

풍산자 반복수학 파워

정답과 풀이

공통수학 2



도형의 방정식

I-1 | 평면좌표

008-017쪽

001

답 (1) 2, 5

(2) 5, 7

(1) A(2), B(7)이므로

$$\overline{AB} = |7 - 2| = |5| = 5$$

(2) A(5), B(-2)이므로

$$\overline{AB} = |-2 - 5| = |-7| = 7$$

002

답 (1) 12

(2) 7

(3) 9

(4) 8

(1) $\overline{AB} = |4 - 16| = |-12| = 12$

(2) $\overline{AB} = |-6 - 1| = |-7| = 7$

(3) $\overline{AB} = |5 - (-4)| = |9| = 9$

(4) $\overline{OB} = |-8| = 8$

003

답 (1) 1, 11

(2) -10, 2

(3) -1, 0

(4) 2, 4

(1) A(6), B(a)이므로 $\overline{AB} = |a - 6|$

이때 $\overline{AB} = 5$ 이므로 $|a - 6| = 5$

$$a - 6 = -5 \text{ 또는 } a - 6 = 5$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 11$$

(2) A(a), B(-4)이므로 $\overline{AB} = |-4 - a| = |a + 4|$

이때 $\overline{AB} = 6$ 이므로 $|a + 4| = 6$

$$a + 4 = -6 \text{ 또는 } a + 4 = 6$$

$$\therefore a = -10 \text{ 또는 } a = 2$$

(3) A(2), B(2a+3)이므로 $\overline{AB} = |2a + 3 - 2| = |2a + 1|$

이때 $\overline{AB} = 1$ 이므로 $|2a + 1| = 1$

$$2a + 1 = -1 \text{ 또는 } 2a + 1 = 1$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 0$$

(4) A(3a-4), B(5)이므로

$$\overline{AB} = |5 - (3a - 4)| = |-3a + 9| = |3a - 9|$$

이때 $\overline{AB} = 3$ 이므로 $|3a - 9| = 3$

$$3a - 9 = -3 \text{ 또는 } 3a - 9 = 3$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 4$$

004

답 (1) 3, $3\sqrt{2}$

(2) 4, $2\sqrt{5}$

(3) -3, 3, $\sqrt{26}$

(1) A(-3, 3)이므로 $\overline{OA} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

(2) B(2, 4)이므로 $\overline{OB} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

(3) A(-3, 3), B(2, 4)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + \{4 - 3\}^2} = \sqrt{26}$$

005

답 (1) $2\sqrt{5}$

(2) 5

(3) 13

(4) $8\sqrt{2}$

(1) $\overline{AB} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

(2) $\overline{AB} = \sqrt{(6 - 3)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{25} = 5$

(3) $\overline{AB} = \sqrt{\{10 - (-2)\}^2 + \{(-1 - 4)\}^2} = \sqrt{169} = 13$

(4) $\overline{OB} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

006

답 (1) -2, 6

(2) -8, -2

(3) -1, 5

(4) 0, 6

(5) $-2\sqrt{7}$, $2\sqrt{7}$

(6) -5, 2

(1) A(2, 1), B(a, 0)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(a - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{a^2 - 4a + 5}$$

이때 $\overline{AB} = \sqrt{17}$ 이므로 $\sqrt{a^2 - 4a + 5} = \sqrt{17}$

즉, $a^2 - 4a + 5 = 17$ 이므로

$$a^2 - 4a - 12 = 0, (a + 2)(a - 6) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 6$$

(2) A(-2, -5), B(0, a)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{\{0 - (-2)\}^2 + \{a - (-5)\}^2} = \sqrt{a^2 + 10a + 29}$$

이때 $\overline{AB} = \sqrt{13}$ 이므로 $\sqrt{a^2 + 10a + 29} = \sqrt{13}$

즉, $a^2 + 10a + 29 = 13$ 이므로

$$a^2 + 10a + 16 = 0, (a + 8)(a + 2) = 0$$

$$\therefore a = -8 \text{ 또는 } a = -2$$

(3) A(2, 7), B(a, 3)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(a - 2)^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{a^2 - 4a + 20}$$

이때 $\overline{AB} = 5$ 이므로 $\sqrt{a^2 - 4a + 20} = 5$

즉, $a^2 - 4a + 20 = 25$ 이므로

$$a^2 - 4a - 5 = 0, (a + 1)(a - 5) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 5$$

(4) A(3, -4), B(a, -1)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(a - 3)^2 + \{-1 - (-4)\}^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 18}$$

이때 $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{a^2 - 6a + 18} = 3\sqrt{2}$

즉, $a^2 - 6a + 18 = 18$ 이므로

$$a^2 - 6a = 0, a(a - 6) = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 6$$

(5) A(-2, 2), B(a, a)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{\{a - (-2)\}^2 + \{a - 2\}^2} = \sqrt{2a^2 + 8}$$

이때 $\overline{AB} = 8$ 이므로 $\sqrt{2a^2 + 8} = 8$

즉, $2a^2 + 8 = 64$ 이므로

$$2a^2 = 56, a^2 = 28$$

$$\therefore a = -2\sqrt{7} \text{ 또는 } a = 2\sqrt{7}$$

(6) A(-3, -1), B(a-1, a)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{\{(a - 1) - (-3)\}^2 + \{a - (-1)\}^2} = \sqrt{2a^2 + 6a + 5}$$

이때 $\overline{AB} = 5$ 이므로 $\sqrt{2a^2 + 6a + 5} = 5$

즉, $2a^2 + 6a + 5 = 25$ 이므로

$$a^2 + 3a - 10 = 0, (a + 5)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a = -5 \text{ 또는 } a = 2$$

007

답 27

두 점 A(7), B(a) 사이의 거리가 13이므로

$$\overline{AB} = |a - 7| = 13$$

즉, $a - 7 = -13$ 또는 $a - 7 = 13$ 이므로

$$a = -6 \text{ 또는 } a = 20$$

양수 a의 값은 20이므로 B(20)

$$\therefore \overline{OA} + \overline{OB} = |7| + |20| = 7 + 20 = 27$$

008 답 ①

두 점 $A(-2, 3)$, $B(a, 7)$ 사이의 거리가 5이므로
 $\overline{AB} = \sqrt{\{a - (-2)\}^2 + \{7 - 3\}^2} = \sqrt{a^2 + 4a + 20} = 5$
 즉, $a^2 + 4a + 20 = 25$ 이므로
 $a^2 + 4a - 5 = 0$, $(a+5)(a-1) = 0$
 $\therefore a = -5$ 또는 $a = 1$
 따라서 모든 a 의 값의 합은
 $-5 + 1 = -4$

009 답 5

$A(5, 5)$, $B(1, 2)$, $C(-3, a)$ 이므로
 $\overline{AB} = \sqrt{(1-5)^2 + (2-5)^2} = 5$
 $\overline{BC} = \sqrt{(-3-1)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{a^2 - 4a + 20}$
 이때 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이므로 $\sqrt{a^2 - 4a + 20} = 5$
 즉, $a^2 - 4a + 20 = 25$ 이므로
 $a^2 - 4a - 5 = 0$, $(a+1)(a-5) = 0$
 $\therefore a = 5$ ($\because a > 0$)

010 답 ②

두 점 $A(a, 3)$, $B(-5, a)$ 사이의 거리는
 $\overline{AB} = \sqrt{(-5-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 + 4a + 34}$
 이 값이 최소가 되려면 근호 안의 식 $2a^2 + 4a + 34$ 의 값이 최소가
 되어야 한다.
 $2a^2 + 4a + 34 = 2(a^2 + 2a) + 34 = 2(a+1)^2 + 32$
 이므로 $a = -1$ 일 때 최솟값 32를 갖는다.
 따라서 주어진 두 점 사이의 거리가 최소가 되도록 하는 a 의 값은
 -1 이다.

011 답 ①

두 점 $A(3, 1)$, $B(2, -4)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P
 의 좌표를 $(a, 0)$, y 축 위의 점 Q 의 좌표를 $(0, b)$ 라 하자.
 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로
 $(a-3)^2 + (-1)^2 = (a-2)^2 + 4^2$
 $a^2 - 6a + 10 = a^2 - 4a + 20$
 $2a = -10 \quad \therefore a = -5$
 $\therefore P(-5, 0)$
 $\overline{QA} = \overline{QB}$ 에서 $\overline{QA}^2 = \overline{QB}^2$ 이므로
 $(-3)^2 + (b-1)^2 = (-2)^2 + \{b - (-4)\}^2$
 $b^2 - 2b + 10 = b^2 + 8b + 20$
 $10b = -10 \quad \therefore b = -1$
 $\therefore Q(0, -1)$
 $\therefore \overline{PQ} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$

012 답 ③

직선 $y = x$ 위의 점 P 의 좌표를 (a, a) 라 하자.
 세 점 $P(a, a)$, $A(1, -1)$, $B(7, 3)$ 에 대하여
 $\overline{PA} = \overline{PB}$, 즉 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로
 $(a-1)^2 + \{a - (-1)\}^2 = (a-7)^2 + (a-3)^2$
 $2a^2 + 2 = 2a^2 - 20a + 58$

$$20a = 56$$

$$\therefore a = \frac{14}{5}$$

따라서 점 P 의 좌표는 $(\frac{14}{5}, \frac{14}{5})$ 이므로 점 P 의 y 좌표는 $\frac{14}{5}$ 이다.

013 답 (7, -10)

직선 $y = -x - 3$ 위의 점 P 의 좌표를 $(a, -a-3)$ 이라 하자.
 세 점 $A(-2, 3)$, $B(2, 5)$, $P(a, -a-3)$ 에 대하여
 $\overline{PA} = \overline{PB}$, 즉 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로
 $\{a - (-2)\}^2 + \{(-a-3) - 3\}^2 = (a-2)^2 + \{(-a-3) - 5\}^2$
 $(a+2)^2 + (a+6)^2 = (a-2)^2 + (a+8)^2$
 $2a^2 + 16a + 40 = 2a^2 + 12a + 68$
 $4a = 28$
 $\therefore a = 7$
 따라서 점 P 의 좌표는 $(7, -10)$ 이다.

014 답 22

x 축 위의 점 P 의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하자.
 세 점 $P(a, 0)$, $A(1, 4)$, $B(3, -2)$ 에 대하여
 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \{(a-1)^2 + (-4)^2\} + \{(a-3)^2 + 2^2\}$
 $= 2a^2 - 8a + 30$
 $= 2(a-2)^2 + 22$
 따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 은 $a=2$ 일 때 최솟값 22를 갖는다.

015 답 $\sqrt{10}$

임의의 점 P 의 좌표를 (a, b) 라 하자.
 세 점 $P(a, b)$, $A(-2, 1)$, $B(-4, -3)$ 에 대하여
 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \{(a+2)^2 + (b-1)^2\} + \{(a+4)^2 + (b+3)^2\}$
 $= 2a^2 + 12a + 2b^2 + 4b + 30$
 $= 2(a+3)^2 + 2(b+1)^2 + 10$
 즉, $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 은 $a = -3$, $b = -1$ 일 때 최솟값 10을 갖는다.
 따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 의 값이 최소일 때 점 P 의 좌표는 $(-3, -1)$
 $\therefore \overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

016 답 ④

임의의 점 P 의 좌표를 (a) 라 하자.
 네 점 $P(a)$, $A(2)$, $B(3)$, $C(-2)$ 에 대하여
 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = (a-2)^2 + (a-3)^2 + (a+2)^2$
 $= 3a^2 - 6a + 17$
 $= 3(a-1)^2 + 14$
 따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 은 $a=1$ 일 때 최솟값 14를 갖는다.

017 답 (3, -2)

임의의 점 P 의 좌표를 (a, b) 라 하자.
 네 점 $P(a, b)$, $O(0, 0)$, $A(1, -5)$, $B(8, -1)$ 에 대하여
 $\overline{PO}^2 + \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$
 $= (a^2 + b^2) + \{(a-1)^2 + (b+5)^2\} + \{(a-8)^2 + (b+1)^2\}$
 $= 3a^2 - 18a + 3b^2 + 12b + 91$
 $= 3(a-3)^2 + 3(b+2)^2 + 52$

즉, $\overline{PO}^2 + \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 은 $a=3, b=-2$ 일 때 최솟값 52를 갖는다.
따라서 $\overline{PO}^2 + \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 의 값이 최소일 때 점 P의 좌표는
(3, -2)이다.

품셈 방법 선분의 길이의 제곱의 합이 최소가 될 조건

임의의 점 P와 여러 개의 점 $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), \dots, A_n(x_n, y_n)$ 에 대하여

① $\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$$

② $\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \overline{PA_3}^2$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right)$$

③ $\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \overline{PA_3}^2 + \dots + \overline{PA_n}^2$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n} \right)$$

018 답 ⑤

세 점 A(-1, -1), B(4, 2), C(3, -2)에 대하여

$$\overline{AB} = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3-4)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{17}$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{CA}, \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle ACB = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

019 답 $2\sqrt{3}$

세 점 A(3, 0), B(1, a), C(-1, 0)에 대하여 삼각형 ABC가 정삼각형이라면 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$, 즉 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 이어야 하므로

$$(1-3)^2 + a^2 = (-1-1)^2 + (-a)^2 = (3+1)^2 + 0^2$$

$$a^2 + 4 = 16, a^2 = 12$$

$$\therefore a = \pm 2\sqrt{3}$$

따라서 양수 a의 값은 $2\sqrt{3}$ 이다.

020 답 ③

세 점 A(2, 3), B(3, 4), C(7, -2)에 대하여

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(7-3)^2 + (-2-4)^2} = 2\sqrt{13}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(2-7)^2 + (3+2)^2} = 5\sqrt{2}$$

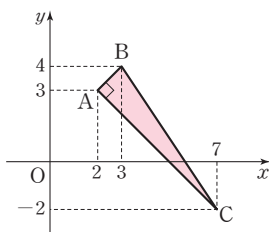
$$\therefore \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$$

따라서 삼각형 ABC는

$\angle BAC = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 구하는 넓이는

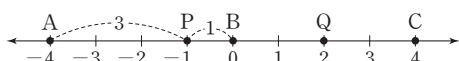
$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CA}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 5$$

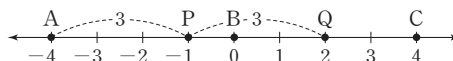


021 답 (1) × (2) × (3) ○ (4) ×

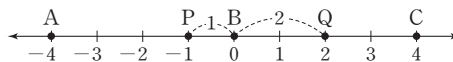
(1) 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 내분한다.



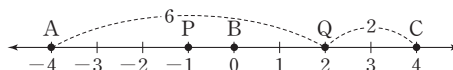
(2) 점 P는 선분 AQ의 중점이다. 즉, 선분 AQ를 1 : 1로 내분한다.



(3) 점 B는 선분 PQ를 1 : 2로 내분한다.



(4) 점 Q는 선분 AC를 3 : 1로 내분한다.



022 답 (1) 4 (2) 2 (3) 2 (4) 2

023 답 (1) 7 (2) 2 (3) -1 (4) -7

(1) 두 점 A(1), B(10)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{2 \times 10 + 1 \times 1}{2+1} = \frac{21}{3} = 7$$

(2) 두 점 A(4), B(-1)에 대하여 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{2 \times (-1) + 3 \times 4}{2+3} = \frac{10}{5} = 2$$

(3) 두 점 A(-3), B(5)에 대하여 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{1 \times 5 + 3 \times (-3)}{1+3} = \frac{-4}{4} = -1$$

(4) 두 점 A(-1), B(-15)에 대하여 선분 AB를 3 : 4로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{3 \times (-15) + 4 \times (-1)}{3+4} = \frac{-49}{7} = -7$$

024 답 (1) $\frac{7}{2}$ (2) 4 (3) -1 (4) $-\frac{13}{2}$

(1) 두 점 A(2), B(5)에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$$

(2) 두 점 A(-2), B(10)에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\frac{-2+10}{2} = 4$$

(3) 두 점 A(6), B(-8)에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\frac{6+(-8)}{2} = -1$$

(4) 두 점 A(-3), B(-10)에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\frac{-3+(-10)}{2} = -\frac{13}{2}$$

025 답 (1) (4, 6) (2) (-1, -1)

(3) (2, 1) (4) (-3, 0)

(1) 두 점 A(5, 7), B(2, 4)에 대하여 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 2 + 2 \times 5}{1+2}, \frac{1 \times 4 + 2 \times 7}{1+2} \right), \text{ 즉 } (4, 6)$$

(2) 두 점 A(-5, 3), B(1, -3)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 1 + 1 \times (-5)}{2+1}, \frac{2 \times (-3) + 1 \times 3}{2+1} \right), \text{ 즉 } (-1, -1)$$

- (3) 두 점 A(4, -2), B(-4, 10)에 대하여 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-4) + 3 \times 4}{1+3}, \frac{1 \times 10 + 3 \times (-2)}{1+3} \right), \text{ 즉 } (2, 1)$$

- (4) 두 점 A(3, 6), B(-5, -2)에 대하여 선분 AB를 3:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-5) + 1 \times 3}{3+1}, \frac{3 \times (-2) + 1 \times 6}{3+1} \right), \text{ 즉 } (-3, 0)$$

026 답 (1) (4, 2)

(2) (1, 2)

(3) (2, 4)

(4) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

- (1) 두 점 A(1, 1), B(7, 3)에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+7}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 (4, 2)

- (2) 두 점 A(-2, 5), B(4, -1)에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+(-1)}{2} \right), \text{ 즉 } (1, 2)$$

- (3) 두 점 A(6, -3), B(-2, 11)에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{6+(-2)}{2}, \frac{-3+11}{2} \right), \text{ 즉 } (2, 4)$$

- (4) 두 점 A(5, 4), B(-2, -5)에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+(-2)}{2}, \frac{4+(-5)}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

027 답 (1) (2, 5)

(2) (4, -3)

(3) (-1, 2)

(4) (-1, 1)

- (1) A(1, 5), B(2, 6), C(3, 4)이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{5+6+4}{3} \right), \text{ 즉 } (2, 5)$$

- (2) A(2, -3), B(4, 3), C(6, -9)이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+4+6}{3}, \frac{-3+3+(-9)}{3} \right), \text{ 즉 } (4, -3)$$

- (3) A(-1, 3), B(-4, 5), C(2, -2)이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+(-4)+2}{3}, \frac{3+5+(-2)}{3} \right), \text{ 즉 } (-1, 2)$$

- (4) A(2, -4), B(-5, 1), C(0, 6)이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-5)+0}{3}, \frac{-4+1+6}{3} \right), \text{ 즉 } (-1, 1)$$

028 답 3

단계1. 대각선 AC의 중점의 좌표 구하기

A(6, a), C(-2, -1)이므로 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{6-2}{2}, \frac{a-1}{2} \right), \text{ 즉 } \left(2, \frac{a-1}{2}\right)$$

단계2. 대각선 BD의 중점의 좌표 구하기

B(0, 4), D(4, -2)이므로 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{4-2}{2} \right), \text{ 즉 } (2, 1)$$

단계3. a의 값 구하기

평행사변형의 두 대각선의 중점은 일치하므로

$$\frac{a-1}{2} = 1 \text{에서 } a-1=2$$

$$\therefore a=3$$

029 답 a=2, b=5

A(2, a), C(b, 5)이므로 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+b}{2}, \frac{a+5}{2} \right)$$

B(4, 3), D(3, 4)이므로 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+3}{2}, \frac{3+4}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

마름모의 두 대각선의 중점은 일치하므로

$$\frac{2+b}{2} = \frac{7}{2}, \frac{a+5}{2} = \frac{7}{2} \text{에서 } 2+b=7, a+5=7$$

$$\therefore a=2, b=5$$

030 답 1

두 점 A(-6), B(9)에 대하여

선분 AB를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\frac{2 \times 9 + 1 \times (-6)}{2+1} = \frac{12}{3} = 4$$

선분 AB를 3:2로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\frac{3 \times 9 + 2 \times (-6)}{3+2} = \frac{15}{5} = 3$$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$|3-4|=1$$

031 답 ④

두 점 A(a), B(4)에 대하여 선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{1 \times 4 + 2 \times a}{1+2} = \frac{2a+4}{3}$$

이 점이 원점과 일치하므로

$$\frac{2a+4}{3} = 0, 2a+4=0$$

$$\therefore a=-2$$

032 답 ③

두 점 A(3), B(-5)에 대하여 선분 AB를 1:m으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\frac{1 \times (-5) + m \times 3}{1+m} = \frac{3m-5}{m+1}$$

이때 P(1)이므로

$$\frac{3m-5}{m+1} = 1, 3m-5=m+1, 2m=6$$

$$\therefore m=3$$

033 답 4

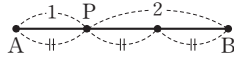
두 점 A(-2, 8), B(3, -2)에 대하여 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 3 \times (-2)}{2+3}, \frac{2 \times (-2) + 3 \times 8}{2+3} \right), \text{ 즉 } (0, 4)$$

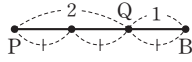
따라서 선분 OP의 길이는 4이다.

034 답 ②

선분 AB를 삼등분하는 점 중에서 점 A에 가까운 점 P는 선분 AB를 1:2로 내분하는 점이다.



선분 PB를 삼등분하는 점 중에서 점 B에 가까운 점 Q는 선분 PB를 2:1로 내분하는 점이다.



두 점 A(-5, 2), B(4, 11)에 대하여 선분 AB를 1:2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 4 + 2 \times (-5)}{1+2}, \frac{1 \times 11 + 2 \times 2}{1+2} \right), \text{ 즉 } (-2, 5)$$

두 점 P(-2, 5), B(4, 11)에 대하여 선분 PB를 2:1로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2+1}, \frac{2 \times 11 + 1 \times 5}{2+1} \right), \text{ 즉 } (2, 9)$$

035 답 -30

두 점 A(a, -7), B(3, b)에 대하여 선분 AB를 1:2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 3 + 2 \times a}{1+2}, \frac{1 \times b + 2 \times (-7)}{1+2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{b-14}{3} \right)$$

이때 P(0, 2)이므로 $\frac{2a+3}{3}=0, \frac{b-14}{3}=2$ 에서

$$2a+3=0, b-14=6$$

따라서 $a=-\frac{3}{2}, b=20$ 이므로 $ab=(-\frac{3}{2}) \times 20 = -30$

036 답 ①

두 점 A(7, -3), B(a, b)에 대하여 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$\left(\frac{7+a}{2}, \frac{-3+b}{2} \right) \rightarrow \left(\frac{0+\frac{7+a}{2}}{2}, \frac{0+\frac{-3+b}{2}}{2} \right)$$

선분 OM의 중점의 좌표가 (2, -1)이므로

$$\frac{7+a}{2}=2 \times 2, \frac{-3+b}{2}=2 \times (-1)$$

$$7+a=8, -3+b=-4$$

따라서 $a=1, b=-1$ 이므로 $a^2+b^2=1^2+(-1)^2=2$

037 답 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

두 점 A(a, 0), B(-6, 5)에 대하여 선분 AB를 3:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-6) + 2 \times a}{3+2}, \frac{3 \times 5 + 2 \times 0}{3+2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{2a-18}{5}, 3 \right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로 x좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{2a-18}{5}=0 \text{에서 } a=9 \text{이므로 } A(9, 0)$$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는 $(\frac{9-6}{2}, \frac{0+5}{2})$, 즉 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

참고 점의 위치에 따라 좌표가 결정되는 경우가 있다.

① x축 위의 점의 좌표는 (a, 0) $\Rightarrow$ y좌표가 0이다.

② y축 위의 점의 좌표는 (0, a) $\Rightarrow$ x좌표가 0이다.

③ 직선 y=x 위의 점의 좌표는 (a, a) $\Rightarrow$ x좌표와 y좌표가 서로 같다.

038 답 ③

두 점 A(-2, 5), B(6, 1)에 대하여 선분 AB를 m:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{m \times 6 + 1 \times (-2)}{m+1}, \frac{m \times 1 + 1 \times 5}{m+1} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{6m-2}{m+1}, \frac{m+5}{m+1} \right)$$

이 점이 직선 y=x-2 위에 있으므로

$$\frac{m+5}{m+1} = \frac{6m-2}{m+1} - 2$$

$$\text{즉, } \frac{m+5}{m+1} = \frac{4m-4}{m+1} \text{에서 } m \text{이 자연수이므로}$$

$$m+5=4m-4, 3m=9$$

$$\therefore m=3$$

039 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABD와 삼각형 ACD의 밑변을 각각 $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ 라 하면 두 삼각형의 높이가 서로 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$$\text{즉, } \overline{BD} : \overline{CD} = 2 : 1$$

두 점 B(-2, -3), C(4, 3)에 대하여 점 D는 선분 BC를 2:1로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1} \right), \text{ 즉 } (2, 1)$$

따라서 선분 AD의 길이는

$$\sqrt{(2+1)^2 + (1-5)^2} = 5$$

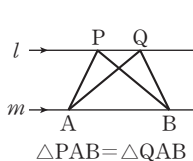
참고 두 삼각형의 넓이에 대하여 다음이 성립한다.

① 밑변의 길이, 높이가 각각 같으면 넓이가 서로 같다.

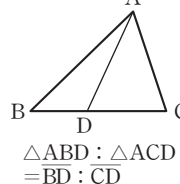
② 높이가 같으면 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

③ 밑변의 길이가 같으면 넓이의 비는 높이의 비와 같다.

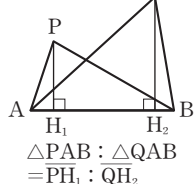
①



②



③



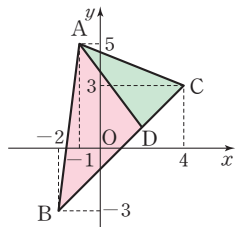
040 답 $\sqrt{10}$

세 점 A(2, 3), B(-4, 5), C(5, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{2-4+5}{3}, \frac{3+5+1}{3} \right), \text{ 즉 } (1, 3)$$

따라서 선분 OG의 길이는

$$\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$



041 답 8

세 점 A(5, 4), B(1, a-2), C(2b+1, -3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{5+1+(2b+1)}{3}, \frac{4+(a-2)+(-3)}{3} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{2b+7}{3}, \frac{a-1}{3} \right)$$

이때 G(1, 3)이므로 $\frac{2b+7}{3}=1, \frac{a-1}{3}=3$ 에서

$$2b+7=3, a-1=9$$

따라서 a=10, b=-2이므로 a+b=10+(-2)=8

042 답 ②

세 점 A(-2, 6), B(4, 2), C(-8, -2)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여

변 BC의 중점 D의 좌표는 $\left(\frac{4-8}{2}, \frac{2-2}{2} \right)$, 즉 (-2, 0)

변 CA의 중점 E의 좌표는 $\left(\frac{-8-2}{2}, \frac{-2+6}{2} \right)$, 즉 (-5, 2)

변 AB의 중점 F의 좌표는 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{6+2}{2} \right)$, 즉 (1, 4)

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2-5+1}{3}, \frac{0+2+4}{3} \right), \text{ 즉 } (-2, 2)$$

다른 풀이

삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다. 이때 세 점 A(-2, 6), B(4, 2), C(-8, -2)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4-8}{3}, \frac{6+2-2}{3} \right), \text{ 즉 } (-2, 2)$$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표도 (-2, 2)이다.

공생비법

삼각형 ABC의 세 변 BC, CA, AB를 각각 m : n (m>0, n>0)으로 내분하는 점을 차례로 D, E, F라 할 때, 삼각형 ABC와 삼각형 DEF의 무게중심은 일치한다.

043 답 (6, -13)

삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C를 A(a, b), B(c, d), C(e, f)라 하자.

변 BC의 중점의 좌표가 (3, 5)이므로

$$\frac{c+e}{2}=3, \frac{d+f}{2}=5$$

$$\therefore c+e=6, d+f=10$$

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+c+e}{3}, \frac{b+d+f}{3} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{a+6}{3}, \frac{b+10}{3} \right)$$

이 점이 점 (4, -1)과 일치하므로

$$\frac{a+6}{3}=4, \frac{b+10}{3}=-1$$

$$a+6=12, b+10=-3$$

$$\therefore a=6, b=-13$$

따라서 꼭짓점 A의 좌표는 (6, -13)이다.

다른 풀이

삼각형 ABC의 꼭짓점 A의 좌표를 (a, b)라 하자.

삼각형 ABC의 무게중심은 꼭짓점 A와 변 BC의 중점을 잇는 선분을 2:1로 내분하는 점이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times a}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times b}{2+1} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{a+6}{3}, \frac{b+10}{3} \right)$$

이 점이 점 (4, -1)과 일치하므로

$$\frac{a+6}{3}=4, \frac{b+10}{3}=-1 \quad \therefore a=6, b=-13$$

따라서 꼭짓점 A의 좌표는 (6, -13)이다.

044 답 ⑤

사각형 ABCD가 평행사변형이면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

두 점 A(-1, 4), C(3, 2)에 대하여 대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{4+2}{2} \right)$, 즉 (1, 3) ㉠

두 점 B(1, 1), D(a, b)에 대하여 대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{1+b}{2} \right)$ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로 $\frac{1+a}{2}=1, \frac{1+b}{2}=3$ 에서

$$1+a=2, 1+b=6$$

따라서 a=1, b=5이므로 a²+b²=1²+5²=26

045 답 C(0, -3), D(-2, -1)

평행사변형 ABCD의 두 꼭짓점 C, D를 C(a, b), D(c, d)라 하자.

평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점은 각 대각선의 중점이다.

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+a}{2}, \frac{3+b}{2} \right)$

이 점이 점 (1, 0)과 일치하므로

$$\frac{2+a}{2}=1, \frac{3+b}{2}=0 \quad \therefore a=0, b=-3$$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+c}{2}, \frac{1+d}{2} \right)$

이 점이 점 (1, 0)과 일치하므로

$$\frac{4+c}{2}=1, \frac{1+d}{2}=0 \quad \therefore c=-2, d=-1$$

따라서 C(0, -3), D(-2, -1)이다.

046 답 -1

네 점 A(a, 2), B(b, -2), C(3, -2), D(6, 2)에 대하여

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+3}{2}, \frac{2-2}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{a+3}{2}, 0 \right) \quad \dots\dots ㉠$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{b+6}{2}, \frac{-2+2}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{b+6}{2}, 0 \right) \quad \dots\dots ㉡$$

마름모의 두 대각선의 중점은 일치하므로 ㉠, ㉡에서

$$\frac{a+3}{2}=\frac{b+6}{2} \quad \therefore a=b+3 \quad \dots\dots ㉢$$

한편, 마름모의 네 변의 길이는 모두 같으므로

$$\overline{AD}=\overline{CD}, \text{ 즉 } \overline{AD}^2=\overline{CD}^2 \text{에서}$$

$$(6-a)^2+(2-2)^2=(6-3)^2+(2+2)^2$$

$$a^2-12a+11=0, (a-1)(a-11)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=11$$

$$\textcircled{c} \text{에 의하여 } a=1 \text{이면 } b=-2, a=11 \text{이면 } b=8$$

$$\text{이때 } ab < 0 \text{ 이므로 } a=1, b=-2$$

$$\therefore a+b=1+(-2)=-1$$

047 답 6

평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점은 각 대각선의 중점이다.

$$\text{대각선 AC의 중점의 좌표는 } \left(\frac{a+c}{2}, \frac{0-6}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{a+c}{2}, -3\right)$$

$$\text{이 점이 직선 } y=-x \text{ 위에 있으므로 } -3=-\frac{a+c}{2}$$

$$\text{즉, } a+c=6 \text{ 이므로 대각선 AC의 중점의 좌표는 } (3, -3) \text{ 이다.}$$

$$\text{대각선 BD의 중점의 좌표는 } \left(\frac{b+4}{2}, \frac{-4+d}{2}\right)$$

$$\text{이 점이 점 } (3, -3) \text{ 과 일치하므로 } \frac{b+4}{2}=3, \frac{-4+d}{2}=-3$$

$$b+4=6, -4+d=-6 \quad \therefore b=2, d=-2$$

$$\therefore a+b+c+d=(a+c)+b+d=6+2+(-2)=6$$

048 답 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

오른쪽 그림과 같이 $\angle AOB$ 의 이등분선과 선분 AB가 만나는 점을 P라 하면

$$\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{AP}:\overline{BP}$$

두 점 A(1, 1), B(3, -3)에 대하여

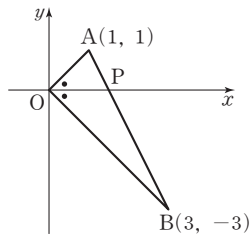
$$\overline{OA}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\overline{OB}=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$$

즉, $\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{OA}:\overline{OB}=\sqrt{2}:3\sqrt{2}=1:3$ 이므로 점 P는 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점이다.

따라서 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 3 + 3 \times 1}{1+3}, \frac{1 \times (-3) + 3 \times 1}{1+3}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$



049 답 7

삼각형 ABC에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점이 D이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$$

세 점 A(1, 3), B(-2, 0), C(3, 1)에 대하여

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=3\sqrt{2}:2\sqrt{2}=3:2$$

즉, 점 D는 선분 BC를 3:2로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 3 + 2 \times (-2)}{3+2}, \frac{3 \times 1 + 2 \times 0}{3+2}\right), \text{ 즉 } \left(1, \frac{3}{5}\right)$$

$$\text{따라서 } a=1, b=\frac{3}{5} \text{ 이므로 } a+10b=1+10 \times \frac{3}{5}=1+6=7$$

050 답 ②

삼각형 ABC에서 $\angle C$ 의 이등분선이 변 AB의 중점 M을 지나므로 삼각형 ABC는 $\overline{CA}=\overline{CB}$ 인 이등변삼각형이다.

이때 A(0, a), B(-2, 0), C(4, 0)이므로

$$\overline{CA}=\overline{CB}, \text{ 즉 } \overline{CA}^2=\overline{CB}^2 \text{에서}$$

$$(0-4)^2+(a-0)^2=(-2-4)^2$$

$$a^2+16=36, a^2=20 \quad \therefore a=2\sqrt{5} (\because a>0)$$

따라서 A(0, $2\sqrt{5}$)이므로 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$\left(\frac{0-2}{2}, \frac{2\sqrt{5}+0}{2}\right), \text{ 즉 } (-1, \sqrt{5})$$

중단원 점검 문제

I-1 | 평면좌표

018~019쪽

01 답 ①

세 점 A(7), B(-2), C(a)에 대하여 $\overline{AB}+\overline{BC}=16$ 이므로

$$|-2-7|+|a-(-2)|=16$$

$$9+|a+2|=16, |a+2|=7$$

$$a+2=-7 \text{ 또는 } a+2=7$$

$$\therefore a=-9 \text{ 또는 } a=5$$

따라서 모든 a의 값의 합은

$$-9+5=-4$$

02 답 ②

두 점 A(a+1, 0), B(0, 3a-2) 사이의 거리가 5이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{\{0-(a+1)\}^2+\{(3a-2)-0\}^2}=\sqrt{10a^2-10a+5}=5$$

$$\text{즉, } 10a^2-10a+5=25 \text{ 이므로}$$

$$a^2-a-2=0, (a+1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=2 (\because a>0)$$

03 답 2

두 점 A(2t, -3), B(-1, 2t)에 대하여 선분 AB의 길이가 l이므로

$$l^2=\overline{AB}^2=(-1-2t)^2+\{2t-(-3)\}^2$$

$$=8t^2+16t+10$$

$$=8(t+1)^2+2$$

따라서 l^2 은 $t=-1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

04 답 ②

세 점 P(a, b), A(2, 0), B(4, 0)에 대하여

$$\overline{PA}=\overline{PB} \text{에서 } \overline{PA}^2=\overline{PB}^2 \text{ 이므로}$$

$$(a-2)^2+b^2=(a-4)^2+b^2$$

$$a^2-4a+4+b^2=a^2-8a+16+b^2$$

$$4a=12 \quad \therefore a=3$$

$$\overline{OP}=5 \text{에서 } \overline{OP}^2=25 \text{ 이므로}$$

$$a^2+b^2=25, 9+b^2=25 (\because a=3)$$

$$\therefore b^2=16$$

$$\therefore b^2-a^2=16-9=7$$

05 답 1

삼각형 ABC의 외심 P에서 삼각형의 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같으므로

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

$$\overline{PA} = \overline{PB} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \text{이므로}$$

$$(a-2)^2 + (b-3)^2 = (a-2)^2 + (b+1)^2$$

$$a^2 - 4a + b^2 - 6b + 13 = a^2 - 4a + b^2 + 2b + 5$$

$$8b = 8 \quad \therefore b = 1$$

$$\overline{PB} = \overline{PC} \text{에서 } \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2 \text{이므로}$$

$$(a-2)^2 + (b+1)^2 = (a+2)^2 + (b-3)^2$$

$$a^2 - 4a + b^2 + 2b + 5 = a^2 + 4a + b^2 - 6b + 13$$

$$8a - 8b = -8, 8a - 8 = -8 (\because b = 1) \quad \therefore a = 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 0^2 + 1^2 = 1$$

06 답 ①

직선 $y = -x$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, -a)$ 라 하자.

두 점 $A(-2, 5)$, $B(3, 2)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 &= \{(a+2)^2 + (-a-5)^2\} + \{(a-3)^2 + (-a-2)^2\} \\ &= 4a^2 + 12a + 42 \\ &= 4\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + 33 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 은 $a = -\frac{3}{2}$ 일 때 최솟값 33을 갖는다.

07 답 ②

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축으로 하고 점 M을 지나면서 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면에서 점 M은 원점이다.

이때 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \{a - (-c)\}^2 + (b-0)^2 = (a+c)^2 + b^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ac \end{aligned}$$

$$\overline{AC}^2 = (a-c)^2 + (b-0)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ac$$

이므로

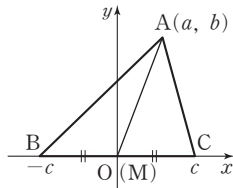
$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ac) + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ac) \\ &= 2 \times (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$\text{또, } \overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2 \text{이므로}$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2 \times (\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

따라서 (가)~(마)에 알맞은 것은 순서대로 $c, 2, c^2, a^2, 2$ 이다.



08 답 $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

제1사분면 위의 점 A의 좌표를

(a, b) 라 하면

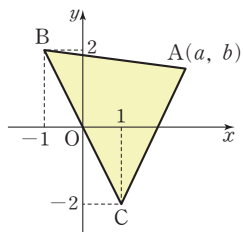
$$a > 0, b > 0$$

삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} \text{이다.}$$

이때 $\overline{AB} = \overline{BC}$, 즉 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$(a+1)^2 + (b-2)^2 = (-1-1)^2 + (2+2)^2$$



$$a^2 + b^2 + 2a - 4b + 5 = 20$$

$$\therefore a^2 + b^2 + 2a - 4b - 15 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } \overline{BC} = \overline{CA}, \text{ 즉 } \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 \text{에서}$$

$$(-1-1)^2 + (2+2)^2 = (1-a)^2 + (-2-b)^2$$

$$a^2 + b^2 - 2a + 4b + 5 = 20$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 2a + 4b - 15 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$4a - 8b = 0 \quad \therefore a = 2b \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(2b)^2 + b^2 + 2 \times 2b - 4b - 15 = 0$$

$$5b^2 - 15 = 0, b^2 = 3 \quad \therefore b = \sqrt{3} (\because b > 0)$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3} (\because \textcircled{3})$$

따라서 구하는 점 A의 좌표는 $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 이다.

