공이 흰 공 2개, 검은 공 2개인 경우의 수는 흰 공 4개 중에서 2개를 꺼내고, 검은 공 6개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_2=6\times15=90$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{90}{210}=\frac{3}{7}$

답 $\frac{3}{7}$

014

(ⅰ) 20개의 제비 중에서 3개의 제비를 동시에 뽑는 경우의 수는

$_{20}C_3=1140$

(ⅱ) 당첨 제비가 2개인 경우의 수는 일반 제비 15개에서 1개를 뽑고, 당첨 제비 5개에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_{15}C_1\times{}_5C_2=15\times10=150$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{150}{1140}=\frac{5}{38}$

답 $\frac{5}{38}$

016

(ⅰ) 빨간 구슬, 파란 구슬, 노란 구슬 중에서 중복을 허용하여 임의로 6개의 구슬을 고르는 경우의 수는

$_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

(ⅱ) 주머니에 파란 구슬이 적어도 2개 들어 있어야 하므로 파란 구슬을 2개 고른 후, 세 종류의 구슬에서 중복을 허용하여 나머지 구슬 4개를 고르는 경우의 수는

$_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{15}{28}$

답 $\frac{15}{28}$

+ 풍산자 비법

순열과 조합을 이용하는 확률을 구할 때는
① 순서를 생각하는지 ② 중복을 허용하는지
를 파악하여 적절한 개념을 이용한다.

018

1000개의 씨앗을 심어 그중 890개가 발아하였으므로 구하는 확률은

$\frac{890}{1000}=\frac{89}{100}$

답 $\frac{89}{100}$

020

5번에 1번 꼴로 2개 모두 검은 공이므로 2개 모두 검은 공이 나올 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

검은 공이 n개 들어 있다고 하면 2개 모두 검은 공이 나올 확률은 $\frac{_nC_2}{_6C_2}$이므로

$\frac{_nC_2}{_6C_2}=\frac{1}{5}$, $_nC_2=\frac{1}{5}\times{}_6C_2$

$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{5}\times\frac{6\times5}{2}$

$n^2-n-6=0$, $(n-3)(n+2)=0$

그런데 $n\geq2$이므로 $n=3$

따라서 주머니 속에 검은 공은 3개 들어 있다고 볼 수 있다.

답 3개

● 필수 확인 문제 62쪽

021

표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, c\ , 12\}$

$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$이므로 사건 A와 서로 배반인 사건은 $A^C=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$의 부분집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 사건의 개수는 $2^6=64$

답 64

022

(ⅰ) 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

(ⅱ) 두 번째 나오는 눈의 수가 첫 번째 나오는 눈의 수보다 큰 경우는

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 4), (3, 5), (3, 6),
(4, 5), (4, 6),
(5, 6)

으로 15가지이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

답 $\frac{5}{12}$

023

X에서 X로의 함수의 개수는

$_3\Pi_3=3^3=27$

X에서 X로의 일대일대응의 개수는

${}_3\mathrm{P}_3=3!=6$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$ 답 $\dfrac{2}{9}$

024

(i) B, A, N, A, N, A에서 A가 3개, N이 2개이므로 6개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!\times2!}=60$

(ii) 2개의 N이 서로 이웃하는 경우의 수는 2개의 N을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열한 후 N끼리 자리를 바꾸는 경우의 수와 같다.

이때 A는 3개이고 N끼리는 자리를 바꾸어도 같은 경우이므로

$\dfrac{5!}{3!}\times1=20$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\dfrac{20}{60}=\dfrac{1}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}$

025

기계 A의 불량률은 $\dfrac{60}{1200}=\dfrac{1}{20}$

기계 B의 불량률은 $\dfrac{30}{900}=\dfrac{1}{30}$

기계 C의 불량률은 $\dfrac{120}{2200}=\dfrac{3}{55}$

기계 D의 불량률은 $\dfrac{100}{1500}=\dfrac{1}{15}$

이때 $\dfrac{1}{15}>\dfrac{3}{55}>\dfrac{1}{20}>\dfrac{1}{30}$이므로 불량률이 가장 높은 기계는 D이다.

답 D

026

8개의 점 중에서 세 점을 택하는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_3=56$

주어진 원에서 하나의 지름에 대하여 2개의 직각이등변삼각형을 만들 수 있고, 8개의 점으로 만들 수 있는 지름 4개이므로 직각이등변삼각형의 개수는

$2\times4=8$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{8}{56}=\dfrac{1}{7}$

답 $\dfrac{1}{7}$

2 확률의 활용

63~66쪽

028

카드에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{5, 10\}$, $A\cap B=\{10\}$

따라서 $n(A)=5$, $n(B)=2$, $n(A\cap B)=1$이므로

구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{5}{10}+\dfrac{2}{10}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{3}{5}$

답 $\dfrac{3}{5}$

030

모두 흰 공이 나오는 사건을 A, 모두 검은 공이 나오는 사건을 B, 모두 빨간 공이 나오는 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{45}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{45}$,

$\mathrm{P}(C)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{10}{45}$

이때 세 사건 A, B, C는 동시에 일어나지 않으므로 서로 배반사건이다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$=\dfrac{1}{45}+\dfrac{3}{45}+\dfrac{10}{45}=\dfrac{14}{45}$

답 $\dfrac{14}{45}$

032

'적어도 한 개가 노란 공인 사건'의 여사건은 '3개 모두 노란 공이 아닌 사건', 즉 '3개 모두 파란 공인 사건'이다.

3개 모두 노란 공이 아닐 확률은

$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{5}{14}$

따라서 적어도 한 개가 노란 공일 확률은

$1-\dfrac{5}{14}=\dfrac{9}{14}$ 답 $\dfrac{9}{14}$

034

'세 수의 곱이 짝수인 사건'의 여사건은 '세 수의 곱이 홀수인 사건'이다.

세 수의 곱이 홀수일 확률은 세 수가 모두 홀수인 경우의 확률이므로

$\frac{{}_{10}C_3}{{}_{20}C_3}=\frac{2}{19}$

따라서 세 수의 곱이 짝수일 확률은

$1-\frac{2}{19}=\frac{17}{19}$ 답 $\frac{17}{19}$

+ 풍산자 비법

'적어도'라는 표현이 없어도 여사건의 경우가 더 적다면 여사건의 확률을 이용하는 것이 더 간편하다.

036

카드에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면 카드에 적힌 수가 2의 배수도 3의 배수도 아닐 확률은

$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$

이때 $P(A)=\frac{10}{20}$, $P(B)=\frac{6}{20}$, $P(A\cap B)=\frac{3}{20}$

이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{10}{20}+\frac{6}{20}-\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$

따라서 구하는 확률은

$1-\frac{13}{20}=\frac{7}{20}$ 답 $\frac{7}{20}$

● 필수 확인 문제 67쪽

037

④ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

답 ④

038

두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $P(A\cap B)=0$,

$A\cup B=S$이므로 $P(S)=P(A\cup B)=1$

따라서 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$1=P(A)+P(B)$ …… ㉠

$P(B)=3P(A)$에서 $P(A)=\frac{1}{3}P(B)$이므로

이를 ㉠에 대입하면

$1=\frac{1}{3}P(B)+P(B)$, $\frac{4}{3}P(B)=1$

$\therefore P(B)=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

039

수민이가 임원으로 뽑히는 사건을 A, 정윤이가 임원으로 뽑히는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{{}_7C_2}{{}_8C_3}=\frac{21}{56}$, $P(B)=\frac{{}_7C_2}{{}_8C_3}=\frac{21}{56}$,

$P(A\cap B)=\frac{{}_6C_1}{{}_8C_3}=\frac{6}{56}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{21}{56}+\frac{21}{56}-\frac{6}{56}=\frac{9}{14}$

답 $\frac{9}{14}$

다른 풀이

'수민이나 정윤이가 임원으로 뽑힐 사건'의 여사건은 '수민이와 정윤이가 임원으로 뽑히지 않을 사건'이다.

수민이와 정윤이를 제외한 6명 중에서 3명의 임원을 뽑을 확률은

$\frac{{}_6C_3}{{}_8C_3}=\frac{5}{14}$

따라서 수민이나 정윤이가 임원으로 뽑힐 확률은

$1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$

040

모두 A형인 사건을 A, 모두 B형인 사건을 B, 모두 O형인 사건을 C라 하면

$P(A)=\frac{{}_2C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{36}$, $P(B)=\frac{{}_3C_2}{{}_9C_2}=\frac{3}{36}$,

$P(C)=\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}=\frac{6}{36}$

이때 세 사건 A, B, C는 동시에 일어나지 않으므로 서로 배반사건이다.

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

$=\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{6}{36}=\frac{5}{18}$

답 $\frac{5}{18}$

041

'적어도 한 개가 당첨 제비인 사건'의 여사건은 '2개 모두 당첨 제비가 아닌 사건'이다.

2개 모두 당첨 제비가 아닐 확률은

$\frac{{}_{9-r}C_2}{{}_9C_2}=\frac{(9-r)(8-r)}{72}$

적어도 한 개가 당첨 제비일 확률이 $\frac{5}{12}$이므로

$\frac{(9-r)(8-r)}{72}=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$, $r^2-17r+72=42$

$r^2-17r+30=0$, $(r-2)(r-15)=0$

그런데 $0<r<9$이므로 $r=2$

답 ②

042

방정식 $x+y+z=12$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_2=91$

택한 순서쌍이 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$을 만족시키는 사건의 여사건은 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 사건이다.

즉, $x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$이어야 한다.

$x=y$이면 $x+y+z=12$에서 $2x+z=12$이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는

$(0, 0, 12)$, $(1, 1, 10)$, $(2, 2, 8)$, $(3, 3, 6)$,

$(4, 4, 4)$, $(5, 5, 2)$, $(6, 6, 0)$

의 7개이다.

마찬가지로 $y=z$ 또는 $z=x$이면 순서쌍 (x, y, z)는 각각 7개이고, 각각의 경우에 $(4, 4, 4)$가 포함되므로 구하는 순서쌍의 개수는

$3\times7-2=19$

따라서 구하는 확률은

$1-1\ \frac{97}{91}=\frac{2}{91}$

답 $\frac{72}{91}$

● 실전 연습문제 69~71쪽

043

표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$

두 사건 A, B와 모두 배반사건인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

이때 $A^C=\{2, 3, 4, 6\}$, $B^C=\{1, 4, 6\}$이므로

$A^C\cap B^C=\{4, 6\}$

따라서 구하는 사건의 개수는 $2^2=4$

답 ②

044

(i) 집합 A의 원소의 개수가 6이므로 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^6=64$

(ii) a_1을 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{6-1}=2^5=32$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{32}{64}\ \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

045

(i) 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

(ii) s와 b 사이에 2개의 문자가 있는 경우의 수는 s와 b 사이에 2개의 문자를 나열한 후, 이 4개의 문자를 한 묶음으로 보고 나열한 다음 s와 b의 자리를 바꾸는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{P}_2 y\ \ 3y\square\ \ 2!=144$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

046

(i) 주어진 4개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

$3\times{}_4\Pi_2=3\times4^2=48$

(ii) 맨 앞자리에는 0, 3을 제외한 2개의 숫자가 올 수 있고, 나머지 두 자리에는 3을 제외한 3개의 숫자가 중복하여 올 수 있으므로 어느 자리에도 숫자 3이 쓰이지 않는 세 자리 자연수의 개수는

$2\times{}_3\Pi_2=2\times3^2=18$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{18}{48}\ \frac{3}{8}$

답 $\frac{3}{8}$

047

주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$6^2\times2^4$

(i) 앞면이 나오는 동전의 개수가 1이면 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1, 1)$이어야 하므로 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times1=4$

(ii) 앞면이 나오는 동전의 개수가 2이면 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1, 2)$ 또는 $(2, 1)$이어야 하므로 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2\times2=12$

(iii) 앞면이 나오는 동전의 개수가 3이면 두 주사위에서 나온 눈의 수가 (1, 3) 또는 (3, 1)이어야 하므로 경우의 수는 ${}_4C_3\times2=8$

(iv) 앞면이 나오는 동전의 개수가 4이면 두 주사위에서 나온 눈의 수가 (1, 4) 또는 (2, 2) 또는 (4, 1)이어야 하므로 경우의 수는 ${}_4C_4\times3=3$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{4+12+8+3}{6^2\times2^4}=\dfrac{27}{576}=\dfrac{3}{64}$ 답 ①

048

9번에 2번 꼴로 2개 모두 당첨 제비이므로 2개 모두 당첨 제비를 꺼낼 확률은 $\dfrac{2}{9}$이다.

당첨 제비가 n개 들어 있다고 하면 2개 모두 당첨 제비일 확률은 $\dfrac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2}$이므로

$\dfrac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{2}{9}$, ${}_nC_2=\dfrac{2}{9}\times{}_{10}C_2$

$\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{2}{9}\times\dfrac{10\times9}{2}$

$n^2-n-20=0$, $(n-5)(n+4)=0$

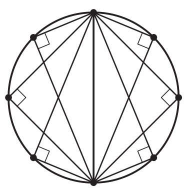
그런데 $n\geq2$이므로 $n=5$

따라서 구하는 당첨 제비의 개수는 5이다. 답 5

049

(i) 8개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는 ${}_8C_3=56$

(ii) 8개의 점 중에서 2개의 점을 택하여 만들 수 있는 지름은 4개이고, 각 지름을 한 변으로 하는 직각삼각형을 6개씩 만들 수 있으므로 직각삼각형의 개수는



$4\times6=24$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\dfrac{24}{56}=\dfrac{3}{7}$ 답 $\dfrac{3}{7}$

050

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A-B)-\mathrm{P}(B-A)$

$=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B^C)-\mathrm{P}(B\cap A^C)$

$=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$ 답 ④

051

ㄱ은 옳다.

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}$이므로

$n(A)\leq n(B)$이면 $\mathrm{P}(A)\leq\mathrm{P}(B)$

ㄴ은 옳지 않다.

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$이면

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}>\mathrm{P}(S)=1$

ㄷ은 옳다.

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1=\mathrm{P}(S)$

ㄹ은 옳지 않다.

표본공간이 $S=\{1, 2, 3\}$이고 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1\}$이면 $A\cup B=\{1, 2, 3\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=1$

이때 $\mathrm{P}(A)=1$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}>1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

052

꺼낸 3개의 바둑돌에서 흰 바둑돌이 검은 바둑돌보다 많으려면 흰 바둑돌이 2개 또는 3개이어야 한다.

흰 바둑돌이 2개인 사건을 A, 흰 바둑돌이 3개인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_3C_2\times{}_4C_1}{{}_7C_3}=\dfrac{12}{35}$

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\dfrac{1}{35}$

이때 두 사건 A, B는 동시에 일어나지 않으므로 서로 배반사건이다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{12}{35}+\dfrac{1}{35}=\dfrac{13}{35}$ 답 ③

053

'세 자리 자연수가 550 이하인 사건'의 여사건은 '세 자리 자연수가 551 이상인 사건'이다.

주어진 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

${}_6\Pi_3=6^3=216$

(i) 55□, 56□의 꼴인 경우의 수는

$2\times6=12$

(ii) 6□□의 꼴인 경우의 수는

${}_{6}\Pi_{2}=6^2=36$

(i), (ii)에서 세 자리 자연수가 551 이상일 확률은

$\frac{12+36}{216}=\frac{48}{216}=\frac{2}{9}$

따라서 세 자리 자연수가 550 이하일 확률은

$1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$ 답 $\frac{7}{9}$

054

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 6^2

$i^m\times(-i)^n=(-1)^n\times i^{m+n}$의 값이 1이 되는 경우는

n이 짝수이고 $m+n$이 4 또는 8 또는 12이거나

n이 홀수이고 $m+n$이 2 또는 6 또는 10인 경우이다.

(i) n이 짝수이고 $m+n$이 4 또는 8 또는 12인 경우는

$(2,\ 2),\ (2,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 2),\ (6,\ 6)$으로 5가지이다.

(ii) n이 홀수이고 $m+n$이 2 또는 6 또는 10인 경우는

$(1,\ 1),\ (1,\ 5),\ (3,\ 3),\ (5,\ 1),\ (5,\ 5)$로 5가지이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{5+5}{6^2}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$ 답 $\frac{5}{18}$

055

서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 6^3

나오는 세 눈의 수의 곱이 12인 경우는

$(1,\ 2,\ 6),\ (1,\ 3,\ 4),\ (2,\ 2,\ 3)$이다.

(i) 세 수 1, 2, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

(ii) 세 수 1, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

(iii) 세 수 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6+6+3}{6^3}=\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$ 답 $\frac{5}{72}$

056

[실행 3]까지 시행할 때, 상자 B에 들어 있는 흰 공의 개수가 홀수인 경우는 다음 두 가지이다.

(i) [실행 2]에서 상자 B에 들어 있는 검은 공 2개를 상자 A에 넣고, [실행 3]에서 상자 A에 들어 있는 검은 공 1개, 흰 공 1개를 상자 B에 넣는 경우

$\frac{{}_{10}C_2}{{}_{12}C_2}\times\frac{{}_{8}C_1\times{}_{2}C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{8}{33}$

(ii) [실행 2]에서 상자 B에 들어 있는 검은 공 1개, 흰 공 1개를 상자 A에 넣고, [실행 3]에서는 상자 A에 들어 있는 흰 공 2개를 상자 B에 넣는 경우

$\frac{{}_{10}C_1\times{}_{2}C_1}{{}_{12}C_2}\times\frac{{}_{9}C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{8}{33}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{8}{33}+\frac{8}{33}=\frac{16}{33}$ 답 $\frac{16}{33}$

057

8개의 꼭짓점에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는

${}_{8}C_2=28$

한 모서리의 길이가 1인 정육면체의 두 꼭짓점 사이의 거리는 $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}$ 중 하나이므로 $\frac{3}{2}$보다 큰 경우는 $\sqrt{3}$일 때이다.

거리가 $\sqrt{3}$인 경우의 수는 같은 면에 있지 않은 두 꼭짓점을 택하는 경우의 수와 같으므로 구하는 확률은

$\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$ 답 $\frac{1}{7}$

058

확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{9}{10}-\mathrm{P}(A\cap B)$ ...... ㉠

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은 $A\cap B=\varnothing$일 때 최소이고, $B\subset A$일 때, 즉 $A\cap B=B$일 때 최대이므로

$\mathrm{P}(\varnothing)\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(B)$

$\therefore\ 0\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{2}{5}$

따라서 ㉠에서 $\frac{1}{2}\le\mathrm{P}(A\cup B)\le\frac{9}{10}$이므로

$M=\frac{9}{10}$, $m=\frac{1}{2}$

$\therefore M+m=\frac{9}{10}+\frac{1}{2}=\frac{7}{5}$ 답 $\frac{7}{5}$

참고

$\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$에서 $\mathrm{P}(B)<\mathrm{P}(A)$이므로 $B\subset A$일 수는 있지만 $A\subset B$일 수는 없다.

059

한 개의 동전을 7번 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 2^7

(i) 동전의 앞면이 3번 나오는 경우의 수는

$_7\mathrm{C}_3=35$

또, '앞면이 연속해서 나오는 경우가 있다'의 여사건은 '앞면이 연속해서 나오지 않는다'이므로 앞면이 연속해서 나오지 않는 경우의 수는

□뒷□뒷□뒷□뒷□에서 5개의 □ 중 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_5\mathrm{C}_3=10$

따라서 앞면이 3번 나오고 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는

$35-10=25$

(ii) 동전의 앞면이 4번 나오는 경우의 수는

$_7\mathrm{C}_4=35$

또, 앞면이 연속해서 나오지 않는 경우의 수는

□뒷□뒷□뒷□에서 4개의 □ 중 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_4\mathrm{C}_4=1$

따라서 앞면이 4번 나오고 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는

$35-1=34$

(iii) 동전의 앞면이 5번 이상 나오면 조건 (나)를 항상 만족시키므로 이 경우의 수는

$_7\mathrm{C}_5+{_7\mathrm{C}_6}+{_7\mathrm{C}_7}=21+7+1=29$

따라서 구하는 확률은

$\frac{25+34+29}{2^7}=\frac{88}{128}=\frac{11}{16}$ 답 ①

2 조건부확률

1 조건부확률 73~78쪽

061

(i) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$에서 $0.5=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{0.2}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.1$

(ii) $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

063

6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 짝수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $A\cap B=\{2, 6\}$

따라서 6의 약수의 눈이 나왔을 때, 그것이 짝수일 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

다른 풀이

6의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 3, 6으로 4가지이고, 이 중에서 짝수인 경우는 2, 6으로 2가지이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

065

30대를 뽑는 사건을 A, 기념품 A를 선택한 참가자를 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{28}{60}=\frac{7}{15}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{15}}=\frac{3}{7}$ 답 $\frac{3}{7}$

067

혈액형이 A형인 학생을 뽑는 사건을 A, 남학생을 뽑는 사건을 B라 하면 A형인 남학생을 뽑는 사건은 $A\cap B$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{32}{100}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{16}{100}$

따라서 임의로 뽑은 한 학생의 혈액형이 A형이었을 때, 이 학생이 남학생일 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{16}{100}}{\frac{32}{100}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

069

갑이 뒷면이 노란색인 카드를 뒤집는 사건을 A, 을이 뒷면이 노란색인 카드를 뒤집는 사건을 B라 하면 갑이 뒷면이 노란색인 카드를 뒤집을 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}$

갑이 뒷면이 노란색인 카드를 뒤집었을 때, 을이 뒷면이 노란색인 카드를 뒤집을 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$

답 $\frac{5}{14}$

071

감기에 걸린 사람을 택하는 사건을 A, 의사가 감기라고 진단하는 사건을 E라 하면 감기에 걸리지 않은 사람을 택하는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=0.2$, $\mathrm{P}(A^C)=0.8$

$\mathrm{P}(E|A)=0.9$, $\mathrm{P}(E|A^C)=0.05$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=0.2\times0.9+0.8\times0.05=0.22\end{aligned}$$

답 0.22

073

주머니 A, B를 택하는 사건을 각각 A, B라 하고, 레몬 맛 사탕을 꺼내는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(E|B)=\frac{5}{8}$

(i) 주머니 A에서 레몬 맛 사탕을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

(ii) 주머니 B에서 레몬 맛 사탕을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{16}$

(i), (ii)에서 레몬 맛 사탕을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{1}{5}+\frac{5}{16}=\frac{41}{80}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{41}{80}}=\frac{16}{41}$$

답 $\frac{16}{41}$

+ 풍산자 비법

문제의 유형과 공식을 외우기보다는 주어진 상황을 어떤 기호로 나타내는지를 잘 살펴본다.
무엇이 조건부확률이고 무엇이 곱사건인지만 알 수 있다면 확률의 곱셈정리와 조건부확률 문제는 아주 쉽게 풀 수 있다.

필수 확인 문제

79쪽

074

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

075

1차 시험에 합격하는 사건을 A, 2차 시험에 합격하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

076

남자를 뽑는 사건을 A, 산을 선호하는 회원을 뽑는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{x+4}{x+18},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{x+18}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\frac{x}{x+18}}{\frac{x+4}{x+18}}=\frac{x}{x+4}$$

즉, $\frac{x}{x+4}=\frac{2}{3}$이므로

$3x=2x+8 \qquad \therefore\ x=8$

답 8

077

한 개의 공을 주머니 A, B에서 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하고, 흰 공인 사건을 C라 하면

꺼낸 공이 흰 공이었을 때, 이 공이 주머니 A에서 나왔을 확률은 $\mathrm{P}(A|C)$이다.

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C|A)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15},$$

$$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C|B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$$

이므로

$$\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{6}=\frac{13}{30}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A|C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(C)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{13}{30}}=\frac{8}{13}$$

답 $\frac{8}{13}$

078

첫 번째에 노란 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 노란 공이 나오는 사건을 B라 하면

첫 번째에 노란 공을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n}{n+4}$$

첫 번째에 노란 공을 꺼냈을 때, 두 번째에 노란 공을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n-1}{n+3}$$

따라서 2개 모두 노란 공일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{n+4}\times\frac{n-1}{n+3}$$

즉, $\frac{n(n-1)}{(n+4)(n+3)}=\frac{1}{3}$이므로

$3n(n-1)=(n+4)(n+3)$

$3n^2-3n=n^2+7n+12,\ 2n^2-10n-12=0$

$n^2-5n-6=0,\ (n-6)(n+1)=0$

$\therefore\ n=6\ (\because\ n$은 자연수$)$

답 6

079

성호가 첫 번째 게임에서 이긴 후, 두 번째 게임에서 지는 사건을 A, 세 번째 게임에서 지는 사건을 B라 하자.

(i) 첫 번째 게임에서 이긴 후, 두 번째 게임에서 지고 세 번째 게임에서 지는 경우

두 번째 게임에서 졌을 때 세 번째 게임에서 질 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$$

(ii) 첫 번째 게임에서 이긴 후, 두 번째 게임에서 이기고 세 번째 게임에서 지는 경우

두 번째 게임에서 지는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$,

두 번째 게임에서 이겼을 때 세 번째 게임에서 질 확률은 $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{15}+\frac{2}{9}=\frac{16}{45}$$

답 $\frac{16}{45}$

2 사건의 독립과 종속

80~89쪽

081

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B=\{5,\ 10\}$이므로

$A\cap B=\{10\}$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

답 독립

083

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$
$$=0.5+0.6-0.5\times0.6=0.8$$

답 0.8

085

(1) 2명이 모두 과녁에 명중시킬 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

(2) 한 명만 과녁에 명중시키는 경우는 다른 한 명이 명중시키지 못하는 경우이므로 다음 두 가지가 있다.

(i) A는 명중시키고, B는 명중시키지 못할 확률:

$$\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{2}{15}$$

(ii) A는 명중시키지 못하고, B는 명중시킬 확률:

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{2}{5}$

(3) 2명이 모두 과녁에 명중시키지 못할 확률은

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{15}$$

따라서 적어도 한 사람은 과녁에 명중시킬 확률은

1−(2명이 모두 명중시키지 못할 확률)

$$=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$$

답 (1) $\frac{8}{15}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{14}{15}$

087

아무도 치유되지 않을 확률은

$${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{16}{625}=\frac{609}{625}$$

답 $\frac{609}{625}$

089

한 문제에서 임의로 답을 선택할 때, 정답일 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 시험에서 합격하는 경우는 문제 10개 중 8개 또는 9개 또는 10개를 맞히는 경우이다.