09 답 $\sqrt{2}$

두 점 $A(4, 7)$, $B(-11, -8)$ 에 대하여

선분 AB를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-11) + 1 \times 4}{2+1}, \frac{2 \times (-8) + 1 \times 7}{2+1}\right), \text{ 즉 } (-6, -3)$$

선분 AB를 3:2로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-11) + 2 \times 4}{3+2}, \frac{3 \times (-8) + 2 \times 7}{3+2}\right), \text{ 즉 } (-5, -2)$$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\sqrt{(-5+6)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{2}$$

10 답 ③

두 점 $A(0, a)$, $B(6, 0)$ 에 대하여 선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times 0 + 2 \times a}{1+2}\right), \text{ 즉 } \left(2, \frac{2a}{3}\right)$$

이 점이 직선 $y = -x$ 위에 있으므로

$$\frac{2a}{3} = -2 \quad \therefore a = -3$$

11 답 2

세 점 $A(a, 1)$, $B(b, 4)$, $C(-2, -2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+b-2}{3}, \frac{1+4-2}{3}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{a+b-2}{3}, 1\right)$$

이 점이 y 축 위에 있으므로 x 좌표가 0이다.

$$\text{따라서 } \frac{a+b-2}{3} = 0 \text{이므로}$$

$$a+b=2$$

12 답 ③

평행사변형 ABCD의 나머지 두 꼭짓점 B, D의 좌표를 각각

(a, b) , (c, d) 라 하자.

$$\text{변 BC의 중점의 좌표는 } \left(\frac{a+7}{2}, \frac{b-1}{2}\right)$$

이 점이 점 $(3, -2)$ 와 일치하므로

$$\frac{a+7}{2}=3, \frac{b-1}{2}=-2 \quad \therefore a=-1, b=-3$$

$\therefore B(-1, -3)$

평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점은 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{5-1}{2}\right), \text{ 즉 } (5, 2) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+c}{2}, \frac{-3+d}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{이 일치하므로 } \frac{-1+c}{2}=5, \frac{-3+d}{2}=2$$

$$\therefore c=11, d=7$$

$$\therefore D(11, 7)$$

13 답 ④

네 점 $A(a, 0), B(4, -2), C(6, -1), D(b, 1)$ 에 대하여

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+6}{2}, \frac{0-1}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{a+6}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+b}{2}, \frac{-2+1}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{4+b}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

마름모의 두 대각선의 중점은 일치하므로 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서

$$\frac{a+6}{2}=\frac{4+b}{2} \quad \therefore b=a+2 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

한편, 마름모의 네 변의 길이는 모두 같으므로 $\overline{AB}=\overline{BC}$, 즉 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$ 에서

$$(a-4)^2+(0+2)^2=(4-6)^2+(-2+1)^2$$

$$a^2-8a+15=0, (a-3)(a-5)=0$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=5$$

$$\textcircled{9} \text{에 의하여 } a=3 \text{이면 } b=5, a=5 \text{ 이면 } b=7$$

따라서 $a+b=3+5=8$ 또는 $a+b=5+7=12$ 이므로

구하는 최댓값은 12이다.

14 답 $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

삼각형 ABC에서 $\angle A$ 의 이등분선

이 변 BC와 만나는 점이 D이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$$

세 점 $A(-1, 4), B(-3, 0),$

$C(1, 3)$ 에 대하여

$$\overline{AB}=\sqrt{(-3+1)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$$

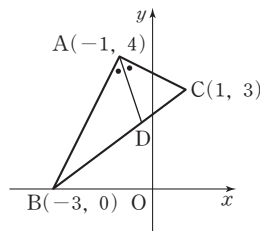
$$\overline{AC}=\sqrt{(1+1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=2\sqrt{5}:\sqrt{5}=2:1$$

즉, 점 D는 선분 BC를 2:1로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 1 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2+1}\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{1}{3}, 2\right)$$

$$\therefore \overline{AD}=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}+1\right)^2+(2-4)^2}=\sqrt{\frac{40}{9}}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$$



I-2 직선의 방정식

020~038쪽

001 답 (1) $y=-2x+1$ (2) $y=2x+5$ (3) $y=3x+3$

(4) $y=3x+2$ (5) $y=x-2$

(1) 기울기가 -2 이고 y 절편이 1인 직선의 방정식은

$$y=-2x+1$$

(2) 기울기가 2이고 y 절편이 5인 직선의 방정식은

$$y=2x+5$$

(3) 점 $(0, 3)$ 을 지나는 직선의 y 절편은 3이다.

즉, 기울기가 3이고 y 절편이 3인 직선의 방정식은

$$y=3x+3$$

(4) 직선 $y=3x+1$ 과 기울기가 같은 직선의 기울기는 3이고 직선

$y=-x+2$ 와 y 절편이 같은 직선의 y 절편은 2이다.

즉, 기울기가 3이고 y 절편이 2인 직선의 방정식은

$$y=3x+2$$

(5) x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는

$$\tan 45^\circ=1$$

즉, 기울기가 1이고 y 절편이 -2 인 직선의 방정식은

$$y=x-2$$

002 답 (1) $y=x+1$ (2) $y=-4x-2$ (3) $y=2x+6$

(4) $y=-2x+5$ (5) $y=\sqrt{3}x-5$

(1) 기울기가 1이고 점 $(2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=x-2 \quad \therefore y=x+1$$

(2) 기울기가 -4 이고 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=-4\{x-(-1)\} \quad \therefore y=-4x-2$$

(3) x 절편이 -3 인 직선은 점 $(-3, 0)$ 을 지난다.

즉, 기울기가 2이고 점 $(-3, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-0=2\{x-(-3)\} \quad \therefore y=2x+6$$

(4) 직선 $y=-2x$ 와 기울기가 같은 직선의 기울기는 -2 이다.

즉, 기울기가 -2 이고 점 $(3, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-1)=-2(x-3) \quad \therefore y=-2x+5$$

(5) x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선의 기울기는

$$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

즉, 기울기가 $\sqrt{3}$ 이고 점 $(2\sqrt{3}, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\sqrt{3}(x-2\sqrt{3}) \quad \therefore y=\sqrt{3}x-5$$

003 답 (1) b, b , 풀이 참조 (2) x, a , 풀이 참조

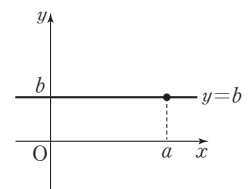
(3) a, a , 풀이 참조 (4) y, b , 풀이 참조

(1) 점 (a, b) 를 지나고 x 축에 평행한

직선 위의 점의 y 좌표는 모두 $\boxed{b}$

로 일정하므로 이 직선의 방정식은

$$y=\boxed{b} \text{이다.}$$

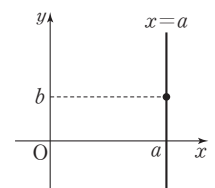


(2) 점 (a, b) 를 지나고 y 축에 평행한 직

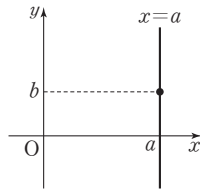
선 위의 점의 x 좌표는 모두 a 로 일

정하므로 이 직선의 방정식은 $x=\boxed{a}$

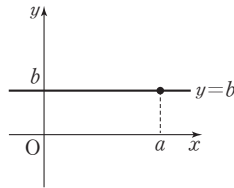
이다.



- (3) 점 (a, b) 를 지나고 x 축에 수직인 직선 위의 점의 x 좌표는 모두 $\boxed{a}$ 로 일정하므로 이 직선의 방정식은 $x=\boxed{a}$ 이다.



- (4) 점 (a, b) 를 지나고 y 축에 수직인 직선 위의 점의 y 좌표는 모두 b 로 일정하므로 이 직선의 방정식은 $y=\boxed{b}$ 이다.



- 004 답 (1) $y=3$ (2) $x=-1$ (3) $x=3$
(4) $y=-3$ (5) $y=5$ (6) $x=-4$

- (1) x 축에 평행한 직선 위의 점의 y 좌표는 모두 같으므로 점 $(2, 3)$ 을 지나고 x 축에 평행한 직선의 방정식은 $y=3$
(2) x 축에 수직인 직선 위의 점의 x 좌표는 모두 같으므로 점 $(-1, 2)$ 을 지나고 x 축에 수직인 직선의 방정식은 $x=-1$
(3) y 축에 평행한 직선 위의 점의 x 좌표는 모두 같으므로 점 $(3, -4)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선의 방정식은 $x=3$
(4) y 축에 수직인 직선 위의 점의 y 좌표는 모두 같으므로 점 $(-1, -3)$ 을 지나고 y 축에 수직인 직선의 방정식은 $y=-3$
(5) y 절편이 5이므로 점 $(0, 5)$ 를 지나고 x 축에 평행한 직선의 방정식은 $y=5$
(6) x 절편이 -4 이므로 점 $(-4, 0)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선의 방정식은 $x=-4$

- 005 답 (1) $y=x+4$ (2) $y=3x-8$ (3) $y=2x-1$
(4) $x=3$ (5) $y=-2$

- (1) 두 점 $(-1, 3), (1, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y-3=\frac{5-3}{1-(-1)}\{x-(-1)\}$
 $\therefore y=x+4$
(2) 두 점 $(2, -2), (3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y-(-2)=\frac{1-(-2)}{3-2}(x-2)$
 $\therefore y=3x-8$
(3) 두 점 $(-2, -5), (-1, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y-(-5)=\frac{-3-(-5)}{-1-(-2)}\{x-(-2)\}$
 $\therefore y=2x-1$
(4) 두 점 $(3, 4), (3, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $x=3$
(5) 두 점 $(1, -2), (-2, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y=-2$

- 006 답 (1) $y=\frac{5}{3}x-5$ (2) $y=-2x-2$
(3) $y=3x+6$ (4) $y=-\frac{1}{2}x+2$

- (1) x 절편이 3, y 절편이 -5 인 직선의 방정식은 $\frac{x}{3}+\frac{y}{-5}=1$
 $\therefore y=\frac{5}{3}x-5$
(2) x 절편이 -1 , y 절편이 -2 인 직선의 방정식은 $\frac{x}{-1}+\frac{y}{-2}=1$
 $\therefore y=-2x-2$
(3) 두 점 $(-2, 0), (0, 6)$ 을 지나는 직선은 x 절편이 -2 , y 절편이 6인 직선이므로 직선의 방정식은 $\frac{x}{-2}+\frac{y}{6}=1$
 $\therefore y=3x+6$
(4) 두 점 $(4, 0), (0, 2)$ 를 지나는 직선은 x 절편이 4, y 절편이 2인 직선이므로 직선의 방정식은 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$
 $\therefore y=-\frac{1}{2}x+2$

다른 풀이

- (1) x 절편이 3, y 절편이 -5 인 직선은 두 점 $(3, 0), (0, -5)$ 를 지나는 직선이므로 직선의 방정식은 $y-0=\frac{-5-0}{0-3}(x-3)$
 $\therefore y=\frac{5}{3}x-5$
(2) x 절편이 -1 , y 절편이 -2 인 직선은 두 점 $(-1, 0), (0, -2)$ 를 지나는 직선이므로 직선의 방정식은 $y-0=\frac{-2-0}{0-(-1)}\{x-(-1)\}$
 $\therefore y=-2x-2$
(3) 두 점 $(-2, 0), (0, 6)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y-0=\frac{6-0}{0-(-2)}\{x-(-2)\}$
 $\therefore y=3x+6$
(4) 두 점 $(4, 0), (0, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y-0=\frac{2-0}{0-4}(x-4)$
 $\therefore y=-\frac{1}{2}x+2$

007 답 풀이 참조

세 점 $A(1, 2), B(2, 4), C(4, k)$ 에 대하여

[방법1] 직선 AB의 기울기는 $\frac{4-2}{2-1}=2$

직선 BC의 기울기는 $\frac{k-4}{4-2}=\frac{k-4}{2}$

직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{k-4}{2}=\boxed{2}$ 에서 $k-4=4$, 즉 $k=\boxed{8}$ 이다.

[방법2] 직선 AB의 방정식은

$$y-2=\frac{4-2}{2-1}(x-1)$$

$$\therefore y=\boxed{2}x$$

점 C가 직선 AB 위의 점이므로 위의 직선의 방정식에

$$x=\boxed{4}, y=k \text{를 대입하면 } k=2 \times 4, \text{ 즉 } k=\boxed{8} \text{이다.}$$

008 답 4

세 점 A(1, 0), B(3, 4), C(k, 6)에 대하여

$$\text{직선 AB의 기울기는 } \frac{4-0}{3-1}=2$$

$$\text{직선 BC의 기울기는 } \frac{6-4}{k-3}=\frac{2}{k-3}$$

직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{2}{k-3}=2, k-3=1 \quad \therefore k=4$$

다른 풀이

직선 AB의 방정식은

$$y-0=\frac{4-0}{3-1}(x-1) \quad \therefore y=2x-2$$

점 C가 직선 AB 위의 점이므로 위의 직선의 방정식에 $x=k$,

$y=6$ 을 대입하면

$$6=2k-2, 2k=8 \quad \therefore k=4$$

009 답 2, 2, 3, 4

세 점 A(3, 2), B(-1, 0), C(5, 0)에 대하여

점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 선분

BC의 중점을 지나므로 이 점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{0+0}{2}\right), \text{ 즉 } (\boxed{2}, 0) \text{이다.}$$

따라서 두 점 A, M을 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{0-2}{\boxed{2}-3}(x-\boxed{3})$$

$$\therefore y=2x-\boxed{4}$$

010 답 $y=\frac{1}{4}x$

평행사변형의 넓이를 이등분하는 직선은 평행사변형의 두 대각선의 교점을 지나고, 두 대각선의 교점은 각 대각선의 중점이다.

평행사변형 ABCD의 네 꼭짓점 A(3, 2), B(-1, 0),

C(5, 0), D(9, 2)에 대하여 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{2+0}{2}\right), \text{ 즉 } (4, 1)$$

원점을 지나는 직선의 방정식을 $y=mx$ (m 은 상수)라 하면

직선 $y=mx$ 가 점 (4, 1)을 지나므로

$$1=4m \quad \therefore m=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{4}x$$

참고 평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+9}{2}, \frac{0+2}{2}\right), \text{ 즉 } (4, 1)$$

이므로 대각선 AC의 중점의 좌표와 일치한다.

011 답 (1) 2, 1, 풀이 참조

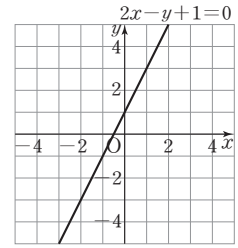
(2) 2, $-\frac{1}{2}$, 풀이 참조

(3) 4, x , 풀이 참조

(1) 일차방정식 $2x-y+1=0$

$$\Rightarrow y=\boxed{2}x+1$$

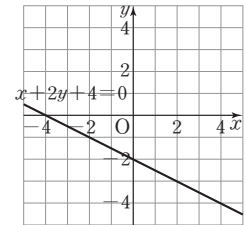
$\Rightarrow$ 기울기가 2, y 절편이 $\boxed{1}$ 인 직선이다.



(2) 일차방정식 $x+2y+4=0$

$$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-\boxed{2}$$

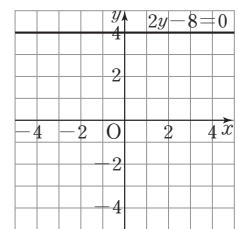
$\Rightarrow$ 기울기가 $\boxed{-\frac{1}{2}}$, y 절편이 -2 인 직선이다.



(3) 일차방정식 $2y-8=0$

$$\Rightarrow y=\boxed{4}$$

$\Rightarrow y$ 축에 수직이고, x 축에 평행한 직선이다.



012 답 (1) $\sqsubset$

(2) $\sqsupset$

(3) $\sqsubset$

(4) $\sqsupset$

$ax+by+c=0$ 에서 $b \neq 0$ 이므로

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

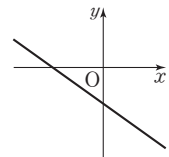
(1) $a > 0, b > 0$ 이면 $-\frac{a}{b} < 0$

$$b > 0, c > 0 \text{이면 } -\frac{c}{b} < 0$$

즉, $a > 0, b > 0, c > 0$ 이면 직선

$ax+by+c=0$ 은 기울기와 y 절편이 모두 음수인 직선이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이 직선의 개형은 $\sqsubset$ 이다.



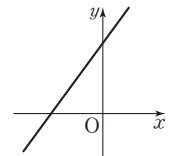
(2) $a < 0, b > 0$ 이면 $-\frac{a}{b} > 0$

$$b > 0, c < 0 \text{이면 } -\frac{c}{b} > 0$$

즉, $a < 0, b > 0, c < 0$ 이면 직선

$ax+by+c=0$ 은 기울기와 y 절편이 모두 양수인 직선이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이 직선의 개형은 $\sqsupset$ 이다.



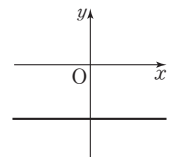
(3) $a=0$ 이면 $-\frac{a}{b}=0$

$$b > 0, c > 0 \text{이면 } -\frac{c}{b} < 0$$

즉, $a=0, b > 0, c > 0$ 이면 직선

$ax+by+c=0$ 은 x 축에 평행하고 y 절편이 음수인 직선이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이 직선의 개형은 $\sqsubset$ 이다.



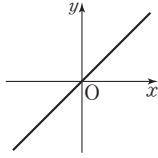
(4) $c=0$ 이면 $-\frac{c}{b}=0$

$a<0, b>0$ 이면 $-\frac{a}{b}>0$

즉, $a<0, b>0, c=0$ 이면 직선

$ax+by+c=0$ 은 기울기가 양수이고 원점을
을 지나는 직선이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이 직선의 개형은 ㄱ이다.



013 답 ③

기울기가 -2 이고 점 $(2, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - (-3) = -2(x - 2)$$

$$\therefore y = -2x + 1$$

014 답 ④

기울기가 3 이고 점 $(5, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = 3(x - 5)$$

$$\therefore y = 3x - 12$$

따라서 구하는 x 절편은 4 이다.

015 답 8

직선 $y=ax+b$ 의 기울기가 2 이므로 $a=2$

점 $(1, 4)$ 가 직선 $y=ax+b$, 즉 $y=2x+b$ 위의 점이므로

$$4 = 2 \times 1 + b \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

016 답 ③

x 절편이 3 인 직선은 점 $(3, 0)$ 을 지난다.

즉, 기울기가 -3 이고 점 $(3, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 0 = -3(x - 3)$$

$$\therefore y = -3x + 9$$

따라서 구하는 y 절편은 9 이다.

017 답 2

두 점 $A(-3, 2), B(5, -2)$ 에 대하여 선분 AB 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2-2}{2} \right), \text{ 즉 } (1, 0)$$

점 $(1, 0)$ 을 지나고 기울기가 2 인 직선의 방정식은

$$y - 0 = 2(x - 1)$$

$$\therefore y = 2x - 2$$

이 직선이 점 $(2, a)$ 를 지나므로

$$a = 2 \times 2 - 2 = 2$$

018 답 ④

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30° 인 직선의 기울기는

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

즉, 점 $(2, \sqrt{3})$ 을 지나고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2)$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이 직선이 점 $(5, k)$ 를 지나므로

$$k = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 5 + \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

019 답 ①

두 점 $(k+1, 5), (-1, -3-k)$ 를 지나는 직선의 기울기가 -2

이므로

$$\frac{(-3-k)-5}{-1-(k+1)} = -2, \quad \frac{-k-8}{-k-2} = -2$$

$$-k-8 = 2k+4, \quad 3k = -12 \quad \therefore k = -4$$

즉, 점 $(k+1, 5)$ 는 점 $(-3, 5)$ 이다.

기울기가 -2 이고 점 $(-3, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 5 = -2\{x - (-3)\}$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

따라서 구하는 x 절편은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

020 답 $\frac{9}{4}$

직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$ 에 평행한 직선의 기울기는 2 이다.

즉, 기울기가 2 이고 점 $(3, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

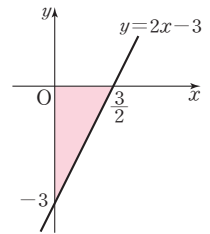
$$y - 3 = 2(x - 3) \quad \therefore y = 2x - 3$$

따라서 직선 $y=2x-3$ 은 오른쪽 그림과

같으므로 이 직선과 x 축, y 축으로 둘러싸

인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |-3| \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$



021 답 ②

두 점 $(1, 4), (-2, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 4 = \frac{-2-4}{-2-1}(x - 1)$$

$$\therefore y = 2x + 2$$

따라서 $a=2, b=2$ 이므로

$$a+b = 2+2 = 4$$

022 답 3

두 점 $(-3, -9), (2, 11)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - (-9) = \frac{11-(-9)}{2-(-3)}\{x - (-3)\}$$

$$\therefore y = 4x + 3$$

따라서 구하는 y 절편은 3 이다.

023 답 ③

두 점 $(-1, 2), (3, -4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{-4-2}{3-(-1)}\{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

점 $(1, a)$ 가 이 직선 위에 있으므로

$$a = -\frac{3}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = -1$$

024 답 10

두 점 (1, 5), (3, a)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=\frac{a-5}{3-1}(x-1)$$

$$\therefore y=\frac{a-5}{2}x+\frac{-a+15}{2}$$

이 직선의 x 절편이 -1 이므로

$$0=\frac{a-5}{2}\times(-1)+\frac{-a+15}{2}$$

$$-a+5-a+15=0, -2a+20=0$$

$$\therefore a=10$$

025 답 ④

두 점 A(1, 3), B(-2, 3)의 y 좌표가 3으로 같으므로 직선 AB의 방정식은

$$y=3 \quad \therefore a=3$$

두 점 A(1, 3), C(1, -4)의 x 좌표가 1로 같으므로 직선 AC의 방정식은

$$x=1 \quad \therefore b=1$$

$$\therefore a+b=3+1=4$$

026 답 $y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

두 점 B(2, 1), C(5, -8)에 대하여 선분 BC를 1:2로 내분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{1\times 5+2\times 2}{1+2}, \frac{1\times(-8)+2\times 1}{1+2}\right), \text{ 즉 } (3, -2)$$

따라서 두 점 A(-1, -1), D(3, -2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{-2-(-1)}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$$\therefore y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$$

027 답 3

두 점 A(0, 4), B(2, 6)에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{4+6}{2}\right), \text{ 즉 } (1, 5)$$

두 점 (1, 5), (-3, -3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=\frac{-3-5}{-3-1}(x-1) \quad \therefore y=2x+3$$

이 직선이 점 (a, a^2) 을 지나므로

$$a^2=2a+3$$

$$a^2-2a-3=0, (a+1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 양수 a 의 값은 3이다.

028 답 ①

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는

$$\tan 45^\circ=1$$

즉, 두 점 $(a, 2a+2)$, $(-2, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기가 1이므로

$$\frac{2-(2a+2)}{-2-a}=1, \frac{-2a}{-2-a}=1$$

$$2a=a+2 \quad \therefore a=2$$

두 점 $(1, a-2)$, $(a+1, -2a)$ 는 각각 $(1, 0)$, $(3, -4)$ 이다.

이 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$$y-0=\frac{-4-0}{3-1}(x-1)$$

$$\therefore y=-2x+2$$

따라서 구하는 y 절편은 2이다.

029 답 ③

x 절편이 3, y 절편이 4인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$$

$$\therefore y=-\frac{4}{3}x+4$$

따라서 $a=-\frac{4}{3}$, $b=4$ 이므로

$$3a+b=3\times\left(-\frac{4}{3}\right)+4=0$$

030 답 ④

x 절편이 2, y 절편이 -6 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-6}=1$$

$$\therefore y=3x-6$$

이 직선이 점 $(k, k-2)$ 를 지나므로

$$k-2=3k-6$$

$$2k=4 \quad \therefore k=2$$

031 답 5

직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ 의 x 절편은 3이므로

$$a=3$$

직선 $\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1$, 즉 $\frac{x}{5}+\frac{y}{-4}=1$ 의 y 절편은 -4 이므로

$$b=-4$$

따라서 원점과 점 $(3, -4)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$

032 답 8

x 절편과 y 절편의 절댓값이 같고 부호가 반대이므로 x 절편을

a ($a \neq 0$)라 하면 y 절편은 $-a$ 이다.

x 절편이 a , y 절편이 $-a$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$$

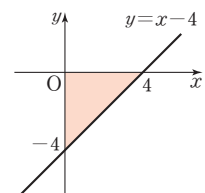
$$\therefore y=x-a$$

이 직선이 점 $(3, -1)$ 을 지나므로

$$-1=3-a \quad \therefore a=4$$

따라서 직선 $y=x-4$ 는 오른쪽 그림과 같으므로 이 직선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 4\times |-4|=8$$



033 답 5

세 점 A(1, 3), B(3, k), C(5, 7)에 대하여

직선 AC의 기울기는 $\frac{7-3}{5-1}=1$

직선 AB의 기울기는 $\frac{k-3}{3-1}=\frac{k-3}{2}$

세 점이 한 직선 위에 있으면 두 직선 AC, AB의 기울기가 같으

므로

$\frac{k-3}{2}=1, k-3=2 \quad \therefore k=5$

다른 풀이

직선 AC의 방정식은

$y-3=\frac{7-3}{5-1}(x-1)$

$\therefore y=x+2$

점 B(3, k)가 직선 AC 위의 점이므로

$k=3+2 \quad \therefore k=5$

034 답 ④

세 점 A(5, 5), B(a, 3), C(-4, a+3)에 대하여

직선 AB의 기울기는 $\frac{3-5}{a-5}=-\frac{2}{a-5}$

직선 AC의 기울기는 $\frac{(a+3)-5}{-4-5}=-\frac{a-2}{9}$

세 점이 한 직선 위에 있으면 두 직선 AB, AC의 기울기가 같으

므로

$-\frac{2}{a-5}=-\frac{a-2}{9}$

$(a-2)(a-5)=18, a^2-7a-8=0 \quad \dots\dots ㉠$

$(a+1)(a-8)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=8$

따라서 양수 a의 값은 8이다.

참고 직선 BC의 기울기는 $\frac{(a+3)-3}{-4-a}=-\frac{a}{a+4}$

두 직선 AB, BC의 기울기가 같음을 이용하면

$-\frac{2}{a-5}=-\frac{a}{a+4}$

$2a+8=a^2-5a \quad \therefore a^2-7a-8=0$

㉠과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

두 직선 AC, BC의 기울기가 같음을 이용해도 같은 결과를 얻는다.

035 답 $y=5x-1$

세 점 A(a, 4), B(a+1, 9), C(-a, -6)에 대하여

직선 AB의 기울기는 $\frac{9-4}{(a+1)-a}=5$

직선 AC의 기울기는 $\frac{-6-4}{-a-a}=\frac{5}{a}$

세 점이 한 직선 위에 있으면 두 직선 AB, AC의 기울기가 같으

므로

$5=\frac{5}{a} \quad \therefore a=1$

$\therefore A(1, 4), B(2, 9), C(-1, -6)$

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=5(x-1)$

$\therefore y=5x-1$

참고 직선 BC의 기울기는

$\frac{-6-9}{-a-(a+1)}=\frac{15}{2a+1}=\frac{15}{2 \times 1+1}=\frac{15}{3}=5$

036 답 1

세 점 A(a, 3), B(1, a), C(2, -3)에 대하여

직선 AC의 기울기는 $\frac{-3-3}{2-a}=\frac{6}{a-2}$

직선 BC의 기울기는 $\frac{-3-a}{2-1}=-a-3$

세 점이 한 직선 위에 있으면 두 직선 AC, BC의 기울기가 같으

므로

$\frac{6}{a-2}=-a-3, 6=-(a+3)(a-2)$

$a^2+a=0, a(a+1)=0$

$\therefore a=-1 (\because a \neq 0)$

$\therefore A(-1, 3), B(1, -1), C(2, -3)$

이때 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-1-3}{1-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-2x+1$

이 직선이 점 (k, 2k-3)을 지나므로

$2k-3=-2k+1$

$4k=4 \quad \therefore k=1$

037 답 $y=-2x+8$

세 점 A(-1, 3), B(3, 2), C(5, 5)

에 대하여 점 B를 지나고 삼각형

ABC의 넓이를 이등분하는 직선은

선분 AC의 중점을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 선분 AC의 중점

을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+5}{2})$, 즉 (2, 4)

따라서 두 점 B, M을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{4-2}{2-3}(x-3)$

$\therefore y=-2x+8$

038 답 -1

두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분

하는 직선은 두 직사각형의 두 대각선

의 교점을 모두 지난다.

제1사분면의 직사각형의 두 대각선의

교점의 좌표는

$(\frac{1+5}{2}, \frac{1+3}{2})$, 즉 (3, 2)

제3사분면의 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는

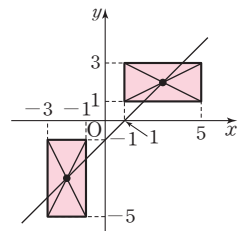
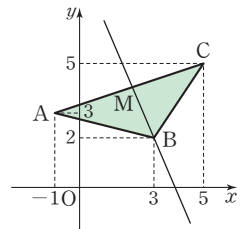
$(\frac{-1-3}{2}, \frac{-1-5}{2})$, 즉 (-2, -3)

두 점 (3, 2), (-2, -3)을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{-3-2}{-2-3}(x-3)$

$\therefore y=x-1$

따라서 구하는 y절편은 -1이다.



039 답 ③

원점을 지나는 직선 l 의 방정식을 $y=mx$ ($m \neq 0$)라 하자.

직선 $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$ 은 x 절편이 2, y 절편이 6인 직선이므로 오른쪽 그림과 같다.

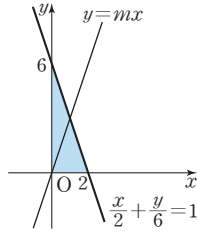
직선 $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$ 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 이등분하는 직선 l 은 두 점 (2, 0), (0, 6)의 중점을 지나야 한다. 두 점 (2, 0), (0, 6)의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right), \text{ 즉 } (1, 3)$$

직선 l 이 점 (1, 3)을 지나야 하므로

$$m=3$$

따라서 직선 l 의 기울기는 3이다.



040 답 ②

$ax+by+c=0$ 에서 $b \neq 0$ 이므로

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

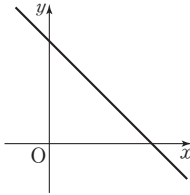
..... ㉠

$ab > 0$ 에서 $-\frac{a}{b} < 0$, $bc < 0$ 에서

$-\frac{c}{b} > 0$ 이므로 직선 ㉠은 기울기가 음수

이고 y 절편이 양수인 직선이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 ②이다.



041 답 제2사분면

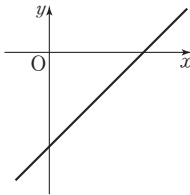
$ax+by+c=0$ 에서 $b \neq 0$ 이므로

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

..... ㉠

$ab < 0$ 에서 $-\frac{a}{b} > 0$, $bc > 0$ 에서 $-\frac{c}{b} < 0$ 이므로 직선 ㉠은 기울기가 양수이고 y 절편이 음수인 직선이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지나고 제2사분면을 지나지 않는다.



042 답 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면

제3사분면을 지나지 않는 직선은 오른쪽 그림과 같이 기울기가 음수이고 y 절편이 0 또는 양수인 직선이다.

$ax+by+1=0$ 에서 $a \neq 0$, $b \neq 0$ 이므로

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{1}{b}$$

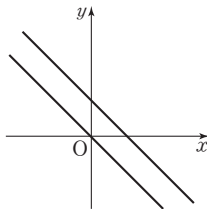
즉, $-\frac{a}{b} < 0$, $-\frac{1}{b} > 0$ 이어야 하므로

$$ab > 0, b < 0 \quad \therefore a < 0$$

$bx-ay+a=0$ 에서 $a \neq 0$, $b \neq 0$ 이므로

$$y = \frac{b}{a}x + 1$$

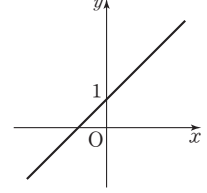
..... ㉠



이때 $a < 0$, $b < 0$ 에서 $\frac{b}{a} > 0$ 이므로 직선

㉠은 기울기가 양수이고 y 절편이 1인 직선이다.

따라서 직선 $bx-ay+a=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지난다.



043 답 (1) ○

(2) ×

(3) ×

(4) ○

(5) ○

(1) 두 직선 $y=2x+1$, $y=2x+3$ 은 기울기가 2로 같고 y 절편이 다르므로 평행하다.

(2) 두 직선 $y=2x+1$, $y=\frac{1}{2}x+1$ 의 기울기의 곱은

$$2 \times \frac{1}{2} = 1 \neq -1 \text{ 이므로 두 직선은 수직이 아니다.}$$

(3) 두 직선 $y=4x-1$, $y=4x+3$ 은 기울기가 4로 같고 y 절편이 다르므로 평행하다. 즉, 두 직선은 만나지 않는다.

(4) 두 직선 $x+y+1=0$, $3x+3y+1=0$ 에서

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq 1 \text{ 이므로 두 직선은 평행하다.}$$

(5) 두 직선 $2x+y-1=0$, $2x-4y+3=0$ 에서

$$2 \times 2 + 1 \times (-4) = 0 \text{ 이므로 두 직선은 수직이다.}$$

다른 풀이

(4) $x+y+1=0$ 에서 $y=-x-1$

$$3x+3y+1=0 \text{ 에서 } y=-x-\frac{1}{3}$$

즉, 두 직선 $x+y+1=0$, $3x+3y+1=0$ 은 기울기가 -1 로 같고 y 절편이 다르므로 평행하다.

(5) $2x+y-1=0$ 에서 $y=-2x+1$

$$2x-4y+3=0 \text{ 에서 } y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$$

즉, 두 직선 $2x+y-1=0$, $2x-4y+3=0$ 의 기울기의 곱은

$$(-2) \times \frac{1}{2} = -1 \text{ 이므로 두 직선은 수직이다.}$$

044 답 (1) ㄱ

(2) ㄴ

(3) ㄷ, ㄹ

(4) ㄷ

(1) 두 직선 $y=3x+1$, $y=-3x+1$ 은 기울기가 다르므로 한 점에서 만난다. 이때 두 직선의 기울기의 곱은

$$3 \times (-3) = -9 \neq -1 \text{ 이므로 수직이 아니다.}$$

따라서 두 직선의 위치 관계로 옳은 것은 ㄱ이다.

(2) 두 직선 $y=-2x+3$, $y=-2x+1$ 의 기울기가 -2 로 같고

y 절편이 다르므로 두 직선은 평행하다.

따라서 두 직선의 위치 관계로 옳은 것은 ㄴ이다.

(3) 두 직선 $y=x+1$, $y=-x+1$ 은 기울기가 다르므로 한 점에서 만난다. 이때 두 직선의 기울기의 곱은

$$1 \times (-1) = -1 \text{ 이므로 수직이다.}$$

따라서 두 직선의 위치 관계로 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

(4) $x-2y+1=0$ 에서 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

즉, 두 직선 $x-2y+1=0$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 은 기울기와 y 절편이 각각 같으므로 일치한다.

따라서 두 직선의 위치 관계로 옳은 것은 ㄷ이다.

045 답 (1) ㄴ (2) ㄷ (3) ㄱ, ㄷ, ㄹ

- (1) 직선 $y = -3x$ 와 평행한 직선의 기울기는 -3 이다.
따라서 구하는 직선은 ㄴ이다.
- (2) 직선 $y = -3x$ 와 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면
 $-3 \times m = -1$, 즉 $m = \frac{1}{3}$ 이어야 한다.
따라서 구하는 직선은 ㄷ이다.
- (3) 직선 $y = -3x$ 와 한 점에서 만나는 직선의 기울기는 -3 이 아니어야 한다.
따라서 구하는 직선은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

046 답 (1) ㄱ, ㄹ (2) ㄴ (3) ㄴ, ㄷ

- ㄱ. $4x + y + 3 = 0$ 에서 $y = -4x - 3$
ㄴ. $x - 4y - 4 = 0$ 에서 $y = \frac{1}{4}x - 1$
- (1) 직선 $4x + y + 1 = 0$, 즉 $y = -4x - 1$ 과 평행한 직선의 기울기는 -4 이다.
따라서 구하는 직선은 ㄱ, ㄹ이다.
- (2) 직선 $4x + y + 1 = 0$, 즉 $y = -4x - 1$ 과 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면 $-4 \times m = -1$, 즉 $m = \frac{1}{4}$ 이어야 한다.
따라서 구하는 직선은 ㄴ이다.
- (3) 직선 $4x + y + 1 = 0$, 즉 $y = -4x - 1$ 과 한 점에서 만나는 직선의 기울기는 -4 가 아니어야 한다.
따라서 구하는 직선은 ㄴ, ㄷ이다.

047 답 (1) 2 (2) 3 (3) -3 (4) $-1, 3$

- (1) 두 직선 $y = 2x + 1$, $y = kx - 3$ 이 평행하려면 기울기가 같아야 하므로
 $k = 2$
- (2) 두 직선 $y = kx + 5$, $y = (2k - 3)x - 2$ 가 평행하려면 기울기가 같아야 하므로
 $k = 2k - 3 \quad \therefore k = 3$
- (3) 두 직선 $x - 6y + 3 = 0$, $x + 2ky - 2 = 0$ 이 평행하려면
 $\frac{1}{1} = \frac{-6}{2k} \neq \frac{3}{-2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\frac{1}{1} = \frac{-6}{2k}$ 에서 $k = -3$
이 값은 $\textcircled{1}$ 을 만족시키므로 구하는 상수 k 의 값은 -3 이다.
- (4) 두 직선 $kx + 3y + 3 = 0$, $x + (k - 2)y - 7 = 0$ 이 평행하려면
 $\frac{k}{1} = \frac{3}{k - 2} \neq \frac{3}{-7} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\frac{k}{1} = \frac{3}{k - 2}$ 에서 $k(k - 2) = 3$
 $k^2 - 2k - 3 = 0$, $(k + 1)(k - 3) = 0$
 $\therefore k = -1$ 또는 $k = 3$
이 값은 모두 $\textcircled{1}$ 을 만족시키므로 구하는 상수 k 의 값은 -1 또는 3 이다.

048 답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) -9 (4) $-3, 2$

- (1) 두 직선 $y = 2x + 3$, $y = kx - 5$ 가 수직이려면

$$2 \times k = -1 \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

- (2) 두 직선 $y = -3x + 1$, $y = (k - 1)x - 1$ 이 수직이려면
 $(-3) \times (k - 1) = -1$, $k - 1 = \frac{1}{3}$
 $\therefore k = \frac{4}{3}$
- (3) 두 직선 $x - 3y + 2 = 0$, $2kx - 6y + 3 = 0$ 이 수직이려면
 $1 \times 2k + (-3) \times (-6) = 0$, $2k + 18 = 0$
 $\therefore k = -9$
- (4) 두 직선 $kx + 3y - 4 = 0$, $(k + 1)x - 2y + 3 = 0$ 이 수직이려면
 $k \times (k + 1) + 3 \times (-2) = 0$
 $k^2 + k - 6 = 0$, $(k + 3)(k - 2) = 0$
 $\therefore k = -3$ 또는 $k = 2$

049 답 1, 1, 1, 1

- $x + ky - k + 3 = 0$ 에서 $(x + 3) + k(y - 1) = 0$
이 등식이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
 $x + 3 = 0$, $y - 1 = 0$, 즉 $x = -3$, $y = 1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(-3, 1)$ 이다.