(i) 10개 중 8개를 맞힐 확률은

$${}_{10}\mathrm{C}_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{45}{2^{10}}$$

(ii) 10개 중 9개를 맞힐 확률은

$${}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{10}{2^{10}}$$

(iii) 10개 중 10개를 맞힐 확률은

$${}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{2^{10}}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{45}{2^{10}}+\frac{10}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}=\frac{56}{2^{10}}=\frac{7}{128}$$

답 $\frac{7}{128}$

091

(i) 상자에서 빨간 공을 뽑고, 주사위를 3번 던져서 6의 눈이 3번 나올 확률은

$$\frac{5}{8}\times{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{5}{8}\times\frac{1}{6^3}$$

(ii) 상자에서 파란 공을 뽑고, 주사위를 4번 던져서 6의 눈이 3번 나올 확률은

$$\frac{3}{8}\times{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{3}{8}\times\frac{20}{6^4}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{8}\times\frac{1}{6^3}+\frac{3}{8}\times\frac{20}{6^4}=\frac{5}{576}$$

답 $\frac{5}{576}$

093

동전을 4번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 x라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $4-x$이다.

이때 점 P가 점 A를 출발하여 다시 점 A로 돌아올 때까지 움직인 거리는 5이므로

$x+(4-x)=5$　　$\therefore x=3$

따라서 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 나와야 하므로 구하는 확률은

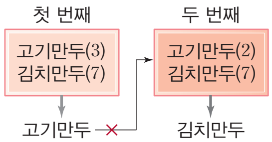
$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

095

처음에 꺼내 먹은 만두가 고기만두일 확률은 $\frac{3}{10}$이다.

그 후 고기만두가 하나 빠지므로 나중에 꺼내 먹은 만두가 김치만두일 확률은 $\frac{7}{9}$이다.



$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$

답 $\frac{7}{30}$

097

(두 번째가 아몬드)

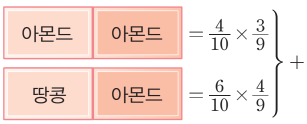
$=\begin{cases}①\ \text{(첫 번째 아몬드 후 두 번째 아몬드)}\\ ②\ \text{(첫 번째 땅콩 후 두 번째 아몬드)}\end{cases}$

① (첫 번째 아몬드 후 두 번째 아몬드일 확률)

$=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$

② (첫 번째 땅콩 후 두 번째 아몬드일 확률)

$=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$



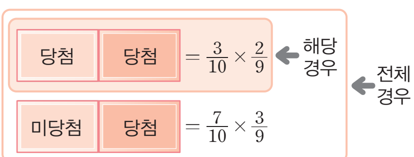
$\therefore$ (두 번째가 아몬드일 확률)

$=①+②=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{2}{5}$

답 $\frac{2}{5}$

099

전체 경우와 해당 경우는 다음 그림과 같다.



$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{\text{(해당 경우의 확률)}}{\text{(전체 경우의 확률)}}$

$$=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}}{\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}}=\frac{2}{9}$$

답 $\frac{2}{9}$

필수 확인 문제 90쪽

100

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$P(A|B)=P(A)$, $P(B|A)=P(B)$

$\therefore P(A)=P(B)=\frac{3}{4}$

또, $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{9}{16}=\frac{15}{16}$

답 $\frac{15}{16}$

101

지우와 현민이가 문제를 맞히는 사건은 서로 독립이므로 두 사람 모두 문제를 틀릴 확률은

$\left(1-\frac{3}{7}\right)\times(1-p)=\frac{3}{14}$, $\frac{4}{7}(1-p)=\frac{3}{14}$

$1-p=\frac{3}{8}$ $\quad\therefore p=\frac{5}{8}$

답 $\frac{5}{8}$

102

'탄환을 2발 이상 표적에 명중시키는 사건'은

'탄환을 한 발만 표적에 명중시키거나 모두 표적에 명중시키지 못하는 사건'의 여사건이다.

(i) 탄환을 한 발만 표적에 명중시킬 확률은

$${}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$$

(ii) 탄환을 모두 표적에 명중시키지 못할 확률은

$${}_4C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$

(i), (ii)에서 탄환을 2발 이상 표적에 명중시킬 확률은

$1-\left(\frac{8}{81}+\frac{1}{81}\right)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

답 $\frac{8}{9}$

다른 풀이

여사건의 확률로 계산하는 것이 더 간단하지만

(2발 명중시킬 확률)+(3발 명중시킬 확률)

+(4발 명중시킬 확률)

로 계산해도 그 결과는 같다. 즉

${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0$

$=\frac{24}{81}+\frac{32}{81}+\frac{16}{81}=\frac{8}{9}$

103

주사위를 던진 후 동전을 던진다.

⟹ 주사위의 눈의 수에 따라 경우를 구분해 계산한다.

①	1의 눈	3번 중 앞면이 2번
②	1이 아닌 눈	4번 중 앞면이 2번

① (1의 눈 y □ 번 중 앞면이 2번)

$$=\frac{1}{6}\times{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{16}$$

② (1이 아닌 눈 y □ 번 중 앞면이 2번)

$$=\frac{5}{6}\times{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

∴ (앞면이 2번 나올 확률)=①+②

$$=\frac{1}{16}+\frac{5}{16}=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

104

1부터 10까지의 자연수가 적혀 있는 10장의 카드 중 4의 약수는 1, 2, 4의 3장이므로 전체 경우와 해당 경우는 그림과 같다.

첫 번째	두 번째		
4의 약수(○)	4의 약수(○)	$=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}$	← 해당 경우
4의 약수(×)	4의 약수(○)	$=\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}$	

← 전체 경우

∴ (구하는 확률)=$\frac{\text{(해당 경우의 확률)}}{\text{(전체 경우의 확률)}}$

$$=\frac{\frac{3}{10}y\ \frac{2}{9}}{\frac{3}{10}y\ \frac{2}{9}+\frac{7}{10}y\ \frac{3}{9}}=\frac{2}{9}$$

답 $\frac{2}{9}$

105

원점에서 출발한 점 P가 점 (1, 1)에 도착하려면 첫 번째 시행에서 눈의 수가 5 이상이어야 하므로

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

한 개의 주사위를 던져서 5 이상의 눈이 나온 횟수를 a, 4 이하의 눈이 나온 횟수를 b라 할 때, 점 P는 x축의 방향으로 $a-b$만큼, y축의 방향으로 a만큼 이동한다.

점 (1, 1)에서 출발한 점 P가 점 (2, 4)에 도착하려면

$a-b=1$, $a=3$ ∴ $b=2$

즉, 5번의 시행에서 5 이상의 눈이 나온 횟수가 3이어야 하므로

$${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{24}{3}\right)^2=\frac{0}{243}$$

따라서 원점에서 출발한 점 P가 점 (1, 1)을 지나서 점 (2, 4)에 도착할 확률은

$$\frac{1}{3}\times\frac{40}{243}=\frac{0}{729}$$

답 $\frac{40}{729}$

● 실전 연습문제 92~94쪽

106

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{5}$에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5}$

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{7}{10}$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$이므로

$\frac{1}{10}=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

∴ $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{9}{10}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{9}{10}=\frac{4}{5}+\frac{3}{10}-\mathrm{P}(A\cap B)$

∴ $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

107

A, B가 주문한 것이 서로 다른 사건을 X, A, B가 주문한 것이 모두 아이스크림인 사건을 Y라 하면

$$\mathrm{P}(X)=\frac{{}_5C_1\times{}_4C_1}{{}_5C_1\times{}_5C_1}=\frac{4}{5}$$

$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_5C_1\times{}_5C_1}=\frac{2}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{2}{25}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{10}$$

답 $\frac{1}{10}$

108

눈의 수의 합이 짝수인 사건을 A, 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 B라 하자.

눈의 수의 합이 짝수이려면 두 눈이 모두 짝수이거나 홀수이어야 하므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{6\times 6}=\frac{1}{2}$$

눈의 수의 합이 짝수이고, 눈의 수의 곱이 홀수이려면 두 눈이 모두 홀수이어야 하므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{6\times 6}=\frac{1}{4}$$

따라서 눈의 수의 합이 짝수일 때, 눈의 수의 곱이 홀수일 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

109

L 축구팀이 치르는 경기가 홈 경기인 사건을 A, 원정 경기인 사건을 B, L 축구팀이 승리하는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$$
$$=\frac{50}{100}\times\frac{80}{100}=\frac{2}{5}$$
$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$$
$$=\frac{50}{100}\times\frac{55}{100}=\frac{11}{40}$$
$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{11}{40}=\frac{27}{40}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{27}{40}}=\frac{16}{27}$$

답 $\frac{16}{27}$

110

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B)$에서

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(B),\ \mathrm{P}(A\cap B)=\{\mathrm{P}(B)\}^2=\frac{1}{9}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\ (\because \mathrm{P}(B)>0)$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{1}{9}=\mathrm{P}(A)\times\frac{1}{3}\qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$$

답 ②

111

직원 360명 중 한 명을 뽑을 때, 재직 연수가 10년 미만인 사건을 A, 조직 개편안에 찬성하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{120}{360}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B)=\frac{150}{360}=\frac{5}{12},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{a}{360}$$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{a}{360}=\frac{1}{3}\times\frac{5}{12}\qquad \therefore a=50$$

답 50

112

'한 팀에서 적어도 2명이 미션에서 성공할 사건'의 여사건은 '한 팀에서 모두 미션에서 실패하거나 1명만 미션에서 성공할 사건'이다.

(i) A, B, C가 모두 미션에서 실패할 확률은

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{15}$$

(ii) A, B, C 중 1명만 미션에서 성공하는 경우는 2명이 미션에서 실패하는 경우이므로 다음 세 가지가 있다.

A만 성공할 확률: $\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{15}$

B만 성공할 확률: $\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{10}$

C만 성공할 확률: $\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$

이 경우의 확률은 $\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{2}{15}=\frac{3}{10}$

(i), (ii)에서 이 팀이 게임에서 승리할 확률, 즉 적어도 2명이 미션에서 성공할 확률은

$$1-\left(\frac{1}{15}+\frac{3}{10}\right)=1-\frac{11}{30}=\frac{19}{30}$$

답 $\frac{19}{30}$

113

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다.

따라서 주사위를 5번 던질 때, 6의 약수의 눈이 4번 이상 나올 확률은

$${}_5C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{80}{243}+\frac{32}{243}=\frac{112}{243}$$

답 $\frac{112}{243}$

114

임의로 1개의 공을 꺼냈을 때, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$이다.

흰 공을 뽑은 횟수를 a, 검은 공을 뽑은 횟수를 b라 하면

$a+b=4$, $10a+5b=30$

$\therefore\ a=2$, $b=2$

따라서 공을 4번 뽑아 30점을 얻을 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$$

답 $\frac{27}{128}$

115

점 O에서 점 A까지 이동하려면 동쪽으로 4칸, 북쪽으로 3칸 이동해야 하므로 동전의 앞면이 4번, 뒷면이 3번 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은 한 개의 동전을 7번 던져서 앞면이 4번 나올 확률을 의미하므로

$${}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{35}{128}$$

답 $\frac{35}{128}$

116

주머니 B에서 검은 구슬을 꺼내는 경우는 주머니 A에서 어떤 구슬을 꺼냈는지에 따라 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) 주머니 A에서 흰 구슬을 꺼내고, 이를 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 검은 구슬을 꺼내는 경우

이때의 확률 p_1은

$$p_1=\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$$

(ii) 주머니 A에서 검은 구슬을 꺼내고, 이를 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 검은 구슬을 꺼내는 경우

이때의 확률 p_2는

$$p_2=\frac{2}{5}\times\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$p_1+p_2=\frac{12}{35}+\frac{2}{7}=\frac{22}{35}$$

답 $\frac{22}{35}$

117

을이 꺼낸 공이 흰 공인 경우는 갑이 어떤 공을 꺼냈는지에 따라 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) 갑이 흰 공을 꺼내고, 을이 흰 공을 꺼내는 경우

이때의 확률 p_1은

$$p_1=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

(ii) 갑이 빨간 공을 꺼내고, 을이 흰 공을 꺼내는 경우

이때의 확률 p_2는

$$p_2=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{p_1}{p_1+p_2}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}+\frac{3}{10}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

118

$b-a\ge5$인 사건을 A, $c-a\ge10$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_{12}C_3=220$

이때 $b-a\ge5$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $b<c$에서 $b<12$이므로

$a=1$일 때, $(1, 6)$, $(1, 7)$, $(1, 8)$, $\cdots$, $(1, 11)$

$a=2$일 때, $(2, 7)$, $(2, 8)$, $\cdots$, $(2, 11)$

$\vdots \qquad \vdots$

$a=6$일 때, $(6, 11)$

각 경우에 대하여 c의 개수를 구하면 $a<b<c$이므로

$a=1$일 때, $6+5+4+3+2+1=21$

$a=2$일 때, $5+4+3+2+1=15$

$a=3$일 때, $4+3+2+1=10$

$a=4$일 때, $3+2+1=6$

$a=5$일 때, $2+1=3$

$a=6$일 때, 1

따라서 $b-a\geq5$를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$21+15+10+6+3+1=56$

즉, $\mathrm{P}(A)=\frac{56}{220}=\frac{14}{55}$

한편, $b-a\geq5$이고 $c-a\geq10$인 경우는

$c-a=10$ 또는 $c-a=11$인 경우이므로

$a=1,\ c=11$일 때, $b=6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$

$a=1,\ c=12$일 때, $b=6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$

$a=2,\ c=12$일 때, $b=7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$

따라서 $b-a\geq5$이고 $c-a\geq10$을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$5+6+5=16$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{16}{220}=\frac{4}{55}$

따라서

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{4}{55}}{\frac{14}{55}}=\frac{2}{7}$$

즉, $p=7,\ q=2$이므로

$p+q=7+2=9$

답 9

119

학교, 체육관, 공원을 차례로 들릴 때, 학교, 체육관, 공원 세 곳에 방문하는 사건을 각각 A, B, C라 하고, 휴대전화를 놓고 오는 사건을 Z라 하면

$\mathrm{P}(A\cap Z)=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(B\cap Z)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$

$\mathrm{P}(C\cap Z)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$

이므로 세 곳 중 어느 한 곳에 두고 올 확률 $\mathrm{P}(Z)$는

$$\mathrm{P}(Z)=\mathrm{P}(A\cap Z)+\mathrm{P}(B\cap Z)+\mathrm{P}(C\cap Z)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{25}+\frac{16}{125}=\frac{61}{125}$$

따라서 휴대전화를 방문한 곳에 놓고 왔을 때, 공원에 놓고 왔을 확률은

$$\mathrm{P}(C|Z)=\frac{\mathrm{P}(C\cap Z)}{\mathrm{P}(Z)}=\frac{\frac{16}{125}}{\frac{61}{125}}=\frac{16}{61}$$

답 $\frac{16}{61}$

120

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B_n=\{n-1,\ n,\ n+1\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B_n)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

두 사건 A, B_n이 서로 독립이어야 하므로

$\mathrm{P}(A\cap B_n)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B_n)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

즉, $n(A\cap B_n)=1$이어야 한다.