050 답 (1) (2, 1) (2) $(-1, 1)$ (3) (1, 3)

- (1) $kx + y - 2k - 1 = 0$ 에서 $k(x - 2) + (y - 1) = 0$
이 등식이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
 $x - 2 = 0$, $y - 1 = 0 \quad \therefore x = 2$, $y = 1$
따라서 구하는 점의 좌표는 (2, 1)이다.
- (2) $x + y + k(x - y + 2) = 0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
 $x + y = 0$, $x - y + 2 = 0$
두 식을 연립하여 풀면 $x = -1$, $y = 1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(-1, 1)$ 이다.
- (3) $(k + 2)x - (2k + 1)y + 5k + 1 = 0$ 에서
 $2x - y + 1 + k(x - 2y + 5) = 0$
이 등식이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
 $2x - y + 1 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$
두 식을 연립하여 풀면 $x = 1$, $y = 3$
따라서 구하는 점의 좌표는 (1, 3)이다.

051 답 풀이 참조

- [방법1] 두 직선 $x - y = 0$, $2x + y = 3$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $(x - y) + k(2x + y - 3) = 0$ (k 는 실수) $\dots\dots \textcircled{1}$
으로 나타낼 수 있다.
이 직선이 점 (2, 3)을 지나므로 $x = 2$, $y = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $-1 + 4k = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{4}$
따라서 $k = \frac{1}{4}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$x - y + \frac{1}{4}(2x + y - 3) = 0$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y - \frac{3}{4} = 0 \quad \therefore y = \frac{2}{3}x - 1$$

[방법2] 두 직선의 방정식 $x-y=0$, $2x+y=3$ 을 연립하여 풀면
 $x=\boxed{1}$, $y=\boxed{1}$
 즉, 두 직선의 교점의 좌표는 (1, 1)이다.
 따라서 두 점 (2, 3), ($\boxed{1}$, $\boxed{1}$)을 지나는 직선의 방정식은
 $y-3=\frac{\boxed{1}-3}{\boxed{1}-2}(x-2)$, 즉 $y=\boxed{2}x-\boxed{1}$ 이다.

052 답 $y=-\frac{1}{2}x$

두 직선 $x+y+1=0$, $2x+3y+1=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $(x+y+1)+k(2x+3y+1)=0$ (k 는 실수) ㉠
 이 직선이 점 (2, -1)을 지나므로 $x=2$, $y=-1$ 을 ㉠에 대입하면
 $2+2k=0 \quad \therefore k=-1$
 따라서 $k=-1$ 을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은
 $(x+y+1)-(2x+3y+1)=0$
 $-x-2y=0$
 $\therefore y=-\frac{1}{2}x$

다른 풀이

두 직선의 방정식 $x+y+1=0$, $2x+3y+1=0$ 을 연립하여 풀면
 $x=-2$, $y=1$
 즉, 두 직선의 교점의 좌표는 (-2, 1)이다.
 따라서 두 점 (-2, 1), (2, -1)을 지나는 직선의 방정식은
 $y-1=\frac{-1-1}{2-(-2)}\{x-(-2)\}$
 $\therefore y=-\frac{1}{2}x$

053 답 1

직선 $ax+y+1=0$ 이 직선 $3x-2y+3=0$ 과 평행하므로
 $\frac{a}{3}=\frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{3}$ ㉠
 $\frac{a}{3}=\frac{-1}{-2}$ 에서 $a=-\frac{3}{2}$ 이고 이는 ㉠을 만족시킨다.
 직선 $ax+y+1=0$, 즉 $3x-2y-2=0$ 이 직선 $2x+(b-1)y=0$
 과 수직이므로
 $3 \times 2 + (-2) \times (b-1) = 0$
 $6-2b+2=0$, $2b=8 \quad \therefore b=4$
 $\therefore 2a+b=2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 4 = 1$

054 답 ③

두 직선 $y=kx+k$, $y=\frac{4}{k}x-k$ 에 대하여
 ㄱ. $k=1$ 일 때, 두 직선의 방정식은
 $y=x+1$, $y=4x-1$
 두 직선의 기울기가 다르므로 두 직선은 한 점에서 만난다.
 ㄴ. $k=2$ 일 때, 두 직선의 방정식은
 $y=2x+2$, $y=2x-2$
 두 직선의 기울기가 서로 같고 y 절편이 다르므로 두 직선은
 평행하다.

ㄷ. $k=4$ 일 때, 두 직선의 방정식은
 $y=4x+4$, $y=x-4$
 두 직선의 기울기가 다르므로 두 직선은 한 점에서 만난다.
 이때 기울기의 곱이 $4 \times 1 = 4 \neq -1$ 이므로 두 직선은 수직이
 아니다.
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

055 답 ①

$x-3y+6=0$ 에서 $y=\frac{1}{3}x+2$
 이 직선과 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면
 $\frac{1}{3} \times m = -1 \quad \therefore m = -3$
 따라서 기울기가 -3이고 점 (3, 4)를 지나는 직선의 방정식은
 $y-4=-3(x-3)$, $y-4=-3x+9$
 $\therefore 3x+y-13=0$

풍쟁 방법 수직인 직선의 기울기

기울기가 a 인 직선 l 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{a}$ 이다.

056 답 ②

$2x+y-5=0$ 에서 $y=-2x+5$
 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 -2이다.
 즉, 기울기가 -2이고 점 (-2, 3)을 지나는 직선의 방정식은
 $y-3=-2\{x-(-2)\} \quad \therefore y=-2x-1$
 이 직선이 점 (3, a)를 지나므로
 $a=-2 \times 3 - 1 = -7$

057 답 ①

두 직선 $ax-4y+2=0$, $x-(a+3)y+2=0$ 이 평행하므로
 $\frac{a}{1}=\frac{-4}{-(a+3)} \neq \frac{2}{2}$ ㉠
 $\frac{a}{1}=\frac{-4}{-(a+3)}$ 에서 $a(a+3)=4$, $a^2+3a-4=0$
 $(a+4)(a-1)=0 \quad \therefore a=-4$ 또는 $a=1$
 이때 $a=1$ 이면 ㉠을 만족시키지 않으므로
 $a=-4$

주의 $a=-4$ 이면 두 직선이 평행하고, $a=1$ 이면 두 직선이 일치한다. 이처
 럼 구한 a 의 값이 모두 답이 되는 것은 아님에 주의한다.

058 답 8

직선 $ax+y+3=0$ 이 점 (-2, 1)을 지나므로
 $-2a+1+3=0$, $2a=4 \quad \therefore a=2$
 두 직선 $2x+y+3=0$, $x+by+c=0$ 이 수직이므로
 $2 \times 1 + 1 \times b = 0 \quad \therefore b = -2$
 직선 $x-2y+c=0$ 이 점 (-2, 1)을 지나므로
 $-2-2+c=0 \quad \therefore c=4$
 $\therefore a-b+c=2-(-2)+4=8$

059 답 7

두 직선 $2x+ky-2=0$, $(k-1)x+3y+3=0$ 에 대하여

(i) 평행할 때, $\frac{2}{k-1} = \frac{k}{3} \neq \frac{-2}{3}$ ㉠

$$\frac{2}{k-1} = \frac{k}{3} \text{에서 } k(k-1)=6$$

$$k^2 - k - 6 = 0, (k+2)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 3$$

이때 $k = -2$ 이면 ㉠을 만족시키지 않으므로

$$k = 3$$

(ii) 수직일 때, $2 \times (k-1) + k \times 3 = 0$ 에서

$$5k - 2 = 0 \quad \therefore k = \frac{2}{5}$$

(i), (ii)에서 $a = 3, b = \frac{2}{5}$ 이므로

$$a + 10b = 3 + 10 \times \frac{2}{5} = 7$$

060 답 -1

오른쪽 그림과 같이 세 직선 중 두 직선이 평행하려면 두 직선의 기울기는 같고 나머지 한 직선의 기울기는 달라야 한다.

세 직선 $y = x, y = -2x - 1,$

$y = ax + 5$ 에 대하여

(i) 두 직선 $y = x, y = -2x - 1$ 은 평행하지 않다.

(ii) 두 직선 $y = x, y = ax + 5$ 가 평행할 때,
 $a = 1$

(iii) 두 직선 $y = -2x - 1, y = ax + 5$ 가 평행할 때,
 $a = -2$

(i)~(iii)에서 모든 상수 a 의 값의 합은
 $1 + (-2) = -1$

061 답 1

오른쪽 그림과 같이 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

세 직선 $x + y - 2 = 0,$

$2x - ay + 5 = 0, bx + 3y + 1 = 0$ 에 대하여

(i) 두 직선 $x + y - 2 = 0, 2x - ay + 5 = 0$ 이 평행하므로

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{-a} \neq \frac{-2}{5}$$

..... ㉠

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{-a} \text{에서 } a = -2 \text{이고 이는 ㉠을 만족시킨다.}$$

(ii) 두 직선 $x + y - 2 = 0, bx + 3y + 1 = 0$ 이 평행하므로

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{3} \neq \frac{-2}{1}$$

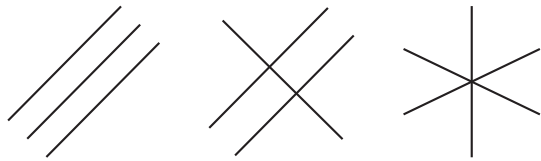
..... ㉡

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{3} \text{에서 } b = 3 \text{이고 이는 ㉡을 만족시킨다.}$$

(i), (ii)에서 $a + b = -2 + 3 = 1$

062 답 2

세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 다음 그림과 같이 세 직선이 모두 평행하거나 세 직선 중 두 직선이 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.



세 직선 $y = -x, y = 2x - 3, y = ax + 3$ 에 대하여

(i) 세 직선이 모두 평행할 때

두 직선 $y = -x, y = 2x - 3$ 이 평행하지 않으므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때

두 직선 $y = -x, y = 2x - 3$ 은 평행하지 않다.

두 직선 $y = -x, y = ax + 3$ 이 평행할 때, $a = -1$

두 직선 $y = 2x - 3, y = ax + 3$ 이 평행할 때, $a = 2$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

두 직선 $y = -x, y = 2x - 3$ 의 교점을 직선 $y = ax + 3$ 이 지나야 한다.

$y = -x, y = 2x - 3$ 을 연립하여 풀면 $x = 1, y = -1$

직선 $y = ax + 3$ 이 점 $(1, -1)$ 을 지나야 하므로

$$-1 = a + 3 \quad \therefore a = -4$$

(i)~(iii)에서 자연수 a 의 값은 2이다.

063 답 3

선분 AB의 수직이등분선 $y = ax + b$ 는 직선 AB와 수직이다.

두 점 A(-1, 3), B(1, 1)에 대하여 직선 AB의 기울기는

$$\frac{1-3}{1-(-1)} = -1$$

즉, $a \times (-1) = -1$ 이므로 $a = 1$

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(0, 2)$

직선 $y = ax + b$, 즉 $y = x + b$ 가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$b = 2$$

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$$

064 답 -1

선분 AB의 수직이등분선은 직선 AB와 수직이다.

두 점 A(5, -2), B(-3, -4)에 대하여 직선 AB의 기울기는

$$\frac{-4-(-2)}{-3-5} = \frac{1}{4}$$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 -4이다.

즉, 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을

$y = -4x + b$ (b 는 상수)로 놓을 수 있다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-2-4}{2}\right), \text{ 즉 } (1, -3)$$

직선 $y = -4x + b$ 가 점 $(1, -3)$ 을 지나므로

$$-3 = -4 + b \quad \therefore b = 1$$

따라서 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$$y = -4x + 1$$

이 직선이 점 $(a, 3 - 2a)$ 를 지나므로

$$3 - 2a = -4a + 1$$

$$2a = -2 \quad \therefore a = -1$$

065 답 ⑤

두 점 A(-4, -1), B(2, a)를 이은 선분 AB의 수직이등분선은 직선 AB와 수직이다.

이때 선분 AB의 수직이등분선 $y = -x + b$ 의 기울기가 -1이므로 직선 AB의 기울기는 1이다.

$$\text{즉, } \frac{a - (-1)}{2 - (-4)} = 1 \text{에서 } \frac{a+1}{6} = 1$$

$$a+1=6 \quad \therefore a=5$$

따라서 B(2, 5)이므로 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{-1+5}{2} \right), \text{ 즉 } (-1, 2)$$

직선 $y = -x + b$ 가 점 (-1, 2)를 지나므로

$$2 = -(-1) + b \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a+b=5+1=6$$

066 답 ①

$$(k+1)x - (2k+3)y + k = 0 \text{에서}$$

$$(x-3y) + k(x-2y+1) = 0$$

이 등식이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x-3y=0, x-2y+1=0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } x=-3, y=-1$$

따라서 점 P의 좌표는 (-3, -1)이므로

$$OP = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

067 답 ②

$$(1+3k)x + (2-k)y - (8+3k) = 0 \text{에서}$$

$$(x+2y-8) + k(3x-y-3) = 0$$

이 등식이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+2y-8=0, 3x-y-3=0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } x=2, y=3$$

즉, 주어진 직선이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표는 (2, 3)이다.

따라서 두 점 (1, 1), (2, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1 = \frac{3-1}{2-1}(x-1)$$

$$\therefore y=2x-1$$

068 답 0

$$x+ky-4k=0 \text{에서}$$

$$x+k(y-4)=0 \quad \dots\dots ㉠$$

직선 ㉠은 실수 k 의 값에 관계없이 항상 점 (0, 4)를 지난다.

오른쪽 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 A(1, -1)을 지날 때

$$1-k-4k=0$$

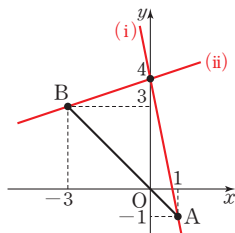
$$\therefore k = \frac{1}{5}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 B(-3, 3)을 지날 때

$$-3+3k-4k=0$$

$$\therefore k = -3$$

(i), (ii)에서 실수 k 의 값의 범위는



$$-3 \leq k \leq \frac{1}{5}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 0이다.

069 답 $x-y+3=0$

두 직선 $x+y-1=0, 3x-y+5=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x+y-1) + k(3x-y+5) = 0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \dots\dots ㉠$$

이 직선이 점 (2, 5)를 지나므로 $x=2, y=5$ 를 ㉠에 대입하면

$$6+6k=0 \quad \therefore k=-1$$

따라서 $k=-1$ 을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$(x+y-1) - (3x-y+5) = 0$$

$$-2x+2y-6=0$$

$$\therefore x-y+3=0$$

다른 풀이

두 직선의 방정식 $x+y-1=0, 3x-y+5=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=-1, y=2$$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 (-1, 2)이다.

따라서 두 점 (-1, 2), (2, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2 = \frac{5-2}{2-(-1)}\{x-(-1)\}, y=x+3$$

$$\therefore x-y+3=0$$

070 답 $\frac{1}{4}$

두 직선 $3x+2y-3=0, 3x+y-3=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(3x+2y-3) + k(3x+y-3) = 0 \quad (k \text{는 실수})$$

$$\therefore 3(1+k)x + (2+k)y - 3(k+1) = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

직선 ㉠과 직선 $x+2y+1=0$ 이 평행하므로

$$\frac{3(1+k)}{1} = \frac{2+k}{2} \neq \frac{-3(k+1)}{1} \quad \dots\dots ㉡$$

$$\frac{3(1+k)}{1} = \frac{2+k}{2} \text{에서 } 6+6k=2+k$$

$$\therefore k = -\frac{4}{5}$$

$k = -\frac{4}{5}$ 는 ㉡을 만족시키므로 이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{3}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{3}{5} = 0$$

$$\therefore x+2y-1=0$$

직선 $x+2y-1=0$ 이 x 축과 만나는

점이 A, y 축과 만나는 점이 B이므로

$$A(1, 0), B\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

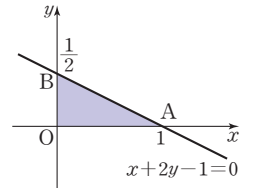
$$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

다른 풀이

두 직선의 방정식 $3x+2y-3=0, 3x+y-3=0$ 을 연립하여 풀면 $x=1, y=0$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 (1, 0)이다.

한편, $x+2y+1=0$ 에서 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$



따라서 구하는 직선은 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 $(1, 0)$ 을 지나므로
 직선의 방정식은
 $y-0=-\frac{1}{2}(x-1), y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
 $\therefore x+2y-1=0$

071 답 ⑤

ㄱ. 직선 $(x+y+1)+k(2x-y+3)=0$ (k 는 실수)은 두 직선
 $x+y+1=0, 2x-y+3=0$ 의 교점을 지난다.

ㄴ. $k=-1$ 일 때,

$$(x+y+1)-(2x-y+3)=0$$

$$-x+2y-2=0 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+1$$

즉, 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

ㄷ. $(x+y+1)+k(2x-y+3)=0$ 에서

$$(1+2k)x+(1-k)y+1+3k=0$$

이 직선이 x 축에 평행한 직선이 되려면 $y=c$ (c 는 상수) 꼴이
 어야 하므로 x 의 계수가 0이어야 한다.

즉, $1+2k=0$ 에서 $k=-\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 직선이 x 축에 평

행한 직선이 되도록 하는 실수 k 의 값이 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

072 답 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{13}$ (3) 3
 (4) $\sqrt{5}$ (5) $4\sqrt{2}$ (6) 1

(1) 점 $A(3, 1)$ 과 직선 $l: x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

(2) 점 $A(-2, 2)$ 와 직선 $l: 3x-2y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times (-2) - 2 \times 2 - 3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$$

(3) 점 $A(1, -4)$ 와 직선 $l: 4x-3y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4 \times 1 - 3 \times (-4) - 1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{15}{5}=3$$

(4) 점 $A(-5, 0)$ 과 직선 $l: 2x+y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times (-5) + 0 + 5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

(5) 점 $A(0, 0)$ 과 직선 $l: x-y+8=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

(6) 점 $A(0, 0)$ 과 직선 $l: 3x-4y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1$$

073 답 (1) 5 (2) 6

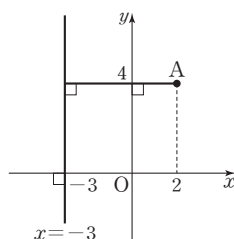
(1) 직선 $l: x=-3$ 은 y 축에 평행한

직선이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 점 $A(2, 4)$ 와 직선 l 사이

의 거리는

$$|2-(-3)|=5$$



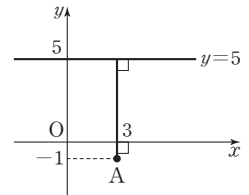
(2) 직선 $l: y=5$ 는 x 축에 평행한 직선

이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 점 $A(3, -1)$ 과 직선 l 사

이의 거리는

$$|5-(-1)|=6$$



074 답 (1) $-12, -2$ (2) 15, 67 (3) $-8, 2$
 (4) $-4, 8$

(1) 점 $A(1, 1)$ 과 직선 $l: 3x+4y+k=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3 \times 1 + 4 \times 1 + k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|k+7|}{5}=1$$

즉, $|k+7|=5$ 이므로 $k+7=-5$ 또는 $k+7=5$

$\therefore k=-12$ 또는 $k=-2$

(2) 점 $A(-1, 3)$ 과 직선 $l: 5x-12y+k=0$ 사이의 거리가 2이
 므로

$$\frac{|5 \times (-1) - 12 \times 3 + k|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|k-41|}{13}=2$$

즉, $|k-41|=26$ 이므로 $k-41=-26$ 또는 $k-41=26$

$\therefore k=15$ 또는 $k=67$

(3) 점 $A(2, -1)$ 과 직선 $l: 2x+y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이
 므로

$$\frac{|2 \times 2 + (-1) + k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

즉, $|k+3|=5$ 이므로 $k+3=-5$ 또는 $k+3=5$

$\therefore k=-8$ 또는 $k=2$

(4) 점 $A(k, 1)$ 과 직선 $l: x+y-3=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|k+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

즉, $|k-2|=6$ 이므로 $k-2=-6$ 또는 $k-2=6$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=8$

075 답 (1) $\sqrt{5}$ (2) 3 (3) $2\sqrt{5}$ (4) $4\sqrt{2}$

(1) 평행한 두 직선 $x-2y+3=0, x-2y-2=0$ 사이의 거리는

직선 $x-2y+3=0$ 위의 점 $(-3, 0)$ 과 직선

$x-2y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-3-2 \times 0-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

(2) 평행한 두 직선 $3x+4y+5=0, 3x+4y-10=0$ 사이의 거리

는 직선 $3x+4y+5=0$ 위의 점 $(5, -5)$ 와 직선

$3x+4y-10=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3 \times 5 + 4 \times (-5) - 10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3$$

(3) 평행한 두 직선 $y=2x-1, y=2x+9$ 사이의 거리는 직선

$y=2x-1$ 위의 점 $(0, -1)$ 과 직선 $y=2x+9$, 즉

$2x-y+9=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 \times 0 - (-1) + 9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

(4) 평행한 두 직선 $y=x-3, y=x+5$ 사이의 거리는 직선

$y=x-3$ 위의 점 $(3, 0)$ 과 직선 $y=x+5$, 즉

$x-y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3-0+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

076 답 ⑦

세 점 $O(0, 0)$, $A(3, 4)$, $B(-1, 1)$ 에 대하여

단계1. 선분 AB 의 길이 구하기

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-4)^2} = 5$$

단계2. 점 O 와 직선 AB 사이의 거리 구하기

두 점 A, B 를 지나는 직선 AB 의 방정식은

$$y-4 = \frac{1-4}{-1-3}(x-3)$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4} \quad \therefore 3x-4y+7=0$$

따라서 점 O 와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{7}{5}$$

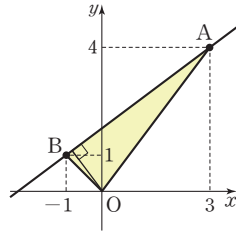
단계3. 삼각형 OAB 의 넓이 구하기

삼각형 OAB 의 밑변을 선분 AB 라

하면 높이는 점 O 와 직선 AB 사이의

거리이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{7}{5} = \frac{7}{2}$$



077 답 ③

점 $(-2, 3)$ 과 직선 $4x+3y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4 \times (-2) + 3 \times 3 + 4|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

078 답 $\sqrt{5}$

두 점 $(-3, 4)$, $(1, -4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4 = \frac{-4-4}{1-(-3)}\{x-(-3)\}, y = -2x-2$$

$$\therefore 2x+y+2=0$$

따라서 점 $(2, -1)$ 과 직선 $2x+y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 2 - 1 + 2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

079 답 ②

점 $(4, 1)$ 과 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|2 \times 4 + 1 + k|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|k+9|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

즉, $|k+9|=10$ 에서 $k+9=-10$ 또는 $k+9=10$

$$\therefore k = -19 \text{ 또는 } k = 1$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$-19+1 = -18$$

080 답 $(-7, 0), (3, 0)$

x 축 위의 점 A 의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면 점 $(a, 0)$ 과 직선

$4x-3y+8=0$ 사이의 거리가 4이므로

$$\frac{|4 \times a - 3 \times 0 + 8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|4a+8|}{5} = 4$$

즉, $|4a+8|=20$ 에서 $4a+8=-20$ 또는 $4a+8=20$

$$\therefore a = -7 \text{ 또는 } a = 3$$

따라서 점 A 의 좌표는

$$(-7, 0) \text{ 또는 } (3, 0)$$

081 답 19

$$x+3y-1=0 \text{에서 } y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 구하는 직선의 방정식을

$$y=3x+k, \text{ 즉 } 3x-y+k=0 \text{ (} k \text{는 상수)}$$

으로 놓을 수 있다.

점 $(-1, 3)$ 과 직선 $3x-y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3 \times (-1) - 3 + k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|k-6|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

즉, $|k-6|=10$ 에서 $k-6=-10$ 또는 $k-6=10$

$$\therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 16$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$3x-y-4=0 \text{ 또는 } 3x-y+16=0$$

이때 a, b 가 모두 자연수이므로

$$a=3, b=16$$

$$\therefore a+b=3+16=19$$

082 답 $\frac{1}{4}$

점 $(0, a)$ 와 직선 $x+3y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0+3a+1|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|3a+1|}{\sqrt{10}} \quad \dots\dots ㉠$$

점 $(0, a)$ 와 직선 $3x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-a+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|a-2|}{\sqrt{10}} \quad \dots\dots ㉡$$

점 $(0, a)$ 에서 두 직선 $x+3y+1=0$, $3x-y+2=0$ 에 이르는 거리가 같으므로 ㉠, ㉡에서

$$\frac{|3a+1|}{\sqrt{10}} = \frac{|a-2|}{\sqrt{10}}$$

즉, $|3a+1|=|a-2|$ 에서

$$3a+1=a-2 \text{ 또는 } 3a+1=-(a-2)$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } a = \frac{1}{4}$$

이때 a 는 양수이므로 $a = \frac{1}{4}$

083 답 ③

두 직선 $x+2y+3=0$, $3x-2y+1=0$ 의 교점을 지나는 방정식은

$$(x+2y+3)+k(3x-2y+1)=0 \text{ (} k \text{는 실수)}$$

$$\therefore (1+3k)x+(2-2k)y+3+k=0 \quad \dots\dots ㉠$$

점 $(1, -2)$ 와 직선 ㉠ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|(1+3k)-2(2-2k)+3+k|}{\sqrt{(1+3k)^2+(2-2k)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\text{즉, } \frac{|8k|}{\sqrt{13k^2-2k+5}} = \sqrt{5} \text{에서}$$

$$|8k| = \sqrt{5(13k^2-2k+5)}$$

양변을 제곱하면

$$64k^2 = 65k^2 - 10k + 25, k^2 - 10k + 25 = 0$$

$$(k-5)^2 = 0 \quad \therefore k = 5$$

이 값을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$16x-8y+8=0 \quad \therefore 2x-y+1=0$$

다른 풀이

두 직선의 방정식 $x+2y+3=0$, $3x-2y+1=0$ 을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=-1$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 $(-1, -1)$ 이다.

점 $(-1, -1)$ 을 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면 직선의 방정식은

$$y - (-1) = m\{x - (-1)\}, y = mx + m - 1$$

$$\therefore mx - y + m - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 $(1, -2)$ 와 직선 $\textcircled{7}$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|m - (-2) + m - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|2m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

즉, $|2m + 1| = \sqrt{5(m^2 + 1)}$ 이므로 양변을 제곱하면

$$(2m + 1)^2 = 5(m^2 + 1)$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0, (m - 2)^2 = 0 \quad \therefore m = 2$$

이 값을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$2x - y + 1 = 0$$

084 **답** ②

평행한 두 직선 $3x+2y+9=0$, $3x+2y-4=0$ 사이의 거리는 직선 $3x+2y-4=0$ 위의 점 $(0, 2)$ 와 직선

$3x+2y+9=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3 \times 0 + 2 \times 2 + 9|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

085 **답** 10

평행한 두 직선 $x-2y+k=0$, $x-2y-5=0$ 사이의 거리는 직선 $x-2y-5=0$ 위의 점 $(5, 0)$ 과 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리와 같다.

이때 두 직선 사이의 거리가 $3\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|5 - 2 \times 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|k + 5|}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

즉, $|k + 5| = 15$ 에서

$$k + 5 = -15 \text{ 또는 } k + 5 = 15$$

$$\therefore k = -20 \text{ 또는 } k = 10$$

이때 k 는 양수이므로 $k = 10$

086 **답** ①

두 직선 $ax-3y-6=0$, $2x+(a+5)y+6=0$ 이 평행하므로

$$\frac{a}{2} = \frac{-3}{a+5} \neq \frac{-6}{6} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{-3}{a+5} \text{ 에서 } a(a+5) = -6$$

$$a^2 + 5a + 6 = 0, (a+3)(a+2) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = -2$$

이때 $a = -2$ 이면 $\textcircled{1}$ 을 만족시키지 않으므로

$$a = -3$$

$a = -3$ 을 두 직선의 방정식에 각각 대입하면

$$-3x - 3y - 6 = 0, 2x + 2y + 6 = 0$$

$$\therefore x + y + 2 = 0, x + y + 3 = 0$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+y+2=0$ 위의 점 $(-2, 0)$

과 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-2+0+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

087 **답** 6

두 점 $O(0, 0)$, $A(3, 2)$ 에 대하여 직선 OA 의 기울기는 $\frac{2}{3}$

직선 $2x-3y+12=0$, 즉 $y=\frac{2}{3}x+4$ 의 기울기도 $\frac{2}{3}$ 이므로

직선 OA 와 직선 $2x-3y+12=0$ 은 평행하다.

이때 삼각형 OAB 의 밑변을 선분 OA

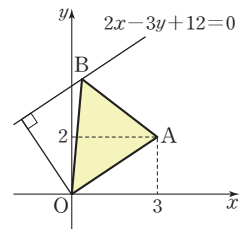
라 하면 밑변의 길이는

$$OA = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

높이는 원점과 직선 $2x-3y+12=0$

사이의 거리와 같으므로

$$\begin{aligned} \frac{|12|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} &= \frac{12}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{12\sqrt{13}}{13} \end{aligned}$$



따라서 삼각형 OAB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \frac{12\sqrt{13}}{13} = 6$$

088 **답** 23

세 점 $A(3, 4)$, $B(-2, 3)$,

$C(4, -5)$ 에 대하여 삼각형 ABC 의 밑변을 선분 BC 라 하면 밑변의 길이는

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(4+2)^2 + (-5-3)^2} \\ &= \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

직선 BC 의 방정식은

$$y - 3 = \frac{-5-3}{4-(-2)}\{x - (-2)\}$$

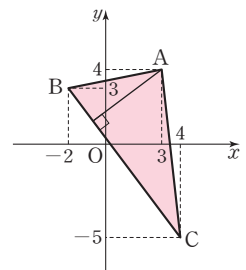
$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \quad \therefore 4x + 3y - 1 = 0$$

높이는 점 A 와 직선 $4x+3y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4 \times 3 + 3 \times 4 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{23}{5}$$

따라서 삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 10 \times \frac{23}{5} = 23$$



089 **답** 5

세 점 $A(-4, 10)$, $B(-1, 1)$,

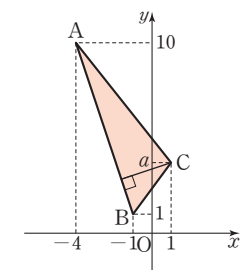
$C(1, a)$ 에 대하여 삼각형 ABC 의 밑변을 선분 AB 라 하면 밑변의 길이는

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-1+4)^2 + (1-10)^2} \\ &= \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

직선 AB 의 방정식은

$$y - 10 = \frac{1-10}{-1-(-4)}\{x - (-4)\}$$

$$y = -3x - 2 \quad \therefore 3x + y + 2 = 0$$



높이는 점 C와 직선 $3x+y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3 \times 1 + a + 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{a+5}{\sqrt{10}} \quad (\because a > 1)$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{10} \times \frac{a+5}{\sqrt{10}} = \frac{3(a+5)}{2} = 15$$

$$3(a+5)=30, a+5=10 \quad \therefore a=5$$

중단원 점검 문제

I-2 | 직선의 방정식

039~040쪽

01 답 $\frac{25}{4}$

기울기가 -4 이고 점 $(-2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=-4\{x-(-2)\} \quad \therefore y=-4x-5$$

이 직선의 x 절편은 $-\frac{5}{4}$, y 절편은 -5 이다.

따라서 $a=-\frac{5}{4}$, $b=-5$ 이므로

$$ab = \left(-\frac{5}{4}\right) \times (-5) = \frac{25}{4}$$

02 답 ④

세 점 A(1, 3), B(-2, -2), C(4, 5)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{1-2+4}{3}, \frac{3-2+5}{3}\right), \text{ 즉 } (1, 2)$$

따라서 직선 CG의 방정식은

$$y-5=\frac{2-5}{1-4}(x-4) \quad \therefore y=x+1$$

03 답 $\frac{100}{19}$

네 점 O(0, 0), A(3, -2), B(6, 2), C(5, 5)를 꼭짓점으로 하는 사각형 OABC는 오른쪽 그림과 같으므로 두 대각선의 교점은 두 직선 OB, AC의 교점이다.

직선 OB의 방정식은

$$y=\frac{2}{6}x, y=\frac{1}{3}x$$

$$\therefore x-3y=0 \quad \dots\dots ㉠$$

직선 AC의 방정식은

$$y-(-2)=\frac{5-(-2)}{5-3}(x-3), y=\frac{7}{2}x-\frac{25}{2}$$

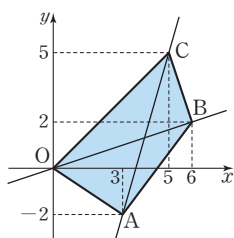
$$\therefore 7x-2y-25=0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } x=\frac{75}{19}, y=\frac{25}{19}$$

따라서 사각형 OABC의 두 대각선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{75}{19}, \frac{25}{19}\right) \text{이므로 } p=\frac{75}{19}, q=\frac{25}{19}$$

$$\therefore p+q=\frac{75}{19}+\frac{25}{19}=\frac{100}{19}$$



04 답 ③

y 절편이 x 절편의 2배이므로 x 절편을 a ($a \neq 0$)라 하면 y 절편은 $2a$ 이다.

x 절편이 a , y 절편이 $2a$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} = 1$$

이 직선이 점 $(4, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{4}{a} + \frac{2}{2a} = 1, \frac{5}{a} = 1 \quad \therefore a=5$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1 \quad \therefore 2x+y-10=0$$

다른 풀이

점 $(4, 2)$ 를 지나고 기울기가 m ($m \neq 0$)인 직선의 방정식은

$$y-2=m(x-4) \quad \therefore y=mx-4m+2 \quad \dots\dots ㉠$$

직선 ㉠의 x 절편은 $\frac{4m-2}{m}$, y 절편은 $-4m+2$ 이다.

이때 y 절편이 x 절편의 2배이므로 $-4m+2=2 \times \frac{4m-2}{m}$

$$\text{즉, } m(-4m+2)=2(4m-2) \text{에서 } 2m^2+3m-2=0$$

$$(m+2)(2m-1)=0 \quad \therefore m=-2 \text{ 또는 } m=\frac{1}{2}$$

$m=-2$ 를 ㉠에 대입하면 $y=-2x+10$

$m=\frac{1}{2}$ 을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{1}{2}x$

이때 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 의 x 절편은 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=-2x+10 \quad \therefore 2x+y-10=0$$

05 답 ①

세 점 A(-1, a), B(1, 1), C(a, -7)에 대하여

$$\text{직선 AB의 기울기는 } \frac{1-a}{1-(-1)} = \frac{1-a}{2}$$

$$\text{직선 BC의 기울기는 } \frac{-7-1}{a-1} = -\frac{8}{a-1}$$

세 점이 한 직선 위에 있으면 두 직선 AB, BC의 기울기가 같으므로

$$\frac{1-a}{2} = -\frac{8}{a-1}, (a-1)^2=16$$

$$a-1=-4 \text{ 또는 } a-1=4 \quad \therefore a=-3 \text{ 또는 } a=5$$

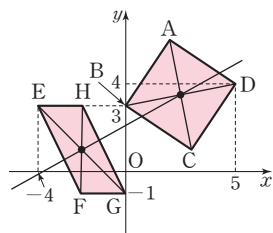
따라서 양수 a 의 값은 5이다.

06 답 14

정사각형 ABCD와 평행사변형 EFGH의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 사각형의 두 대각선의 교점을 모두 지난다.

정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점은 대각선 BD의 중점과 같으므로 그 좌표는

$$\left(\frac{0+5}{2}, \frac{3+4}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$



평행사변형 EFGH의 두 대각선의 교점은 대각선 EG의 중점과 같으므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{3-1}{2}\right), \text{ 즉 } (-2, 1)$$

두 점 $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right), (-2, 1)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1-\frac{7}{2}}{-2-\frac{5}{2}} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{9}{2}} = \frac{5}{9}$$

따라서 $p=9, q=5$ 이므로

$$p+q=9+5=14$$

07 답 제4사분면

주어진 그림에서 직선 $ax+by+c=0$ 의 기울기는 음수, y 절편은 양수이다.

$$ax+by+c=0 \text{에서 } y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

$$\text{즉, } -\frac{a}{b}<0, -\frac{c}{b}>0 \quad \therefore ab>0, bc<0, ac<0$$

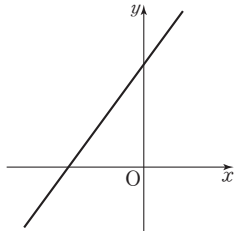
$$cx+ay-b=0 \text{에서 } y=-\frac{c}{a}x+\frac{b}{a} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $ac<0, ab>0$ 에서 $-\frac{c}{a}>0,$

$\frac{b}{a}>0$ 이므로 직선 $\textcircled{7}$ 은 기울기와

y 절편이 모두 양수인 직선이다.

따라서 직선 $cx+ay-b=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



참고 $ab>0, bc<0$ 이므로 $ab^2c<0$

이때 $b^2>0$ 이므로 $ac<0$

08 답 -1

직선 $x+ky-3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{k}x+\frac{3}{k}$ 의 기울기가 $-\frac{1}{k}$ 이므로

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 k 이다.

기울기가 k 이고 점 $(0, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=kx+3$$

한편, 직선 $x+ky-3=0$ 의 x 절편은 3이고, 두 직선

$x+ky-3=0, y=kx+3$ 이 x 축에서 수직으로 만나므로 직선

$y=kx+3$ 의 x 절편도 3이다.

따라서 $0=k \times 3+3$ 에서 $k=-1$

다른 풀이

직선 $x+ky-3=0$ 의 x 절편은 3이다.

점 $(0, 3)$ 을 지나는 직선을 l 이라 하면 두 직선 $x+ky-3=0, l$

이 x 축에서 수직으로 만나므로 직선 l 의 x 절편도 3이다.

이때 직선 l 의 y 절편이 3이므로 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\therefore l: y=-x+3$$

직선 $x+ky-3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{k}x+\frac{3}{k}$ 과 직선 l 은 수직이므로

$$\left(-\frac{1}{k}\right) \times (-1) = -1 \quad \therefore k = -1$$

09 답 6

직선 $4x+y+1=0$, 즉 $y=-4x-1$ 과 만나지 않는 직선은 평행한 직선이므로 기울기가 -4 이다.

점 $(3, -2)$ 를 지나고 기울기가 -4 인 직선의 방정식은

$$y-(-2)=-4(x-3), y=-4x+10$$

$$\therefore -4x-y+10=0$$

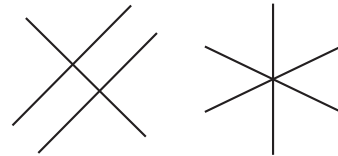
따라서 $a=-4, b=10$ 이므로

$$a+b=-4+10=6$$

주의 문제에 주어진 직선의 방정식이 $ax-y+b=0$ 이므로 직선의 방정식을 구할 때 y 의 계수가 -1 인 일차방정식으로 나타내어 a, b 의 값을 구해야 한다.

10 답 -12

세 직선이 좌표평면을 여섯 부분으로 나누려면 다음 그림과 같이 세 직선 중 두 직선이 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.



세 직선 $3x+y+3=0, x+2y-4=0, ax-2y-4=0$ 에 대하여

(i) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때

두 직선 $3x+y+3=0, x+2y-4=0$ 에서

$$\frac{3}{1} \neq \frac{1}{2} \text{ 이므로 평행하지 않다.}$$

두 직선 $3x+y+3=0, ax-2y-4=0$ 이 평행할 때,

$$\frac{3}{a} = \frac{1}{-2} \neq \frac{3}{-4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{3}{a} = \frac{1}{-2} \text{에서 } a=-6 \text{이고 이는 } \textcircled{1} \text{을 만족시킨다.}$$

두 직선 $x+2y-4=0, ax-2y-4=0$ 이 평행할 때,

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{-2} \neq \frac{-4}{-4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{-2} \text{에서 } a=-1 \text{이고 이는 } \textcircled{2} \text{을 만족시킨다.}$$

(ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

두 직선 $3x+y+3=0, x+2y-4=0$ 의 교점을 직선

$ax-2y-4=0$ 이 지나야 한다.