이를 만족시키는 n의 값은 4, 5, 6, 7이므로 n의 최댓값은 7이다.

답 ④

121

'적어도 한 번은 앞면이 나오는 사건'의 여사건은 '모두 뒷면이 나오는 사건'이다.

따라서 동전을 n번 던질 때, 적어도 한 번은 앞면이 나올 확률은

$$1-{}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq0.99$$

$$\frac{1}{100}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^n\qquad\therefore\ 2^n\geq100$$

이때 $2^6=64$, $2^7=128$이므로 $n\geq7$

따라서 동전을 7번 이상 던져야 한다.

답 7번

122

두 개의 주사위를 던져 5 이상의 눈이 나오지 않는 확률은 두 주사위에서 모두 4 이하의 눈이 나오는 확률과 같으므로

$\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$

3번의 시행 후 검은 색 면이 보이도록 카드가 놓이려면 1번 뒤집거나 3번 뒤집어야 한다.

즉, 두 개의 주사위를 던져 5 이상의 눈이 나오지 않는 횟수가 1 또는 3이어야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{4}{9}\right)^1\left(\frac{5}{9}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{4}{9}\right)^3\left(\frac{5}{9}\right)^0=\frac{300}{3^6}+\frac{64}{3^6}=\frac{364}{3^6}$$

이므로 $k=364$

답 364

Ⅲ 통계

1 확률분포

1 확률변수와 확률분포 98~110쪽

002

확률의 총합은 1이므로

$a+2a+3a=1$, $6a=1$

$\therefore a=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-1=0)=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

004

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

에서

$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}=1$, $\frac{10}{k}=1$

$\therefore k=10$

답 10

006

(1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2$, 꺼낸 공 중에서 흰 공의 개수가 x인 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{2-x}$이므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_2\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{2-x}}{{}_6\mathrm{C}_2}$ $(x=0, 1, 2)$

따라서 X가 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=$(흰 공 0개, 검은 공 2개를 꺼낼 확률)

$=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(X=1)=$(흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률)

$=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}$

$\mathrm{P}(X=2)=$(흰 공 2개, 검은 공 0개를 꺼낼 확률)

$=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

(2) 흰 공이 1개 이상 2개 이하로 나올 확률은

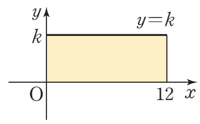
$\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{8}{15}+\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$

답 (1) 풀이 참조 (2) $\frac{3}{5}$

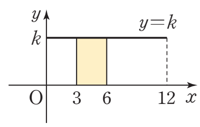
008

(1) 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=12$로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로



$12\times k=1$ $\therefore k=\frac{1}{12}$

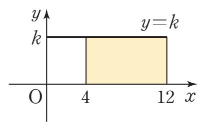
(2) $\mathrm{P}(3\le X\le 6)$은 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=3$, $x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(3\le X\le 6)=(6-3)\times k=3k$

$=3\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

(3) $\mathrm{P}(X\ge 4)$는 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=4$, $x=12$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(X\ge 4)=(12-4)\times k=8k$

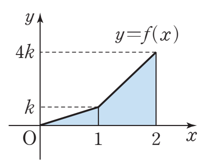
$=8\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$

(4) $\mathrm{P}(X\le 4)=1-\mathrm{P}(X\ge 4)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

답 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{3}$

010

(1) x의 값의 범위에 따른 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



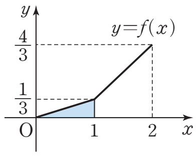
$y=f(x)$의 그래프와 x축 및

직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times1\times k+\frac{1}{2}\times(k+4k)\times1=1$

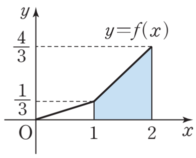
$3k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$

(2) $P(0\le X\le1)$은 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$P(0\le X\le1)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(3) $P(1\le X\le2)$는 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$P(1\le X\le2)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{5}{6}$

012

평균: $E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$

분산: $E(X^2)=0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{1}{5}=\frac{7}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{7}{5}-1^2=\frac{2}{5}$

표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

답 평균: 1, 분산: $\frac{2}{5}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{10}}{5}$

014

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 동전 2개를 동시에 던져 받을 수 있는 금액은 다음과 같다.

HH ➡ 100+100=200(원)

HT ➡ 100+0=100(원)

TH ➡ 0+100=100(원)

TT ➡ 0+0=0(원)

즉, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200이고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	200	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 확률변수 X의 기댓값은

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+100\times\frac{1}{2}+200\times\frac{1}{4}=100$

답 100

016

[1단계] 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률을 각각 구하면

$P(X=0)=$(흰 공 0개, 검은 공 2개를 꺼낼 확률)

$=\frac{{}_3C_0\times{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$

$P(X=1)=$(흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률)

$=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$

$P(X=2)=$(흰 공 2개, 검은 공 0개를 꺼낼 확률)

$=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_0}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

[2단계] 확률변수 X의 평균과 분산을 구하면

$E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{2}{7}+1^2\times\frac{4}{7}+2^2\times\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{8}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{20}{49}$

[3단계] 확률변수 X의 표준편차는

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{20}{49}}=\frac{2\sqrt{5}}{7}$

답 $\frac{2\sqrt{5}}{7}$

018

평균: $E(2X-5)=2E(X)-5=2\times3-5=1$

분산: $V(2X-5)=2^2V(X)=4\times9=36$

표준편차: $\sigma(2X-5)=|2|\sigma(X)$

$=2\times3 \Leftarrow \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=3$

$=6$

답 평균: 1, 분산: 36, 표준편차: 6

020

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+a=1,\ 2a+\frac{3}{5}=1$

$\therefore a=\frac{1}{5}$

$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{2}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}=\frac{33}{10}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{33}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{21}{20}$

이므로 확률변수 Y에 대하여

$E(Y)=E(10X+5)$

$=10E(X)+5$

$=10\times\frac{3}{2}+5=20$

$V(Y)=V(10X+5)$

$=10^2V(X)$

$=100\times\frac{21}{20}=105$

답 평균: 20, 분산: 105

022

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률을 각각 구하면

$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\times{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}$

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_3C_0}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{6}{10}+2^2\times\frac{1}{10}=1$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

$\therefore\ \sigma(-5X+3)=|-5|\sigma(X)=5\times\frac{3}{5}=3$

답 3

필수 확인 문제 111쪽

023

확률의 총합은 1이므로

$P(X=0)+P(X=1)+\cdots+P(X=4)=1$

$-a+\left(\frac{1}{12}-a\right)+\left(\frac{2}{12}+a\right)+\left(\frac{3}{12}+a\right)+\left(\frac{4}{12}+a\right)$

$=1$

$a+\frac{5}{6}=1\qquad\therefore a=\frac{1}{6}$

$\therefore\ P(X=3)=\frac{3}{12}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

답 $\frac{5}{12}$

024

확률의 총합은 1이므로

$\frac{3}{10}+p+\frac{1}{10}+p+p=1,\ 3p=\frac{3}{5}$

$\therefore p=\frac{1}{5}$

$X^2-6X+8\le0$에서

$(X-2)(X-4)\le0\qquad\therefore\ 2\le X\le4$

$\therefore\ P(X^2-6X+8\le0)$

$=P(2\le X\le4)$

$=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

+ 풍산자 비법

이산확률변수 X의 확률질량함수
$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$에 대하여
① $\mathrm{P}(X=x_i \text{ 또는 } X=x_j)=\mathrm{P}(X=x_i)+\mathrm{P}(X=x_j)$
$=p_i+p_j$ (단, $i \neq j$)
② $\mathrm{P}(x_i \leq X \leq x_j)=p_i+p_{i+1}+\cdots+p_j$
(단, $i \leq j$, $j=1, 2, \cdots, n$)

025

행운권 한 장으로 받을 수 있는 상금을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 10000, 5000, 0이고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10000	5000	0	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	1

따라서 확률변수 X의 기댓값은

$$\mathrm{E}(X)=10000\times\frac{1}{10}+5000\times\frac{2}{5}+0\times\frac{1}{2}=3000$$

따라서 구하는 기댓값은 3000원이다.

답 3000원

026

확률변수 Y의 평균이 0, 표준편차가 1이므로

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{X+b}{a}\right)=\frac{\mathrm{E}(X)+b}{a}=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\sigma(Y)=\sigma\left(\frac{X+b}{a}\right)=\left|\frac{1}{a}\right|\sigma(X)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\mathrm{E}(X)=10$, $\sigma(X)=2$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$\frac{10+b}{a}=0$, $\left|\frac{1}{a}\right|\times 2=1$

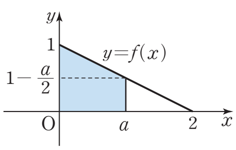
$\therefore a=2,\ b=-10\ (\because a>0)$

$\therefore a-b=2-(-10)=12$

답 12

027

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$\mathrm{P}(0\leq X\leq a)$는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(0\leq X\leq a)=\frac{3}{4}$에서

$$\frac{1}{2}\times\left\{1+\left(1-\frac{a}{2}\right)\right\}\times a=\frac{3}{4}$$

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

이때 $0\leq a\leq 2$이므로 $a=1$

답 1

028

주어진 그래프에서

$\mathrm{P}(X=-2)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{E}(X)=-2\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{4}+2\times\frac{3}{8}+4\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{8}+0^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{3}{8}+4^2\times\frac{1}{4}=6$$

$$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=6-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$$

$\mathrm{E}(Y)=1$에서

$\mathrm{E}(aX+b)=1$, $a\mathrm{E}(X)+b=1$

$\therefore \frac{3}{2}a+b=1 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\mathrm{V}(Y)=135$에서

$\mathrm{V}(aX+b)=135$, $a^2\mathrm{V}(X)=135$

$\frac{15}{4}a^2=135$, $a^2=36 \qquad \therefore a=-6\ (\because a<0)$

$a=-6$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=10$

$\therefore a+b=-6+10=4$

답 4

2 이항분포

112~117쪽

030

(1) 한 개의 동전을 한 번 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$(x=0, 1, 2, \cdots, 10)$

(2) $\mathrm{P}(X=4)={}_{10}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{105}{512}$

답 (1) $\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$

(2) $\frac{105}{512}$

032

(1) $\mathrm{E}(X)=8$에서

$32\times p=8 \qquad \therefore\ p=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(32,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=32\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=6$

(2) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$6=\mathrm{E}(X^2)-8^2 \qquad \therefore\ \mathrm{E}(X^2)=70$

답 (1) 6 (2) 70

034

평균이 0.8이므로 $np=0.8$ …… ㉠

표준편차가 0.8이므로

$\sqrt{np(1-p)}=0.8 \qquad \therefore\ np(1-p)=0.64$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$0.8(1-p)=0.64,\ 1-p=0.8 \qquad \therefore\ p=0.2$

$p=0.2$를 ㉠에 대입하면

$0.2n=0.8 \qquad \therefore\ n=4$

답 $n=4,\ p=0.2$

036

제품 한 개를 검사할 때, 불량품이 나올 확률은

$\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$이므로 확률변수 X는 이항분포

$\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{20}\right)$을 따른다.

따라서 X의 평균과 분산은

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{20}=5,$

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{20}\times\frac{19}{20}=\frac{19}{4}$

답 평균: 5, 분산: $\frac{19}{4}$

038

(1) 한 개의 동전을 한 번 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=10\times\frac{1}{2}=5$

$\therefore\ \mathrm{E}(3X+5)=3\mathrm{E}(X)+5$

$=3\times5+5=20$(만 원)

(2) 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{4}{5}=80,$

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=16$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$16=\mathrm{E}(X^2)-80^2 \qquad \therefore\ \mathrm{E}(X^2)=6416$

답 (1) 20만 원 (2) 6416

● 필수 확인 문제 118쪽

039

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{9}{10}\right)$를 따르므로

$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{9}{10}\right)^x\left(\frac{1}{10}\right)^{10-x}$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\le9)=1-\mathrm{P}(X=10)$

$=1-{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{10}\left(\frac{1}{10}\right)^0$

$=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$

답 $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$

+ 풍산자 비법

확률변수 X가 이항분포를 따를 때 시행 횟수 n과 한 번의 시행에서 어떤 사건이 일어날 확률 p를 구하여 $\mathrm{B}(n,\ p)$로 나타낸 후, X의 확률질량함수를 이용하여 확률을 구한다.

040

확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}={}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\mathrm{P}(X=2)=10\mathrm{P}(X=1)$에서

$${}_{n}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=10\times{}_{n}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$${}_{n}\mathrm{C}_{2}=10\times{}_{n}\mathrm{C}_{1}$$

$$\frac{n(n-1)}{2}=10n,\ n^2-21n=0,\ n(n-21)=0$$

이때 n은 자연수이므로 $n=21$

답 21

041

$\mathrm{E}(X)=\frac{3}{4}$이므로 $np=\frac{3}{4}$ $\quad c \quad$ ㉠

또, $\mathrm{E}(X^2)=\frac{18}{16}$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{18}{16}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

$\therefore\ np(1-p)=\frac{9}{16}$ $\quad c \quad$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{3}{4}(1-p)=\frac{9}{16},\ 1-p=\frac{3}{4}\qquad\therefore\ p=\frac{1}{4}$

$p=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{4}n=\frac{3}{4}\qquad\therefore\ n=3$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=2)={}_{3}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}=\frac{9}{64}$$

답 $\frac{9}{64}$

042

혈액암 치료제의 완치율이 0.8이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(10000,\ 0.8)$을 따른다.

따라서 확률변수 X의 표준편차는

$$\sigma(X)=\sqrt{10000\times0.8\times0.2}=40$$

답 40

043

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=180\times\frac{1}{3}=60,$$

$$\mathrm{V}(X)=180\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=40$$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$40=\mathrm{E}(X^2)-60^2$$

$$\therefore\ \mathrm{E}(X^2)=40+3600=3640$$

답 3640

044

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{72}\mathrm{C}_{x}\frac{5^x}{6^{72}}$$
$$={}_{72}\mathrm{C}_{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{72-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ c\ ,\ 72)$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{5}{6}\right)$를 따른다.

따라서

$$\mathrm{E}(X)=72\times\frac{5}{6}=60,$$

$$\mathrm{V}(X)=72\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=10$$

이므로

$$\mathrm{E}(2X-3)=2\mathrm{E}(X)-3$$
$$=2\times60-3=117$$

$$\mathrm{V}(2X-3)=2^2\mathrm{V}(X)$$
$$=4\times10=40$$

답 평균: 117, 분산: 40

3 정규분포

119~127쪽

046

세 학교 A, B, C의 수학 점수의 평균을 각각 m_{A}, m_{B}, m_{C}, 표준편차를 각각 σ_{A}, σ_{B}, σ_{C}라 하자.

평균은 대칭축에 위치한다.

➡ 오른쪽으로 갈수록 평균이 높다.

$\therefore\ m_{\mathrm{A}}<m_{\mathrm{B}}<m_{\mathrm{C}}$

표준편차가 커지면 분산된 정도가 커져 넓게 퍼지고, 표준편차가 작아지면 분산된 정도가 작아져 평균으로 집중된다.

➡ 높이가 낮고 폭이 넓을수록 표준편차가 크다.

$\therefore\ \sigma_C < \sigma_B < \sigma_A$

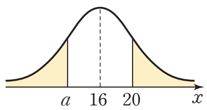
따라서 평균이 가장 높은 학교는 C이고, 표준편차가 가장 큰 학교는 A이다.

답 평균이 가장 높은 학교: C,
표준편차가 가장 큰 학교: A

048

정규분포곡선은 직선 $x=16$에 대하여 대칭이므로

$P(X \le a) = P(X \ge 20)$에서



$\dfrac{a+20}{2}=16 \qquad \therefore\ a=12$

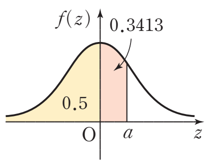
답 12

050

$P(Z \le a)$

$=0.5+P(0 \le Z \le a)$

$=0.8413$



$\therefore\ P(0 \le Z \le a)=0.3413$

이때 $P(0 \le Z \le 1)=0.3413$이므로

$a=1$

답 1

052

확률변수 X가 정규분포 $N(80,\ 10^2)$을 따르므로

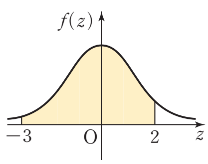
확률변수 $Z=\dfrac{X-80}{10}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $X=50$일 때,

$Z=\dfrac{50-80}{10}=-3$,

$X=100$일 때,

$Z=\dfrac{100-80}{10}=2$이므로



$P(50 \le X \le 100)=P(-3 \le Z \le 2)$

$=P(0 \le Z \le 3)+P(0 \le Z \le 2)$

$=0.4987+0.4772=0.9759$

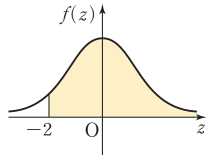
(2) $X=60$일 때, $Z=\dfrac{60-80}{10}=-2$이므로

$P(X \ge 60)$

$=P(Z \ge -2)$

$=0.5+P(0 \le Z \le 2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$



(3) $X=70$일 때, $Z=\dfrac{70-80}{10}=-1$이므로

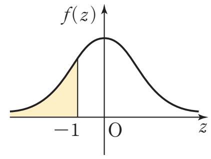
$P(X \le 70)$

$=P(Z \le -1)$

$=P(Z \ge 1)$

$=0.5-P(0 \le Z \le 1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$



답 (1) 0.9759
(2) 0.9772
(3) 0.1587

054

학생들의 몸무게를 X kg이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(60,\ 4^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{X-60}{4}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

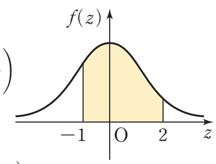
(1) $P(56 \le X \le 68)$

$=P\left(\dfrac{56-60}{4} \le Z \le \dfrac{68-60}{4}\right)$

$=P(-1 \le Z \le 2)$

$=P(0 \le Z \le 1)+P(0 \le Z \le 2)$

$=0.34+0.48=0.82$



따라서 몸무게가 56 kg 이상 68 kg 이하인 학생은 전체의 82 %이다.

(2) $P(X \le 54)$

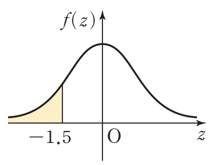
$=P\left(Z \le \dfrac{54-60}{4}\right)$

$=P(Z \le -1.5)$

$=P(Z \ge 1.5)$

$=0.5-P(0 \le Z \le 1.5)$

$=0.5-0.43=0.07$



따라서 전체 학생 수가 2000명이므로 몸무게가 54 kg 이하인 학생은

$0.07 \times 2000=140$(명)

답 (1) 82 % (2) 140명

풍산자 비법

주어진 상황에서 정규분포를 따르는 확률변수 X를 먼저 정하고 이를 표준화하여 X가 특정 범위에 포함될 확률을 구한다.

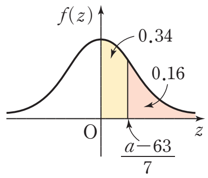
056

[1단계] 학생들의 국어 성적을 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(63,\ 7^2)$을 따른다.

a점 이상이 상위 80등 이내라 하면

$$\mathrm{P}(X \geq a)=\frac{80}{500}=0.16$$

[2단계] 확률변수 $Z=\dfrac{X-63}{7}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로



$$\mathrm{P}(X \geq a)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{a-63}{7}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{a-63}{7}\right)$$
$$=0.16$$
$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{a-63}{7}\right)=0.34$$

[3단계] 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)=0.34$이므로

$$\frac{a-63}{7}=1$$
$$\therefore\ a=70$$

따라서 국어 성적이 상위 80등 이내에 들기 위해서는 70점 이상을 받아야 한다.

답 70점

058

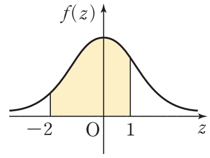
(1) [1단계] 한 개의 동전을 100번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{2}=50,$$
$$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$$

이때 100은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따른다.

[2단계] 확률변수 $Z=\dfrac{X-50}{5}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(40 \leq X \leq 55)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{40-50}{5} \leq Z \leq \frac{55-50}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 1)$$
$$=\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$$
$$=0.4772+0.3413$$
$$=0.8185$$

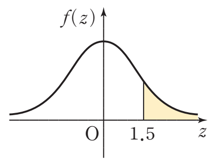


(2) [1단계] 씨앗을 150개 뿌렸을 때, 발아한 씨앗의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=150\times\frac{3}{5}=90,$$
$$\mathrm{V}(X)=150\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=36$$

이때 150은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$을 따른다.

[2단계] 확률변수 $Z=\dfrac{X-90}{6}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은



$$\mathrm{P}(X \geq 99)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{99-90}{6}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z \geq 1.5)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5)$$
$$=0.5-0.4332=0.0668$$

(3) [1단계] 학생 300명을 임의로 뽑을 때, 안경을 쓴 학생 수를 X명이라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(300,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=300\times\frac{1}{4}=75,$$
$$\mathrm{V}(X)=300\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{225}{4}$$

이때 300은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(75,\ \left(\frac{15}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

[2단계] 확률변수 $Z=\dfrac{X-75}{\frac{15}{2}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X \le 60)$

$= \mathrm{P}\left(Z \le \frac{60-75}{\frac{15}{2}}\right)$

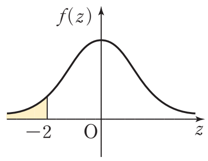
$= \mathrm{P}(Z \le -2)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 2)$

$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$= 0.5 - 0.4772$

$= 0.0228$



답 (1) 0.8185 (2) 0.0668 (3) 0.0228

필수 확인 문제 128쪽

059

함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭축이 $x=a$이고, 함수 $y=h(x)$의 그래프의 대칭축이 $x=b$이므로

$\mathrm{E}(X_1)=\mathrm{E}(X_2)=a$, $\mathrm{E}(X_3)=b$

① $a<b$이므로 $\mathrm{E}(X_1)<\mathrm{E}(X_3)$

② $y=f(x)$와 $y=h(x)$의 그래프의 모양이 같으므로 $\sigma(X_1)=\sigma(X_3)$

③ $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 가운데 부분의 높이가 낮고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이므로 $\sigma(X_1)>\sigma(X_2)$

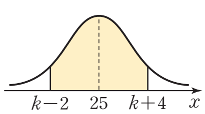
④ $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(X_1 \le a)=\mathrm{P}(X_2 \ge a)=0.5$

⑤ $y=f(x)$의 그래프와 $y=h(x)$의 그래프는 각각 직선 $x=a$, $x=b$에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(X_1 \ge a)=\mathrm{P}(X_3 \ge b)=0.5$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

060

정규분포곡선은 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=25$에 대하여 대칭이므로



$\mathrm{P}(k-2 \le X \le k+4)$가 최대가 되려면

$\frac{(k-2)+(k+4)}{2}=25$

$k+1=25$ $\therefore k=24$ 답 24

참고

$\mathrm{P}(k-2 \le X \le k+4)$에서 $k+4-(k-2)=6$으로 일정하고, X의 확률밀도함수는 $x=25$에서 최댓값을 가지므로 위의 그림과 같이 $\frac{(k-2)+(k+4)}{2}=25$일 때 $\mathrm{P}(k-2 \le X \le k+4)$가 최대이다.

061

$X=n$일 때, $Z=\frac{n-n}{\frac{n}{2}}=0$,

$X=120$일 때, $Z=\frac{120-n}{\frac{n}{2}}=\frac{240-2n}{n}$이므로

$\mathrm{P}(n \le X \le 120)=\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{240-2n}{n}\right)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

따라서 $\frac{240-2n}{n}=1$이므로

$3n=240$ $\therefore n=80$ 답 80

062

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(225, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=225\times\frac{4}{5}=180$,

$\mathrm{V}(X)=225\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=36$

이때 225는 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(180, 6^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\frac{X-180}{6}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

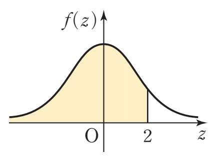
$\mathrm{P}(X \le 192)$

$=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{192-180}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \le 2)$

$=\mathrm{P}(Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$



답 0.9772

063

가위바위보를 한 번 하여 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 가위바위보를 162번 하여 이기는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(162, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore$ $\mathrm{E}(X)=162\times\frac{1}{3}=54,$

$\quad\mathrm{V}(X)=162\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=36$

이때 162는 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(54,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\frac{X-54}{6}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\geq k)=0.07$에서 $\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k-54}{6}\right)=0.07$

$\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-54}{6}\right)=0.07$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-54}{6}\right)=0.07$

$\therefore$ $\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-54}{6}\right)=0.43$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)=0.43$이므로

$\frac{k-54}{6}=1.5$ $\qquad\therefore$ $k=63$

답 63

풍산자 비법

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{P}(m\leq X\leq a)=k$를 만족시키는 a의 값은 다음 순서로 구한다.

① X를 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화한다.

② 주어진 확률을 Z에 대한 확률로 나타낸다.

$\Rightarrow$ $\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-m}{\sigma}\right)=k$

③ 표준정규분포표에서 확률이 k가 되는 $\frac{a-m}{\sigma}$의 값을 찾아 a의 값을 구한다.