$3x+y+3=0, x+2y-4=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=-2, y=3$$

직선 $ax-2y-4=0$ 이 점 $(-2, 3)$ 을 지나야 하므로

$$-2a-2 \times 3-4=0, 2a=-10$$

$$\therefore a=-5$$

(i), (ii)에서 상수 a 의 값은 $-6, -5, -1$ 이므로 구하는 합은

$$-6+(-5)+(-1)=-12$$

11 답 ③

직선 $4x-3y+12=0$ 의 x 절편이 $-3, y$ 절편이 $\frac{12}{3}=4$ 이므로

A $(-3, 0)$, B $(0, 4)$

선분 AB의 수직이등분선은 직선 AB와 수직이다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{4-0}{0-(-3)} = \frac{4}{3}$ 이므로 직선 AB에 수직인

직선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$ 이다.

즉, 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을

$$y = -\frac{3}{4}x + b \quad (b \text{는 상수}) \text{로 놓을 수 있다.}$$

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

직선 $y = -\frac{3}{4}x + b$ 가 점 $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ 를 지나므로

$$2 = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + b \quad \therefore b = \frac{7}{8}$$

따라서 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{8}$$

이 직선이 점 $(-4, k)$ 를 지나므로

$$k = -\frac{3}{4} \times (-4) + \frac{7}{8} = \frac{31}{8}$$

12 답 ③

직선 $(k-1)x + (2k+3)y - 3k - 2 = 0$ 에서

ㄱ. $k=2$ 일 때, $(2-1)x + (2 \times 2 + 3)y - 3 \times 2 - 2 = 0$

$$\therefore x + 7y - 8 = 0$$

ㄴ. $k=1$ 일 때, $(1-1)x + (2+3)y - 3 - 2 = 0$

$$5y = 5 \quad \therefore y = 1$$

직선 $y=1$ 은 x 축에 평행하고 y 축에 수직인 직선이다.

ㄷ. 직선의 방정식을 k 에 대하여 정리하면

$$(-x + 3y - 2) + k(x + 2y - 3) = 0$$

이 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$-x + 3y - 2 = 0, \quad x + 2y - 3 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1, y=1$

즉, 주어진 직선은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 1)$ 을 지난다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

13 답 ⑤

두 직선 $x+y-7=0, 3x-2y-1=0$ 의 교점을 지나는 직선 l 의 방정식은

$$(x+y-7) + k(3x-2y-1) = 0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \dots\dots ①$$

직선 l 이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로 $x=-1, y=2$ 를 ①에 대입하면

$$-6 - 8k = 0 \quad \therefore k = -\frac{3}{4}$$

따라서 $k = -\frac{3}{4}$ 을 ①에 대입하면 직선 l 의 방정식은

$$(x+y-7) - \frac{3}{4}(3x-2y-1) = 0$$

$$-5x + 10y - 25 = 0 \quad \therefore x - 2y + 5 = 0$$

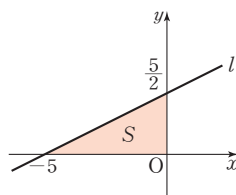
따라서 직선 l 과 x 축, y 축으로 둘러

싸인 도형은 오른쪽 그림과 같으므로

그 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times |-5| \times \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$$

$$\therefore 100S = 100 \times \frac{25}{4} = 625$$



다른 풀이

$x+y-7=0, 3x-2y-1=0$ 을 연립하여 풀면 $x=3, y=4$

즉, 두 직선 $x+y-7=0, 3x-2y-1=0$ 의 교점의 좌표는

$(3, 4)$ 이다.

따라서 직선 l 은 두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나므로 직선 l 의 방정식은

$$y-2 = \frac{4-2}{3-(-1)}\{x-(-1)\}, \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$\therefore x - 2y + 5 = 0$$

14 답 ③

두 직선 $3x+y+1=0, mx+(m-2)y+16=0$ 이 평행하므로

$$\frac{3}{m} = \frac{1}{m-2} \neq \frac{1}{16} \quad \dots\dots ①$$

$$\frac{3}{m} = \frac{1}{m-2} \text{에서 } 3(m-2)=m, 2m=6$$

즉, $m=3$ 이고 ①을 만족시킨다.

따라서 두 직선 $3x+y+1=0, 3x+y+16=0$ 사이의 거리는 직선 $3x+y+1=0$ 위의 점 $(0, -1)$ 과 직선 $3x+y+16=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3 \times 0 - 1 + 16|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

15 답 6

오른쪽 그림과 같이 두 직선

$x-y=0, 5x-2y-9=0$ 의 교점

을 A, 두 직선 $x-y=0,$

$x+2y+3=0$ 의 교점을 B, 두 직선

$x+2y+3=0, 5x-2y-9=0$

의 교점을 C라 하자.

두 직선의 방정식을 각각 연립하

여 풀면

$A(3, 3), B(-1, -1), C(1, -2)$

삼각형 ABC의 밑변을 선분 AB라 하면 밑변의 길이는

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2}$$

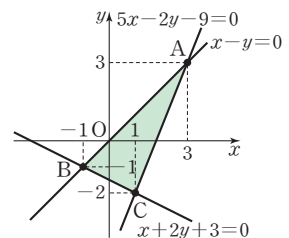
직선 AB의 방정식은 $x-y=0$

높이는 점 C와 직선 AB 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = 6$$



001 **답** (1) 중심의 좌표: (1, 1), 반지름의 길이: 1

(2) 중심의 좌표: (-1, -2), 반지름의 길이: $\sqrt{10}$

(3) 중심의 좌표: (1, 0), 반지름의 길이: 4

(1) 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, 즉 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2$ 의 중심의 좌표는 (1, 1)이고 반지름의 길이는 1이다.

(2) 원 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$, 즉 $\{x - (-1)\}^2 + \{y - (-2)\}^2 = (\sqrt{10})^2$ 의 중심의 좌표는 (-1, -2)이고 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이다.

(3) 원 $(x-1)^2 + y^2 = 16$, 즉 $(x-1)^2 + (y-0)^2 = 4^2$ 의 중심의 좌표는 (1, 0)이고 반지름의 길이는 4이다.

002 **답** (1) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

(2) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$

(1) 주어진 그림에서 원의 중심의 좌표는 (3, 3)이고 반지름의 길이는 3이다.

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

(2) 주어진 그림에서 원의 중심의 좌표는 (-2, 2)이고 반지름의 길이는 1이다.

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$

003 **답** (1) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$

(2) $(x+1)^2 + (y-6)^2 = 9$

(3) $x^2 + (y+4)^2 = 8$

(1) 중심이 점 (3, 2)이고 반지름의 길이가 4인 원의 방정식은 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4^2$, 즉 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$

(2) 중심이 점 (-1, 6)이고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은 $\{x - (-1)\}^2 + (y-6)^2 = 3^2$, 즉 $(x+1)^2 + (y-6)^2 = 9$

(3) 중심이 점 (0, -4)이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원의 방정식은 $(x-0)^2 + \{y - (-4)\}^2 = (2\sqrt{2})^2$, 즉 $x^2 + (y+4)^2 = 8$

004 **답** (1) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

(2) $(x-3)^2 + y^2 = 10$

(3) $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 13$

(1) 단계1. 원의 중심의 좌표를 이용하여 원의 방정식 세우기

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심이 점 (-1, 1)이므로

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = r^2$$

단계2. 원이 지나는 점을 이용하여 원의 방정식 구하기

이 원이 점 (0, 1)을 지나므로

$$(0+1)^2 + (1-1)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 1$$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

(2) 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심이 점 (3, 0)이므로

$$(x-3)^2 + y^2 = r^2$$

이 원이 점 (2, -3)을 지나므로

$$(2-3)^2 + (-3)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 10$$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2 + y^2 = 10$

(3) 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심이 점 (-4, -2)이므로

$$(x+4)^2 + (y+2)^2 = r^2$$

이 원이 점 (-1, -4)를 지나므로

$$(-1+4)^2 + (-4+2)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 13$$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 13$

다른 풀이

(1) 두 점 (-1, 1), (0, 1) 사이의 거리는 $\sqrt{1^2 + (1-1)^2} = 1$

따라서 구하는 원의 방정식은 중심의 좌표가 (-1, 1)이고 반지름의 길이가 1이므로 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

005 **답** (1) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1^2$

(2) $x^2 + (y-2)^2 = 3^2$

(1) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ 에서

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) - 1 = 0$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1^2$$

(2) $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ 에서

$$x^2 + (y^2 - 4y + 4) - 9 = 0$$

$$\therefore x^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

006 **답** (1) 중심의 좌표: (-1, 1), 반지름의 길이: 2

(2) 중심의 좌표: (2, -2), 반지름의 길이: 1

(3) 중심의 좌표: (-3, -4), 반지름의 길이: 5

(4) 중심의 좌표: (-8, 0), 반지름의 길이: 2

(1) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 에서

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) - 4 = 0$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

따라서 원 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 의 중심의 좌표는 (-1, 1), 반지름의 길이는 2이다.

(2) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ 에서

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 4y + 4) - 1 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1^2$$

따라서 원 $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ 의 중심의 좌표는 (2, -2), 반지름의 길이는 1이다.

(3) $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ 에서

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) - 25 = 0$$

$$\therefore (x+3)^2 + (y+4)^2 = 5^2$$

따라서 원 $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ 의 중심의 좌표는 (-3, -4), 반지름의 길이는 5이다.

(4) $x^2 + y^2 + 16x + 60 = 0$ 에서

$$(x^2 + 16x + 64) + y^2 - 4 = 0$$

$$\therefore (x+8)^2 + y^2 = 2^2$$

따라서 원 $x^2 + y^2 + 16x + 60 = 0$ 의 중심의 좌표는 (-8, 0), 반지름의 길이는 2이다.

007 **답** (1) ○

(2) ×

(3) ○

(1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 에서

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) - 25 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

따라서 (우변) $= 25 > 0$ 이므로 주어진 방정식은 원을 나타낸다.

(2) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 36 = 0$ 에서
 $(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 4y + 4) + 16 = 0$
 $\therefore (x+4)^2 + (y-2)^2 = -16$
 따라서 (우변) $= -16 < 0$ 이므로 주어진 방정식을 만족시키는 도형은 존재하지 않는다.

(3) $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 40 = 0$ 에서
 $(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 8y + 16) - 1 = 0$
 $\therefore (x+5)^2 + (y-4)^2 = 1$
 따라서 (우변) $= 1 > 0$ 이므로 주어진 방정식은 원을 나타낸다.

008 답 1, $1-k$, $1-k$, 1
 $x^2 + y^2 + 2x + k = 0$ 에서 $(x^2 + 2x + 1) + y^2 + k - 1 = 0$
 $\therefore (x+1)^2 + y^2 = 1-k$
 이 방정식이 나타내는 도형이 원이 되려면
 $1-k > 0 \quad \therefore k < 1$

009 답 (1) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$
 (2) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 4$
 (3) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$
 (4) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
 (1) 중심이 점 (3, 1)이고 x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는 1
 이므로 원의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$
 (2) 중심이 점 (4, -2)이고 x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는
 $|-2| = 2$ 이므로 원의 방정식은
 $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 4$
 (3) 중심이 점 (-2, 3)이고 x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는
 3이므로 원의 방정식은
 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$
 (4) 중심이 점 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 이고 x 축에 접하는 원의 반지름의 길
 이는 $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ 이므로 원의 방정식은
 $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

010 답 (1) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
 (2) $(x-5)^2 + (y+4)^2 = 25$
 (3) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$
 (4) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 1$
 (1) 중심이 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 이고 y 축에 접하는 원의 반지름의 길이는
 $\frac{1}{2}$ 이므로 원의 방정식은
 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
 (2) 중심이 점 (5, -4)이고 y 축에 접하는 원의 반지름의 길이는
 5이므로 원의 방정식은
 $(x-5)^2 + (y+4)^2 = 25$
 (3) 중심이 점 (-3, 4)이고 y 축에 접하는 원의 반지름의 길이는
 $|-3| = 3$ 이므로 원의 방정식은

$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$
 (4) 중심이 점 (-1, -3)이고 y 축에 접하는 원의 반지름의 길이는
 $|-1| = 1$ 이므로 원의 방정식은
 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 1$

011 답 (1) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$
 (2) $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$
 (1) 중심이 점 (-2, 2)이고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 반지
 림의 길이는 중심의 x 좌표 또는 y 좌표의 절댓값과 같다.
 즉, 원의 반지름의 길이는 $|-2| = |2| = 2$ 이므로 원의 방정식은
 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$
 (2) 중심이 점 (4, -4)이고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 반지
 림의 길이는 중심의 x 좌표 또는 y 좌표의 절댓값과 같다.
 즉, 원의 반지름의 길이는 $|4| = |-4| = 4$ 이므로 원의 방정식은
 $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$

012 답 (1) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$
 (2) $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$
 (3) $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$
 (4) $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$
 (1) 제1사분면은 (x 좌표) > 0 , (y 좌표) > 0 이므로
 중심의 좌표가 (4, 4)이다.
 따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$
 (2) 제2사분면은 (x 좌표) < 0 , (y 좌표) > 0 이므로
 중심의 좌표가 (-4, 4)이다.
 따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$
 (3) 제3사분면은 (x 좌표) < 0 , (y 좌표) < 0 이므로
 중심의 좌표가 (-4, -4)이다.
 따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$
 (4) 제4사분면은 (x 좌표) > 0 , (y 좌표) < 0 이므로
 중심의 좌표가 (4, -4)이다.
 따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$

013 답 (1) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$
 (2) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 32$
 (3) 2
 (4) $x^2 + y^2 = 8$
 (1) P(x, y), A(1, 1)이므로
 $\overline{PA}^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$
 (2) P(x, y), B(4, 4)이므로
 $\overline{PB}^2 = (x-4)^2 + (y-4)^2 = x^2 + y^2 - 8x - 8y + 32$
 (3) 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 1 : 2인 점이 P이므로
 $\overline{PA} : \overline{PB} = 1 : 2$
 즉, $\overline{PB} = 2\overline{PA}$ 이므로 $k=2$

$$\begin{aligned} (4) \overline{PB} &= 2 \overline{PA} \text{에서 } \overline{PB}^2 = 4 \overline{PA}^2 \text{이므로} \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y + 32 &= 4(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2) \\ 3x^2 + 3y^2 &= 24 \\ \therefore x^2 + y^2 &= 8 \end{aligned}$$

014 답 2, 4, 2

A(1, 3), B(3, 5)이므로 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\begin{aligned} \overline{PB}^2 &= (x-3)^2 + (y-5)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 12$ 에 대입하면

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 16y + 44 = 12$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 8y + 16) - 4 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-4)^2 = 2^2$$

015 답 (1) $(x-7)^2 + y^2 = 4$

$$(2) x^2 + (y-5)^2 = 4$$

(1) $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로 $\overline{AP} = 2 \overline{BP}$

$$\text{즉, } \overline{AP}^2 = 4 \overline{BP}^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

A(3, 0), B(6, 0)이므로 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\overline{AP}^2 = (x-3)^2 + y^2$$

$$\overline{BP}^2 = (x-6)^2 + y^2$$

⑦에 대입하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4\{(x-6)^2 + y^2\}$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4x^2 - 48x + 4y^2 + 144$$

$$3x^2 - 42x + 3y^2 + 135 = 0$$

$$x^2 - 14x + y^2 + 45 = 0$$

$$(x^2 - 14x + 49) + y^2 - 4 = 0$$

$$\therefore (x-7)^2 + y^2 = 4$$

(2) $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로 $\overline{AP} = 2 \overline{BP}$

$$\text{즉, } \overline{AP}^2 = 4 \overline{BP}^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

A(0, 1), B(0, 4)이므로 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\overline{AP}^2 = x^2 + (y-1)^2$$

$$\overline{BP}^2 = x^2 + (y-4)^2$$

⑦에 대입하면 $x^2 + (y-1)^2 = 4\{x^2 + (y-4)^2\}$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 4x^2 + 4y^2 - 32y + 64$$

$$3x^2 + 3y^2 - 30y + 63 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10y + 21 = 0$$

$$x^2 + (y^2 - 10y + 25) - 4 = 0$$

$$\therefore x^2 + (y-5)^2 = 4$$

016 답 2, 2

점 A(0, 4)에 대하여 원 위의 점 P의 좌표를 (a, b), 선분 AP의 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x = \frac{0+a}{2}, y = \frac{4+b}{2}$$

$$\text{즉, } a = 2x, b = 2y - 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 P가 원 $x^2 + y^2 = 8$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$(2x)^2 + (2y-4)^2 = 8$$

$$4x^2 + 4(y-2)^2 = 8$$

$$\therefore x^2 + (y-2)^2 = 2$$

017 답 ②

원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심이 점 (1, 3)이므로

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

이 원이 점 (1, 1)을 지나므로

$$(1-1)^2 + (1-3)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 4$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$

다른 풀이

주어진 원의 중심은 점 (1, 3)이고 반지름의 길이는 $3-1=2$ 이므로 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2^2, \text{ 즉 } (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$

018 답 3

원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 중심의 좌표는 (0, 3)

중심이 점 (0, 3)인 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$x^2 + (y-3)^2 = r^2$$

이 원이 점 (2, 0)을 지나므로

$$2^2 + (0-3)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 13$$

즉, 원 $x^2 + (y-3)^2 = 13$ 이 점 (a, 1)을 지나므로

$$a^2 + (1-3)^2 = 13, a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 0)$$

019 답 ④

$2x+y=0$, $x+y-2=0$ 을 연립하여 풀면

$$x = -2, y = 4$$

즉, 두 직선 $2x+y=0$, $x+y-2=0$ 의 교점의 좌표는

$$(-2, 4)$$

중심이 점 (-2, 4)인 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = r^2$$

이 원이 점 (0, 2)를 지나므로

$$(0+2)^2 + (2-4)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 8$$

따라서 원의 방정식은 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 8$ 이므로 이 원의 넓이는

$$\pi r^2 = 8\pi$$

020 답 ③

원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{9}=3$

원의 중심의 좌표를 (a, 0)이라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + y^2 = 9$$

이 원이 점 (2, 3)을 지나므로

$$(2-a)^2 + 3^2 = 9$$

$$(a-2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + y^2 = 9$$

021 답 11

원의 중심 (a, b) 가 직선 $y = -x$ 위에 있으므로 $b = -a$
 중심이 점 $(a, -a)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은
 $(x-a)^2 + (y+a)^2 = r^2$
 이 원이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로
 $(0-a)^2 + (1+a)^2 = r^2 \quad \therefore 2a^2 + 2a + 1 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 또, 이 원이 점 $(7, 0)$ 을 지나므로
 $(7-a)^2 + (0+a)^2 = r^2 \quad \therefore 2a^2 - 14a + 49 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면
 $16a - 48 = 0 \quad \therefore a = 3$
 $a = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $r^2 = 2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 1 = 25 \quad \therefore r = 5 (\because r > 0)$
 또, $b = -a = -3$
 $\therefore a - b + r = 3 - (-3) + 5 = 11$

022 답 ⑤

$2x - y + 3 = 0$ 에서 $y = 2x + 3$ 이므로 원의 중심의 좌표를
 $(a, 2a + 3)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은
 $(x-a)^2 + (y-2a-3)^2 = r^2$
 이 원이 점 $(1, 4)$ 를 지나므로
 $(1-a)^2 + (4-2a-3)^2 = r^2 \quad \therefore 5a^2 - 6a + 2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 또, 이 원이 점 $(2, -1)$ 을 지나므로
 $(2-a)^2 + (-1-2a-3)^2 = r^2$
 $\therefore 5a^2 + 12a + 20 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면
 $18a + 18 = 0 \quad \therefore a = -1$
 $a = -1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $r^2 = 5 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 2 = 13 \quad \therefore r = \sqrt{13} (\because r > 0)$
 따라서 원의 방정식은 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$ 이므로 이 원의 둘레의 길이는
 $2\pi r = 2\pi \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}\pi$

023 답 ②

두 점 $A(3, 4)$, $B(5, 0)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 AB 의 중점이므로 그 좌표는
 $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$, 즉 $(4, 2)$
 원의 반지름의 길이는
 $\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(5-3)^2 + (0-4)^2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$
 따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 5$

024 답 ③

두 점 $A(-3, 3)$, $B(1, 9)$ 를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 AB 의 중점이므로 그 좌표는
 $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{3+9}{2}\right)$, 즉 $(-1, 6)$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(1+3)^2 + (9-3)^2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} = \sqrt{13}$$

따라서 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-6)^2 = 13$$

이때

$$(2+1)^2 + (4-6)^2 = 13$$

이므로 점 $(2, 4)$ 는 원 위의 점이다.

025 답 23

두 점 $A(a, b)$, $B(7, 5)$ 를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 AB 의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{a+7}{2}, \frac{b+5}{2}\right)$$

원의 방정식 $(x-4)^2 + (y-1)^2 = c$ 에서 중심의 좌표는

$(4, 1)$ 이므로

$$\frac{a+7}{2} = 4, \frac{b+5}{2} = 1 \quad \therefore a = 1, b = -3$$

원의 반지름의 길이는 점 $B(7, 5)$ 와 원의 중심 $(4, 1)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(4-7)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

따라서 원의 방정식 $(x-4)^2 + (y-1)^2 = c$ 에서

$$c = 5^2 = 25$$

$$\therefore a + b + c = 1 + (-3) + 25 = 23$$

026 답 ①

세 점 $A(4, 3)$, $B(2, 1)$, $C(2, 7)$ 을 지나는 원의 중심을

$P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

$$\overline{PA} = \overline{PB} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \text{이므로}$$

$$(a-4)^2 + (b-3)^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2$$

$$\therefore a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{PA} = \overline{PC} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \text{이므로}$$

$$(a-4)^2 + (b-3)^2 = (a-2)^2 + (b-7)^2$$

$$\therefore a - 2b = -7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 4$$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(1, 4)$ 이므로 반지름의 길이는

$$\overline{PA} = \sqrt{(4-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 10$$

027 답 ①

세 점 $A(2, 7)$, $B(0, 3)$, $C(-2, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 외접원은 세 꼭짓점을 지나는 원이다.

외접원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

$$\overline{PA} = \overline{PB} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \text{이므로}$$

$$(a-2)^2 + (b-7)^2 = a^2 + (b-3)^2$$

$$\therefore a + 2b = 11 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{PA} = \overline{PC} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \text{이므로}$$

$$(a-2)^2 + (b-7)^2 = (a+2)^2 + (b-3)^2$$

$$\therefore a+b=5 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=6$$

즉, 삼각형 ABC의 외접원의 중심의 좌표는 $(-1, 6)$ 이므로 반지름의 길이는

$$\overline{PA} = \sqrt{(2+1)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{10}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi r^2 = \pi \times (\sqrt{10})^2 = 10\pi$$

028 답 5

네 점 $A(-3, 3)$, $B(-2, -4)$, $C(4, 4)$, $D(k, 3)$ 이 한 원 위에 있으면 세 점 A, B, C를 지나는 원 위에 점 D가 존재한다.

이 원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

$$\overline{PA} = \overline{PB} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \text{이므로}$$

$$(a+3)^2 + (b-3)^2 = (a+2)^2 + (b+4)^2$$

$$\therefore a-7b=1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\overline{PA} = \overline{PC} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \text{이므로}$$

$$(a+3)^2 + (b-3)^2 = (a-4)^2 + (b-4)^2$$

$$\therefore 7a+b=7 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=1, b=0$$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로 반지름의 길이는

$$\overline{PA} = \sqrt{(-3-1)^2 + (3-0)^2} = 5$$

따라서 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + y^2 = 25$$

이때 점 D가 이 원 위의 점이므로

$$(k-1)^2 + 3^2 = 25$$

$$k^2 - 2k - 15 = 0, (k+3)(k-5) = 0$$

$$\therefore k=5 (\because k>0)$$

029 답 ⑤

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0 \text{에서}$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) - 4 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(2, -3)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{4}=2$ 이므로

$$a=2, b=-3, r=2$$

$$\therefore a-b+r=2-(-3)+2=7$$

030 답 ④

$$x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + (y^2 + 6y + 9) - 25 = 0$$

$$\therefore x^2 + (y+3)^2 = 25$$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{25}=5$ 이므로 넓이는 25π 이다.

한편, $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ 에서

$$(x^2 - 2x + 1) + y^2 - 4 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + y^2 = 4$$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{4}=2$ 이므로 넓이는 4π 이다.

따라서 구하는 두 원의 넓이의 합은

$$25\pi + 4\pi = 29\pi$$

031 답 ②

$$x^2 + y^2 + 2x + 8y - 32 = 0 \text{에서}$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) - 49 = 0$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y+4)^2 = 49$$

즉, 이 원은 중심이 점 $(-1, -4)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{49}=7$ 인 원이다.

이 원과 중심이 같은 원의 반지름의 길이를 $r (r>0)$ 라 하면 원의 방정식을

$$(x+1)^2 + (y+4)^2 = r^2$$

으로 놓을 수 있다.

원 $(x+1)^2 + (y+4)^2 = r^2$ 이 점 $(2, -2)$ 를 지나므로

$$r^2 = (2+1)^2 + (-2+4)^2 = 13$$

$$\therefore r = \sqrt{13} (\because r>0)$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

다른 풀이

원 $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 32 = 0$ 과 중심이 같은 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x + 8y + k = 0 \quad (k \text{는 실수})$$

이 원이 점 $(2, -2)$ 를 지나므로

$$2^2 + (-2)^2 + 2 \times 2 + 8 \times (-2) + k = 0 \quad \therefore k=4$$

즉, 원의 방정식은 $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 4 = 0$ 이므로

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) - 13 = 0$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y+4)^2 = 13$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

품셈 방법 원의 방정식의 일반형

중심이 점 (a, b) 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2ax - 2by + C = 0 \quad (\text{단, } C = a^2 + b^2 - r^2)$$

즉, 중심이 점 (a, b) 인 원의 방정식은 일반형에서 상수항의 값만 다르고 모든 항이 일치한다.

032 답 ③

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - a^2 + 5a + 20 = 0 \text{에서}$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) - a^2 + 5a + 10 = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y+1)^2 = a^2 - 5a - 10$$

이 원의 반지름의 길이가 2이므로

$$\sqrt{a^2 - 5a - 10} = 2$$

양변을 제곱하면 $a^2 - 5a - 10 = 4$

$$a^2 - 5a - 14 = 0, (a+2)(a-7) = 0$$

$$\therefore a=7 (\because a>0)$$

033 답 ⑤

$$x^2 + y^2 - 2x - 2ay + a^2 - 9 = 0 \text{에서}$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y-a)^2 - 10 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-a)^2 = 10$$

즉, 주어진 원의 중심의 좌표는 $(1, a)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이다.

ㄱ. 원의 넓이는 10π 이다.

ㄴ. $a=1$ 일 때, 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10 \text{ 이므로}$$

$x=2, y=4$ 를 대입하면

$$(2-1)^2 + (4-1)^2 = 10$$

따라서 $a=1$ 일 때, 점 $(2, 4)$ 를 지난다.

ㄷ. 원의 중심이 x 축 위에 있으려면 중심의 y 좌표가 0이어야 한다.

따라서 $a=0$ 일 때, 주어진 원의 중심은 x 축 위에 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

034 답 ④

① $x^2 + y^2 - 2x - 5 = 0$ 에서

$$(x^2 - 2x + 1) + y^2 - 6 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + y^2 = 6$$

즉, 중심의 좌표가 $(1, 0)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$ 인 원이다.

② $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ 에서

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) - 2 = 0$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

즉, 중심의 좌표가 $(-1, -1)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이다.

③ $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ 에서

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) - 9 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$$

즉, 중심의 좌표가 $(1, -3)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이다.

④ $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$ 에서

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) = 0$$

$$\therefore (x+2)^2 + (y-2)^2 = 0$$

즉, 점 $(-2, 2)$ 를 나타내는 방정식이다.

⑤ $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ 에서

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) - 1 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y+4)^2 = 1$$

즉, 중심의 좌표가 $(2, -4)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ④이다.

풍생 비법 원의 방정식이 되기 위한 조건

방정식 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 이 원을 나타내는 경우,
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$ 꼴로 변형하면 $c > 0$ 이다.

035 답 ②

$$x^2 + y^2 - 8x + 2ky + 2k^2 + 2k + 1 = 0 \text{에서}$$

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 2ky + k^2) + k^2 + 2k - 15 = 0$$

$$\therefore (x-4)^2 + (y+k)^2 = -k^2 - 2k + 15$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-k^2 - 2k + 15 > 0, \quad k^2 + 2k - 15 < 0$$

$$(k+5)(k-3) < 0 \quad \therefore -5 < k < 3$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k 는 $-4, -3, -2, \dots, 2$ 의 7개이다.

036 답 ②

x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는 중심의 y 좌표의 절댓값과 같다.

즉, 중심이 점 $(3, 4)$ 이고 x 축에 접하는 원 C 의 반지름의 길이는 4이다.

한편, y 축에 접하는 원의 반지름의 길이는 중심의 x 좌표의 절댓값과 같다.

즉, 중심이 $(3, 4)$ 이고 y 축에 접하는 원 C' 의 반지름의 길이는 3이다.

따라서 두 원 C, C' 의 반지름의 길이의 합은

$$4 + 3 = 7$$

037 답 3

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - k^2 + 2k + 12 = 0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = k^2 - 2k + 1$$

이 원이 x 축에 접하므로 반지름의 길이는

$$|-2| = \sqrt{k^2 - 2k + 1}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 4 = k^2 - 2k + 1$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0, \quad (k+1)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = 3 \quad (\because k > 0)$$

038 답 ④

중심이 점 $(a, -2)$ 이고 y 축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|a|$

이므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y+2)^2 = a^2$$

이 원이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$(3-a)^2 + (1+2)^2 = a^2$$

$$-6a + 18 = 0 \quad \therefore a = 3$$

039 답 ③

점 $(2, 0)$ 에서 x 축에 접하는 원의 중심의 x 좌표는 2이므로 중심의 좌표를 $(2, a)$ 라 하자.

원의 반지름의 길이를 r ($r > 0$)라 하면 넓이가 9π 이므로

$$\pi r^2 = 9\pi \quad \therefore r = 3$$

이 원이 x 축에 접하므로

$$|a| = r = 3 \quad \therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 3$$

이때 원의 중심이 제4사분면에 있으므로 $a = -3$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(2, -3)$ 이고 반지름의 길이는 3이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$$

040 답 $4\sqrt{2}$

중심이 제1사분면에 있고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r ($r > 0$)라 하면 원의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0, (r-1)(r-5) = 0$$

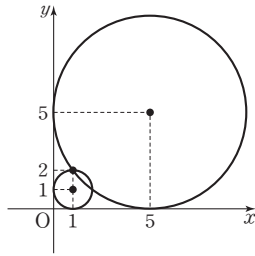
$$\therefore r=1 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 조건을 만족시키는 두 원의

중심은 각각 점 (1, 1), 점 (5, 5)

이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$$



041 답 ⑤

$$x^2 + y^2 + 8x + 2ay + 1 + b = 0 \text{에서}$$

$$(x+4)^2 + (y+a)^2 = a^2 - b + 15$$

이 원이 x 축, y 축에 동시에 접하므로

$$|-4| = |a| = \sqrt{a^2 - b + 15}$$

$$|-4| = |a| \text{에서 } a=4 (\because a>0)$$

$$|-4| = \sqrt{a^2 - b + 15} \text{에서 } a=4 \text{이므로}$$

$$4 = \sqrt{31 - b}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 16 = 31 - b \quad \therefore b = 15$$

$$\therefore a+b = 4+15 = 19$$

042 답 ①

중심이 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, 2a+1)$ 이라 하자.

이 원이 x 축, y 축에 동시에 접하므로 원의 중심의 x 좌표의 절댓값, y 좌표의 절댓값, 반지름의 길이는 모두 같다.

즉, $|a| = |2a+1|$ 에서 양변을 제곱하면

$$a^2 = (2a+1)^2$$

$$3a^2 + 4a + 1 = 0, (a+1)(3a+1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{3}$$

즉, 조건을 만족시키는 두 원의 반지름의 길이는 각각 $|-1|=1$,

$$\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} \text{이므로 두 원 중 큰 원의 반지름의 길이는 1이다.}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\pi r^2 = \pi \times 1^2 = \pi$$

다른 풀이

x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

즉, 원의 중심은 직선 $y=2x+1$ 과 직선 $y=x$ 의 교점이거나 직선 $y=2x+1$ 과 직선 $y=-x$ 의 교점이다.

(i) 원의 중심이 두 직선 $y=2x+1$, $y=x$ 의 교점일 때

두 직선의 방정식을 연립하면

$$x=2x+1 \quad \therefore x=-1$$

이때 원의 중심의 좌표는 $(-1, -1)$ 이고 반지름의 길이는

$$|-1|=1$$

(ii) 원의 중심이 두 직선 $y=2x+1$, $y=-x$ 의 교점일 때

두 직선의 방정식을 연립하면

$$-x=2x+1 \quad \therefore x=-\frac{1}{3}$$

이때 원의 중심의 좌표는 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 이고 반지름의 길이는

$$\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 두 원 중 큰 원은 (i)의 경우이므로 구하는 넓이는

$$\pi r^2 = \pi \times 1^2 = \pi$$

043 답 8

원 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$ 의 중심의 좌표는 $(3, -4)$ 이고 반지름의 길이는 3이다.

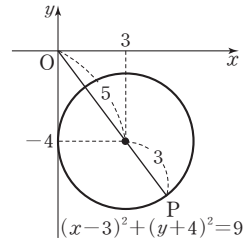
원점 O와 원의 중심 $(3, -4)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

원의 반지름의 길이가 3이므로

선분 OP의 길이의 최댓값은

$$5+3=8$$



044 답 ③

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 31 = 0 \text{에서}$$

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 9$$

이므로 원의 중심의 좌표는

$(6, 2)$ 이고 반지름의 길이는 3이다.

점 A $(-2, -4)$ 와 원의 중심

$(6, 2)$ 사이의 거리는

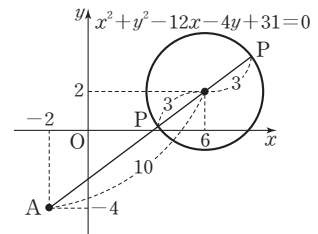
$$\sqrt{(6+2)^2 + (2+4)^2} = 10$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 선분 AP의 길이의

최댓값은 $M=10+3=13$,

최솟값은 $m=10-3=7$

$$\therefore Mm = 13 \times 7 = 91$$



045 답 ①

원 $x^2 + y^2 = 25$ 의 중심은 원점이고 반지름의 길이는 5이다.

점 A $(12, -5)$ 와 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$$

이므로 점 A와 원 위의 점 P 사이

의 거리의

최댓값은 $13+5=18$,

최솟값은 $13-5=8$

이때 선분 AP의 길이가 8, 18인

경우의 점 P는 각각 1개이고,

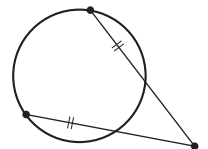
선분 AP의 길이가 9, 10, 11, ..., 17인 경우의 점 P는 각각 2개

이므로 구하는 점 P의 개수는

$$1+2 \times 9+1=20$$

주의 원 밖의 한 점과 원 위의 점 사이의 거리가 최대인 경우와 최소인 경우는 1가지씩만 존재한다.

이를 제외하면 오른쪽 그림과 같이 원 밖의 한 점에서 같은 거리에 있는 원 위의 점은 2개씩 존재하므로 주의한다.



046 답 ①

A $(-1, 3)$, B $(1, 7)$ 에 대하여 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 &= (x+1)^2 + (y-3)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ \overline{PB}^2 &= (x-1)^2 + (y-7)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2x - 14y + 50 \quad \dots\dots \textcircled{8} \\ \textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 } \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 &= 20 \text{에 대입하면} \\ 2x^2 + 2y^2 - 20y + 60 &= 20 \\ x^2 + y^2 - 10y + 20 &= 0 \\ \therefore x^2 + (y-5)^2 &= 5\end{aligned}$$

047 답 ⑤

$$\begin{aligned}\overline{PA} : \overline{PB} &= 2 : 3 \text{에서} \\ 3\overline{PA} &= 2\overline{PB}, \text{ 즉 } 9\overline{PA}^2 = 4\overline{PB}^2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ A(2, 1), B(-3, 1) \text{에 대하여 점 } P \text{의 좌표를 } (x, y) \text{라 하면} \\ \overline{PA}^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 \\ \overline{PB}^2 &= (x+3)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10 \\ \text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \\ 9(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5) &= 4(x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10) \\ 5x^2 + 5y^2 - 60x - 10y + 5 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 12x - 2y + 1 &= 0 \quad \therefore (x-6)^2 + (y-1)^2 = 36 \\ \text{따라서 점 } P \text{가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 } (6, 1) \text{이고 반지름의 길이가 } 6 \text{인 원이므로 구하는 넓이는} \\ \pi r^2 &= 36\pi\end{aligned}$$

품셈 방법 점이 나타내는 도형의 방정식

두 점 A, B에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ 인 점 P가 나타내는 도형의 방정식은 점 P의 좌표를 (x, y) 로 놓은 후 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ 에서 $n\overline{AP} = m\overline{BP}$ 임을 이용한다.

048 답 ④

$$\begin{aligned}\text{점 } A(1, -1) \text{에 대하여 원 위의 점 } P \text{의 좌표를 } (a, b), \text{ 선분 } AP \text{의 중점의 좌표를 } (x, y) \text{라 하면} \\ x = \frac{1+a}{2}, y = \frac{-1+b}{2} \\ \therefore a = 2x-1, b = 2y+1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ \text{한편, } x^2 + y^2 + 2x - 6y - 2 = 0 \text{에서} \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 &= 12 \quad \dots\dots \textcircled{2} \\ \text{이고, 점 } P \text{가 원 } \textcircled{2} \text{ 위의 점이므로} \\ (a+1)^2 + (b-3)^2 &= 12 \\ \text{위의 식에 } \textcircled{1} \text{을 대입하면} \\ (2x-1+1)^2 + (2y+1-3)^2 &= 12 \\ 4x^2 + 4(y-1)^2 &= 12 \quad \therefore x^2 + (y-1)^2 = 3 \\ \text{따라서 선분 } AP \text{의 중점이 나타내는 도형은 중심이 } (0, 1) \text{이고 반지름의 길이가 } \sqrt{3} \text{인 원이므로 구하는 둘레의 길이는} \\ 2\pi \times \sqrt{3} &= 2\sqrt{3}\pi\end{aligned}$$

049 답 <, 서로 다른 두 점에서 만난다.

>, 서로 다른 두 점에서 만난다.

[방법1] 원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 반지름의 길이는 $r=3$ 이다.

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$$d = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2} \quad \therefore d < r$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

[방법2] 직선의 방정식 $x+y-2=0$ 에서

$$y = -x + 2$$

이를 원의 방정식 $x^2 + y^2 = 9$ 에 대입하면

$$x^2 + (-x+2)^2 = 9 \quad \therefore 2x^2 - 4x - 5 = 0$$

이 이차방정식의 판별식 D 에 대하여

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 2 \times (-5) = 14 \text{이므로 } D > 0$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

050 답 (1) 만나지 않는다.

(2) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(3) 한 점에서 만난다.(접한다.)

(4) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(1) 원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-0+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이때 원의 반지름의 길이는 2이므로 $\frac{3\sqrt{2}}{2} > 2$ 이다.

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

(2) 원 $x^2 + (y-3)^2 = 9$ 의 중심 $(0, 3)$ 과 직선 $2x+y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 0 + 3 - 1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이는 3이므로 $\frac{2\sqrt{5}}{5} < 3$ 이다.

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(3) 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$ 의 중심 $(1, 1)$ 과 직선 $x+y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+1-6|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.)

(4) 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 12$ 의 중심 $(-2, 1)$ 과 직선

$$3x+y-5=0 \text{ 사이의 거리는}$$

$$\frac{|3 \times (-2) + 1 - 5|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \sqrt{10}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이므로 $\sqrt{10} < 2\sqrt{3}$ 이다.

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

051 답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 만나지 않는다.

(3) 만나지 않는다.

(4) 한 점에서 만난다.(접한다.)

(1) 직선의 방정식 $y=2x+1$ 을 원의 방정식 $x^2 + y^2 = 4$ 에 대입하면

$$x^2 + (2x+1)^2 = 4 \quad \therefore 5x^2 + 4x - 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 5 \times (-3) = 19 > 0$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

- (2) 직선의 방정식 $y=x+3$ 을 원의 방정식 $(x-4)^2+y^2=16$ 에 대입하면

$$(x-4)^2+(x+3)^2=16 \quad \therefore 2x^2-2x+9=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 2 \times 9 = -17 < 0$$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

- (3) 직선의 방정식 $x+y+1=0$ 에서 $y=-x-1$ 을 원의 방정식 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 에 대입하면

$$(x-2)^2+(-x-1-1)^2=4 \quad \therefore 2x^2+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 0^2 - 2 \times 4 = -8 < 0$$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

- (4) 직선의 방정식 $2x-y-2=0$ 에서 $y=2x-2$ 를 원의 방정식 $(x+3)^2+(y-2)^2=20$ 에 대입하면

$$(x+3)^2+(2x-2-2)^2=20 \quad \therefore 5x^2-10x+5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-5)^2 - 5 \times 5 = 0$$

따라서 원과 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.)

052 답 (1) $-3\sqrt{2} < k < 3\sqrt{2}$

$$(2) k = -3\sqrt{2} \text{ 또는 } k = 3\sqrt{2}$$

$$(3) k < -3\sqrt{2} \text{ 또는 } k > 3\sqrt{2}$$

원 $x^2+y^2=9$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 반지름의 길이는 3이고, 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

- (1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 3$

$$\text{즉, } |k| < 3\sqrt{2} \text{이므로 } -3\sqrt{2} < k < 3\sqrt{2}$$

- (2) 원과 직선이 한 점에서 만나려면, 즉 접하려면 $\frac{|k|}{\sqrt{2}} = 3$

$$\text{즉, } |k| = 3\sqrt{2} \text{이므로 } k = -3\sqrt{2} \text{ 또는 } k = 3\sqrt{2}$$

- (3) 원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{|k|}{\sqrt{2}} > 3$

$$\text{즉, } |k| > 3\sqrt{2} \text{이므로 } k < -3\sqrt{2} \text{ 또는 } k > 3\sqrt{2}$$

다른 풀이

직선의 방정식 $x-y+k=0$, 즉 $y=x+k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=9$ 에 대입하면

$$x^2+(x+k)^2=9 \quad \therefore 2x^2+2kx+k^2-9=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2-9) = -k^2+18$$

- (1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D > 0$

$$\text{즉, } -k^2+18 > 0 \text{이므로 } k^2 < 18$$

$$\therefore -3\sqrt{2} < k < 3\sqrt{2}$$

- (2) 원과 직선이 한 점에서 만나려면, 즉 접하려면 $D=0$

$$\text{즉, } -k^2+18=0 \text{이므로 } k^2=18$$

$$\therefore k = -3\sqrt{2} \text{ 또는 } k = 3\sqrt{2}$$

- (3) 원과 직선이 만나지 않으려면 $D < 0$

$$\text{즉, } -k^2+18 < 0 \text{이므로 } k^2 > 18$$

$$\therefore k < -3\sqrt{2} \text{ 또는 } k > 3\sqrt{2}$$

053 답 (1) $-10 < k < 10$ (2) $-17 < k < 3$

- (1) 원 $x^2+y^2=10$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $3x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times 0 + 0 + k|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{10}} < \sqrt{10}, |k| < 10 \quad \therefore -10 < k < 10$$

- (2) 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=20$ 의 중심 $(3, 2)$ 와 직선

$$x+2y+k=0 \text{ 사이의 거리는}$$

$$\frac{|3+2 \times 2+k|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|k+7|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k+7|}{\sqrt{5}} < 2\sqrt{5}, |k+7| < 10$$

$$-10 < k+7 < 10 \quad \therefore -17 < k < 3$$

다른 풀이

- (1) 직선의 방정식 $3x+y+k=0$ 에서 $y=-3x-k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=10$ 에 대입하면

$$x^2+(-3x-k)^2=10 \quad \therefore 10x^2+6kx+k^2-10=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (3k)^2 - 10(k^2-10) > 0$$

$$-k^2+100 > 0, k^2 < 100 \quad \therefore -10 < k < 10$$

참고 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하는 방법, 이차방정식의 판별식을 이용하는 방법 중 적당한 것을 선택하여 푼다.

(1)은 두 가지 방법 중 어느 것을 선택해도 큰 차이가 없지만, (2)는 연립하여 이차방정식을 세우는 과정이 다소 복잡하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하는 것이 더 편리하다.

054 답 (1) $-4, 4$ (2) $-1, 9$

- (1) 원 $x^2+y^2=8$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, |k| = 4 \quad \therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 4$$

- (2) 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 의 중심 $(-1, 2)$ 와 직선

$$2x-y+k=0 \text{ 사이의 거리는}$$

$$\frac{|2 \times (-1) - 2 + k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k-4|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k-4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, |k-4| = 5$$

따라서 $k-4 = -5$ 또는 $k-4 = 5$ 이므로

$$k = -1 \text{ 또는 } k = 9$$

055 ㉠ (1) $k < -13$ 또는 $k > 13$ (2) $k < -1$ 또는 $k > 7$

(1) 원 $x^2 + y^2 = 13$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $2x + 3y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 0 + 3 \times 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{13}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{13}} > \sqrt{13}, |k| > 13 \quad \therefore k < -13 \text{ 또는 } k > 13$$

(2) 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$ 의 중심 $(-2, 1)$ 과 직선 $x - y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2 - 1 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k-3|}{\sqrt{2}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k-3|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}, |k-3| > 4$$

따라서 $k-3 < -4$ 또는 $k-3 > 4$ 이므로

$$k < -1 \text{ 또는 } k > 7$$

056 ㉠ $\sqrt{14}$

단계1. 선분 OA와 선분 OH의 길이 구하기

선분 OA는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 반지름이므로 그 길이는 $\sqrt{4} = 2$

선분 OH의 길이는 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y = x + 1$, 즉 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{OH} = \frac{|0 + 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

단계2. 피타고라스 정리를 이용하여 선분 AH의 길이 구하기

직각삼각형 OAH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

단계3. 선분 AB의 길이 구하기

삼각형 OAB는 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{AH} = \overline{BH}$

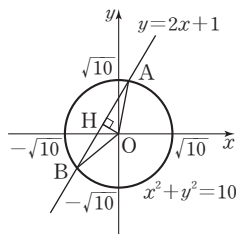
$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times \frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}$$

057 ㉠ (1) $\frac{14\sqrt{5}}{5}$ (2) $2\sqrt{11}$

(1) 오른쪽 그림과 같이 원

$x^2 + y^2 = 10$ 의 중심 $O(0, 0)$ 에서 직선 $y = 2x + 1$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 OH의 길이는 원의 중심과 직선 $y = 2x + 1$, 즉 $2x - y + 1 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{OH} = \frac{|2 \times 0 - 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA} = \sqrt{10}$ 이므로

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times \frac{7\sqrt{5}}{5} = \frac{14\sqrt{5}}{5}$$

(2) 오른쪽 그림과 같이 원

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$$

의 중심을 $C(1, -1)$ 이라 하

고, 점 C에서 직선

$$x + 2y - 4 = 0$$

에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분

CH의 길이는 원의 중심과 직선 $x + 2y - 4 = 0$ 사이의 거리와

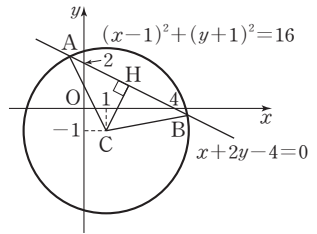
같으므로

$$\overline{CH} = \frac{|1 + 2 \times (-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA} = \sqrt{16} = 4$ 이므로

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{11}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{11}$$



058 ㉠ $3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O를

지나고 직선 $y = x + 6$ 에 수직인 직

선이 원과 만나는 점 중 직선에 가

까운 점을 A, 직선에서 먼 점을 B

라 하면 구하는 거리의 최댓값은 선

분 BH의 길이이고, 최솟값은 선분

AH의 길이이다.

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y = x + 6$, 즉 $x - y + 6 = 0$ 사이의 거리는

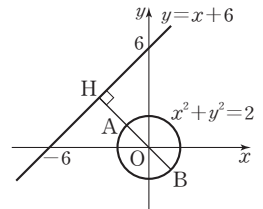
$$\frac{|0 - 0 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 원 $x^2 + y^2 = 2$ 위의 점에서

직선 $y = x + 6$ 에 이르는 거리의

$$\text{최댓값은 } \overline{BH} = \boxed{3\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \boxed{4\sqrt{2}},$$

$$\text{최솟값은 } \overline{AH} = \boxed{3\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$$



059 ㉠ (1) $M = 2\sqrt{2} + 2, m = 2\sqrt{2} - 2$

$$(2) M = \frac{11\sqrt{10}}{5}, m = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$(3) M = 11, m = 3$$

(1) 오른쪽 그림과 같이 원의 중심

O를 지나고 직선

$$x + y + 4 = 0$$

에 수직인 직선이

원과 만나는 점 중 직선에 가

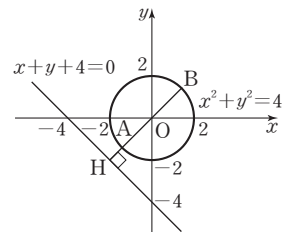
까운 점을 A, 직선에서 먼 점

을 B라 하면 구하는 거리의 최

댓값은 선분 BH의 길이이고, 최솟값은 선분 AH의 길이이다.

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $x + y + 4 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0 - 0 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$



이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 주어진 원 위의 점과 직선 사이의 거리의

$$\text{최대값은 } M = \overline{BH} = 2\sqrt{2} + 2,$$

$$\text{최소값은 } m = \overline{AH} = 2\sqrt{2} - 2$$

(2) 오른쪽 그림과 같이 원의

중심 (2, -1)을 지나고

직선 $3x - y + 5 = 0$ 에 수

직인 직선이 원과 만나는

점 중 직선에 가까운 점

을 A, 직선에서 먼 점을

B라 하면 구하는 거리의

최대값은 선분 BH의 길

이이고, 최소값은 선분 AH의 길이이다.

원의 중심 (2, -1)과 직선 $3x - y + 5 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times 2 - (-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 주어진 원 위의 점과 직선 사이의 거리의

$$\text{최대값은 } M = \overline{BH} = \frac{6\sqrt{10}}{5} + \sqrt{10} = \frac{11\sqrt{10}}{5},$$

$$\text{최소값은 } m = \overline{AH} = \frac{6\sqrt{10}}{5} - \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

(3) 오른쪽 그림과 같이 원의

중심 (-3, 2)를 지나고

직선 $4x - 3y - 17 = 0$ 에

수직인 직선이 원과 만나

는 점 중 직선에 가까운 점

을 A, 직선에서 먼 점을 B

라 하면 구하는 거리의 최

대값은 선분 BH의 길이이고, 최소값은 선분 AH의 길이이다.

원의 중심 (-3, 2)와 직선 $4x - 3y - 17 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4 \times (-3) - 3 \times 2 - 17|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 7$$

이때 원의 반지름의 길이가 4이므로 주어진 원 위의 점과 직선 사이의 거리의

$$\text{최대값은 } M = \overline{BH} = 7 + 4 = 11,$$

$$\text{최소값은 } m = \overline{AH} = 7 - 4 = 3$$

060 답 (1) $2x - 2y - 5 = 0$

$$(2) 3x + y - 3 = 0$$

$$(3) 2x - 3y - 1 = 0$$

$$(4) 2x - 2y + 11 = 0$$

(1) 두 원 $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 4) - (x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1) = 0$$

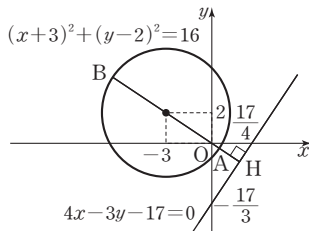
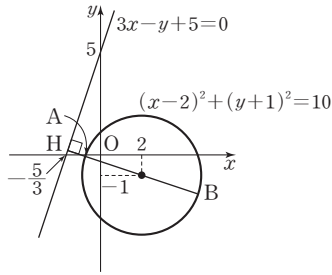
$$\therefore 2x - 2y - 5 = 0$$

(2) 두 원 $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - x - y = 0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x^2 + y^2 + 2x - 3) - (x^2 + y^2 - x - y) = 0$$

$$\therefore 3x + y - 3 = 0$$

(3) 두 원 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - y - 3 = 0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은



$$(x^2 + y^2 - 4x + 2y - 2) - (x^2 + y^2 - 2x - y - 3) = 0$$

$$-2x + 3y + 1 = 0 \quad \therefore 2x - 3y - 1 = 0$$

$$(4) (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4 \text{에서 } x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$$

$$x^2 + (y-2)^2 = 9 \text{에서 } x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$$

즉, 이 두 원의 두 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6) - (x^2 + y^2 - 4y - 5) = 0$$

$$\therefore 2x - 2y + 11 = 0$$

참고 (4)처럼 원의 방정식이 표준형으로 주어진다면 일반형으로 변형하여 풀면 된다.

061 답 풀이 참조

오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심을

각각 O, O'이라 하고, 두 원의 교점

을 각각 A, B라 하자.

$\overline{OO'}$ 과 $\overline{AB}$ 의 교점을 C라 할 때 두

원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 9 - (x^2 + y^2 - 3x - 4y + 1) = 0$$

$$\therefore 3x + 4y - 10 = 0$$

..... ㉠

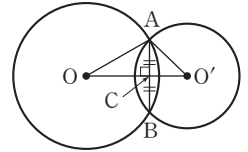
원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 중심 O(0, 0)에서 공통현 ㉠까지의 거리는

$$\overline{OC} = \frac{|0 + 0 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

직각삼각형 OCA에서 $\overline{OA} = 3$, $\overline{OC} = 2$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AC} = 2\sqrt{5}$$



062 답 ⑤

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 10$$

이 원의 중심 (-2, 3)과 직선 $y = 3x + k$, 즉 $3x - y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times (-2) - 3 + k|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|k-9|}{\sqrt{10}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k-9|}{\sqrt{10}} < \sqrt{10}, \quad |k-9| < 10$$

$$-10 < k - 9 < 10$$

$$\therefore -1 < k < 19$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 0, 1, 2, ..., 18의 19개이다.

063 답 ③

원 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 의 중심 (1, 0)과 직선

$x + y + 3 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1 + 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$r > 2\sqrt{2}$$

$2 < 2\sqrt{2} < 3$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 r의 최솟값은 3이다.

다른 풀이

직선의 방정식 $x+y+3=0$ 에서 $y=-x-3$ 을 원의 방정식

$(x-1)^2+y^2=r^2$ 에 대입하면

$$(x-1)^2+(-x-3)^2=r^2$$

$$\therefore 2x^2+4x+10-r^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=2^2-2(10-r^2)>0$$

$$-16+2r^2>0, r^2>8 \quad \therefore r<-2\sqrt{2} \text{ 또는 } r>2\sqrt{2}$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 r 의 최솟값은 3이다.

064 답 33

원 $(x+1)^2+(y+a)^2=100$ 의 중심 $(-1, -a)$ 와 직선

$4x-3y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4 \times (-1) - 3 \times (-a) + 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|3a-1|}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 10이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|3a-1|}{5} < 10, |3a-1| < 50$$

$$-50 < 3a-1 < 50, -49 < 3a < 51$$

$$\therefore -\frac{49}{3} < a < 17$$

따라서 정수 a 는 $-16, -15, -14, -13, \dots, 16$ 의 33개이다.

065 답 ③

원 $(x-4)^2+(y-1)^2=r^2$ 의 중심 $(4, 1)$ 과 직선 $3x+4y-1=0$

사이의 거리는

$$\frac{|3 \times 4 + 4 \times 1 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

이때 원과 직선이 접하려면 원의 반지름의 길이와 같아야 한다.

따라서 양수 r 의 값은

$$r=3$$

066 답 1

넓이가 8π 인 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$r^2=8 \quad \therefore r=2\sqrt{2} (\because r>0)$$

원의 중심 $(2, -1)$ 과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|2-(-1)+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}, |k+3|=4$$

즉, $k+3=-4$ 또는 $k+3=4$ 이므로

$$k=-7 \text{ 또는 } k=1$$

따라서 양수 k 의 값은 1이다.

067 답 ②

원의 중심 $(-4, -5)$ 와 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4 \times (-4) - 3 \times (-5) + k|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|k-1|}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $|-5|=5$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k-1|}{5}=5, |k-1|=25$$

즉, $k-1=-25$ 또는 $k-1=25$ 이므로

$$k=-24 \text{ 또는 } k=26$$

따라서 양수 k 의 값은 26이다.

068 답 ②

원 $x^2+y^2=5$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y=-2x+k$, 즉

$2x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 0 + 0 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}, |k| > 5 \quad \therefore k < -5 \text{ 또는 } k > 5$$

다른 풀이

직선의 방정식 $y=-2x+k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=5$ 에 대입하면

$$x^2+(-2x+k)^2=5$$

$$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, 원과 직선이 만나지 않으려면 $D<0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)<0$$

$$-k^2+25<0, k^2>25 \quad \therefore k<-5 \text{ 또는 } k>5$$

069 답 1

원 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 중심 $(1, 0)$ 과 직선 $mx+y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|m \times 1 + 0 - 3|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = \frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}} > 1$$

즉, $|m-3| > \sqrt{m^2+1}$ 이므로 양변을 제곱하면

$$(m-3)^2 > m^2+1, -6m+8 > 0 \quad \therefore m < \frac{4}{3}$$

따라서 정수 m 의 최댓값은 1이다.

다른 풀이

직선의 방정식 $mx+y-3=0$ 에서 $y=-mx+3$ 을 원의 방정식

$(x-1)^2+y^2=1$ 에 대입하면

$$(x-1)^2+(-mx+3)^2=1$$

$$\therefore (1+m^2)x^2-2(1+3m)x+9=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, 원과 직선이 만나지 않으려면 $D<0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=\{-(1+3m)\}^2-9(1+m^2)<0$$

$$-8+6m<0 \quad \therefore m<\frac{4}{3}$$

따라서 정수 m 의 최댓값은 1이다.

070 답 ②

두 점 $A(-2, 1)$, $B(4, 3)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 AB 의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right), \text{ 즉 } (1, 2)$$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(4+2)^2 + (3-1)^2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} = \sqrt{10}$$

원의 중심 (1, 2)와 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times 1 - 2 + k|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|k+1|}{\sqrt{10}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k+1|}{\sqrt{10}} > \sqrt{10}, |k+1| > 10$$

즉, $k+1 < -10$ 또는 $k+1 > 10$ 에서

$k < -11$ 또는 $k > 9$

..... ㉠

따라서 ㉠을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 10이다.

071 답 ①

오른쪽 그림과 같이 원

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$$

중심을 C(2, -2)라 하고,

점 C에서 직선

$$x-2y-11=0$$

에 내린 수선의

발을 H라 하면 선분 CH

의 길이는 원의 중심과 직선 $x-2y-11=0$ 사이의 거리와 같으

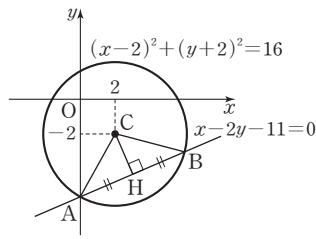
므로

$$\overline{CH} = \frac{|2 - 2 \times (-2) - 11|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA} = \sqrt{16} = 4$ 이므로

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{11}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{11}$$



072 답 1

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0 \text{에서 } (x-3)^2 + (y-1)^2 = 10 - k$$

오른쪽 그림과 같이 이 원의

중심을 C(3, 1)이라 하고, 점

C에서 직선 $y=2x$ 에 내린 수

선의 발을 H라 하면 점 H는

선분 AB의 중점이다.

선분 AB의 길이가 4이므로

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

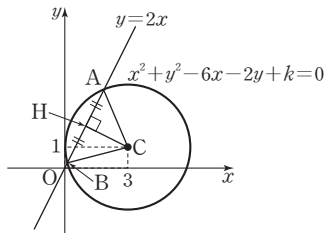
또, 선분 CH의 길이는 원의 중심과 직선 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH} = \frac{|2 \times 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2$ 이고

$$\overline{CA} = \sqrt{10-k} \text{이므로}$$

$$10-k = (\sqrt{5})^2 + 2^2 = 9 \quad \therefore k=1$$



073 답 ④

$$x^2 + y^2 + 8x = 0 \text{에서 } (x+4)^2 + y^2 = 16$$

오른쪽 그림과 같이 이 원의 중심을 C(-4, 0)이라 하고, 점 C에서 직선 $x-y+2=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 원의 중심과 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로

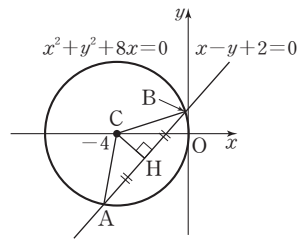
$$\overline{CH} = \frac{|-4 - 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA} = \sqrt{16} = 4$ 이므로

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{14}$$

따라서 원과 직선의 두 교점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 선분 AB가 지름, 즉 반지름이 선분 AH인 원이므로 구하는 원의 넓이는

$$\pi r^2 = \pi \times (\sqrt{14})^2 = 14\pi$$



074 답 ③

원 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = r^2$ 의 중심을 C라 하면 C(2, 4)

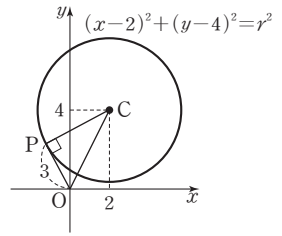
$$\therefore \overline{OC} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$\overline{OP} = 3$ 이므로 직각삼각형 OCP

에서

$$\overline{PC} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 3^2} = \sqrt{11}$$

$$\therefore r = \sqrt{11} \quad (\because r > 0)$$



075 답 ④

원 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$ 의

중심을 C라 하면 C(-1, 1)

P(5, 2)에 대하여

$$\overline{PC} = \sqrt{(-1-5)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{37}$$

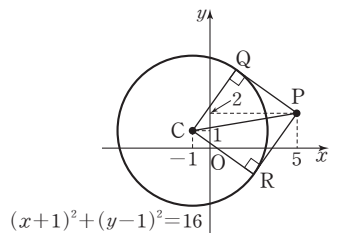
원의 반지름의 길이가

$\overline{CQ} = 4$ 이므로 직각삼각형 CPQ에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{(\sqrt{37})^2 - 4^2} = \sqrt{21}$$

이때 $\overline{PQ} = \overline{PR} = \sqrt{21}$ 이므로

$$\overline{PQ} + \overline{PR} = 2\sqrt{21}$$



076 답 3

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 8 = 0$$

에서

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 16$$

이 원의 중심을 C라 하면

C(-2, 2)

원의 반지름의 길이가 4

이므로 $\overline{CQ} = 4$

또, $\overline{PQ} = \sqrt{13}$ 이므로 직각삼각형 CPQ에서

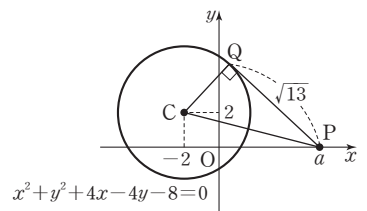
$$\overline{PC} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{13})^2} = \sqrt{29}$$

..... ㉠

한편, P(a, 0), C(-2, 2)이므로

$$\overline{PC} = \sqrt{(-2-a)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{a^2 + 4a + 8}$$

..... ㉡

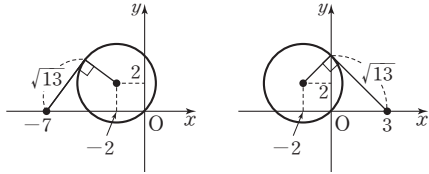


㉠, ㉡에서 $\sqrt{a^2+4a+8}=\sqrt{29}$

$a^2+4a+8=29, a^2+4a-21=0$

$(a+7)(a-3)=0 \quad \therefore a=3 (\because a>0)$

참고 a가 양수라는 조건이 없다면 다음 그림과 같이 두 가지 경우가 존재한다.



077 답 40

원 $(x-3)^2+(y+4)^2=5$ 의

중심 (3, -4)와 직선

$x-2y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-2 \times (-4)+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=3\sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가

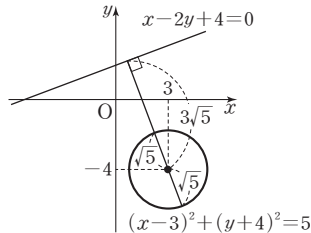
$\sqrt{5}$ 이므로 주어진 원 위의 점

과 직선 사이의 거리의

최댓값은 $M=3\sqrt{5}+\sqrt{5}=4\sqrt{5}$,

최솟값은 $m=3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

$\therefore Mm=4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}=40$



078 답 ②

원 $x^2+y^2=9$ 의 중심 (0, 0)과 직선 $4x+3y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0+0+k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|k|}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이고 원 위의 점과 직선 사이의 거리

의 최댓값이 5이므로

$$\frac{|k|}{5}+3=5, |k|=10 \quad \therefore k=10 (\because k>0)$$

079 답 ⑤

원 $x^2+(y-3)^2=9$ 의 중심 (0, 3)과 직선 $4x+3y+20=0$ 사이의

거리는

$$\frac{|4 \times 0 + 3 \times 3 + 20|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{29}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의

거리를 d라 하면

$$\frac{29}{5}-3 \leq d \leq \frac{29}{5}+3 \quad \therefore \frac{14}{5} \leq d \leq \frac{44}{5}$$

따라서 자연수 d는 3, 4, 5, 6, 7, 8이고 점 P는 각각 2개씩 존재

하므로 구하는 점 P의 개수는

$$2 \times 6 = 12$$

080 답 -4

두 원 $x^2+y^2-2x-6=0, x^2+y^2+4x-2y=0$ 의 교점을 지나는

직선의 방정식은

$$(x^2+y^2-2x-6)-(x^2+y^2+4x-2y)=0$$

$$-6x+2y-6=0 \quad \therefore 3x-y+3=0$$

이 직선이 점 (a, 2a-1)을 지나므로

$$3a-(2a-1)+3=0 \quad \therefore a=-4$$

081 답 1

$$(x-2)^2+(y-a)^2=4 \text{에서 } x^2+y^2-4x-2ay+a^2=0$$

두 원 $x^2+y^2+2x+2y-4=0, x^2+y^2-4x-2ay+a^2=0$ 의 교

점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x^2+y^2+2x+2y-4)-(x^2+y^2-4x-2ay+a^2)=0$$

$$\therefore 6x+2(1+a)y-4-a^2=0$$

이 직선이 직선 $2x-3y+5=0$ 과 수직이므로

$$6 \times 2 + 2(1+a) \times (-3) = 0$$

$$12-6-6a=0 \quad \therefore a=1$$

참고 두 직선 $ax+by+c=0$ 과 $a'x+b'y+c'=0$ 이 수직이면

$$aa'+bb'=0$$

082 답 ②

두 원 $x^2+y^2+x+y-3=0, x^2+y^2-3x-y-5=0$ 의 교점을

지나는 직선의 방정식은

$$(x^2+y^2+x+y-3)-(x^2+y^2-3x-y-5)=0$$

$$4x+2y+2=0 \quad \therefore y=-2x-1$$

따라서 기울기가 -2이고 점 (2, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=-2(x-2) \quad \therefore y=-2x+6$$

즉, $a=-2, b=6$ 이므로

$$a+b=-2+6=4$$

083 답 ⑤

원 $x^2+(y-2)^2=4$ 의 중심은 A(0, 2), 반지름의 길이는 2이고

원의 방정식의 일반형은

$$x^2+y^2-4y=0$$

원 $x^2+(y-1)^2=3$ 의 중심은 B(0, 1), 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ 이고

원의 방정식의 일반형은

$$x^2+y^2-2y-2=0$$

ㄱ. 직선 PQ는 두 원의 교점을 지나는 직선이므로 그 방정식은

$$(x^2+y^2-4y)-(x^2+y^2-2y-2)=0$$

$$-2y+2=0 \quad \therefore y=1$$

ㄴ. A(0, 2), B(0, 1)이므로 $\overline{AB}=1$

ㄷ. 점 A에서 직선 PQ에 내린 수선

의 발은 점 B와 일치하므로 삼각

형 APB는 직각삼각형이고

$$\overline{PB}=\overline{QB} \text{이다.}$$

이때 $\overline{AB}=1, \overline{AP}=2$ 이므로

피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{PB}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PB}=2\sqrt{3}$$

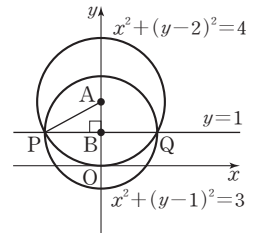
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

다른풀이

ㄷ. 점 B는 원 $x^2+(y-1)^2=3$ 의 중심이므로 ㄱ에 의하여 선분

PQ는 이 원의 지름이다.

$$\therefore \overline{PQ}=2\sqrt{3}$$



084 답 $2\sqrt{5}$

원 $x^2+y^2=7$ 의 중심은 O(0, 0), 반지름의 길이는 $\sqrt{7}$ 이고 원의

방정식의 일반형은

$$x^2 + y^2 - 7 = 0$$

원 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$ 의 중심을 C라 하면 $C(3, 3)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이고 원의 방정식의 일반형은

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 5 = 0$$

직선 PQ의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 7) - (x^2 + y^2 - 6x - 6y + 5) = 0$$

$$6x + 6y - 12 = 0 \quad \therefore x + y - 2 = 0$$

점 C에서 직선 PQ에 내린 수

선의 발을 H라 하면 선분 CH

의 길이는 점 C와 직선

$x + y - 2 = 0$ 사이의 거리와

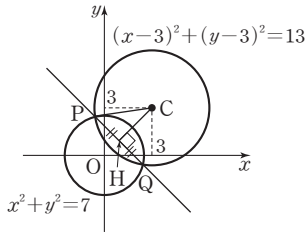
같으므로

$$\overline{CH} = \frac{|3+3-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$$

이때 $\overline{CP} = \sqrt{13}$ 이므로 직각삼각형 CPH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = 2\sqrt{5}$$



085 답 $\sqrt{7}$

원 $(x+1)^2 + y^2 = 4$ 의 중심을 A라 하면 $A(-1, 0)$, 반지름의 길이는 2이고 원의 방정식의 일반형은

$$x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$$

원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$ 의 중심을 B라 하면 $B(1, 2)$, 반지름의 길이는 4이고 원의 방정식의 일반형은

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$$

직선 PQ의 방정식은

$$(x^2 + y^2 + 2x - 3) - (x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11) = 0$$

$$4x + 4y + 8 = 0 \quad \therefore x + y + 2 = 0$$

점 B에서 직선 PQ에

내린 수선의 발을 H라

하면 선분 BH의 길이

는 점 B와 직선

$x + y + 2 = 0$ 사이의 거

리와 같으므로

$$\begin{aligned} \overline{BH} &= \frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

이때 $\overline{BP} = 4$ 이므로 직각삼각형 BPH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

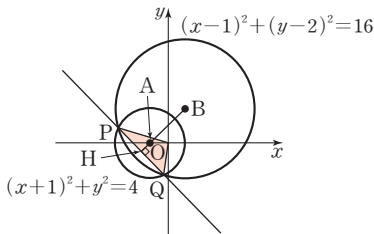
$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = \sqrt{14}$$

삼각형 OPQ에서 선분 PQ를 밑변으로 정하면 높이는 원점과 직선 $x + y + 2 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times \sqrt{2} = \sqrt{7}$$



086 답 (1) $y = -x \pm \sqrt{2}$

(2) $y = 2x \pm 5$

(3) $y = -3x \pm 3\sqrt{10}$

(4) $y = -2x \pm 4\sqrt{5}$

(1) 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x \pm \sqrt{(-1)^2 + 1} \quad \therefore y = -x \pm \sqrt{2}$$

(2) 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{5 \cdot \sqrt{2^2 + 1}} \quad \therefore y = 2x \pm 5$$

(3) 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 -3 인 직선의 방정식은

$$y = -3x \pm 3\sqrt{(-3)^2 + 1} \quad \therefore y = -3x \pm 3\sqrt{10}$$

(4) 원 $x^2 + y^2 = 16$ 에 접하고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y = -2x \pm 4\sqrt{(-2)^2 + 1} \quad \therefore y = -2x \pm 4\sqrt{5}$$

087 답 (1) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

(2) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

(3) $y = \frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$

(4) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$

(1) 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x + 2y = 5 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

(2) 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x + 3y = 10 \quad \therefore y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$$

(3) 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(-3, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-3x + 2y = 13 \quad \therefore y = \frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$$

(4) 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(-3, -4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-3x - 4y = 25 \quad \therefore y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$

088 답 $-\sqrt{7}x + 4, \sqrt{7}x + 4, \sqrt{2}, 0$

[방법1] 원 $x^2 + y^2 = 2$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 2$$

..... ㉠

㉠이 점 $P(0, 4)$ 를 지나므로

$$x_1 \times 0 + y_1 \times 4 = 2 \quad \therefore y_1 = \frac{1}{2}$$

점 (x_1, y_1) , 즉 점 $(x_1, \frac{1}{2})$ 이 원 $x^2 + y^2 = 2$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2, \quad x_1^2 = \frac{7}{4} \quad \therefore x_1 = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

점 $P(0, 4)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 그은 접선의 접점의 좌표는

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ 또는 } \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

이므로 ㉠에서 구하는 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{7}}{2}x + \frac{1}{2}y = 2 \text{ 또는 } -\frac{\sqrt{7}}{2}x + \frac{1}{2}y = 2$$

$$\therefore y = -\sqrt{7}x + 4 \text{ 또는 } y = \sqrt{7}x + 4$$

[방법2] 점 $P(0, 4)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = mx + 4 \quad \therefore mx - y + 4 = 0$$

..... ㉡

원 $x^2 + y^2 = 2$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.

원의 중심에서 접선 $mx - y + 4 = 0$ 까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$$\frac{|0-0+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}, \quad \sqrt{m^2+1} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } m^2 + 1 = 8, \quad m^2 = 7 \quad \therefore m = \pm\sqrt{7}$$

따라서 ㉠에서 구하는 접선의 방정식은

$$\sqrt{7}x - y + 4 = 0 \text{ 또는 } -\sqrt{7}x - y + 4 = 0$$

$$\therefore y = \sqrt{7}x + 4 \text{ 또는 } y = -\sqrt{7}x + 4$$

[방법3] ㉠의 직선의 방정식 $y = mx + 4$ 를 $x^2 + y^2 = 2$ 에 대입하면

$$x^2 + (mx + 4)^2 = 2$$

$$\therefore (m^2 + 1)x^2 + 8mx + 14 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = \boxed{0}$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (4m)^2 - 14(m^2 + 1) = 0, 2m^2 - 14 = 0$$

$$m^2 = 7 \quad \therefore m = \pm\sqrt{7}$$

따라서 ㉠에서 구하는 접선의 방정식은

$$\sqrt{7}x - y + 4 = 0 \text{ 또는 } -\sqrt{7}x - y + 4 = 0$$

$$\therefore y = \sqrt{7}x + 4 \text{ 또는 } y = -\sqrt{7}x + 4$$

089 **답** (1) $2x + \sqrt{5}y = 6$ 또는 $2x - \sqrt{5}y = 6$

$$(2) x + \sqrt{3}y = 2 \text{ 또는 } x - \sqrt{3}y = 2$$

$$(3) 4x + 3y = 15 \text{ 또는 } 4x - 3y = -15$$

$$(4) x - y = 6 \text{ 또는 } x + y = -6$$

$$(5) 3x + y = -10 \text{ 또는 } x - 3y = -10$$

(1) 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠이 점 $P(3, 0)$ 을 지나므로

$$x_1 \times 3 + y_1 \times 0 = 4 \quad \therefore x_1 = \frac{4}{3}$$

점 (x_1, y_1) , 즉 점 $(\frac{4}{3}, y_1)$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 + y_1^2 = 4, y_1^2 = \frac{20}{9} \quad \therefore y_1 = \pm \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

따라서 접점의 좌표는 $(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3})$ 또는 $(\frac{4}{3}, -\frac{2\sqrt{5}}{3})$ 이므로

㉠에서 구하는 접선의 방정식은

$$\frac{4}{3}x + \frac{2\sqrt{5}}{3}y = 4 \text{ 또는 } \frac{4}{3}x - \frac{2\sqrt{5}}{3}y = 4$$

$$\therefore 2x + \sqrt{5}y = 6 \text{ 또는 } 2x - \sqrt{5}y = 6$$

(2) 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠이 점 $P(2, 0)$ 을 지나므로

$$x_1 \times 2 + y_1 \times 0 = 1 \quad \therefore x_1 = \frac{1}{2}$$

점 (x_1, y_1) , 즉 점 $(\frac{1}{2}, y_1)$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y_1^2 = 1, y_1^2 = \frac{3}{4} \quad \therefore y_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 접점의 좌표는 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 또는 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로

㉠에서 구하는 접선의 방정식은

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 \text{ 또는 } \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$$

$$\therefore x + \sqrt{3}y = 2 \text{ 또는 } x - \sqrt{3}y = 2$$

(3) 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠이 점 $P(0, 5)$ 를 지나므로

$$x_1 \times 0 + y_1 \times 5 = 9 \quad \therefore y_1 = \frac{9}{5}$$

점 (x_1, y_1) , 즉 점 $(x_1, \frac{9}{5})$ 가 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2 = 9, x_1^2 = \frac{144}{25} \quad \therefore x_1 = \pm \frac{12}{5}$$

따라서 접점의 좌표는 $(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$ 또는 $(-\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$ 이므로

㉠에서 구하는 접선의 방정식은

$$\frac{12}{5}x + \frac{9}{5}y = 9 \text{ 또는 } -\frac{12}{5}x + \frac{9}{5}y = 9$$

$$\therefore 4x + 3y = 15 \text{ 또는 } 4x - 3y = -15$$

(4) 원 $x^2 + y^2 = 18$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠이 점 $P(0, -6)$ 을 지나므로

$$x_1 \times 0 + y_1 \times (-6) = 18 \quad \therefore y_1 = -3$$

점 (x_1, y_1) , 즉 점 $(x_1, -3)$ 이 원 $x^2 + y^2 = 18$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + (-3)^2 = 18, x_1^2 = 9 \quad \therefore x_1 = \pm 3$$

따라서 접점의 좌표는 $(3, -3)$ 또는 $(-3, -3)$ 이므로

㉠에서 구하는 접선의 방정식은

$$3x - 3y = 18 \text{ 또는 } -3x - 3y = 18$$

$$\therefore x - y = 6 \text{ 또는 } x + y = -6$$

(5) 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠이 점 $P(-4, 2)$ 를 지나므로

$$x_1 \times (-4) + y_1 \times 2 = 10, -4x_1 + 2y_1 = 10$$

$$\therefore y_1 = 2x_1 + 5$$

점 (x_1, y_1) , 즉 점 $(x_1, 2x_1 + 5)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + (2x_1 + 5)^2 = 10, 5x_1^2 + 20x_1 + 15 = 0$$

$$x_1^2 + 4x_1 + 3 = 0, (x_1 + 1)(x_1 + 3) = 0$$

$$\therefore x_1 = -3 \text{ 또는 } x_1 = -1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-3, -1)$ 또는 $(-1, 3)$ 이므로

㉠에서 구하는 접선의 방정식은

$$-3x - y = 10 \text{ 또는 } -x + 3y = 10$$

$$\therefore 3x + y = -10 \text{ 또는 } x - 3y = -10$$

다른 풀이 1

(1) 점 $P(3, 0)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y - 0 = m(x - 3) \quad \therefore mx - y - 3m = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$ 이고 반지름의 길이는 2이다.