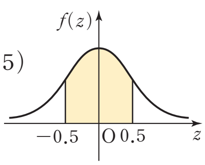
064

확률변수 $Z=\frac{X-62}{4}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(60\leq X\leq64)=0.383$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{60-62}{4}\leq Z\leq\frac{64-62}{4}\right)=0.383$

$\mathrm{P}(-0.5\leq Z\leq0.5)=0.383$

$\mathrm{P}(-0.5\leq Z\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq0.5)=0.383$



$2\mathrm{P}(0\leq Z\leq0.5)=0.383$

$\therefore$ $\mathrm{P}(0\leq Z\leq0.5)=0.1915$

$\therefore$ $\mathrm{P}(X\leq60)$

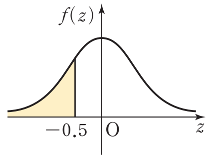
$=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{60-62}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq-0.5)$

$=\mathrm{P}(Z\geq0.5)$

$=\mathrm{P}(Z\leq0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq0.5)$

$=0.5-0.1915=0.3085$



답 0.3085

다른 풀이

$\frac{60+64}{2}=62$이므로

$\mathrm{P}(60\leq X\leq62)=\mathrm{P}(62\leq X\leq64)=0.1915$

$\therefore$ $\mathrm{P}(X\leq60)=\mathrm{P}(X\leq62)-\mathrm{P}(60\leq X\leq62)$

$=0.5-0.1915=0.3085$

실전 연습문제 130~132쪽

065

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=8)$

$=\frac{k}{1\times2}+\frac{k}{2\times3}+\cdots+\frac{k}{8\times9}$

$=k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}$

$=k\left(1-\frac{1}{9}\right)$

$\frac{8}{9}k=1$

$\therefore$ $k=\frac{9}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{9}{8x(x+1)}$ $(x=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

이므로

$\mathrm{P}(X=2$ 또는 $X=3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{9}{8\times2\times3}+\frac{9}{8\times3\times4}$

$=\frac{3}{16}+\frac{3}{32}=\frac{9}{32}$

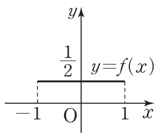
답 $\frac{9}{32}$

참고 **부분분수로의 변형**

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

066

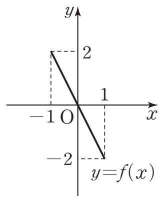
ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



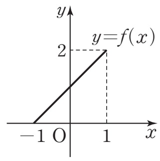
$2\times\frac{1}{2}=1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수이다.

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $0<x\le 1$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.



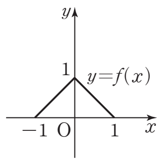
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times2\times2=2\neq1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

ㄹ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times2\times1=1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수이다.

이상에서 확률밀도함수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

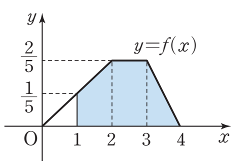
답 ㄱ, ㄹ

067

(1) 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times(1+4)\times k=1$ $\quad\therefore k=\frac{2}{5}$

(2) 구하는 확률은 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(1\le X\le 4)$

$=1-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{5}$

$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{9}{10}$

068

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 50, 100, 500이고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	50	100	500	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=50\times\frac{2}{5}+100\times\frac{1}{5}+500\times\frac{2}{5}=240$

답 240

069

확률의 총합이 1이므로

$a+(a+b)+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{1}{2}$ c ㉠

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times a+2^2\times(a+b)+3^2\times b=5a+13b$,

$\mathrm{E}(X^2)=a+5$에서

$5a+13b=a+5 \qquad \therefore 4a+13b=5$ c ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{3}$

$\therefore b-a=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

답 ②

070

$\mathrm{E}(Y)=11$, $\mathrm{E}(Y^2)=124$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2$

$=124-11^2=3$

$Y=\frac{1}{2}X+5$에서 $X=2Y-10$이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(2Y-10)=2\mathrm{E}(Y)-10$

$=2\times11-10=12$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(2Y-10)=2^2\mathrm{V}(Y)$

$=4\times3=12$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=12+12^2=156$

답 156

071

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률을 각각 구하면

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_3C_3}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{9}{20}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_3C_1}{{}_6C_3}=\frac{9}{20}$

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\times{}_3C_0}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{20}+1^2\times\frac{9}{20}+2^2\times\frac{9}{20}+3^2\times\frac{1}{20}$$

$$=\frac{27}{10}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=\frac{27}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{20}$$

$$\therefore V\left(10X+\frac{1}{3}\right)=10^2V(X)$$

$$=100\times\frac{9}{20}=45$$

답 45

072

평균이 4이므로 $np=4$ …… ㉠

분산이 2이므로 $np(1-p)=2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4(1-p)=2,\ 1-p=\frac{1}{2}\qquad\therefore p=\frac{1}{2}$

$p=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}n=4\qquad\therefore n=8$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(8,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_8C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x}={}_8C_x\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$\therefore \frac{P(X=3)}{P(X=2)}=\frac{{}_8C_3\left(\frac{1}{2}\right)^8}{{}_8C_2\left(\frac{1}{2}\right)^8}=\frac{{}_8C_3}{{}_8C_2}=2$$

답 2

073

정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 조건 (가)에서

$P(X\le20)=P(X\ge28)$

$\therefore m=\frac{20+28}{2}=24$

조건 (나)에서

$V(3X-6)=3^2V(X)=9\sigma^2=36$이므로

$\sigma^2=4\qquad\therefore \sigma=2$

$\therefore m+\sigma=24+2=26$

답 26

074

확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ 3^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-m}{3}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\le15)=0.0228$에서

$$P\left(Z\le\frac{15-m}{3}\right)=0.0228$$

$$P(Z\le0)-P\left(\frac{15-m}{3}\le Z\le0\right)=0.0228$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{m-15}{3}\right)=0.0228$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{m-15}{3}\right)=0.4772$$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{m-15}{3}=2\qquad\therefore m=21$

답 21

075

응시자의 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(380,\ 50^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-380}{50}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a점이라 하면

$$P(X\ge a)=\frac{3000}{25000}=0.12\text{에서}$$

$$P\left(Z\ge\frac{a-380}{50}\right)=0.12$$

$$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-380}{50}\right)=0.12$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-380}{50}\right)=0.12$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-380}{50}\right)=0.38$$

이때 $P(0\le Z\le1.2)=0.38$이므로

$\frac{a-380}{50}=1.2\qquad\therefore a=440$

따라서 합격자의 최저 점수는 440점이다.

답 440점

076

100명의 휴대전화 이용자 중 통화에 성공한 사람의 수를 X명이라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.8)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times0.8=80$,

$\mathrm{V}(X)=100\times0.8\times0.2=16$

이때 100은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\dfrac{X-80}{4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

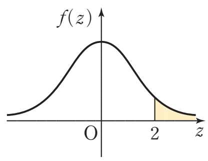
$\mathrm{P}(X\geq88)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geq\dfrac{88-80}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)$

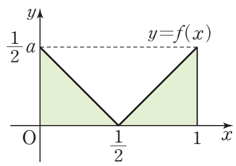
$=0.5-0.4772=0.0228$



답 0.0228

077

$f(x)\geq0$이므로 $a\geq0$, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로



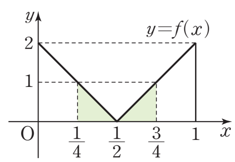
$2\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}a\right)=1 \qquad \therefore a=4$

즉, $f(x)=4\left|x-\dfrac{1}{2}\right|(0\leq x\leq1)$이므로

$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=4\left|\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\right|=4\times\dfrac{1}{4}=1$

$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=4\left|\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\right|=4\times\dfrac{1}{4}=1$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4}\leq X\leq\dfrac{3}{4}\right)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\dfrac{1}{4}$, $x=\dfrac{3}{4}$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4}\leq X\leq\dfrac{3}{4}\right)=2\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4}\leq X\leq\dfrac{1}{2}\right)$

$=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times1\right)$

$=\dfrac{1}{4}$

답 $\dfrac{1}{4}$

078

예약을 취소하는 우등석 예약자의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(30,\ 0.1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X=x)={}_{30}\mathrm{C}_x\times0.1^x\times0.9^{30-x}$

이때 좌석이 부족하려면 $X\leq1$이어야 하므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\leq1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$={}_{30}\mathrm{C}_0\times0.1^0\times0.9^{30}+{}_{30}\mathrm{C}_1\times0.1^1\times0.9^{29}$

$=1\times1\times0.042+30\times0.1\times0.047$

$=0.042+0.141=0.183$

답 0.183

079

$(x+5)$개의 공이 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때 흰 공이 나올 확률은

$\dfrac{x}{x+5}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{x}{x+5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\dfrac{x}{x+5}=24$ c ㉠

$\mathrm{V}(X)=n\times\dfrac{x}{x+5}\times\left(1-\dfrac{x}{x+5}\right)$

$=n\times\dfrac{x}{x+5}\times\dfrac{5}{x+5}=8$ c ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$24\times\dfrac{5}{x+5}=8$, $x+5=15 \qquad \therefore x=10$

$x=10$을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{10}{15}n=24 \qquad \therefore n=36$

$\therefore n+x=36+10=46$

답 46

080

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르고

$f(10)=f(20)$일 때 $m=15$이므로 조건 (가)에서

$m<15$ c ㉠

$f(4)=f(22)$일 때 $m=13$이므로 조건 (나)에서

$m>13$ c ㉡

㉠, ㉡에서 $13<m<15$이므로

$m=14$ ($\because$ m은 자연수)

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(17\le X\le 18)&=P\left(\frac{17-14}{5}\le Z\le \frac{18-14}{5}\right)\\&=P(0.6\le Z\le 0.8)\\&=P(0\le Z\le 0.8)-P(0\le Z\le 0.6)\\&=0.288-0.226\\&=0.062\end{aligned}$$

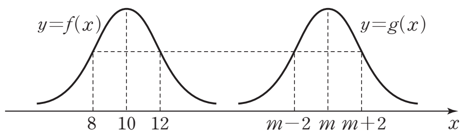
답 0.062

081

확률변수 X와 확률변수 Y의 표준편차가 같으므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동한 것이다.

$f(12)\le g(20)$이므로 다음 그림에서

$m-2\le 20\le m+2$이어야 한다.



즉, $18\le m\le 22$이므로 $m=22$일 때 확률 $P(21\le Y\le 24)$는 최댓값을 갖는다.

이때 확률변수 $Z=\frac{Y-22}{2}$는 표준정규분포 N(1, 0)을 따르므로

$$\begin{aligned}&P(21\le Y\le 24)\\&=P\left(\frac{21-22}{2}\le Z\le \frac{24-22}{2}\right)\\&=P(-0.5\le Z\le 1)\\&=P(-0.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)\\&=P(0\le Z\le 0.5)+P(0\le Z\le 1)\\&=0.1915+0.3413=0.5328\end{aligned}$$

답 ①

2 통계적 추정

1 모평균과 표본평균

134~140쪽

083

(1) 모평균 $m=20$, 모표준편차 $\sigma=a$, 표본의 크기 $n=4$이므로 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=m$에서 $b=20$

$\sigma(\overline{X})=\frac{a}{\sqrt{n}}$에서

$4=\frac{a}{\sqrt{4}}$ $\qquad\therefore a=8$

$\therefore ab=8\times 20=160$

(2) 모표준편차 $\sigma=12$이므로 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차가 2 이하인 것을 식으로 나타내면

$\sigma(\overline{X})=\frac{12}{\sqrt{n}}\le 2$에서 $\sqrt{n}\ge 6$

$\therefore n\ge 36$

따라서 n의 최솟값은 36이다.

답 (1) 160 (2) 36

085

[1단계] 주어진 표에서 확률변수 X의 평균 m과 분산 σ^2을 구하면

$$\begin{aligned}E(X)&=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=0^2\times\frac{4}{9}+1^2\times\frac{4}{9}+2^2\times\frac{1}{9}\\&=\frac{8}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore V(X)&=E(X^2)-\{E(X)\}^2\\&=\frac{8}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

$\therefore m=\frac{2}{3},\ \sigma^2=\frac{4}{9}$

[2단계] 이때 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$E(\overline{X})=m=\frac{2}{3}$,

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\frac{4}{9}}{100}=\frac{1}{225}$

답 평균: $\frac{2}{3}$, 분산: $\frac{1}{225}$

087

[1단계] 모평균 $m=170$, 모표준편차 $\sigma=20$, 표본의 크기 $n=100$이므로 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=170$,

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{20^2}{100}=4$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 2^2)$을 따른다.

[2단계] 이제 다음과 같은 문제로 변신했다.

> 확률변수 $\overline{X}$가 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 2^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(\overline{X}\geq 175)$를 구하시오.

확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-170}{2}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

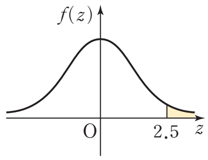
$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 175)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{175-170}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 2.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$



답 0.0062

089

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르므로 임의추출한 25병의 용량의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따른다.