원의 중심에서 접선 $mx - y - 3m = 0$ 까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$$\frac{|0 - 0 - 3m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2, |-3m| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2 = 4m^2 + 4, m^2 = \frac{4}{5} \quad \therefore m = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

따라서 접선의 기울기는 $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 또는 $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ 이므로 ㉠에서 구하는

는 접선의 방정식은

$$\frac{2}{\sqrt{5}}x - y - \frac{6}{\sqrt{5}} = 0 \text{ 또는 } -\frac{2}{\sqrt{5}}x - y + \frac{6}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\therefore 2x - \sqrt{5}y = 6 \text{ 또는 } 2x + \sqrt{5}y = 6$$

- (2) 점 P(2, 0)을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은
 $y-0=m(x-2) \quad \therefore mx-y-2m=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 원 $x^2+y^2=1$ 의 중심의 좌표는 (0, 0)이고 반지름의 길이는 1이다.
 원의 중심에서 접선 $mx-y-2m=0$ 까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로
 $\frac{|0-0-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, | -2m|=\sqrt{m^2+1}$
 양변을 제곱하면
 $4m^2=m^2+1, m^2=\frac{1}{3}$
 $\therefore m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
 따라서 접선의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 접선의 방정식은
 $\frac{\sqrt{3}}{3}x-y-\frac{2\sqrt{3}}{3}=0$ 또는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}x-y+\frac{2\sqrt{3}}{3}=0$
 $\therefore x-\sqrt{3}y=2$ 또는 $x+\sqrt{3}y=2$
- (3) 점 P(0, 5)를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은
 $y=mx+5 \quad \therefore mx-y+5=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 원 $x^2+y^2=9$ 의 중심의 좌표는 (0, 0)이고 반지름의 길이는 3이다.
 원의 중심에서 접선 $mx-y+5=0$ 까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로
 $\frac{|0-0+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3, 3\sqrt{m^2+1}=5$
 양변을 제곱하면
 $9m^2+9=25, m^2=\frac{16}{9}$
 $\therefore m=\pm\frac{4}{3}$
 따라서 접선의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 또는 $-\frac{4}{3}$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 접선의 방정식은
 $\frac{4}{3}x-y+5=0$ 또는 $-\frac{4}{3}x-y+5=0$
 $\therefore 4x-3y=-15$ 또는 $4x+3y=15$
- (4) 점 P(0, -6)을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은
 $y=mx-6 \quad \therefore mx-y-6=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 원 $x^2+y^2=18$ 의 중심의 좌표는 (0, 0)이고 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$ 이다.
 원의 중심에서 접선 $mx-y-6=0$ 까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로
 $\frac{|0-0-6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}, 6=3\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$
 양변을 제곱하면
 $36=18m^2+18, m^2=1$
 $\therefore m=\pm 1$
 따라서 접선의 기울기는 1 또는 -1이므로 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 접선의 방정식은
 $x-y-6=0$ 또는 $-x-y-6=0$
 $\therefore x-y=6$ 또는 $x+y=-6$

- (5) 점 P(-4, 2)를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은
 $y-2=m\{x-(-4)\} \quad \therefore mx-y+4m+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 원 $x^2+y^2=10$ 의 중심의 좌표는 (0, 0)이고 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이다.
 원의 중심에서 접선 $mx-y+4m+2=0$ 까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로
 $\frac{|0-0+4m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}, |4m+2|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$
 양변을 제곱하면
 $16m^2+16m+4=10m^2+10, 6m^2+16m-6=0$
 $3m^2+8m-3=0, (3m-1)(m+3)=0$
 $\therefore m=\frac{1}{3}$ 또는 $m=-3$
 따라서 접선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 또는 -3이므로 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 접선의 방정식은
 $\frac{1}{3}x-y+\frac{10}{3}=0$ 또는 $-3x-y-10=0$
 $\therefore x-3y=-10$ 또는 $3x+y=-10$

다른 풀이 2

- (3) 점 P(0, 5)를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은
 $y=mx+5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 이를 $x^2+y^2=9$ 에 대입하면
 $x^2+(mx+5)^2=9$
 $\therefore (m^2+1)x^2+10mx+16=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4}=(5m)^2-16(m^2+1)=0$
 $9m^2=16, m^2=\frac{16}{9} \quad \therefore m=\pm\frac{4}{3}$
 따라서 접선의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 또는 $-\frac{4}{3}$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 접선의 방정식은
 $y=\frac{4}{3}x+5$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x+5$
 $\therefore 4x-3y=-15$ 또는 $4x+3y=15$

참고 판별식을 이용하는 방법은 식이 복잡하면 시간이 더 오래 걸리므로 접점의 좌표를 이용하는 방법이나 접선과 원의 중심 사이의 거리를 이용하는 방법으로 구해도 충분하다.

090 답 ④

- 원 $x^2+y^2=8$ 에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은
 $y=-x\pm 2\sqrt{2}\sqrt{(-1)^2+1} \quad \therefore y=-x\pm 4$
 따라서 y 절편이 양수인 접선의 방정식은
 $y=-x+4$

091 답 ③

- 직선 $x-3y+3=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+1$ 에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면
 $m \times \frac{1}{3} = -1 \quad \therefore m = -3$
 따라서 기울기가 -3이고 원 $x^2+y^2=10$ 에 접하는 직선의 방정식은

$$y = -3x \pm \sqrt{10} \sqrt{(-3)^2 + 1}$$

$$\therefore y = -3x \pm 10$$

092 답 20

직선 $2x - y + 5 = 0$, 즉 $y = 2x + 5$ 와 평행한 직선의 기울기는 2이다.
 즉, 기울기가 2이고 원 $x^2 + y^2 = 20$ 에 접하는 직선의 방정식은
 $y = 2x \pm 2\sqrt{5} \sqrt{2^2 + 1} \quad \therefore y = 2x \pm 10$
 따라서 접선이 y 축과 만나는 두 점 A, B는
 A(0, 10), B(0, -10) 또는 A(0, -10), B(0, 10)
 이므로 선분 AB의 길이는
 $10 - (-10) = 20$

093 답 1

원 $x^2 + y^2 = 18$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식은
 $y = mx \pm 3\sqrt{2} \sqrt{m^2 + 1}$
 이 직선이 점 $(-1, 5)$ 를 지나므로
 $5 = -m \pm 3\sqrt{2} \sqrt{m^2 + 1}, \pm 3\sqrt{2} \sqrt{m^2 + 1} = m + 5$
 양변을 제곱하면
 $18(m^2 + 1) = m^2 + 10m + 25$
 $17m^2 - 10m - 7 = 0, (17m + 7)(m - 1) = 0$
 $\therefore m = 1 (\because m > 0)$

094 답 37

원 $x^2 + y^2 = 18$ 위의 점 $(3, 3)$ 에서의 접선의 방정식은
 $3x + 3y = 18 \quad \therefore y = -x + 6$
 따라서 $a = -1, b = 6$ 이므로
 $a^2 + b^2 = (-1)^2 + 6^2 = 37$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을
 C(0, 0), 원 위의 점을 P(3, 3)이
 라 하자.

선분 CP의 기울기는 $\frac{3-0}{3-0} = 1$ 이

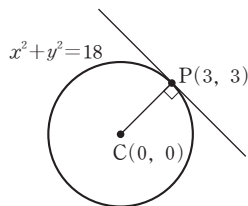
고, 구하는 접선의 기울기는 선분
 CP와 수직이므로 -1 이다.

기울기가 -1 이고 점 $(3, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = -(x - 3) \quad \therefore y = -x + 6$$

따라서 $a = -1, b = 6$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (-1)^2 + 6^2 = 37$$



095 답 ②

원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(-4, 3)$ 에서의 접선의 방정식은
 $-4x + 3y = 25 \quad \therefore 4x - 3y = -25$
 이 직선이 점 $(a, 4a + 3)$ 을 지나므로
 $4a - 3(4a + 3) = -25$
 $-8a - 9 = -25, 8a = 16 \quad \therefore a = 2$

096 답 ③

원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(-2, -3)$ 에서의 접선의 방정식은
 $-2x - 3y = 13 \quad \therefore 2x + 3y + 13 = 0$

이 직선이 직선 $ax + 2y - 3 = 0$ 과 수직이므로
 $2 \times a + 3 \times 2 = 0, 2a + 6 = 0 \quad \therefore a = -3$

097 답 35

원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1, -2)$ 에서의 접선의 방정식은
 $x - 2y = 5 \quad \therefore x - 2y - 5 = 0$

한편, $x^2 + y^2 - 12x + 4y + k = 0$ 에서

$$(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 40 - k$$

이 원의 중심의 좌표는 $(6, -2)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{40 - k}$ 이다.
 원의 중심에서 직선까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야
 하므로

$$\frac{|6 - 2 \times (-2) - 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{40 - k}, \sqrt{5} = \sqrt{40 - k}$$

$$5 = 40 - k \quad \therefore k = 35$$

098 답 ①

원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1 x + y_1 y = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로

$$0 \times x_1 - 3y_1 = 1 \quad \therefore y_1 = -\frac{1}{3}$$

점 (x_1, y_1) , 즉 점 $(x_1, -\frac{1}{3})$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1, x_1^2 = \frac{8}{9} \quad \therefore x_1 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 점접의 좌표는 $(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ 또는 $(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ 이므

로 ㉠에서 접선의 방정식은

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}x - \frac{1}{3}y = 1 \text{ 또는 } -\frac{2\sqrt{2}}{3}x - \frac{1}{3}y = 1$$

$$\therefore y = 2\sqrt{2}x - 3 \text{ 또는 } y = -2\sqrt{2}x - 3$$

따라서 기울기가 양수인 접선의 방정식은 $y = 2\sqrt{2}x - 3$ 이다.

다른 풀이 1

점 $(0, -3)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = mx - 3 \quad \therefore mx - y - 3 = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$ 이고 반지름의 길이는 1이다.

원의 중심에서 접선 $mx - y - 3 = 0$ 까지의 거리가 원의 반지름의
 길이와 같아야 하므로

$$\frac{|-3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1, \sqrt{m^2 + 1} = 3$$

양변을 제곱하면

$$m^2 + 1 = 9, m^2 = 8 \quad \therefore m = \pm 2\sqrt{2}$$

따라서 기울기가 양수인 접선의 방정식은 ㉡에서

$$y = 2\sqrt{2}x - 3$$

다른 풀이 2

점 $(0, -3)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = mx - 3 \quad \dots\dots ㉢$$

㉢을 $x^2 + y^2 = 1$ 에 대입하면

$$x^2 + (mx - 3)^2 = 1, (m^2 + 1)x^2 - 6mx + 8 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-3m)^2 - 8(m^2 + 1) = 0, m^2 - 8 = 0$$

$$\therefore m = \pm 2\sqrt{2}$$

따라서 기울기가 양수인 접선의 방정식은 ㉠에서
 $y = 2\sqrt{2}x - 3$

099 답 ①

원점을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = mx \quad \therefore mx - y = 0$$

원 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ 의 중심의 좌표는 $(0, 2)$ 이고 반지름의 길이는 1이다.

원의 중심에서 접선 $mx - y = 0$ 까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로 $\frac{|m \times 0 - 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$

$\sqrt{m^2 + 1} = 2$ 이므로 양변을 제곱하면

$$m^2 + 1 = 4, m^2 = 3 \quad \therefore m = \pm\sqrt{3}$$

따라서 접선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 또는 $-\sqrt{3}$ 이므로 기울기의 곱은
 $\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = -3$

다른 풀이

원점을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = mx \quad \dots\dots ㉠$$

㉠을 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ 에 대입하면

$$x^2 + (mx-2)^2 = 1, (m^2+1)x^2 - 4mx + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-2m)^2 - 3(m^2 + 1) = 0, m^2 - 3 = 0$$

$$\therefore m = \pm\sqrt{3}$$

따라서 접선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 또는 $-\sqrt{3}$ 이므로 기울기의 곱은
 $\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = -3$

100 답 5

점 $(1, 6)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y - 6 = m(x - 1) \quad \therefore mx - y - m + 6 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

원 $(x+1)^2 + y^2 = 20$ 의 중심의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이다.

원의 중심에서 접선 $mx - y - m + 6 = 0$ 까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$$\frac{|m \times (-1) - 0 - m + 6|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1} = |-2m + 6|$$

양변을 제곱하면

$$20m^2 + 20 = 4m^2 - 24m + 36$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0, (2m-1)(m+2) = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = -2$$

따라서 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 또는 -2 이므로 ㉠에서 접선의 방정식은

$$\frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2} + 6 = 0 \text{ 또는 } -2x - y - (-2) + 6 = 0$$

$$\therefore x - 2y + 11 = 0 \text{ 또는 } 2x + y - 8 = 0$$

따라서 $a=1, b=-2, c=2$ 이므로

$$a-b+c = 1 - (-2) + 2 = 5$$

101 답 ④

점 $(0, 4)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = mx + 4 \quad \therefore mx - y + 4 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

원 $x^2 + (y+3)^2 = 1$ 의 중심의 좌표는 $(0, -3)$ 이고 반지름의 길이는 1이다.

원의 중심에서 접선 $mx - y + 4 = 0$ 까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$$\frac{|m \times 0 - (-3) + 4|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1, \sqrt{m^2 + 1} = 7$$

양변을 제곱하면

$$m^2 + 1 = 49, m^2 = 48 \quad \therefore m = \pm 4\sqrt{3}$$

따라서 접선의 기울기는 $4\sqrt{3}$ 또는 $-4\sqrt{3}$ 이므로 ㉠에서 접선의 방정식은

$$4\sqrt{3}x - y + 4 = 0 \text{ 또는 } -4\sqrt{3}x - y + 4 = 0$$

직선 $4\sqrt{3}x - y + 4 = 0$ 이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$4\sqrt{3}x - 0 + 4 = 0 \quad \therefore x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

직선 $-4\sqrt{3}x - y + 4 = 0$ 이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$-4\sqrt{3}x - 0 + 4 = 0 \quad \therefore x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$k^2 = \frac{1}{3}$$

102 답 64

원 $x^2 + y^2 = 32$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 32 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠이 점 $(-8, 0)$ 을 지나므로

$$-8x_1 = 32 \quad \therefore x_1 = -4$$

점 (x_1, y_1) , 즉 점 $(-4, y_1)$ 이 원 $x^2 + y^2 = 32$ 위의 점이므로

$$(-4)^2 + y_1^2 = 32, y_1^2 = 16$$

$$\therefore y_1 = \pm 4$$

접점의 좌표는 $(-4, 4)$ 또는 $(-4, -4)$ 이므로 ㉠에서 접선의 방정식은

$$-4x + 4y = 32 \text{ 또는}$$

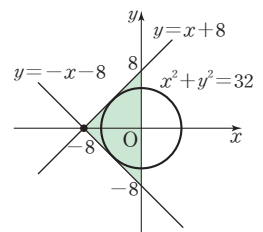
$$-4x - 4y = 32$$

$$\therefore y = x + 8 \text{ 또는 } y = -x - 8$$

따라서 오른쪽 그림에서 두 접선과

y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |8 - (-8)| \times |-8| = 64$$



103 답 $2\sqrt{5}$

점 $A(2, -3)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y - (-3) = m(x - 2) \quad \therefore mx - y - 2m - 3 = 0$$

원 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = r^2$ 의 중심의 좌표는 $(4, 3)$ 이고 반지름의 길이는 r ($r > 0$)이다.

원의 중심에서 접선 $mx - y - 2m - 3 = 0$ 까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$$\frac{|4m-3-2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=r, r\sqrt{m^2+1}=|2m-6|$$

양변을 제곱하면

$$r^2m^2+r^2=4m^2-24m+36$$

$$\therefore (r^2-4)m^2+24m+r^2-36=0$$

이 이차방정식의 두 실근이 접선의 기울기이고, 두 접선이 서로 수직이므로 기울기의 곱은 -1 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{r^2-36}{r^2-4}=-1, r^2-36=-r^2+4, r^2=20$$

$$\therefore r=2\sqrt{5} (\because r>0)$$

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 α, β 이면 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$.

두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

다른 풀이

원 $(x-4)^2+(y-3)^2=r^2$ 의 중심을 C라 하면

C(4, 3)

오른쪽 그림과 같이 두 접선의 접점을 P, Q라 하면 두 접선이 서로 수직이므로 사각형 CPAQ는 정사각형이다.

$$\therefore \overline{CP}=\overline{PA}=r$$

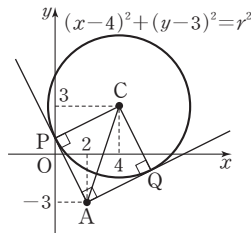
또,

$$\begin{aligned}\overline{CA} &= \sqrt{(4-2)^2+(3+3)^2} \\ &= \sqrt{40}=2\sqrt{10}\end{aligned}$$

이므로 직각삼각형 CPA에서

$$r^2+r^2=(2\sqrt{10})^2, 2r^2=40, r^2=20$$

$$\therefore r=2\sqrt{5} (\because r>0)$$



104 ㉠ ⑤

원 $(x+2)^2+(y+10)^2=3$ 의 넓이를 이등분하는 직선 l 은 원의 중심 $(-2, -10)$ 을 지난다.

점 $(-2, -10)$ 을 지나는 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l 의 방정식은

$$y-(-10)=m(x+2) \quad \therefore mx-y+2m-10=0 \quad \dots\dots ㉠$$

직선 l 이 원 $(x+2)^2+y^2=10$ 에 접하고, 원의 중심의 좌표는 $(-2, 0)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이다.

따라서 원의 중심에서 점선 $mx-y+2m-10=0$ 까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$$\frac{|-2m-0+2m-10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}, \sqrt{10}\sqrt{m^2+1}=10$$

양변을 제곱하면

$$10m^2+10=100, m^2=9 \quad \therefore m=\pm 3$$

따라서 점선의 기울기는 3 또는 -3 이므로 ㉠에서 점선의 방정식은

$$3x-y-4=0 \text{ 또는 } 3x+y+16=0$$

이므로 직선 l 의 방정식이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

풍뎡 방법 원의 넓이를 이등분하는 직선

원의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심을 지난다.

중단원 점검 문제

I-3 | 원의 방정식

062~064쪽

01 ㉠ ②

원 $(x-2)^2+(y+4)^2=9$ 의 중심의 좌표는 $(2, -4)$

중심이 점 $(2, -4)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+4)^2=r^2$$

이 원이 점 $(-2, -2)$ 를 지나므로

$$(-2-2)^2+(-2+4)^2=r^2 \quad \therefore r^2=20$$

원 $(x-2)^2+(y+4)^2=20$ 이 y 축과 만나는 점의 y 좌표는

$$(0-2)^2+(y+4)^2=20$$

즉, $(y+4)^2=16$ 에서 $y+4=\pm 4$ 이므로

$$y=0 \text{ 또는 } y=-8$$

따라서 원 $(x-2)^2+(y+4)^2=20$ 이 y 축과 만나는 점의 좌표는

$$(0, 0), (0, -8) \text{ 이므로}$$

$$a=-8 (\because a \neq 0)$$

02 ㉠ ⑤

직선 $y=\frac{1}{2}x+3$ 위에 있는 점의 좌표를 $(2a, a+3)$ 으로 놓을 수 있다.

중심이 점 $(2a, a+3)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-2a)^2+(y-a-3)^2=r^2$$

이 원이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$(1-2a)^2+(1-a-3)^2=r^2$$

$$\therefore 5a^2+5=r^2$$

..... ㉠

이 원이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$(0-2a)^2+(2-a-3)^2=r^2$$

$$\therefore 5a^2+2a+1=r^2$$

..... ㉡

㉡-㉠을 하면

$$2a-4=0 \quad \therefore a=2$$

$$a=2 \text{ 를 ㉠에 대입하면 } r^2=5 \times 2^2+5=25$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi r^2=25\pi$$

03 ㉠ ①

직선 $2x-y+8=0$ 에서 $x=0, y=0$ 을 각각 대입하면

$$2 \times 0 - y + 8 = 0 \quad \therefore y = 8$$

$$2x - 0 + 8 = 0 \quad \therefore x = -4$$

즉, 직선 $2x-y+8=0$ 이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(-4, 0), (0, 8)$ 이다.

A(-4, 0), B(0, 8)이라 하면 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{0+8}{2}\right), \text{ 즉 } (-2, 4)$$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{4^2+8^2}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y-4)^2=20$$

04 답 ②

원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \text{는 상수})$$

이라 하자.

이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C=0$

또, 이 원이 두 점 $(-4, 4), (10, 10)$ 을 지나므로

$$(-4)^2 + 4^2 - 4A + 4B = 0$$

$$\therefore A - B = 8 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$10^2 + 10^2 + 10A + 10B = 0$$

$$\therefore A + B = -20 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $A = -6, B = -14$

따라서 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 6x - 14y = 0, \text{ 즉 } (x-3)^2 + (y-7)^2 = 58$$

이므로 원의 중심의 좌표는 $(3, 7)$ 이다.

다른 풀이

세 점 $O(0, 0), A(-4, 4), B(10, 10)$ 을 지나는 원의 중심을

$P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{PO} = \overline{PA} = \overline{PB}$$

$$\overline{PO} = \overline{PA} \text{에서 } \overline{PO}^2 = \overline{PA}^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + b^2 = (a+4)^2 + (b-4)^2$$

$$\therefore a - b + 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\overline{PO} = \overline{PB} \text{에서 } \overline{PO}^2 = \overline{PB}^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + b^2 = (a-10)^2 + (b-10)^2$$

$$\therefore a + b - 10 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a=3, b=7$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(3, 7)$ 이다.

풍샘 방법 세 점을 지나는 원의 방정식

세 점을 지나는 원의 방정식을 구하는 방법은 다음 두 가지이다.

[방법1] 구하는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \text{는 상수})$$

으로 놓고 세 점의 좌표를 대입하여 A, B, C 의 값을 구한다.

[방법2] 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 하고 중심과 세 점을 각각 이은 세 선분의 길이가 원의 반지름의 길이로 모두 같음을 이용한다.

특히, 주어진 세 점 중 하나가 원점 $(0, 0)$ 일 때는 [방법1]이 더 간단하다.

05 답 ①

세 점 $P(2, -1), Q(8, 3), R(3, 4)$ 를 지나는 원의 중심을

$C(a, b)$ 라 하면

$$\overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{CR}$$

$$\overline{CP} = \overline{CQ} \text{에서 } \overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2 \text{이므로}$$

$$(a-2)^2 + (b+1)^2 = (a-8)^2 + (b-3)^2$$

$$a^2 + b^2 - 4a + 2b + 5 = a^2 + b^2 - 16a - 6b + 73$$

$$\therefore 3a + 2b - 17 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\overline{CQ} = \overline{CR} \text{에서 } \overline{CQ}^2 = \overline{CR}^2 \text{이므로}$$

$$(a-8)^2 + (b-3)^2 = (a-3)^2 + (b-4)^2$$

$$a^2 + b^2 - 16a - 6b + 73 = a^2 + b^2 - 6a - 8b + 25$$

$$\therefore 5a - b - 24 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a=5, b=1$

즉, 구하는 원의 중심은 $C(5, 1)$ 이고 반지름의 길이는

$$\overline{CP} = \sqrt{(5-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{13}$$

이므로 원의 방정식은

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$$

이 원이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$(x-5)^2 + (0-1)^2 = 13, (x-5)^2 = 12$$

$$x-5 = \pm 2\sqrt{3} \quad \therefore x = 5 \pm 2\sqrt{3}$$

따라서 원이 x 축과 만나는 두 점 A, B 의 좌표는

$$(5+2\sqrt{3}, 0), (5-2\sqrt{3}, 0) \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = (5+2\sqrt{3}) - (5-2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

06 답 ④

$$x^2 + y^2 - 4x - 2ay - 19 = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 + (y-a)^2 = a^2 + 23$$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(2, a)$ 이고, 직선 $y=2x+3$ 이 원의 중심을 지나므로

$$a = 2 \times 2 + 3 = 7$$

07 답 2

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + k^2 - 6k + 10 = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = -k^2 + 6k - 5$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-k^2 + 6k - 5 > 0, k^2 - 6k + 5 < 0$$

$$(k-1)(k-5) < 0 \quad \therefore 1 < k < 5$$

즉, $1 < k < 5$ 일 때 주어진 방정식은 중심의 좌표가 $(2, -1)$ 이고

반지름의 길이가 $\sqrt{-k^2 + 6k - 5}$ 인 원이다.

원의 넓이가 최대이려면 반지름의 길이가 최대이어야 하므로

$$\sqrt{-k^2 + 6k - 5} = \sqrt{-(k-3)^2 + 4} \text{에서 } k=3 \text{일 때 최댓값은}$$

$$\sqrt{4} = 2 \text{이다.}$$

08 답 ⑤

$$x^2 + y^2 + 4x - 2ay + b = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y-a)^2 = a^2 - b + 4$$

원이 x 축에 접하므로

$$\sqrt{a^2 - b + 4} = |a|$$

양변을 제곱하면

$$a^2 - b + 4 = a^2 \quad \therefore b = 4$$

즉, 원 $(x+2)^2 + (y-a)^2 = a^2$ 이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$(1+2)^2 + (3-a)^2 = a^2$$

$$9 + a^2 - 6a + 9 = a^2, 6a = 18 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a + b = 3 + 4 = 7$$

09 답 1

중심이 제2사분면 위에 있고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r ($r > 0$)라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r, r)$ 이다.

이 점이 곡선 $y = x^2 - x - 1$ 위에 있으므로

$$r = (-r)^2 - (-r) - 1$$

$$r^2 = 1 \quad \therefore r = 1 \quad (\because r > 0)$$

따라서 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1, \text{ 즉 } x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$

이므로 $a=2, b=-2, c=1$

$$\therefore a+b+c=2+(-2)+1=1$$

다른 풀이

x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 있다.

원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 곡선 $y=x^2-x-1$ 과 직선 $y=-x$ 의 교점이다.

$$x^2-x-1=-x, x^2=1$$

$$\therefore x=\pm 1$$

이때 원의 중심은 제2사분면 위의 점이므로 $x=-1$

$$\therefore A(-1, 1)$$

따라서 주어진 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1, \text{ 즉 } x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \text{ 이므로}$$

$$a=2, b=-2, c=1$$

$$\therefore a+b+c=2+(-2)+1=1$$

10 답 -16

원 $x^2+y^2=4$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$ 이고 반지름의 길이는 2이다.

이때 점 $A(a, 3)$ 의 y 좌표가 3이므로 점 A 는 원 밖의 점이다.

원의 중심과 점 $A(a, 3)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{a^2+9}$$

점 A 와 원 위의 점 P 에 대하여 선분 AP 의 길이의

$$\text{최댓값이 7이므로 } \sqrt{a^2+9}+2=7$$

$$\text{최솟값이 3이므로 } \sqrt{a^2+9}-2=3$$

$$\text{즉, } \sqrt{a^2+9}=5 \text{ 이므로 양변을 제곱하면}$$

$$a^2+9=25, a^2=16 \quad \therefore a=\pm 4$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$4 \times (-4) = -16$$

11 답 3

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 3 : 1 \text{ 에서}$$

$$\overline{PA} = 3\overline{PB}, \text{ 즉 } \overline{PA}^2 = 9\overline{PB}^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$A(-5, 2), B(-1, 2)$ 이므로 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overline{PA}^2 = (x+5)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29$$

$$\overline{PB}^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5$$

이를 ①에 대입하면

$$x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 9(x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5)$$

$$8x^2 + 8y^2 + 8x - 32y + 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 + x - 4y + 2 = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{9}{4}$$

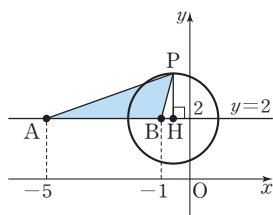
즉, 점 P 가 나타내는 도형은 중심

의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ 이고 반지름

의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이므로 오른쪽

그림과 같다.

원 위의 점 P 에서 직선 $y=2$ 에



내린 수선의 발을 H 라 하면 삼각형 PAB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH}$$

이때 $\overline{AB} = |-1 - (-5)| = 4$ 이므로 선분 PH 의 길이가 최대일 때 삼각형 PAB 의 넓이도 최대이다.

또, 선분 PH 의 길이가 최대일 때는 선분 PH 가 원의 반지름인 경우이므로 삼각형 PAB 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$$

12 답 ②

$$\neg. x^2 + y^2 - 2y = 0 \text{ 에서 } x^2 + (y-1)^2 = 1$$

즉, 원 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 의 반지름의 길이는 1이므로 넓이는

$$\pi r^2 = \pi \text{ 이다.}$$

$$\neg. m = \sqrt{15} \text{ 이면 직선의 방정식은 } \sqrt{15}x - y - 3 = 0$$

원의 중심 $(0, 1)$ 과 직선 사이의 거리는

$$\frac{|\sqrt{15} \times 0 - 1 - 3|}{\sqrt{(\sqrt{15})^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{4} = 1$$

즉, 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로 원과 직선은 접한다.

ㄷ. 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(0, 1)$ 과 직선 $mx - y - 3 = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작아야 하므로

$$\frac{|m \times 0 - 1 - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} < 1, \sqrt{m^2 + 1} > 4$$

$$m^2 + 1 > 16, m^2 > 15$$

$$\therefore m < -\sqrt{15} \text{ 또는 } m > \sqrt{15}$$

이를 만족시키는 양의 정수 m 의 최솟값은 4이다.

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

13 답 ③

x 축, y 축에 동시에 접하고 중심이 제1사분면에 있는 원의 반지름의 길이를 r ($r > 0$)라 하면 원의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

원의 중심 (r, r) 과 직선 $3x + 4y - 12 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3r + 4r - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|7r - 12|}{5}$$

원과 직선이 접하려면

$$\frac{|7r - 12|}{5} = r, |7r - 12| = 5r$$

$$7r - 12 = 5r \text{ 또는 } 7r - 12 = -5r$$

$$\therefore r = 6 \text{ 또는 } r = 1$$

따라서 조건을 만족시키는 두 원 중 큰 원의 반지름의 길이는 6이므로 구하는 넓이는

$$\pi r^2 = 36\pi$$

14 답 ③

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \text{ 에서}$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

이므로 원의 중심의 좌표는 $(2, -1)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이다.

원의 중심 $(2, -1)$ 과 직선 $2x + y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 2 - 1 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|k+3|}{\sqrt{5}}$$

원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k+3|}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}, |k+3| > 5$$

$$k+3 < -5 \text{ 또는 } k+3 > 5 \quad \therefore k < -8 \text{ 또는 } k > 2$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 3이다.

15 답 ①

원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 18$ 의 중심을 C라 하고, 이 원과 직선 $x+y+k=0$ 이 만나는 두 점을 A, B라 하자.

다음 그림과 같이 원의 중심 C(1, 2)에서 직선 $x+y+k=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB의 중점이다.

선분 AB의 길이가 8이므로

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

선분 CA의 길이는 원의 반지름의 길이이므로

$$\overline{CA} = 3\sqrt{2}$$

또, 선분 CH의 길이는 원의 중심 C와 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH} = \frac{|1+2+k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k+3|}{\sqrt{2}}$$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AH}^2}$ 이므로

$$\frac{|k+3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 4^2} = \sqrt{2}$$

$$|k+3| = 2, k+3 = \pm 2 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = -5$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$-1 + (-5) = -6$$

16 답 $8\sqrt{2}$

$x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0$ 에서 $(x-3)^2 + y^2 = 2$

즉, 원의 중심은 C(3, 0)이므로 점

P(5, 4)에 대하여

$$\overline{PC} = \sqrt{(3-5)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

직각삼각형 PQC에서 선분 CQ는 원

의 반지름이므로

$$\overline{CQ} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{CQ} = \overline{CR} = \sqrt{2}$, $\overline{PQ} = \overline{PR} = 3\sqrt{2}$ 이므로 사각형 PQCR의 둘레의 길이는

$$3\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

17 답 ③

원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 중심의 좌표는 (0, 0), 반지름의 길이는 2이다.

원의 중심과 직선 $y=mx+5$, 즉 $mx-y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-0+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{m^2+1}}$$

즉, 원 위의 점과 직선 $y=mx+5$ 사이의 거리의 최댓값은

$$\frac{|5|}{\sqrt{m^2+1}} + 2 \text{에서 } m^2+1 \text{의 값이 최소이어야 한다.}$$

이때 m^2+1 의 값은 $m=0$ 일 때 최소이므로 구하는 최댓값은

$$\frac{|5|}{\sqrt{0^2+1}} + 2 = 5 + 2 = 7$$

다른 풀이

직선 $y=mx+5$ 는 상수 m 의 값에 관계없이 점 (0, 5)를 지나는 직선이다.

즉, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점과 직선

$y=mx+5$ 사이의 거리가 최대가 되려면 원의 중심 (0, 0)과 점 (0, 5)

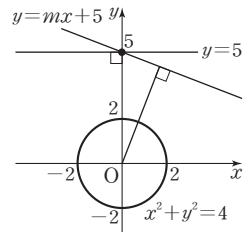
를 지나는 직선이 직선 $y=mx+5$ 와

수직이어야 하고, 이때의 직선의 방

정식은 $y=5$ 이다.

따라서 두 점 (0, 0), (0, 5)를 잇는 선분의 길이는 5이고 원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은

$$5 + 2 = 7$$



18 답 ④

두 점 A(6, 3), B(0, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{5-3}{0-6}(x-6), y = -\frac{1}{3}x + 5 \quad \therefore x+3y-15=0$$

삼각형 PAB의 밑변을 선분 AB라 하면 높이가 최대일 때 넓이도 최대이다.

즉, 원 $x^2 + y^2 = 10$ 의 중심 O를 지나고 직선 $x+3y-15=0$ 에 수직인 직선이 원과 만나는 점 중 직선 AB와

만나는 점 P일 때, 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 된다.

원의 중심 (0, 0)과 직선 $x+3y-15=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0+0-15|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

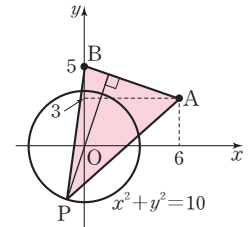
원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이가 최대일 때의 높이는

$$\frac{3\sqrt{10}}{2} + \sqrt{10} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = \sqrt{(0-6)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{10} \text{이므로}$$

삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \frac{5\sqrt{10}}{2} = 25$$



19 답 4

$C_2: x^2 + y^2 + 4x + 6y + 10 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 3$$

이므로 원 C_2 의 중심의 좌표는 (-2, -3)이다.

한편, 두 원 C_1, C_2 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x^2 + y^2 + 2ax + 2y + 6) - (x^2 + y^2 + 4x + 6y + 10) = 0$$

$$2(a-2)x - 4y - 4 = 0$$

$$\therefore (a-2)x - 2y - 2 = 0$$

이 직선이 원 C_2 의 넓이를 이등분하므로 원 C_2 의 중심

(-2, -3)을 지난다.

$$\begin{aligned} \text{즉, } -2(a-2)-2 \times (-3)-2 &= 0 \text{ 이므로} \\ -2a+4+6-2 &= 0 \quad \therefore a=4 \end{aligned}$$

20 답 2

원 $x^2+y^2=20$ 에 접하면서 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y=mx \pm 2\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$$

$$\therefore y=mx \pm \sqrt{20m^2+20}$$

이 직선이 점 $(4, -2)$ 를 지나므로

$$-2=4m \pm \sqrt{20m^2+20}, \quad -2-4m = \pm \sqrt{20m^2+20}$$

양변을 제곱하면

$$16m^2+16m+4=20m^2+20$$

$$4m^2-16m+16=0, \quad m^2-4m+4=0$$

$$(m-2)^2=0 \quad \therefore m=2$$

21 답 ①

원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2, -3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x-3y=13 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(-3, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-3x+2y=13 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$x=-13, y=-13$$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$$(-13, -13)$$

22 답 ④

원 C 위의 점 P 의 좌표를 (x_1, y_1) ($x_1>0, y_1>0$)이라 하면 점 P 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=4$$

이 접선이 x 축과 만나는 점이 B 이므로 $B\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$

점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발이 H 이므로 $H(x_1, 0)$

점 $A(-2, 0)$ 에 대하여 $2\overline{AH}=\overline{HB}$ 이므로

$$2(x_1+2)=\frac{4}{x_1}-x_1, \quad 2x_1(x_1+2)=4-x_1^2$$

$$3x_1^2+4x_1-4=0, \quad (3x_1-2)(x_1+2)=0$$

$$\therefore x_1=\frac{2}{3} \quad (\because x_1>0)$$

점 $P\left(\frac{2}{3}, y_1\right)$ 이 원 C 위의 점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2+y_1^2=4, \quad y_1^2=\frac{32}{9} \quad \therefore y_1=\frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (\because y_1>0)$$

따라서 $B(6, 0), P\left(\frac{2}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ 이므로 삼각형 PAB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (6+2) \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

23 답 12

원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦이 점 $P(-2, 4)$ 를 지나므로

$$-2x_1+4y_1=2 \quad \therefore x_1=2y_1-1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

점 (x_1, y_1) 이 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=2$$

위의 식에 ⑧을 대입하면

$$(2y_1-1)^2+y_1^2=2$$

$$5y_1^2-4y_1-1=0, \quad (5y_1+1)(y_1-1)=0$$

$$\therefore y_1=-\frac{1}{5} \text{ 또는 } y_1=1$$

즉, 접점의 좌표는 $\left(-\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ 또는 $(1, 1)$ 이므로

①에서 구하는 접선의 방정식은

$$-\frac{7}{5}x-\frac{1}{5}y=2 \text{ 또는 } x+y=2$$

$$\therefore y=-7x-10 \text{ 또는 } y=-x+2$$

따라서 두 접선이 y 축과 만나는 두 점의 y 좌표는 $-10, 2$ 이므로

구하는 선분의 길이는

$$2-(-10)=12$$

다른 풀이

점 $P(-2, 4)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y-4=m(x+2) \quad \therefore mx-y+2m+4=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

원 $x^2+y^2=2$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.

원의 중심에서 접선 $mx-y+2m+4=0$ 까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$$\frac{|2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}, \quad |2m+4|=\sqrt{2m^2+2}$$

양변을 제곱하면

$$4m^2+16m+16=2m^2+2$$

$$m^2+8m+7=0, \quad (m+7)(m+1)=0$$

$$\therefore m=-7 \text{ 또는 } m=-1$$

따라서 ⑦에서 접선의 방정식은

$$-7x-y-10=0 \text{ 또는 } -x-y+2=0$$

$$\therefore y=-7x-10 \text{ 또는 } y=-x+2$$

따라서 두 접선이 y 축과 만나는 두 점의 y 좌표는 $-10, 2$ 이므로

구하는 선분의 길이는

$$2-(-10)=12$$

001 답 (1) (1, 4) (2) (-4, 2) (3) (-3, 5)

(1) 점 $(-2, 3)$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-2+3, 3+1), \text{ 즉 } (1, 4)$$

(2) 점 $(-2, 3)$ 을 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-2-2, 3-1), \text{ 즉 } (-4, 2)$$

(3) 점 $(-2, 3)$ 을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-2-1, 3+2), \text{ 즉 } (-3, 5)$$

002 답 (1) (2, -1) (2) (3, 2)
(3) (5, -3) (4) (-3, -4)평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+2, y-1)$ 은 점 (x, y) 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 것이다.(1) 점 $(0, 0)$ 을 평행이동하면 $(0+2, 0-1)$, 즉 $(2, -1)$ (2) 점 $(1, 3)$ 을 평행이동하면 $(1+2, 3-1)$, 즉 $(3, 2)$ (3) 점 $(3, -2)$ 를 평행이동하면

$$(3+2, -2-1), \text{ 즉 } (5, -3)$$

(4) 점 $(-5, -3)$ 을 평행이동하면

$$(-5+2, -3-1), \text{ 즉 } (-3, -4)$$

003 답 3, 3, -3, 2

$$(2, 3) \rightarrow (2+a, \boxed{3}+b) \text{ 이므로}$$

$$2+a=-1, \boxed{3}+b=5$$

$$\therefore a=\boxed{-3}, b=\boxed{2}$$

004 답 (1) $a=3, b=1$ (2) $a=1, b=-1$
(3) $a=-3, b=2$ (1) 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 점 $P(0, 1)$ 이 옮겨지는 점의 좌표는

$$(0+a, 1+b)$$

이 점이 점 $Q(3, 2)$ 이므로

$$0+a=3, 1+b=2 \quad \therefore a=3, b=1$$

(2) 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 점 $P(-2, 3)$ 이 옮겨지는 점의 좌표는

$$(-2+a, 3+b)$$

이 점이 점 $Q(-1, 2)$ 이므로

$$-2+a=-1, 3+b=2 \quad \therefore a=1, b=-1$$

(3) 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 점 $P(1, -5)$ 가 옮겨지는 점의 좌표는

$$(1+a, -5+b)$$

이 점이 점 $Q(-2, -3)$ 이므로

$$1+a=-2, -5+b=-3 \quad \therefore a=-3, b=2$$

005 답 (1) $2x+y-6=0$
(2) $y=2(x-3)^2+2$
(3) $(x-4)^2+(y-1)^2=3$ x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은 x 대신 $x-3$, y 대신 $y-1$ 을 대입하여 구한다.(1) 직선 $2x+y+1=0$

$$\Rightarrow 2(x-3)+(y-1)+1=0$$

$$\therefore 2x+y-6=0$$

(2) 포물선 $y=2x^2+1$

$$\Rightarrow y-1=2(x-3)^2+1$$

$$\therefore y=2(x-3)^2+2$$

(3) 원 $(x-1)^2+y^2=3$

$$\Rightarrow (x-3-1)^2+(y-1)^2=3$$

$$\therefore (x-4)^2+(y-1)^2=3$$

006 답 (1) $x-2y-1=0$ (2) $y=x^2-3x+2$

$$(3) (x-2)^2+(y-1)^2=1$$

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+2, y-1)$ 은 점 (x, y) 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 것이다.따라서 평행이동한 도형의 방정식은 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+1$ 을 대입하여 구한다.(1) 직선 $x-2y+3=0$ 을 평행이동한 도형의 방정식은

$$(x-2)-2(y+1)+3=0$$

$$\therefore x-2y-1=0$$

(2) 포물선 $y=x^2+x+1$ 을 평행이동한 도형의 방정식은

$$y+1=(x-2)^2+(x-2)+1$$

$$\therefore y=x^2-3x+2$$

(3) 원 $x^2+(y-2)^2=1$ 을 평행이동한 도형의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+1-2)^2=1$$

$$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=1$$

007 답 (1) $3x-y+1=0$

$$(2) y=(x+1)^2+5$$

$$(3) x^2+(y-3)^2=4$$

도형 $f(x, y)=0$ 을 도형 $f(x-1, y-2)=0$ 으로 옮기는 평행이동은 도형을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하는 것이다.따라서 평행이동한 도형의 방정식은 x 대신 $x-1$, y 대신 $y-2$ 를 대입하여 구한다.(1) 직선 $3x-y+2=0$ 을 평행이동한 도형의 방정식은

$$3(x-1)-(y-2)+2=0$$

$$\therefore 3x-y+1=0$$

(2) 포물선 $y=(x+2)^2+3$ 을 평행이동한 도형의 방정식은

$$y-2=(x-1+2)^2+3$$

$$\therefore y=(x+1)^2+5$$

(3) 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$ 를 평행이동한 도형의 방정식은

$$(x-1+1)^2+(y-2-1)^2=4$$

$$\therefore x^2+(y-3)^2=4$$

008 답 (1) -4 (2) -2 (3) 0

도형 $f(x, y)=0$ 을 도형 $f(x-a, y-b)=0$ 으로 옮기는 평행이동은 도형을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하는 것이다.

따라서 평행이동한 도형의 방정식은 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$ 를 대입하여 구한다.

(1) $F: x-y-3=0$ 을 평행이동한 도형 F' 의 방정식은
 $(x-a)-(y-b)-3=0 \quad \therefore x-y-a+b-3=0$
 이때 $F': x-y+1=0$ 이므로
 $-a+b-3=1 \quad \therefore a-b=-4$

(2) $F: y=(x+1)^2$ 을 평행이동한 도형 F' 의 방정식은
 $y-b=(x-a+1)^2 \quad \therefore y=(x-a+1)^2+b$
 이때 $F': y=x^2+3$ 이므로
 $-a+1=0, b=3$
 따라서 $a=1, b=3$ 이므로 $a-b=1-3=-2$

(3) $F: (x+2)^2+(y+3)^2=2$ 를 평행이동한 도형 F' 의 방정식은
 $(x-a+2)^2+(y-b+3)^2=2$
 이때 $F': x^2+(y+1)^2=2$ 이므로
 $-a+2=0, -b+3=1$
 따라서 $a=2, b=2$ 이므로 $a-b=2-2=0$

009 답 5

점 $(-4, -1)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(-4+a, -1+3)$, 즉 $(a-4, 2)$
 이 점이 점 $(-1, b)$ 이므로
 $a-4=-1, 2=b \quad \therefore a=3, b=2$
 $\therefore a+b=3+2=5$

010 답 ③

점 $(2, -3)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(2+a, -3+b)$
 이 점이 점 $(5, 1)$ 이므로
 $2+a=5, -3+b=1 \quad \therefore a=3, b=4$
 점 P의 좌표를 (c, d) 라 하면 점 P를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(c+3, d+4)$
 이 점이 점 $(-2, 1)$ 이므로
 $c+3=-2, d+4=1 \quad \therefore c=-5, d=-3$
 따라서 점 P의 좌표는 $(-5, -3)$ 이다.

011 답 ④

점 $P(a, a^2)$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(a+2, a^2+3)$
 이 점이 직선 $y=3x+1$ 위에 있으므로
 $a^2+3=3(a+2)+1$
 $a^2-3a-4=0, (a+1)(a-4)=0$
 $\therefore a=-1$ 또는 $a=4$
 따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합은
 $-1+4=3$

012 답 ①

직선 $2x+ay+b=0$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $2(x-2)+a(y+1)+b=0$
 $\therefore 2x+ay+a+b-4=0$
 이 직선이 점 $(3, 4)$ 를 지나므로
 $2 \times 3+4a+a+b-4=0$
 $\therefore 5a+b=-2$

013 답 0

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+1, y+b)$ 는 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하는 것이다.
 따라서 이 평행이동에 의하여 직선 $ax+y+1=0$ 이 옮겨지는 직선의 방정식은
 $a(x-1)+(y-b)+1=0$
 $\therefore ax+y-a-b+1=0$
 이 직선이 처음 직선 $ax+y+1=0$ 과 일치하므로
 $-a-b+1=1 \quad \therefore a+b=0$

014 답 $a=-1, b=3$

직선 $y=ax+b$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $y+2=a(x-1)+b$
 $\therefore y=ax-a+b-2 \quad \dots\dots ㉠$
 이 직선이 직선 $y=x+2$ 와 수직이므로
 $a=-1$
 또, 직선 $y=x+2$ 와 y 축에서 만나려면 직선 ㉠이 점 $(0, 2)$ 를 지나야 하므로
 $1+b-2=2 \quad \therefore b=3$

015 답 ④

포물선 $y=x^2-2x+3$, 즉 $y=(x-1)^2+2$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
 $y-b=(x-a-1)^2+2$
 $\therefore y=(x-a-1)^2+b+2$
 이 포물선이 포물선 $y=x^2-3$ 과 일치하므로
 $-a-1=0, b+2=-3$
 $\therefore a=-1, b=-5$
 $\therefore a-b=-1-(-5)=4$

다른 풀이

포물선 $y=x^2-2x+3$, 즉 $y=(x-1)^2+2$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 2)$ 이다.
 점 $(1, 2)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(1+a, 2+b)$
 즉, 점 $(a+1, b+2)$ 는 옮겨진 포물선의 꼭짓점이고, 이 점이 점 $(0, -3)$ 이므로
 $a+1=0, b+2=-3 \quad \therefore a=-1, b=-5$
 $\therefore a-b=-1-(-5)=4$

016 답 ②

포물선 $y=4x^2+3$ 을 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 $k+2$ 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-(k+2)=4(x-k)^2+3$$

$$\therefore y=4(x-k)^2+k+5$$

이 포물선의 꼭짓점 $(k, k+5)$ 가 직선 $y=2x+6$ 위에 있으므로 $k+5=2k+6 \quad \therefore k=-1$

다른 풀이

포물선 $y=4x^2+3$ 의 꼭짓점의 좌표 $(0, 3)$ 을 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 $k+2$ 만큼 평행이동한 꼭짓점의 좌표는 $(0+k, 3+k+2)$, 즉 $(k, k+5)$

점 $(k, k+5)$ 가 옮겨진 포물선의 꼭짓점이고, 이 점이 직선 $y=2x+6$ 위에 있으므로

$$k+5=2k+6 \quad \therefore k=-1$$

017 답 8

$y=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$ 이므로 포물선 $y=(x-2)^2+a$ 를 포물선 $y=x^2-2x+4$ 로 옮기는 평행이동은 처음 포물선의 꼭짓점 $(2, a)$ 를 평행이동한 포물선의 꼭짓점 $(1, 3)$ 으로 옮기는 평행이동이다.

즉, x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 $-a+3$ 만큼 평행이동한 것이다.

이 평행이동에 의하여 포물선 $y=x^2+2$ 가 옮겨지는 포물선의 방정식은

$$y+a-3=(x+1)^2+2 \quad \therefore y=x^2+2x-a+6$$

이 포물선이 포물선 $y=x^2+bx+c$ 와 일치하므로

$$2=b, -a+6=c \quad \therefore a+c=6, b=2$$

$$\therefore a+b+c=8$$

018 답 ②

원 $(x+3)^2+(y-4)^2=4$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-m+3)^2+(y-4)^2=4$$

이므로 중심의 좌표는 $(m-3, 4)$, 반지름의 길이는 2이다.

이때 이 원이 y 축에 접하므로

$$|m-3|=2, m-3=\pm 2$$

$$\therefore m=5 \text{ 또는 } m=1$$

따라서 모든 정수 m 의 값의 합은

$$5+1=6$$

019 답 ④

$$x^2+y^2+2x-4y+1=0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4$$

이므로 중심의 좌표는 $(-1, 2)$, 반지름의 길이는 2이다.

평행이동하여 이 원과 겹쳐지려면 반지름의 길이가 2로 같은 원이어야 한다.

$$\therefore x^2+y^2+6x+5=0 \text{에서 } (x+3)^2+y^2=4$$

이므로 중심의 좌표는 $(-3, 0)$, 반지름의 길이는 2이다.

$$\therefore x^2+y^2-4x-2y+1=0 \text{에서 } (x-2)^2+(y-1)^2=4$$

이므로 중심의 좌표는 $(2, 1)$, 반지름의 길이는 2이다.

$$\therefore x^2+y^2+2x-4y-5=0 \text{에서 } (x+1)^2+(y-2)^2=10$$

이므로 중심의 좌표는 $(-1, 2)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이다.

따라서 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

참고 ㄱ을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 주어진 원과 겹쳐진다.

ㄴ을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 주어진 원과 겹쳐진다.

020 답 0

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 원

$$x^2+(y-2)^2=9 \text{가 옮겨지는 원의 방정식은}$$

$$(x-a)^2+(y-b-2)^2=9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2+y^2-6x+2y+1=0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2+(y+1)^2=9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉑, ㉒이 일치하므로

$$-a=-3, -b-2=1 \quad \therefore a=3, b=-3$$

$$\therefore a+b=3+(-3)=0$$

다른 풀이

원 $x^2+(y-2)^2=9$ 의 중심의 좌표는 $(0, 2)$

원 $x^2+y^2-6x+2y+1=0$, 즉 $(x-3)^2+(y+1)^2=9$ 의 중심의 좌표는 $(3, -1)$

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 점 $(0, 2)$ 가 옮겨지는 점의 좌표는

$$(a, 2+b)$$

이 점이 점 $(3, -1)$ 이므로

$$a=3, 2+b=-1 \quad \therefore a=3, b=-3$$

$$\therefore a+b=3+(-3)=0$$

주의 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 를 도형의 평행이동에 적용할 때, x 대신 $x+a$, y 대신 $y+b$ 를 대입하지 않도록 주의한다.

도형을 이 평행이동에 의하여 옮기려면 처음 방정식의 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$ 를 대입해야 한다.

점과 도형의 평행이동에서 이를 혼동하지 않도록 주의한다.

021 답 (1) Q(3, -4), R(-3, 4), S(-3, -4), T(4, 3)

$$(2) Q(2, 1), R(-2, -1), S(-2, 1), T(-1, 2)$$

$$(3) Q(-3, 2), R(3, -2), S(3, 2), T(-2, -3)$$

$$(4) Q(-1, -5), R(1, 5), S(1, -5), T(5, -1)$$

022 답 (1) (3, 4) (2) (4, 3) (3) (4, 3) (4) (4, -3)

(1) 단계1. 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 구하기

점 $(3, -4)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-3, 4)$$

단계2. 단계1.에서 구한 점을 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 구하기

점 $(-3, 4)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(3, 4)$$

(2) 점 $(3, -4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(3, 4)$$

점 $(3, 4)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(4, 3)$$

- (3) 점 $(3, -4)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-4, 3)$
 점 $(-4, 3)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4, 3)$
 (4) 점 $(3, -4)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3, 4)$
 점 $(-3, 4)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4, -3)$

023 답 (1) $2x-3y+1=0$

(2) $2x-3y-1=0$

(3) $2x+3y-1=0$

(4) $3x+2y+1=0$

직선의 방정식 $2x+3y+1=0$ 에

- (1) y 대신 $-y$ 를 대입하면 되므로 구하는 방정식은

$$2x+3 \times (-y)+1=0$$

$$\therefore 2x-3y+1=0$$

- (2) x 대신 $-x$ 를 대입하면 되므로 구하는 방정식은

$$2 \times (-x)+3y+1=0, -2x+3y+1=0$$

$$\therefore 2x-3y-1=0$$

- (3) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입하면 되므로 구하는 방정식은

$$2 \times (-x)+3 \times (-y)+1=0, -2x-3y+1=0$$

$$\therefore 2x+3y-1=0$$

- (4) x 대신 y , y 대신 x 를 대입하면 되므로 구하는 방정식은

$$2 \times y+3 \times x+1=0$$

$$\therefore 3x+2y+1=0$$

024 답 (1) $y=-(x-2)^2-3$

(2) $y=(x+2)^2+3$

(3) $y=-(x+2)^2-3$

포물선의 방정식 $y=(x-2)^2+3$ 에

- (1) y 대신 $-y$ 를 대입하면 되므로 구하는 방정식은

$$-y=(x-2)^2+3$$

$$\therefore y=-(x-2)^2-3$$

- (2) x 대신 $-x$ 를 대입하면 되므로 구하는 방정식은

$$y=(-x-2)^2+3$$

$$\therefore y=(x+2)^2+3$$

- (3) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입하면 되므로 구하는 방정식은

$$-y=(-x-2)^2+3$$

$$\therefore y=-(x+2)^2-3$$

025 답 (1) $(x+1)^2+(y+3)^2=4$

(2) $(x-1)^2+(y-3)^2=4$

(3) $(x-1)^2+(y+3)^2=4$

(4) $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

원의 방정식 $(x+1)^2+(y-3)^2=4$ 에

- (1) y 대신 $-y$ 를 대입하면 되므로 구하는 방정식은

$$(x+1)^2+(-y-3)^2=4$$

$$\therefore (x+1)^2+(y+3)^2=4$$

- (2) x 대신 $-x$ 를 대입하면 되므로 구하는 방정식은

$$(-x+1)^2+(y-3)^2=4$$

$$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2=4$$

- (3) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입하면 되므로 구하는 방정식은

$$(-x+1)^2+(-y-3)^2=4$$

$$\therefore (x-1)^2+(y+3)^2=4$$

- (4) x 대신 y , y 대신 x 를 대입하면 되므로 구하는 방정식은

$$(y+1)^2+(x-3)^2=4$$

$$\therefore (x-3)^2+(y+1)^2=4$$

026 답 ①

점 $P(3, -2)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점 Q 의 좌표는

$$(-3, 2)$$

점 $Q(-3, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점 R 의 좌표는

$$(-3, -2)$$

027 답 -2

점 $(2, 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점 P 의 좌표는

$$(2, -4)$$

점 $(2, -1)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q 의 좌표는

$$(-1, 2)$$

따라서 직선 PQ 의 기울기는

$$\frac{2-(-4)}{-1-2}=-2$$

028 답 20

점 $(-2, 5)$ 를 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 세 점 $P, Q,$

R 의 좌표는 각각

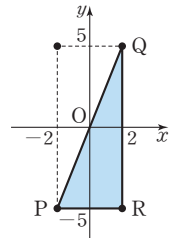
$$(-2, -5), (2, 5), (2, -5)$$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 PRQ 의 넓

이는

$$\frac{1}{2} \times |2-(-2)| \times |5-(-5)|$$

$$=\frac{1}{2} \times 4 \times 10=20$$



029 답 5

점 $(1, 5)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(5, 1)$$

점 $(5, 1)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-5, -1)$$

따라서 점 $(-5, -1)$ 과 직선 $3x+4y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times (-5) + 4 \times (-1) - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

030 답 ①

직선 $3x+y+1=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선 l 의 방정식은

$$3x+(-y)+1=0 \quad \therefore 3x-y+1=0$$

따라서 직선 $l: 3x-y+1=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한

직선의 방정식은

$$3y-x+1=0 \quad \therefore x-3y-1=0$$

031 답 6

점 (1, -2)를 점 (-1, 2)로 옮기는 대칭이동은 원점에 대한 대칭이동이다.

직선 $2x+y+k=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $2 \times (-x) + (-y) + k = 0$

$$\therefore 2x+y-k=0$$

이 직선이 점 (1, 4)를 지나므로

$$2 \times 1 + 4 - k = 0 \quad \therefore k = 6$$

032 답 ①

두 직선이 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로 한 직선을 직선 $y=x$ 에 대칭이동한 직선은 다른 한 직선과 일치한다.

직선 $(2a+1)x + (b+2)y + 3 = 0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$(2a+1)y + (b+2)x + 3 = 0$$

$$\therefore (b+2)x + (2a+1)y + 3 = 0$$

이 직선이 직선 $(a+4)x + (b+1)y + 3 = 0$ 과 일치하므로

$$b+2=a+4, 2a+1=b+1$$

$$\therefore a-b=-2, 2a-b=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=4$

따라서 직선 $y=ax+b$, 즉 $y=2x+4$ 의 x 절편은

$$0=2x+4 \quad \therefore x=-2$$

033 답 ③

포물선 $y=x^2+ax+b$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=(-x)^2+a \times (-x)+b$$

$$\therefore y=x^2-ax+b=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{a}{2}, b-\frac{a^2}{4}\right)$ 이고, 이 점이 점

(2, -1)이므로

$$\frac{a}{2}=2, b-\frac{a^2}{4}=-1$$

즉, $a=4$ 이므로 이를 $b-\frac{a^2}{4}=-1$ 에 대입하면

$$b-4=-1 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b=4+3=7$$

다른 풀이

포물선 $y=x^2+ax+b$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표가 (2, -1)이므로 포물선 $y=x^2+ax+b$ 의 꼭짓점의 좌표는 (-2, -1)이다.

이차항의 계수가 1이고 꼭짓점의 좌표가 (-2, -1)인 포물선의 방정식은

$$y=(x+2)^2-1=x^2+4x+3$$

따라서 $a=4, b=3$ 이므로

$$a+b=4+3=7$$

주의 포물선의 대칭이동에서 꼭짓점의 대칭이동을 이용할 경우 불룩한 방향이 바뀔 수 있으므로 이차항의 계수에 주의한다.

034 답 ①

포물선 $y=x^2-2ax+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=x^2-2ax+1$$

$$\therefore y=-x^2+2ax-1=-(x-a)^2+a^2-1$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (a, a^2-1) 이고, 이 점이 직선

$y=-x+1$ 위에 있으므로

$$a^2-1=-a+1$$

$$a^2+a-2=0, (a+2)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 (\because a>0)$$

035 답 ⑤

포물선 $y=x^2+2ax+b$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=(-x)^2+2a \times (-x)+b$$

$$\therefore y=x^2-2ax+b$$

포물선 $y=x^2-2ax+b$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=(-x)^2-2a \times (-x)+b$$

$$\therefore y=-x^2-2ax-b=-(x+a)^2+a^2-b$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-a, a^2-b)$ 이고, 이 점이 점

$(a-4, b-2)$ 와 일치하므로

$$-a=a-4, a^2-b=b-2$$

$$-a=a-4 \text{에서 } 2a=4 \quad \therefore a=2$$

$a=2$ 를 $a^2-b=b-2$ 에 대입하면

$$4-b=b-2, 2b=6 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b=2+3=5$$

다른 풀이

포물선 $y=x^2+2ax+b$, 즉 $y=(x+a)^2-a^2+b$ 의 꼭짓점

$(-a, -a^2+b)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a, -a^2+b)$

점 $(a, -a^2+b)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a, a^2-b)$

이 점이 점 $(a-4, b-2)$ 와 일치하므로

$$-a=a-4, a^2-b=b-2 \quad \therefore a=2, b=3$$

$$\therefore a+b=2+3=5$$

036 답 ⑤

원 $(x-2)^2+(y+2)^2=16$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(y-2)^2+(x+2)^2=16$$

$$\therefore (x+2)^2+(y-2)^2=16$$

따라서 이 원의 중심의 좌표는 (-2, 2), 반지름의 길이는

$$\sqrt{16}=4 \text{이므로}$$

$$a=-2, b=2, r=4$$

$$\therefore a+b+r=-2+2+4=4$$

다른 풀이

원 $(x-2)^2+(y+2)^2=16$ 의 중심의 좌표는 (2, -2)이고 반지름의 길이는 $\sqrt{16}=4$ 이다.

따라서 이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(-2, 2)$, 반지름의 길이는 4이므로

$$a=-2, b=2, r=4$$

$$\therefore a+b+r=-2+2+4=4$$

037 답 ③

중심의 좌표가 $(1, 3)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$$

이 원을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(-y-3)^2=r^2$$

$$\therefore (x-1)^2+(y+3)^2=r^2$$

위의 원이 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로

$$(-1-1)^2+(-1+3)^2=r^2$$

$$\therefore r^2=8$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi r^2=8\pi$$

다른 풀이

중심의 좌표가 $(1, 3)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(1, -3)$ 이고 반지름의 길이는 r 이므로 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+3)^2=r^2$$

이 원이 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로

$$(-1-1)^2+(-1+3)^2=r^2$$

$$\therefore r^2=8$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi r^2=8\pi$$

038 답 ④

원 $x^2+y^2-16x+12y+64=0$, 즉 $(x-8)^2+(y+6)^2=36$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원 C_1 의 방정식은

$$(x-8)^2+(-y+6)^2=36$$

$$\therefore C_1: (x-8)^2+(y-6)^2=36$$

원 C_1 을 원점에 대하여 대칭이동한 원 C_2 의 방정식은

$$(-x-8)^2+(-y-6)^2=36$$

$$\therefore C_2: (x+8)^2+(y+6)^2=36$$

따라서 두 원 C_1, C_2 의 중심의 좌표는 각각

$$(8, 6), (-8, -6)$$
이므로 두 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-8-8)^2+(-6-6)^2}=\sqrt{256+144}=\sqrt{400}=20$$

다른 풀이

$$x^2+y^2-16x+12y+64=0$$
에서

$$(x-8)^2+(y+6)^2=36$$

이 원의 중심은 $(8, -6)$ 이므로 이 점을 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(8, 6)$$

원 C_1 의 중심 $(8, 6)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-8, -6)$$

따라서 두 원 C_1, C_2 의 중심 $(8, 6), (-8, -6)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-8-8)^2+(-6-6)^2}=\sqrt{256+144}=\sqrt{400}=20$$

039 답 ③

점 A의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 A를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-a, b)$$

점 $(-a, b)$ 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-a+3, b-4)$$

이 점이 점 $(4, 5)$ 이므로

$$-a+3=4, b-4=5$$

$$\therefore a=-1, b=9$$

따라서 점 A의 좌표는 $(-1, 9)$ 이다.

040 답 1

직선 $ax-y+1=0$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$a(x-1)-(y+1)+1=0$$

$$\therefore ax-y-a=0$$

이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$ay-x-a=0$$

$$\therefore x-ay+a=0$$

이 직선이 처음 직선 $ax-y+1=0$ 과 일치하므로

$$a=1$$

041 답 ②

원 $x^2+y^2+2x=0$, 즉 $(x+1)^2+y^2=1$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x+1)^2+(-y)^2=1$$

$$\therefore (x-1)^2+y^2=1$$

이 원을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+2-1)^2+(y-2)^2=1$$

$$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2=1$$

이 원의 중심 $(-1, 2)$ 가 직선 $y=mx-1$ 위의 점이므로

$$2=-m-1 \quad \therefore m=-3$$

042 답 ③

점 B(4, -3)을 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$$B'(-4, -3)$$

오른쪽 그림에서 $\overline{PB}=\overline{PB'}$ 이므로

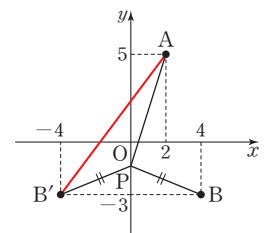
$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$$

$$\geq \overline{AB'}$$

$$=\sqrt{(-4-2)^2+(-3-5)^2}$$

$$=10$$

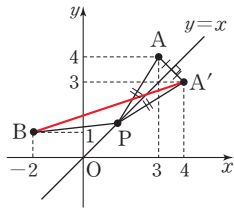
따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 10이다.



043 답 $2\sqrt{10}$

점 A(3, 4)를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 A'(4, 3)

오른쪽 그림에서 $\overline{PA} = \overline{PA'}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$
 $\geq \overline{A'B}$
 $= \sqrt{(-2-4)^2 + (1-3)^2}$
 $= 2\sqrt{10}$



따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{10}$ 이다.

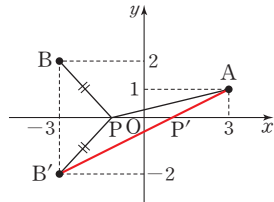
044 답 ④

점 B(-3, 2)를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면
 $B'(-3, -2)$

오른쪽 그림에서 $\overline{PB} = \overline{PB'}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P} \geq \overline{AB'}$$

즉, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 AB'과 x 축의 교점 P'이다.



이때 직선 AB'의 방정식은

$$y-1 = \frac{-2-1}{-3-3}(x-3) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

이 직선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \therefore x = 1$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표는 (1, 0)이다.

중단원 점검 문제

I-4 | 도형의 이동

074쪽

01 답 0

점 (2, 3)을 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 옮긴 점의 좌표는

$$(2+a, 3+b)$$

이 점이 점 (1, 5)이므로

$$2+a=1, 3+b=5 \quad \therefore a=-1, b=2$$

즉, 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 옮기는 평행이동이다.

이 평행이동에 의하여 직선 $2x+3y-3=0$ 이 옮겨지는 직선의 방정식은

$$2(x+1)+3(y-2)-3=0$$

$$\therefore 2x+3y-7=0$$

이 직선이 점 (c, 3)을 지나므로

$$2c+3 \times 3-7=0 \quad \therefore c=-1$$

$$\therefore a+b+c=-1+2-1=0$$

02 답 ①

포물선 $y=x^2-6x+6$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $a+2$ 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-(a+2)=(x-a)^2-6(x-a)+6$$

$$\therefore y=x^2-2(a+3)x+a^2+7a+8$$

$$=\{x-(a+3)\}^2+a-1$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(a+3, a-1)$ 이고, 이 점이 y 축 위에 있으므로 x 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } a+3=0 \text{에서 } a=-3$$

따라서 이 포물선의 꼭짓점의 y 좌표는

$$a-1=-3-1=-4$$

다른 풀이

포물선 $y=x^2-6x+6$, 즉 $y=(x-3)^2-3$ 의 꼭짓점의 좌표는 (3, -3)

점 (3, -3)을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $a+2$ 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(3+a, -3+a+2) \quad \therefore (a+3, a-1)$$

즉, 점 $(a+3, a-1)$ 이 옮겨진 포물선의 꼭짓점이고, 이 점이 y 축 위에 있으므로

$$a+3=0 \quad \therefore a=-3$$

따라서 이 포물선의 꼭짓점의 y 좌표는

$$a-1=-3-1=-4$$

03 답 9

원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 원 C의 방정식은

$$(x-m+1)^2+(y-n+2)^2=9$$

즉, 원 C의 중심의 좌표는 $(m-1, n-2)$ 이고 반지름의 길이는 3이다.

이때 조건 (가)에서 원 C의 중심이 제1사분면 위에 있고, 조건 (나)에서 원 C는 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 원의 중심의 x 좌표, y 좌표가 모두 원의 반지름의 길이와 같아야 한다.

따라서 $m-1=3, n-2=3$ 이므로

$$m=4, n=5$$

$$\therefore m+n=4+5=9$$

다른 풀이

원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 원 C의 방정식은

$$(x-m+1)^2+(y-n+2)^2=9 \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

즉, 원 C의 반지름의 길이는 3이다.

이때 조건 (가), (나)에서 원 C의 중심은 제1사분면 위에 있고 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 원 C의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-3)^2=9 \quad \dots\dots \textcircled{나}$$

$$\textcircled{가}, \textcircled{나} \text{이 일치하므로 } -m+1=-3, -n+2=-3$$

따라서 $m=4, n=5$ 이므로

$$\therefore m+n=4+5=9$$

04 답 제1사분면

점 (a, b) 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-a, b)$$

이 점이 제3사분면 위에 있으므로

$$-a < 0, b < 0 \quad \therefore a > 0, b < 0$$

한편, 점 $(a-b, ab)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a-b, -ab)$
 이때 $a > 0, b < 0$ 이므로 $a-b > 0, -ab > 0$
 따라서 점 $(a-b, -ab)$ 는 제1사분면에 있다.

05 답 ⑤

직선 $2x+y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$2y+x+k=0 \quad \therefore x+2y+k=0$$

이 직선과 원 $x^2+(y-3)^2=5$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면
 원의 중심 $(0, 3)$ 과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 보다 작아야 하므로

$$\frac{|0+2 \times 3+k|}{\sqrt{1^2+2^2}} < \sqrt{5}, |k+6| < 5 \text{에서}$$

$$-5 < k+6 < 5 \quad \therefore -11 < k < -1$$

따라서 상수 k 의 값이 될 수 없는 것은 ⑤ -1 이다.

06 답 ④

원 $C_1: (x-3)^2+(y+4)^2=1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원 C_2 의 방정식은

$$(x-3)^2+(-y+4)^2=1$$

$$\therefore C_2: (x-3)^2+(y-4)^2=1$$

원 C_1 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원 C_3 의 방정식은

$$(y-3)^2+(x+4)^2=1$$

$$\therefore C_3: (x+4)^2+(y-3)^2=1$$

따라서 세 원 C_1, C_2, C_3 의 중심의 좌표는 각각 $(3, -4), (3, 4), (-4, 3)$ 이므로 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+3-4}{3}, \frac{-4+4+3}{3} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{2}{3}, 1 \right)$$

다른 풀이

원 $C_1: (x-3)^2+(y+4)^2=1$ 의 중심의 좌표는

$$(3, -4)$$

점 $(3, -4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(3, 4)$$

점 $(3, -4)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-4, 3)$$

따라서 세 점 $(3, -4), (3, 4), (-4, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+3-4}{3}, \frac{-4+4+3}{3} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{2}{3}, 1 \right)$$

07 답 4

포물선 $y=x^2-4x+3$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y+3=(x-2)^2-4(x-2)+3$$

$$\therefore y=x^2-8x+12$$

이 포물선을 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=(-x)^2-8 \times (-x)+12$$

$$\therefore y=x^2+8x+12$$

앞의 포물선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$x^2+8x+12=0, (x+6)(x+2)=0$$

$$\therefore x=-6 \text{ 또는 } x=-2$$

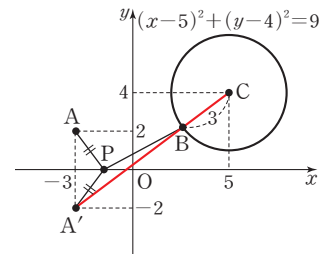
따라서 $A(-6, 0), B(-2, 0)$ 또는 $A(-2, 0), B(-6, 0)$ 이므로 선분 AB 의 길이는

$$|-2-(-6)|=4$$

08 답 7

원 $(x-5)^2+(y-4)^2=9$ 의 중심을 C 라 하면 $C(5, 4)$ 이고 반지름의 길이는 3이다.

점 $A(-3, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $A'(-3, -2)$



위의 그림에서 $\overline{AP}=\overline{A'P}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BC} &= \overline{A'P}+\overline{PB}+\overline{BC} \\ &\geq \overline{A'C} \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 두 점 P, B 가 모두 선분 $A'C$ 위에 있을 때

$\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BC}$ 가 최소이고 그 최소값은

$$\overline{A'C}=\sqrt{(5+3)^2+(4+2)^2}=10$$

이때 $\overline{BC}=3$ 으로 일정하므로 ㉠에서

$$\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BC}=\overline{AP}+\overline{PB}+3 \geq 10$$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{PB} \geq 7$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 7이다.

II

집합과 명제

II-1 | 집합의 뜻과 포함 관계

078~092쪽

001 답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) × (5) ×

- (1) 2, 4의 모임이므로 집합이다.
 (2) '가까운'이라는 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
 (3) 10, 11, 12, ..., 99의 모임이므로 집합이다.
 (4) '잘생긴'이라는 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
 (5) '훌륭한'이라는 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

002 답 (1) 2, 3, 5, 7 (2) 1, 5, 9 (3) 1, 2, 3

003 답 (1) $\not\subseteq$ (2) $\in$ (3) $\not\subseteq$ (4) $\not\subseteq$ (5) $\in$ (6) $\in$

집합 A는 30의 약수의 집합이므로 그 원소는 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30이다.

- (1) $0 \not\subseteq A$ (2) $3 \subseteq A$
 (3) $4 \not\subseteq A$ (4) $9 \not\subseteq A$
 (5) $10 \subseteq A$ (6) $15 \subseteq A$

004 답 (1) $\not\subseteq$ (2) $\in$ (3) $\in$ (4) $\in$
 (5) $\in$ (6) $\not\subseteq$ (7) $\not\subseteq$ (8) $\in$

- (1) 0은 정수이지만 자연수는 아니므로 $0 \not\subseteq N$
 (2) 1000000은 자연수이므로 $1000000 \subseteq N$
 (3) -3은 정수이므로 $-3 \subseteq Z$
 (4) $\sqrt{9}=3$ 은 정수이므로 $\sqrt{9} \subseteq Z$
 (5) 3.14는 유리수이므로 $3.14 \subseteq Q$
 (6) $\pi=3.141592\cdots$ 는 무리수이므로 $\pi \not\subseteq Q$
 (7) $\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$ 는 허수이므로 $\sqrt{-2} \not\subseteq R$
 (8) $\frac{1}{5}$ 은 실수이므로 $\frac{1}{5} \subseteq R$

005 답 (1) {2, 4, 6, 8} (2) {d, r, e, a, m}
 (3) {3, 6, 9, 12, 15, 18} (4) {0, 1, 2}

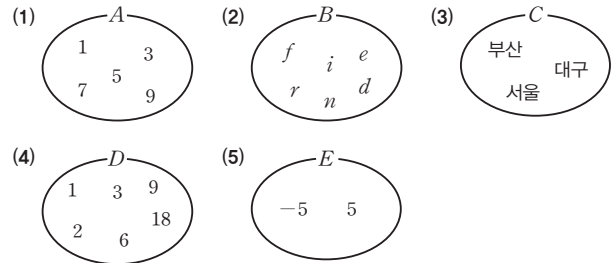
006 답 (1) $\{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 4 \text{의 양의 배수}\}$
 (2) $\{x|x \text{는 } 12 \text{의 양의 약수}\}$
 (3) $\{x|x^2=49\}$
 (4) $\{x|-2 \leq x \leq 3, x \text{는 정수}\}$

다른 풀이

집합을 조건제시법으로 나타내는 방법은 다양하다.

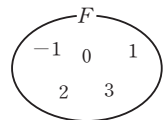
- (1) $\{x|x=4k, k \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$
 (3) $\{x||x|=7\}$
 (4) $\{x|-3 < x < 4, x \text{는 정수}\}$
 또는 $\{x|(x+2)(x-3) \leq 0, x \text{는 정수}\}$

007 답 풀이 참조



- (6) $x^2-2x-8 < 0$ 에서 $(x+2)(x-4) < 0$
 $\therefore -2 < x < 4$
 $\therefore F = \{x|-2 < x < 4, x \text{는 정수}\}$
 $= \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

따라서 집합 F를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



008 답 (1) 유 (2) 무 (3) 유 (4) 유, $\emptyset$
 (5) 무 (6) 유 (7) 유 (8) 유, $\emptyset$

- (3) $\{0\}$ 은 원소가 0 하나인 집합이므로 유한집합이다.
 (4) $\{x|x < 1, x \text{는 자연수}\} = \emptyset$ 이므로 공집합 (유한집합)이다.
 (6) $\{x|x \text{는 두 자리 자연수}\} = \{10, 11, 12, \dots, 99\}$ 이므로 원소가 90개인 집합, 즉 유한집합이다.
 (7) $x^2+x-2=0$ 에서 $(x+2)(x-1)=0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 1$
 따라서 $\{x|x^2+x-2=0\} = \{-2, 1\}$ 이므로 유한집합이다.
 (8) $x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ 이므로 $x^2+x+1=0$ 을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.
 따라서 $\{x|x^2+x+1=0, x \text{는 실수}\} = \emptyset$ 이므로 공집합 (유한집합)이다.