이때 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-m}{2}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 2000)=0.9772$에서

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 2000)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{2000-m}{2}\right)$

$=0.9772$

$=0.5+0.4772$

$=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5+\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 0)$

$=\mathrm{P}(Z\geq -2)$

따라서 $\frac{2000-m}{2}=-2$이므로

$2000-m=-4$

$\therefore\ m=2004$

답 2004

090

(1) 공을 한 개씩 복원추출하는 경우의 수는 5개의 공 중에서 3개를 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

(2) 공을 한 개씩 비복원추출하는 경우의 수는 5개의 공 중에서 3개를 뽑는 순열의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{P}_3=60$

(3) 공을 동시에 3개 추출하는 경우의 수는 5개의 공 중에서 3개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{C}_3=10$

답 (1) 125 (2) 60 (3) 10

091

$\mathrm{E}(\overline{X})=20$이므로 $m=20$

모표준편차가 4, 표본의 크기가 n, 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차가 $\frac{1}{2}$이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{4}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$에서 $\sqrt{n}=8$

$\therefore\ n=64$

$\therefore\ m+n=20+64=84$

답 84

092

상자에서 임의로 1개의 구슬을 꺼낼 때, 구슬에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X})=1$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore\ \sigma(\overline{X})=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

093

모평균 $m=10$, 모표준편차 $\sigma=4$, 표본의 크기 $n=4$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=10$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{4^2}{4}=4$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=4+10^2=104$

답 104

094

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(1000,\ 40^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(1000,\ \dfrac{40^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(1000,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-1000}{4}$은 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)=0.0668$에서 $\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{k-1000}{4}\right)=0.0668$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k-1000}{4}\right)=0.0668$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k-1000}{4}\right)=0.0668$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k-1000}{4}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{k-1000}{4}=1.5\qquad\therefore\ k=1006$

답 1006

095

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때

$\mathrm{P}(a\le X\le m)=\mathrm{P}\left(\dfrac{a-m}{4}\le Z\le\dfrac{m-m}{4}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{a-m}{4}\le Z\le 0\right)=0.3413$

이므로

$-\dfrac{a-m}{4}=1\qquad\therefore\ a-m=-4\qquad\cdots\cdots$㉠

또, 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르므로 임의추출한 제품 16개의 길이의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{4^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$을 따른다.

이때 확률변수 $Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-m}{1}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge a+2)=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge a+2-m)$

$=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge -2)$ ($\because$ ㉠)

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$

답 0.9772

2 모평균의 추정

142~146쪽

097

표본평균 $\overline{x}=60$, 표본의 크기 $n=36$이고, n이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 3을 사용할 수 있다.

따라서 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$60-2.58\times\dfrac{3}{\sqrt{36}}\le m\le 60+2.58\times\dfrac{3}{\sqrt{36}}$

$\therefore\ 58.71\le m\le 61.29$

답 $58.71\le m\le 61.29$

099

표본평균 $\overline{x}=345$, 모표준편차 $\sigma=3$이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$345-2.58\times\dfrac{3}{\sqrt{n}}\le m\le 345+2.58\times\dfrac{3}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $343.71\le m\le 346.29$와 같으므로

$345-2.58\times\dfrac{3}{\sqrt{n}}=343.71$,

$345+2.58\times\dfrac{3}{\sqrt{n}}=346.29$에서

$2.58\times\dfrac{3}{\sqrt{n}}=1.29$, $\sqrt{n}=6\qquad\therefore\ n=36$

답 36

101

표본의 크기를 n이라 할 때, 신뢰도 99 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이가 0.6 이하가 되어야 하므로

$2\times 2.58\times \frac{5}{\sqrt{n}}\le 0.6$에서 $\sqrt{n}\ge 43$

$\therefore\ n\ge 1849$

따라서 표본의 크기를 1849 이상으로 해야 한다.

답 1849

103

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는 $2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

$\left(\text{단, } k\text{는 상수, } \mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

ㄱ은 거짓이다.

(반례) $\sigma=1$이고 $\alpha=95$, $n=16$일 때, 신뢰구간의 길이는 $2\times 1.96\times \frac{1}{\sqrt{16}}=0.98$

$\sigma=1$이고 $\alpha=99$, $n=25$일 때, 신뢰구간의 길이는 $2\times 2.58\times \frac{1}{\sqrt{25}}=1.032$

$0.98<1.032$이므로 신뢰구간의 길이가 항상 짧아진다고 할 수 없다.

ㄴ은 참이다.

신뢰도를 높이면 k의 값이 커지고, 표본의 크기를 작게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 $\frac{1}{\sqrt{n}}$의 값은 커진다.

따라서 $2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다.

ㄷ은 거짓이다.

신뢰도가 일정하고 표본의 크기가 n일 때 신뢰구간의 길이는

$2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

신뢰도가 일정하고 표본의 크기가 $4n$일 때 신뢰구간의 길이는

$2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}=2\times k\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\times 2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이므로 표본의 크기가 4배가 되면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{2}$배가 된다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ㄴ

참고

ㄱ에서 신뢰도를 높이면 k의 값이 커지고, 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 $\frac{1}{\sqrt{n}}$의 값은 작아진다. 따라서 $2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이 반드시 작아진다고 할 수 없으므로 신뢰구간의 길이는 반드시 짧아진다고 할 수 없다.

필수 확인 문제

147쪽

104

표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차 $\sigma=4$, 표본의 크기 $n=64$이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times \frac{4}{\sqrt{64}}\le m\le \overline{x}+2.58\times \frac{4}{\sqrt{64}}$

$\therefore\ \overline{x}-1.29\le m\le \overline{x}+1.29$

즉, $a=\overline{x}-1.29$, $2a=\overline{x}+1.29$이므로

$2(\overline{x}-1.29)=\overline{x}+1.29$, $2\overline{x}-2.58=\overline{x}+1.29$

$\therefore\ \overline{x}=3.87$

답 3.87

풍산자 비법

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x}$일 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이면

$a=\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ b=\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

105

표본평균 $\overline{x}=800$, 표본의 크기 $n=100$이고, n이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 20을 사용할 수 있다.

따라서 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$800-2.58\times \frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 800+2.58\times \frac{20}{\sqrt{100}}$

$\therefore\ 794.84\le m\le 805.16$

답 $794.84\le m\le 805.16$

106

표본평균 $\overline{x}=30$, 모표준편차 $\sigma=3$이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$30-1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}\le m\le 30+1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}$$

이때 $30-1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}=29.58$이므로

$1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}=0.42$, $\sqrt{n}=14$ $\quad\therefore n=196$

따라서 $a=30+1.96\times\frac{3}{\sqrt{196}}=30.42$이므로

$n+a=196+30.42=226.42$

답 226.42

107

$b-a$는 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간의 길이이고, 모표준편차 $\sigma=4$, 표본의 크기 $n=100$이므로

$$b-a=2\times1.96\times\frac{4}{\sqrt{100}}=1.568$$

답 1.568

108

모표준편차가 5 kg이고, 신뢰도 99 %로 추정할 때 모평균의 신뢰구간의 길이가 1 kg 이하이어야 하므로 표본의 크기를 n이라 하면

$2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le1$, $\sqrt{n}\ge25.8$

$\therefore n\ge665.64$

따라서 조사해야 할 표본의 크기의 최솟값은 666이다.

답 666

+ 풍산자 비법

모평균의 신뢰구간의 길이

모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간의 길이

➡ $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

109

표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m-\overline{x}|\le1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 모표준편차 σ의 $\frac{1}{10}$ 이하이어야 하므로

$1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{10}\sigma$, $\sqrt{n}\ge19.6$

$\therefore n\ge384.16$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 385이다.

답 385

+ 풍산자 비법

표본의 크기가 n일 때, 모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차

① 신뢰도 95 % ➡ $|m-\overline{x}|\le1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 신뢰도 99 % ➡ $|m-\overline{x}|\le2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

3 모비율과 표본비율 148~150쪽

111

[1단계] 임의추출한 150명의 주민 중에서 도서관 건립에 찬성하는 사람의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 $p=0.6$, 표본의 크기 $n=150$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 분산은

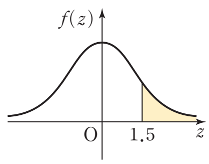
$\mathrm{E}(\hat{p})=p=0.6$,

$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{pq}{n}=\frac{0.6\times0.4}{150}=0.04^2$

이때 n은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.6,\ 0.04^2)$을 따른다.

[2단계] 확률변수 $Z=\frac{\hat{p}-0.6}{0.04}$은 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{99}{150}\right)\\&=\mathrm{P}(\hat{p}\ge0.66)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{0.66-0.6}{0.04}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$



답 0.0668

필수 확인 문제

151쪽

112

300개의 기업 중에서 29개가 문화생활비를 지원하므로 표본비율 $\hat{p}$은

$\hat{p}=\dfrac{29}{300}$ 답 $\dfrac{29}{300}$

113

이 화원에서 출하되는 카네이션 중에서 빨간색 카네이션이 70 %이므로 모비율은 $p=0.7$

따라서 표본비율 $\hat{p}$의 평균은 $E(\hat{p})=p=0.7$

또, $p+q=1$에서 $q=1-0.7=0.3$이고, $n=300$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 분산은

$V(\hat{p})=\dfrac{pq}{n}=\dfrac{0.7\times0.3}{300}=0.0007$

답 평균: 0.7, 분산: 0.0007

114

표본비율 $\hat{p}$의 평균과 분산은

$E(\hat{p})=0.5$, $V(\hat{p})=\dfrac{0.5\times0.5}{400}=0.025^2$

이때 400은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.5,\ 0.025^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.5}{0.025}$는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\hat{p}\le0.45)&=P\left(Z\le\frac{0.45-0.5}{0.025}\right)\\&=P(Z\le-2)=P(Z\ge2)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

답 0.0228

115

자유투를 100번 시도했을 때 성공한 자유투의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 $p=0.8$, 표본의 크기 $n=100$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 분산은

$E(\hat{p})=0.8$, $V(\hat{p})=\dfrac{0.8\times0.2}{100}=0.04^2$

이때 n은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.8,\ 0.04^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.8}{0.04}$은 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P\left(\hat{p}\ge\frac{90}{100}\right)&=P(\hat{p}\ge0.9)\\&=P\left(Z\ge\frac{0.9-0.8}{0.04}\right)\\&=P(Z\ge2.5)\\&=0.5-P(0\le Z\le2.5)\\&=0.5-0.4938=0.0062\end{aligned}$$

답 0.0062

116

400명의 학생 중에서 여가 활동으로 게임을 하는 학생 수의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 $p=0.36$, 표본의 크기 $n=400$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 분산은

$E(\hat{p})=0.36$, $V(\hat{p})=\dfrac{0.36\times0.64}{400}=0.024^2$

이때 n은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.36,\ 0.024^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.36}{0.024}$은 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P(0.33\le\hat{p}\le0.39)\\&=P\left(\frac{0.33-0.36}{0.024}\le Z\le\frac{0.39-0.36}{0.024}\right)\\&=P(-1.25\le Z\le1.25)=2P(0\le Z\le1.25)\\&=2\times0.3944=0.7888\end{aligned}$$

답 0.7888

117

모비율 $p=0.25$, 표본의 크기 $n=300$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 분산은

$E(\hat{p})=0.25$, $V(\hat{p})=\dfrac{0.25\times0.75}{300}=0.025^2$

이때 n은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.25,\ 0.025^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.25}{0.025}$는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&P(-k\le\hat{p}-0.25\le k)\\&=P\left(-\frac{k}{0.025}\le\frac{\hat{p}-0.25}{0.025}\le\frac{k}{0.025}\right)\\&=P\left(-\frac{k}{0.025}\le Z\le\frac{k}{0.025}\right)\\&=2P\left(0\le Z\le\frac{k}{0.025}\right)=0.9544\end{aligned}$$

이때 $2P(0\le Z\le2)=2\times0.4772=0.9544$이므로

$\dfrac{k}{0.025}=2\qquad\therefore k=0.05$

답 0.05

4 모비율의 추정

152~154쪽

119

표본비율 $\hat{p}^{2}\ \frac{40}{600}=0.4$, 표본의 크기 $n=600$이고,

n은 충분히 크므로 모비율 p의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$0.4-2.58\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{600}}\le p\le 0.4+2.58\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{600}}$$

$\therefore\ 0.3484\le p\le 0.4516$

답 $0.3484\le p\le 0.4516$

121

표본비율 $\hat{p}=0.8$이므로 모비율 p의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$0.8-2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}\le p\le 0.8+2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}$$

이 신뢰구간이 $0.7355\le p\le 0.8645$와 같으므로

$0.8-2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}=0.7355$,

$0.8+2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}=0.8645$에서

$0.8-2.58\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}=0.7355$,

$0.8+2.58\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}=0.8645$

$2.58\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}=0.0645$, $\sqrt{n}=16$

$\therefore\ n=256$

답 256

123

신뢰구간의 길이가 0.08 이하가 되게 하는 표본의 개수를 n이라 하자.

표본비율 $\hat{p}^{1}\ \frac{60}{200}=0.8$이므로 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}\le 0.08$,

$\frac{2\times1.96\times0.4}{0.08}\le\sqrt{n}$

$\sqrt{n}\ge19.6$ $\quad\therefore\ n\ge384.16$

따라서 최소 385명의 표본을 뽑아야 한다.

답 385명

필수 확인 문제

155쪽

124

표본비율 $\hat{p}=\frac{144}{400}=0.36$, 표본의 크기 $n=400$이고,

n은 충분히 크므로 모비율 p의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$0.36-2.58\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{400}}\le p\le 0.36+2.58\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{400}}$$

$\therefore\ 0.29808\le p\le 0.42192$

답 $0.29808\le p\le 0.42192$

125

표본비율 $\hat{p}=\frac{80}{100}=0.8$, 표본의 크기 $n=100$이고,

n은 충분히 크므로 모비율 p의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}\le p\le 0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}$$

이 신뢰구간이 $0.8-k\le p\le 0.8+k$와 일치하므로

$k=1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}=0.0784$

답 0.0784

126

표본비율 $\hat{p}=0.9$이므로 모비율 p의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$0.9-1.96\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}\le p\le 0.9+1.96\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}$$

이 신뢰구간이 $0.8916\le p\le 0.9084$와 일치하므로

$0.9-1.96\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}=0.8916$,

$0.9+1.96\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}=0.9084$에서

$0.9-1.96\times\frac{0.3}{\sqrt{n}}=0.8916$,

$0.9+1.96\times\frac{0.3}{\sqrt{n}}=0.9084$

$1.96\times\frac{0.3}{\sqrt{n}}=0.0084$, $\sqrt{n}=70$

$\therefore\ n=4900$

답 4900

127

모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본비율이 $\hat{p}$일 때, 신뢰도 α %로 추정한 모비율 p의 신뢰구간의 길이는

$$l=2k\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\left(\text{단, } k\text{는 상수, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

ㄱ은 참이다.

n이 일정할 때, 신뢰도 α %가 높아지면 k의 값이 커지므로 l의 값은 커진다.

ㄴ은 거짓이다.

신뢰도 α %가 일정하면 k의 값도 일정하므로 n이 커지면 l의 값은 작아진다.

ㄷ도 참이다.

신뢰도 α %가 일정하면 k의 값도 일정하므로 n이 3배가 되면 l의 값은 $\frac{1}{\sqrt{3}}$배가 된다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

128

표본의 크기를 n이라 하면

표본비율 $\hat{p}=\frac{5220}{5800}=0.9$이므로 모비율 p의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$0.9-2\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}\le p\le 0.9+2\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}$$

$$-2\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}\le p-0.9\le 2\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}$$

$$\therefore\ |p-0.9|\le 2\times\frac{0.3}{\sqrt{n}}$$

이때 모비율과 표본비율의 차가 3 %, 즉 0.03 이하가 되어야 하므로

$$2\times\frac{0.3}{\sqrt{n}}\le 0.03,\ \sqrt{n}\ge 20$$

$$\therefore\ n\ge 400$$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 400명이다.

답 400

참고

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.475$이므로 $\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)=0.95$이다.

실전 연습문제

157~159쪽

129

ㄱ은 거짓이다.

$\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$, $\overline{X_3}$의 값은 알 수 없다.

ㄴ은 참이다.

$$\mathrm{E}(\overline{X_1})=\mathrm{E}(\overline{X_2})=\mathrm{E}(\overline{X_3})=m$$

ㄷ도 참이다.

$$\sigma(\overline{X_1})=\frac{\sigma}{\sqrt{81}}=\frac{\sigma}{9},\ \sigma(\overline{X_2})=\frac{\sigma}{\sqrt{196}}=\frac{\sigma}{14},$$

$\sigma(\overline{X_3})=\frac{\sigma}{\sqrt{400}}=\frac{\sigma}{20}$이므로

$$\sigma(\overline{X_1})>\sigma(\overline{X_2})>\sigma(\overline{X_3})$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

130

정규분포 $\mathrm{N}(104,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 과자 4상자의 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(104,\ \frac{4^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(104,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-104}{2}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(a\le\overline{X}\le 106)=\mathrm{P}\left(\frac{a-104}{2}\le Z\le\frac{106-104}{2}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{a-104}{2}\le Z\le 1\right)=0.5328$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{a-104}{2}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.5328$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{a-104}{2}\le Z\le 0\right)+0.3413=0.5328$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{a-104}{2}\le Z\le 0\right)=0.1915$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$$-\frac{a-104}{2}=0.5\qquad\therefore\ a=103$$

답 ⑤

131

이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르는 확률변수를 X라 하면

$$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{5}=20,\ \mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$$

이때 400은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(20,\ \frac{4^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(20,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-20}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 N(0, 1)을 따르므로

$$\begin{aligned}P(18\le\overline{X}\le24)&=P\left(\frac{18-20}{2}\le Z\le\frac{24-20}{2}\right)\\&=P(-1\le Z\le2)\\&=P(-1\le Z\le0)+P(0\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

답 0.8185

132

모집단이 정규분포 $N(22,\ 2^2)$을 따르므로 건전지 4개의 평균 수명을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(22,\ \frac{2^2}{4}\right)$, 즉 $N(22,\ 1^2)$을 따른다. 따라서 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-22}{1}$는 표준정규분포 N(0, 1)을 따른다.

한 세트에 들어 있는 건전지 4개의 수명을 모두 더한 시간이 80시간 이하일 때 불량품이므로 $4\overline{X}\le80$, 즉 $\overline{X}\le20$일 때 불량품이다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(4\overline{X}\le80)=P(\overline{X}\le20)&=P\left(Z\le\frac{20-22}{1}\right)\\&=P(Z\le-2)=P(Z\ge2)\\&=0.5-P(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

답 0.0228

133

모집단이 정규분포 $N(157,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(157,\ \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다. 따라서 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-157}{\frac{12}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 N(0, 1)을 따르므로

$P(|\overline{X}-157|\le2)=0.8664$에서

$P(-2\le\overline{X}-157\le2)=0.8664$

$$P\left(\frac{-2}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\le\frac{\overline{X}-157}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\le\frac{2}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)=0.8664$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{6}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.8664$$

$$2P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.8664$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.4332$$

이때 $P(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{6}=1.5,\ \sqrt{n}=9\qquad\therefore n=81$

답 81

134

석류의 무게는 정규분포 $N(m,\ 40^2)$을 따르고 크기가 64인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 석류 무게의 평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{40}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{40}{\sqrt{64}}$$

$\therefore c=2.58\times\frac{40}{\sqrt{64}}=2.58\times5=12.9$

답 12.9

135

모표준편차를 σ, 표본의 크기를 n, 모평균 m의 신뢰도를 α %라 하면 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } k\text{는 상수, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

$n=16$일 때 신뢰구간의 길이가 2이므로

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=2\qquad\therefore k\sigma=4$

따라서 모평균 m의 신뢰도 α %인 신뢰구간의 길이가 1이 되려면

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1$에서 $\sqrt{n}=8$

$\therefore n=64$

답 64

136

임의추출한 300명 중에서 도보로 통학하는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 도보로 통학하지 않는 학생의 비율은 $1-\hat{p}$이므로 구하는 확률은

$$P\left(1-\hat{p}\ge\frac{70}{100}\right)=P(\hat{p}\le0.3)$$

또, 모비율 $p=0.25$, 표본의 크기 $n=300$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 분산은

$$E(\hat{p})=0.25,\ V(\hat{p})=\frac{0.25\times0.75}{300}=0.025^2$$

이때 n은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.25,\ 0.025^2)$을 따른다. 따라서 확률변수 $Z=\frac{\hat{p}-0.25}{0.025}$는 근사적으로 표준정규분포 N(0, 1)을 따르므로

$$\mathrm{P}(\hat{p}\le 0.3)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{0.3-0.25}{0.025}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 2)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5+0.4772$$
$$=0.9772$$

답 0.9772

137

표본비율 $\hat{p}=\frac{1}{5}=0.2$이므로 자전거 사용률 p의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$0.2-1.96\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{n}}\le p\le 0.2+1.96\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{n}}$$

이 신뢰구간이 $0.151\le p\le 0.249$와 같으므로

$0.2-1.96\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{n}}=0.151$,

$0.2+1.96\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{n}}=0.249$에서

$0.2-1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}=0.151$, $0.2+1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}=0.249$

$1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}=0.049$, $\sqrt{n}=16$

$\therefore\ n=256$

답 256

138

표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 표본의 크기가 81일 때, 신뢰도 99 %인 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2\times 3\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{81}}=\frac{2}{3}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

또, 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이 l'은

$$l'=2\times 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=\frac{4}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

이때 $l=2l'$이므로

$$\frac{2}{3}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}=2\times\frac{4}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

$\sqrt{n}=12$ $\quad\therefore\ n=144$

답 144

139

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$f(x)=f(80-x)$에 x 대신 $40-x$를 대입하면

$f(40-x)=f(40+x)$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=40$에 대하여 대칭이고, 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 12^2)$을 따르므로

$m=40$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 12^2)$을 따른다.

이때 확률변수 $Z=\frac{X-40}{12}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(m-12\le X\le m+12)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{m-12-40}{12}\le Z\le\frac{m+12-40}{12}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$ ($\because\ m=40$)

$=2\times\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

따라서 $2\times\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=a$에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=\frac{a}{2}$

또,

$\mathrm{P}(m-24\le X\le m+24)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{m-24-40}{12}\le Z\le\frac{m+24-40}{12}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)$ ($\because\ m=40$)

$=2\times\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

따라서 $2\times\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=b$에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=\frac{b}{2}$

또, 모집단이 $\mathrm{N}(40,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(40,\ \frac{12^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(40,\ 3^2)$을 따른다.

이때 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-40}{3}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(34\le\overline{X}\le 37)=\mathrm{P}\left(\frac{34-40}{3}\le Z\le\frac{37-40}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le -1)$$
$$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=\frac{b}{2}-\frac{a}{2}=\frac{b-a}{2}$$

답 ①

140

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고

$\mathrm{P}(X\ge 3.4)=\frac{1}{2}$이므로 $m=3.4$

따라서 확률변수 $Z_X=\frac{X-3.4}{\sigma}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X \le 3.9) + P(Z \le -1) = 1$에서

$P(X \le 3.9) = P\left(Z_X \le \frac{3.9-3.4}{\sigma}\right) = P\left(Z_X \le \frac{0.5}{\sigma}\right)$,

$P(Z \le -1) = P(Z \ge 1)$이므로

$P\left(Z_X \le \frac{0.5}{\sigma}\right) + P(Z \ge 1) = 1$

$\therefore P\left(Z_X \le \frac{0.5}{\sigma}\right) = P(Z \le 1)$

이때 $\frac{0.5}{\sigma} = 1$에서 $\sigma = 0.5$이므로 확률변수 X는 정규분포 $N(3.4, 0.5^2)$을 따르고, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(3.4, \frac{0.5^2}{25}\right)$, 즉 $N(3.4, 0.1^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z_{\overline{X}} = \frac{\overline{X}-3.4}{0.1}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$
\begin{aligned}
P(\overline{X} \ge 3.55) &= P\left(Z_{\overline{X}} \ge \frac{3.55-3.4}{0.1}\right) \\
&= P(Z_{\overline{X}} \ge 1.5) \\
&= 0.5 - P(0 \le Z_{\overline{X}} \le 1.5) \\
&= 0.5 - 0.4332 = 0.0668
\end{aligned}
$$

답 0.0668

141

표본평균 $\overline{X_A}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{3^2}{5}\right)$을 따르고, 표본평균 $\overline{X_B}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{3^2}{8}\right)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z_A = \frac{\overline{X_A}-m}{\frac{3}{\sqrt{5}}}$, $Z_B = \frac{\overline{X_B}-m}{\frac{3}{\sqrt{8}}}$은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

ㄱ은 참이다.

$\sigma(\overline{X_A}) = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $\sigma(\overline{X_B}) = \frac{3}{\sqrt{8}}$이므로

$\sigma(\overline{X_A}) > \sigma(\overline{X_B})$

ㄴ은 참이다.

$$
\begin{aligned}
P(\overline{X_A} \le m+3) &= P\left(Z_A \le \frac{m+3-m}{\frac{3}{\sqrt{5}}}\right) \\
&= P(Z_A \le \sqrt{5})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\overline{X_B} \le m+3) &= P\left(Z_B \le \frac{m+3-m}{\frac{3}{\sqrt{8}}}\right) \\
&= P(Z_B \le \sqrt{8})
\end{aligned}
$$

$\therefore P(\overline{X_A} \le m+3) < P(\overline{X_B} \le m+3)$

ㄷ은 참이다.

$P(|Z| \le k) = 0.99$라 하면 $b-a$는 $\overline{X_A}$의 분포로 추정한 신뢰구간의 길이이고, $d-c$는 $\overline{X_B}$의 분포로 추정한 신뢰구간의 길이이므로

$b-a = 2k \times \frac{3}{\sqrt{5}}$, $d-c = 2k \times \frac{3}{\sqrt{8}}$

$\therefore b-a > d-c$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

142

n이 충분히 크므로

확률변수 $Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} = \frac{(\hat{p}-p)\sqrt{n}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}$은 근사적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(|\hat{p}-p| \le 0.2\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}) \ge 0.95$에서

$P\left(\frac{|\hat{p}-p|}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \le 0.2\right) \ge 0.95$

$P\left(\frac{|\hat{p}-p|\sqrt{n}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \le 0.2\sqrt{n}\right) \ge 0.95$

$P\left(\left|\frac{(\hat{p}-p)\sqrt{n}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\right| \le 0.2\sqrt{n}\right) \ge 0.95$

$\therefore P(|Z| \le 0.2\sqrt{n}) \ge 0.95$

이때 $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$이므로

$0.2\sqrt{n} \ge 1.96$, $\sqrt{n} \ge 9.8$

$\therefore n \ge 96.04$

따라서 자연수 n의 최솟값은 97이다.

답 97

참고

표본의 크기 n이 충분히 크면 $\sqrt{\frac{pq}{n}}$에서 모비율 p 대신에 표본비율 $\hat{p}$을 대입한 확률변수 $Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$도 근사적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. (단, $\hat{q} = 1-\hat{p}$)