009 답 (1) 3 (2) 8 (3) 1 (4) 5
 (5) 6 (6) 7 (7) 2 (8) 7

- (1) $A = \{-1, 0, 1\}$ 이므로 $n(A) = 3$
 (2) $A = \{2, 3, 4, \dots, 9\}$ 이므로 $n(A) = 8$
 (3) $A = \{\emptyset\}$ 은 원소가 $\emptyset$ 하나인 집합이므로 $n(A) = 1$
 (4) $A = \{x|x \text{는 } 16 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
 이므로 $n(A) = 5$
 (5) $A = \{x|x \text{는 } 15 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
 이므로 $n(A) = 6$
 (6) $A = \{x||x| \leq 3, x \text{는 정수}\}$
 $= \{x|-3 \leq x \leq 3, x \text{는 정수}\}$
 $= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 이므로 $n(A) = 7$
 (7) $x^2-3x-10=0$ 에서 $(x+2)(x-5)=0$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 $A = \{-2, 5\}$ 이므로 $n(A) = 2$

$$(8) x^2 - 2x - 15 < 0 \text{에서 } (x+3)(x-5) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 5$$

따라서

$$A = \{x \mid -3 < x < 5, x \text{는 정수}\}$$

$$= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{이므로 } n(A) = 7$$

010 답 ⑤

①, ②, ③, ④ ‘귀여운’, ‘아름다운’, ‘가까운’, ‘잘하는’이라는 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ⑤이다.

011 답 ②, ⑤

②, ⑤ ‘유명한’, ‘많은’이라는 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합이 아닌 것은 ②, ⑤이다.

012 답 ③

ㄴ, ㄷ. ‘큰’, ‘높은’이라는 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

ㅂ. 제공하여 -2가 되는 실수는 없으므로 이 모임은 공집합이다.

따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ, ㅅ이다.

013 답 ②

집합 A 의 원소는 13 이하의 소수이므로

$$2, 3, 5, 7, 11, 13$$

$$\textcircled{1} 2 \in A \quad \textcircled{2} 3 \in A \quad \textcircled{3} 7 \in A$$

$$\textcircled{4} 10 \notin A \quad \textcircled{5} 13 \in A$$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

014 답 ㄱ, ㄷ

집합 A 의 원소는 18의 양의 약수이므로

$$1, 2, 3, 6, 9, 18$$

$$\textcircled{1} 2 \in A \quad \textcircled{2} 3 \in A$$

$$\textcircled{3} 6 \in A \quad \textcircled{4} 12 \notin A$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

015 답 ③, ④

집합 A 의 원소는 20 이하의 3의 양의 배수이므로

$$3, 6, 9, 12, 15, 18$$

집합 B 의 원소는 24의 양의 약수이므로

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

$$\textcircled{1} 4 \notin A \quad \textcircled{2} 8 \notin A \quad \textcircled{3} 8 \in B$$

$$\textcircled{4} 18 \notin B \quad \textcircled{5} 12 \in A$$

따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

016 답 ④

$$\text{방정식 } x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \text{에서}$$

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0, x(x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

즉, 집합 A 의 원소는 방정식 $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ 의 해이므로 -1, 0, 3이다.

$$\textcircled{1} -1 \in A$$

$$\textcircled{2} 0 \in A$$

$$\textcircled{3} 1 \notin A$$

$$\textcircled{4} 2 \notin A$$

$$\textcircled{5} 3 \in A$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

017 답 ②

$$\text{부등식 } 2x^2 - 7x + 3 \leq 0 \text{에서}$$

$$(2x-1)(x-3) \leq 0 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

즉, 집합 A 의 원소는 부등식 $2x^2 - 7x + 3 \leq 0$ 의 정수인 해이므로 1, 2, 3이다.

$$\textcircled{1} 0 \notin A$$

$$\textcircled{2} 1 \in A$$

$$\textcircled{3} 2 \in A$$

$$\textcircled{4} 3 \in A$$

$$\textcircled{5} 4 \notin A$$

따라서 옳은 것은 ②이다.

018 답 ④

$$\textcircled{1} 0 \text{은 정수이므로 } 0 \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{2} \sqrt{4} = 2 \text{는 정수이므로 } \sqrt{4} \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{3} 2.5 \text{는 정수가 아니므로 } 2.5 \notin \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{4} -\frac{6}{2} = -3 \text{은 정수이므로 } -\frac{6}{2} \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{5} \frac{5}{3} \text{는 정수가 아니므로 } \frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

019 답 ③

$$\textcircled{1} 3.\dot{3} = \frac{33-3}{9} = \frac{10}{3} \text{은 유리수이므로 } 3.\dot{3} \in \mathbb{Q}$$

$$\textcircled{2} \pi = 3.141592\cdots \text{는 무리수이므로 실수이다.}$$

$$\therefore \pi \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{3} i^{100} = (i^4)^{25} = 1^{25} = 1 \text{은 유리수이므로 } i^{100} \in \mathbb{Q}$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{는 허수이므로}$$

$$\frac{1}{1-i} \notin \mathbb{R}$$

$$\textcircled{5} \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} \text{은 유리수이므로 } \frac{1}{\sqrt{9}} \in \mathbb{Q}$$

따라서 옳은 것은 ③이다.

참고 유한소수와 순환소수는 유리수이다.

020 답 ④

$$\textcircled{1} 0 \text{은 정수이므로 } 0 \in \mathbb{Z} \text{이지만 자연수는 아니므로}$$

$$0 \notin \mathbb{N}$$

$$\textcircled{2} -\sqrt{36} = -6 \text{은 정수이므로 } -\sqrt{36} \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{3} 3.141592 = \frac{3141592}{1000000} = \frac{392699}{125000} \text{는 유리수이므로}$$

$$3.141592 \in \mathbb{Q}$$

$$\textcircled{4} i^{10} = (i^4)^2 \times i^2 = 1^2 \times (-1) = -1 \text{은 실수이므로}$$

$$i^{10} \in \mathbb{R}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

021 답 ④

14의 양의 약수는 1, 2, 7, 14이므로
 $\{x|x \text{는 } 14 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 7, 14\}$

022 답 ③

집합 A의 원소인 2, 3, 5, 7, 11은 11 이하의 소수이므로 집합 A를 조건제시법으로 나타내면 $\{x|x \text{는 } 11 \text{ 이하의 소수}\}$

다른 풀이

조건제시법으로 주어진 각 집합을 원소나열법으로 나타내면 다음과 같다.

- ① $\{x|x \text{는 } 11 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 11\}$
 - ② $\{x|x \text{는 } 11 \text{ 이하의 홀수}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
 - ③ $\{x|x \text{는 } 11 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
 - ④ $\{x|x \text{는 } 11 \text{ 이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$
 - ⑤ $\{x|x \text{는 } 11 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\} = \{3, 6, 9\}$
- 따라서 주어진 벤 다이어그램과 같은 집합은 ③이다.

023 답 ④

- ㄱ. $\{x|x \text{는 } 9 \text{ 이하의 홀수}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 - ㄴ. $\{x|x \text{는 짝수인 한 자리의 자연수}\}$
 $= \{2, 4, 6, 8\}$
 - ㄷ. $\{x|x \text{는 } 30 \text{ 미만의 } 6 \text{의 양의 배수}\}$
 $= \{6, 12, 18, 24\}$
- 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

024 답 ③

- ①, ②, ④, ⑤에서
 $\{1, 3, 5, \dots, 15\}$
 $= \{x|x \text{는 } 16 \text{ 미만의 홀수}\}$
 $= \{x|x=2n-1, n=1, 2, 3, \dots, 8\}$
 $= \{x|x=2n+1, n \text{은 } 7 \text{ 이하의 음이 아닌 정수}\}$
 - ③ $\{x|x \text{는 } 17 \text{ 이하의 홀수}\} = \{1, 3, 5, \dots, 17\}$
- 따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

025 답 ①

두 집합 $A = \{-1, 1\}$,
 $B = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여
 $a \in A, b \in B$ 인 두 수 a ,
 b 에 대하여 $a+b$ 의 값을
 구하면 오른쪽 표와 같으
 므로
 $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$b \backslash a$	-1	1
1	0	2
2	1	3
3	2	4

026 답 3

두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 3\}$ 에 대하여
 $a \in A, b \in B$ 인 두 수 a ,
 b 에 대하여 $a+b$ 의 값을
 구하면 오른쪽 표와 같으
 므로
 $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$b \backslash a$	-1	0	1
1	0	1	2
3	2	3	4

또, $a \in A, b \in B$ 인 두 수
 a, b 에 대하여 ab 의 값을
 구하면 오른쪽 표와 같으
 므로

$b \backslash a$	-1	0	1
1	-1	0	1
3	-3	0	3

$D = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$
 따라서 두 집합 C, D에 공통으로 포함되는 원소는
 0, 1, 3의 3개이다.

027 답 18

$A = \{x|x \text{는 } 100 \text{ 이하의 } 7 \text{의 배수}\} = \{7, 14, 21, \dots, 98\}$
 $B = \{x|x \text{는 } 27 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 3, 9, 27\}$
 따라서 $n(A) = 14, n(B) = 4$ 이므로
 $n(A) + n(B) = 14 + 4 = 18$

028 답 ③

- ① $A = \emptyset$ 이면 $n(A) = 0$
 - ② $A = \{3\}$ 이면 $n(A) = 1$
 - ③ $A = \{0, \emptyset\}$ 이면 $n(A) = 2$
 - ④ $A = \{x|x \text{는 } 6 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 3, 6\}$ 이면 $n(A) = 4$
 - ⑤ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}$ 이면
 $n(A) = 3, n(B) = 2 \quad \therefore n(A) > n(B)$
- 따라서 옳은 것은 ③이다.

029 답 ③

- ㄱ. $A = \{\emptyset\}$ 이면 $n(A) = 1, B = \emptyset$ 이면 $n(B) = 0$
 $\therefore n(A) \neq n(B)$
 - ㄴ. $A = \{0, 1, 2\}$ 이면 $n(A) = 3$
 $B = \{3, 4\}$ 이면 $n(B) = 2$
 $\therefore n(A) + n(B) = 5$
 - ㄷ. $A = \{x|x=3k+1, k=1, 2, 3\} = \{4, 7, 10\}$
 이므로 $n(A) = 3$
- 따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

030 답 (1) $\subset$ (2) $\subset$ (3) $\subset$ (4) $\not\subset$
 (5) $\not\subset$ (6) $\subset$ (7) $\subset$

- (1) $\{1\} \subset A$
- (2) $\{1, 9\} \subset A$
- (3) $\{4, 6, 8\} \subset A$
- (4) $5 \notin A$ 이므로 $\{1, 5, 9\} \not\subset A$
- (5) $7 \notin A$ 이므로 $\{3, 4, 6, 7\} \not\subset A$
- (6) $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$
- (7) 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이므로
 $\{1, 3, 4, 6, 8, 9\} \subset A$

031 답 (1) $A \subset B$ (2) $B \subset A$ (3) $B \subset A$
 (4) $B \subset A$ (5) $A \subset B$

- (3) $A = \{x|x \text{는 한 자리의 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$
 $B = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수인 자연수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
 $\therefore B \subset A$

- (4) $A = \{x | x \text{는 } 3 \text{의 배수}\} = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$
 $B = \{x | x \text{는 } 6 \text{의 배수}\} = \{6, 12, 18, \dots\}$
 $\therefore B \subset A$
- (5) $A = \{x | x^2 = 16\} = \{-4, 4\}$
 $B = \{x | x^2 \leq 16\} = \{x | -4 \leq x \leq 4\}$
 $\therefore A \subset B$

032 답 (1) $\subset$ (2) $\in$ (3) $\in$ (4) $\subset$ (5) $\subset$ (6) $\subset$

- (1) $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset \{0\}$
(2) $1 \in \{0, 1, 2\}$
(3) $\{1\}$ 은 집합 $\{0, \{1\}\}$ 의 원소이므로 $\{1\} \in \{0, \{1\}\}$
(4) 0 이 집합 $\{0, 1, \{1\}\}$ 의 원소이므로
 $\{0\} \subset \{0, 1, \{1\}\}$
(5) $0, 1$ 이 집합 $\{0, 1, \emptyset\}$ 의 원소이므로
 $\{0, 1\} \subset \{0, 1, \emptyset\}$
(6) $\{1, 3, 5, 7\} \subset \{1, 3, 5, 7\}$

033 답 (1) $\bigcirc$ (2) $\bigcirc$ (3) $\bigcirc$ (4) $\bigcirc$
(5) $\times$ (6) $\times$ (7) $\bigcirc$ (8) $\bigcirc$

- (1) $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$
(2) $\emptyset$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\emptyset \in A$
(3), (4) 0 은 집합 A 의 원소이므로 $0 \in A$, $\{0\} \subset A$
(5), (6) $\{2\}$ 는 집합 A 의 원소이지만 2 는 집합 A 의 원소가 아니므로 $2 \notin A$, $\{2\} \in A$
(7) $0, 1$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\{0, 1\} \subset A$
(8) $\emptyset, 0, \{2\}$ 는 집합 A 의 원소이므로 $\{\emptyset, 0, \{2\}\} \subset A$

- 034** 답 (1) $\emptyset, \{3\}$
(2) $\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}$
(3) $\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}$
(4) $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\},$
 $\{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\},$
 $\{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}$
- (1) $\{3\}$ 의 부분집합을 모두 구하면
 $\emptyset, \{3\}$
- (2) $\{2, 5\}$ 의 부분집합을 모두 구하면
 $\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}$
- (3) $\{1, 3, 5\}$ 의 부분집합을 모두 구하면
 $\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}$
- (4) $\{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수인 자연수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
의 부분집합을 부분집합의 원소의 개수에 따라 나누어 구하면 다음과 같다.
원소가 0개인 부분집합은 $\emptyset$
원소가 1개인 부분집합은 $\{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}$
원소가 2개인 부분집합은
 $\{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}$
원소가 3개인 부분집합은
 $\{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}$
원소가 4개인 부분집합은 $\{2, 3, 5, 7\}$

공백비법 부분집합 구하기

원소가 많은 집합의 부분집합을 구할 때는 (4)와 같이 부분집합의 원소의 개수에 따라 나누어 구하면 빠뜨리거나 중복된 것이 없이 구할 수 있다.

035 답 (1) $\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\},$
 $\{0, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}$

(2) $\{2, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}$

(3) $\{1\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$

(1) 0 을 원소로 갖는 부분집합은

$\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\},$
 $\{0, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}$

(2) $2, 3$ 을 원소로 갖는 부분집합은

$\{2, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}$

(3) 단계1. 1과 3을 제외한 집합의 부분집합 구하기

1과 3을 제외한 집합 $\{0, 2\}$ 의 부분집합은

$\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0, 2\}$

단계2. 단계1.에서 구한 부분집합에 각각 1을 넣은 집합 구하기

$\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0, 2\}$ 에 각각 1을 넣으면 1을 원소로 갖고 3을 원소로 갖지 않는 부분집합과 같으므로 구하는 집합은
 $\{1\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$

공백비법 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합 구하기

특정한 원소를 제외한 집합의 부분집합을 구한 후, 각 부분집합에 포함시켜야 할 원소를 넣은 집합을 구한다.

036 답 (1) $=$ (2) $\neq$ (3) $\neq$ (4) $=$ (5) $=$

(1) $A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{3, 2, 1, 0\}$

$\Rightarrow A = B$

(2) $A = \{1, 2, 3, 4, 6\},$

$B = \{x | x \text{는 } 6 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 3, 6\}$

$\Rightarrow A \neq B$

(3) $A = \{x | x \text{는 소수인 자연수}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\},$

$B = \{x | x \text{는 } 1 \text{보다 큰 홀수}\} = \{3, 5, 7, 9, \dots\}$

$\Rightarrow A \neq B$

(4) $A = \{x | x^2 = 1\} = \{-1, 1\},$

$B = \{x | |x| = 1\} = \{-1, 1\}$

$\Rightarrow A = B$

(5) $A = \{x | x \text{는 } 4 \text{ 이하의 짝수}\} = \{2, 4\}$

$x^2 - 6x + 8 = 0$ 에서 $(x-2)(x-4) = 0$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 4$

$\therefore B = \{x | x^2 - 6x + 8 = 0\} = \{2, 4\}$

$\Rightarrow A = B$

037 답 (1) $a=2, b=1$ (2) $a=3, b=1$ (3) $a=4, b=7$

(1) $A = \{1, a\}, B = \{2, b\}$ 에 대하여

$A = B$ 이므로 $1 \in B, 2 \in A$

$a=2, b=1$

- (2) $A = \{1, 2, a\}$, $B = \{2, 3, b\}$ 에 대하여
 $A = B$ 이므로 $1 \in B$, $3 \in A$
 $a = 3$, $b = 1$
- (3) $A = \{2, a+1\}$, $B = \{a-2, b-2\}$ 에 대하여
 $A = B$ 이므로 $2 \in B$, $a+1 \in B$
 이때 $a+1 \neq a-2$ 이므로 $a+1 = b-2$ ㉠
 즉, $2 = a-2$ 에서 $a = 4$
 ㉠에서 $4+1 = b-2$ $\therefore b = 7$

- 038** 답 (1) $\emptyset$, $\{3\}$, $\{7\}$
 (2) $\emptyset$, $\{2\}$, $\{5\}$, $\{11\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 11\}$, $\{5, 11\}$
 (3) $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 8\}$,
 $\{2, 4\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 8\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 8\}$,
 $\{1, 4, 8\}$, $\{2, 4, 8\}$

- (1) $\{3, 7\}$ 의 진부분집합을 모두 구하면
 $\emptyset$, $\{3\}$, $\{7\}$
- (2) $\{2, 5, 11\}$ 의 진부분집합을 모두 구하면
 $\emptyset$, $\{2\}$, $\{5\}$, $\{11\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 11\}$, $\{5, 11\}$
- (3) $\{x | x \text{는 } 8 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8\}$
 의 진부분집합을 원소의 개수에 따라 나누어 구하면 다음과 같다.
 원소가 0개인 진부분집합은
 $\emptyset$
 원소가 1개인 진부분집합은
 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{8\}$
 원소가 2개인 진부분집합은
 $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 8\}$
 원소가 3개인 진부분집합은
 $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 8\}$, $\{1, 4, 8\}$, $\{2, 4, 8\}$

- 039** 답 (1) 4 (2) 8 (3) 32 (4) 256 (5) 128

- (1) $A = \{1, 3\}$ 에서 $n(A) = 2$ 이므로 부분집합의 개수는
 $2^2 = 4$
- (2) $A = \{4, 8, 12\}$ 에서 $n(A) = 3$ 이므로 부분집합의 개수는
 $2^3 = 8$
- (3) $A = \{a, b, c, d, e\}$ 에서 $n(A) = 5$ 이므로 부분집합의 개수는
 $2^5 = 32$
- (4) $A = \{x | x \text{는 } 24 \text{의 양의 약수}\}$
 $= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
 에서 $n(A) = 8$ 이므로 부분집합의 개수는
 $2^8 = 256$
- (5) $A = \{x | x^2 \leq 15, x \text{는 정수}\}$
 $= \{x | -\sqrt{15} \leq x \leq \sqrt{15}, x \text{는 정수}\}$
 $= \{-3, -2, -1, \dots, 3\}$
 에서 $n(A) = 7$ 이므로 부분집합의 개수는
 $2^7 = 128$

- 040** 답 (1) 7 (2) 15 (3) 31 (4) 15 (5) 31

- (1) $A = \{0, 1, 2\}$ 에서 $n(A) = 3$ 이므로 진부분집합의 개수는
 $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$
- (2) $A = \{1, o, v, e\}$ 에서 $n(A) = 4$ 이므로 진부분집합의 개수는
 $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$

- (3) $A = \{x | x \text{는 홀수인 한 자리의 자연수}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 에서 $n(A) = 5$ 이므로 진부분집합의 개수는
 $2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$
- (4) $A = \{x | 5 \leq x \leq 15, x \text{는 소수인 자연수}\} = \{5, 7, 11, 13\}$
 에서 $n(A) = 4$ 이므로 진부분집합의 개수는
 $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$
- (5) $A = \{x | x = 4n - 3, n \text{은 홀수인 한 자리의 자연수}\}$
 $= \{1, 9, 17, 25, 33\}$
 에서 $n(A) = 5$ 이므로 진부분집합의 개수는
 $2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$

- 041** 답 2, 3, 1, 4

집합 $\{1, 2, 3\}$ 의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합은 원소 2를 제외한 집합 $\{1, 3\}$ 의 부분집합에 각각 원소 $\{2\}$ 를 넣은 것과 같다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$$2^{\boxed{3}} - \boxed{1} = 2^2 = \boxed{4}$$

- 042** 답 (1) 8 (2) 16 (3) 64 (4) 16

- (1) 집합 $\{10, 11, 12, 13\}$ 의 부분집합 중에서 10을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
 $2^{4-1} = 2^3 = 8$
- (2) 집합 $\{s, t, o, r, y\}$ 의 부분집합 중에서 o를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
 $2^{5-1} = 2^4 = 16$
- (3) 집합 $\{x | x \text{는 한 자리의 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 의 부분집합 중에서 1, 3, 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
 $2^{9-3} = 2^6 = 64$
- (4) 집합 $\{x | x \text{는 } 12 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 의 부분집합 중에서 1, 12를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
 $2^{6-2} = 2^4 = 16$

- 043** 답 5, 2, 8

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 2, 4를 원소로 갖지 않는 부분집합은 원소 2, 4를 제외한 집합 $\{1, 3, 5\}$ 의 부분집합과 같다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$$2^{\boxed{5}} - \boxed{2} = 2^3 = \boxed{8}$$

- 044** 답 (1) 16 (2) 32 (3) 64 (4) 8

- (1) 집합 $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ 의 부분집합 중에서 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
 $2^{5-1} = 2^4 = 16$
- (2) 집합 $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ 의 부분집합 중에서 a, b를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
 $2^{7-2} = 2^5 = 32$
- (3) $\{x | x \text{는 } 30 \text{ 이하의 } 4 \text{의 배수}\} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$
 이 집합의 부분집합 중에서 4를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
 $2^{7-1} = 2^6 = 64$

(4) $x^2 - x - 6 \leq 0$ 에서 $(x+2)(x-3) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 3$

$\therefore \{x | x^2 - x - 6 \leq 0, x \text{는 정수}\}$

$= \{x | -2 \leq x \leq 3, x \text{는 정수}\}$

$= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

이 집합의 부분집합 중에서 0, 1, 2를 원소로 갖지 않는 부분 집합의 개수는

$2^{6-3} = 2^3 = 8$

045 답 (1) 16 (2) 16 (3) 4

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서

(1) 짝수 2, 4, 6을 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{7-3} = 2^4 = 16$

(2) 1을 반드시 원소로 갖고, 6, 7을 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{7-1-2} = 2^4 = 16$

(3) 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖고, 4, 5를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{7-3-2} = 2^2 = 4$

참고 (1) 홀수로만 이루어진 부분집합이므로 집합 $\{1, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합과 같다.

(2) 집합 $\{2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합에 1을 각각 넣은 집합과 같다.

(3) 집합 $\{6, 7\}$ 의 부분집합에 1, 2, 3을 각각 넣은 집합과 같다.

046 답 (1) 32 (2) 16 (3) 8

집합 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여

$n(A) = 7$

(1) $-3 \in X, 3 \in X$ 이므로 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중에서 $-3, 3$ 을 반드시 원소로 갖는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$2^{7-2} = 2^5 = 32$

(2) $-2 \notin X, -1 \notin X, 2 \in X$ 이므로 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖고 $-2, -1$ 은 원소로 갖지 않는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$2^{7-1-2} = 2^4 = 16$

(3) $\{0, 1, 2\} \subset X, -2 \notin X$ 이므로 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중에서 0, 1, 2를 반드시 원소로 갖고 -2 는 원소로 갖지 않는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$2^{7-3-1} = 2^3 = 8$

047 답 ⑤

$A = \{x | x \text{는 } 15 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 3, 5, 15\}$

① 5는 집합 A 의 원소이므로 $5 \in A$

② 30은 집합 A 의 원소가 아니므로 $30 \notin A$

③ 3은 집합 A 의 원소이므로 $\{3\} \subset A$

④ 1, 15는 집합 A 의 원소이므로 $\{1, 15\} \subset A$

⑤ 10은 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{5, 10, 15\} \not\subset A$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

048 답 ④

두 집합 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여

①, ③ 1은 집합 A 의 원소이므로 $1 \in A, \{1\} \subset A$

② 2는 집합 B 의 원소이므로 $2 \in B$

④ 2는 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{1, 2, 3\} \not\subset A$

⑤ 집합 A 의 원소 1, 3, 5가 모두 집합 B 의 원소이므로 $A \subset B$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

049 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

집합 $A = \{\emptyset, 1, 2, \{3\}\}$ 에 대하여

ㄱ. 1은 집합 A 의 원소이므로 $1 \in A$

ㄴ. 3은 집합 A 의 원소가 아니므로 $3 \notin A$

ㄷ. $\emptyset$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\emptyset \in A$

ㄹ. $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$

ㅁ. 3은 집합 A 의 원소가 아니고, $\{3\}$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\{3\} \not\subset A, \{3\} \in A$

ㅂ. 1, 2는 집합 A 의 원소이므로 $\{1, 2\} \subset A$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ이다.

050 답 ⑤

두 집합 A, B 사이의 포함 관계가 주어진 벤 다이어그램과 같으려면 $A \subset B$ 이어야 한다.

ㄱ. $A = \{-1, 1\}, B = \{-1, 0, 1\}$ 이므로 $A \subset B$

ㄴ. $A = \{2, 3, 5, 7\},$

$B = \{x | x \text{는 소수인 자연수}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$

이므로 $A \subset B$

ㄷ. $A = \{x | x \text{는 } 8 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8\},$

$B = \{x | x \text{는 } 16 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

이므로 $A \subset B$

따라서 포함 관계가 주어진 벤 다이어그램과 같은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

051 답 ②, ③

세 집합 $A = \{3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\},$

$C = \{x | 2 < x < 5, x \text{는 정수}\} = \{3, 4\}$ 에 대하여

$C \subset A \subset B$

따라서 옳지 않은 것은 ②, ③이다.

052 답 $B \subset A \subset C$

세 집합 A, B, C 가

$A = \{-1, 0, 1\},$

$B = \{x | |x| = 1\} = \{-1, 1\},$

$C = \{x | x^2 \leq 1\} = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$

이므로

$B \subset A \subset C$

053 답 6

두 집합 $A = \{3, 4, 5\}, B = \{x | x < a\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 를 만족시키려면

$a > 5$

따라서 정수 a 의 최솟값은 6이다.

054 답 1

두 집합 A, B 사이의 포함 관계가 주어진 벤 다이어그램과 같으려면 $B \subset A$ 이어야 한다.

이때 두 집합 $A = \{-1, 1, 3a-1, 4a+1\}$, $B = \{-1, 2\}$ 에서 $2 \in A$ 이므로 $3a-1=2$ 또는 $4a+1=2$

(i) $3a-1=2$ 일 때,

$$3a=3 \text{에서 } a=1$$

$$A = \{-1, 1, 2, 5\}, B = \{-1, 2\}$$

이므로 $B \subset A$

(ii) $4a+1=2$ 일 때,

$$4a=1 \text{에서 } a=\frac{1}{4}$$

$$A = \left\{-1, -\frac{1}{4}, 1, 2\right\}, B = \{-1, 2\}$$

이므로 $B \subset A$

(i), (ii)에서 $a=1$ 또는 $a=\frac{1}{4}$

따라서 정수 a 의 값은 1이다.

055 답 2

$A \subset B \subset C$ 가 성립하도록 세 집합

$$A = \{x | 1 \leq x \leq 4\}, B = \{x | 0 \leq x \leq 3a\}, C = \{x | x \leq 10\}$$

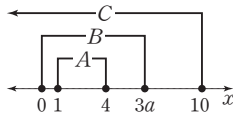
를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림

과 같으므로

$$4 \leq 3a \leq 10$$

$$\therefore \frac{4}{3} \leq a \leq \frac{10}{3}$$

따라서 이를 만족시키는 정수 a 는 2, 3의 2개이다.



056 답 ⑤

$$x^2 + x - 12 \leq 0 \text{에서}$$

$$(x+4)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq x \leq 3$$

$$\therefore A = \{x | -4 \leq x \leq 3\}$$

$$\text{자연수 } a \text{에 대하여 } x^2 < a^2 \text{에서 } x^2 - a^2 < 0$$

$$(x+a)(x-a) < 0 \quad \therefore -a < x < a$$

$$\therefore B = \{x | -a < x < a\}$$

$A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B

를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림

과 같으므로

$$-a < -4, 3 < a \quad \therefore a > 4 \quad \dots\dots ㉠$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a 의 최솟값은 5이다.

주의 집합의 포함 관계를 만족시키는 범위를 구할 때는 등호의 포함 여부에 주의한다.

㉠에서 $a=4$ 이면 $A = \{x | -4 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | -4 < x < 4\}$ 이므로 $A \not\subset B$ 이다.

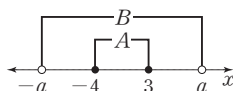
057 답 4

두 집합 $A = \{2, 3, a^2-2\}$, $B = \{3, 7, a+b\}$ 에 대하여

$$A = B \text{이므로 } 2 \in B, 7 \in A$$

$$2 \in B \text{에서 } a+b=2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$7 \in A \text{에서 } a^2-2=7, a^2=9 \quad \therefore a=3 (\because a>0)$$



$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } 3+b=2 \quad \therefore b=-1$$

$$\therefore a-b=3-(-1)=4$$

058 답 ⑤

두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 이면

$$A=B$$

$$\neg. A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 1, 2\} \text{이므로 } A=B$$

$$\neg. A = \{2, 3, 5, 7\},$$

$$B = \{x | x \text{는 소수인 한 자리의 자연수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$\text{이므로 } A=B$$

$$\neg. x^2-6x+8=0 \text{에서}$$

$$(x-2)(x-4)=0 \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=4$$

$$\therefore A = \{x | x^2-6x+8=0\} = \{2, 4\}$$

$$\text{또, } B = \{x | x \text{는 5보다 작은 짝수}\} = \{2, 4\} \text{이므로}$$

$$A=B$$

따라서 $A \subset B$, $B \subset A$ 를 만족시키는 두 집합 A, B 는

$\neg, \neg, \neg$ 이다.

059 답 40

$$B = \{x | x \text{는 12의 약수인 한 자리의 자연수}\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 이면

$$A=B$$

이때 $A = \{1, 4, a, a+1, b\}$ 에서 $2 \in A$, $3 \in A$, $6 \in A$ 이고 a ,

$a+1$ 은 연속하는 자연수이므로

$$a=2, a+1=3, b=6$$

$$\therefore a^2+b^2=2^2+6^2=40$$

060 답 ⑤

A 의 진부분집합은 자기 자신 $\{0, 1, \emptyset\}$ 을 제외한 부분집합이다.

따라서 집합 A 의 진부분집합이 아닌 것은 ⑤이다.

참고 집합 $A = \{0, 1, \emptyset\}$ 의 진부분집합을 모두 구하면 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{\emptyset\}, \{0, 1\}, \{0, \emptyset\}, \{1, \emptyset\}$

061 답 ①, ④

$$x^2-x-6 < 0 \text{에서 } (x+2)(x-3) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 3$$

$$\therefore A = \{x | x^2-x-6 < 0, x \text{는 정수}\}$$

$$= \{x | -2 < x < 3, x \text{는 정수}\}$$

$$= \{-1, 0, 1, 2\}$$

따라서 집합 A 의 진부분집합은 ①, ④이다.

062 답 $\neg, \neg$

집합 $A = \{1, 3, 9\}$ 에 대하여

$$\neg. \{1, 9\} \subset A, \{1, 9\} \neq A \text{이므로 진부분집합이다.}$$

$$\neg. \{x | x \text{는 3의 양의 약수}\} = \{1, 3\}$$

$$\text{이때 } \{1, 3\} \subset A, \{1, 3\} \neq A \text{이므로 진부분집합이다.}$$

$$\neg. \{x | x \text{는 9의 양의 약수}\} = \{1, 3, 9\}$$

이때 $\{1, 3, 9\} \subset A$ 이지만 $\{1, 3, 9\} = A$ 이므로 진부분집합이 아니다.

르. $\{x|x \text{는 } 27 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 3, 9, 27\}$

이때 $\{1, 3, 9, 27\} \not\subset A$ 이므로 진부분집합이 아니다.

따라서 집합 A 의 진부분집합인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른 풀이

집합 $A = \{1, 3, 9\}$ 의 진부분집합을 모두 구하면

$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}$

ㄱ. $\{1, 9\}$

ㄴ. $\{x|x \text{는 } 3 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 3\}$

ㄷ. $\{x|x \text{는 } 9 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 3, 9\}$

르. $\{x|x \text{는 } 27 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 3, 9, 27\}$

따라서 집합 A 의 진부분집합인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

063 답 63

$x^2 + 3x - 4 \leq 0$ 에서 $(x+4)(x-1) \leq 0$

$\therefore -4 \leq x \leq 1$

$\therefore A = \{x|x^2 + 3x - 4 \leq 0, x \text{는 정수}\}$

$= \{x|-4 \leq x \leq 1, x \text{는 정수}\}$

$= \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

따라서 $n(A) = 6$ 이므로 집합 A 의 진부분집합의 개수는

$2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$

064 답 ③

① $\{2, 3, 4\}$ 의 원소의 개수가 3이므로 부분집합의 개수는

$2^3 = 8$

② $\{x|x \text{는 } 12 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 의 원소의 개수가 6이므로 부분집합의 개수는

$2^6 = 64$

③ $\{x|x \text{는 } 10 \text{보다 작은 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$ 의 원소의 개수가 4이므로 부분집합의 개수는

$2^4 = 16$

④ $\{x|x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는

$2^5 = 32$

⑤ $\{x|x \text{는 } 11 \text{의 배수인 두 자리 자연수}\}$

$= \{11, 22, 33, \dots, 99\}$

의 원소의 개수가 9이므로 부분집합의 개수는

$2^9 = 512$

따라서 부분집합의 개수가 16인 것은 ③이다.

065 답 63

집합 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 $a \in A, b \in A$ 인 a, b 에 대하여 ab 의 값을 구하면 다음 표와 같다.

$b \backslash a$	-1	0	1	2
-1	1	0	-1	-2
0	0	0	0	0
1	-1	0	1	2
2	-2	0	2	4

$\therefore B = \{x|x = ab, a \in A, b \in A\}$

$= \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$

따라서 $n(B) = 6$ 이므로 집합 B 의 진부분집합의 개수는

$2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$

066 답 32

두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = a, n(B) = b$ 라 하면

$n(A) - n(B) = 1$ 에서 $a - b = 1$

..... ㉠

이때 집합 B 의 진부분집합의 개수가 15이므로

$2^b - 1 = 15$ 에서 $2^b = 16 = 2^4$

$\therefore b = 4$

이를 ㉠에 대입하면

$a - 4 = 1 \quad \therefore a = 5$

따라서 $n(A) = 5$ 이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는

$2^5 = 32$

067 답 4

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중에서 1, 2는 반드시 원소로 갖고 3, 5는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-2-2} = 2^2 = 4$

참고 1, 2, 3, 5를 제외한 집합 $\{4, 6\}$ 의 부분집합에 각각 1, 2를 넣은 것과 같다.

068 답 16

$\{x|x \text{는 } 10 \text{ 이상 } 35 \text{ 미만의 소수}\}$

$= \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$

이 집합의 부분집합 중에서 11은 반드시 원소로 갖고 13, 29는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{7-1-2} = 2^4 = 16$

069 답 ⑤

$A = \{x|x \text{는 } 30 \text{의 양의 약수}\}$

$= \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

집합 A 의 부분집합 X 에 대하여 $1 \in X, 2 \in X, 30 \notin X$ 이므로 구하는 X 의 개수는 1, 2를 반드시 원소로 갖고 30을 원소로 갖지 않는 집합 A 의 부분집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$2^{8-2-1} = 2^5 = 32$

070 답 12

$A = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 } 12 \text{의 양의 약수}\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

집합 A 의 부분집합 중에서 짝수인 원소가 2개인 집합은 집합 A 의 짝수인 원소 2, 4, 6 중 2, 4 또는 2, 6 또는 4, 6만을 원소로 가져야 한다.

(i) 2, 4는 반드시 원소로 갖고 6은 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 $2^{5-2-1} = 2^2 = 4$

(ii) 2, 6은 반드시 원소로 갖고 4는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 $2^{5-2-1} = 2^2 = 4$

(iii) 4, 6은 반드시 원소로 갖고 2는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 $2^{5-2-1} = 2^2 = 4$

(i)~(iii)에서 구하는 집합의 개수는

$4 + 4 + 4 = 12$

071 답 ⑤

$\{x|x \text{는 한 자리의 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 이므로
 $\{1, 3, 5\} \subset X \subset \{x|x \text{는 한 자리의 자연수}\}$ 에서
 $\{1, 3, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, \dots, 9\}$
 따라서 집합 X 의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 의 부분집합 중
 1, 3, 5를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
 $2^{9-3} = 2^6 = 64$

072 답 4

$A = \{x|x \text{는 6의 양의 약수}\} = \{1, 2, 3, 6\}$
 $B = \{x|x \text{는 18의 양의 약수}\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
 이때 $A \subset X \subset B$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분
 집합 중에서 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으
 므로
 $2^{6-4} = 2^2 = 4$

073 답 7

$B = \{x|x \text{는 } n \text{ 이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 이므로
 $n(B) = n$
 이때 두 집합 $A = \{2, 5, 6\}$, B 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족시키
 는 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 2, 5, 6을 반드시
 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
 $2^{n-3} = 16 = 2^4$
 $n-3=4 \quad \therefore n=7$

074 답 4

$x^2 - 3x + 2 \leq 0$ 에서
 $(x-1)(x-2) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq x \leq 2$
 $\therefore A = \{x|x^2 - 3x + 2 \leq 0, x \text{는 정수}\}$
 $= \{x|1 \leq x \leq 2, x \text{는 정수}\}$
 $= \{1, 2\}$
 또, 자연수 n 에 대하여 $x = \frac{10}{n}$ 이 자연수이면 x 는 10의 양의 약
 수이므로
 $B = \left\{x \left| x = \frac{10}{n} \text{이고, } x, n \text{은 자연수} \right. \right\}$
 $= \{x|x \text{는 10의 양의 약수}\}$
 $= \{1, 2, 5, 10\}$
 따라서 $A \subset X \subset B$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부
 분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므
 로
 $2^{4-2} = 2^2 = 4$

중단원 점검 문제

II-1 집합의 뜻과 포함 관계

093~094쪽

01 답 ②, ⑤

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ 에서
 $x^2(x-2) - (x-2) = 0, (x-2)(x^2-1) = 0$
 $(x+1)(x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$
 $\therefore A = \{-1, 1, 2\}$
 ① $-2 \notin A$ ② $-1 \in A$ ③ $0 \notin A$
 ④ $1 \in A$ ⑤ $2 \in A$
 따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

02 답 ⑤

① $\sqrt{9} = 3$ 은 자연수이므로 $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$
 ② 0은 정수이므로 $0 \in \mathbb{Z}$
 ③ $-\sqrt{4} = -2$ 는 유리수이므로 $-\sqrt{4} \in \mathbb{Q}$
 ④ 3.14는 유리수이므로 $3.14 \in \mathbb{Q}$
 ⑤ $i^{99} = (i^4)^{24} \times i^3 = -i$ 는 허수이므로 $i^{99} \notin \mathbb{R}$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

03 답 53

집합 $\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$ 는 24 이하의 4의 배수의 집합이다.
 이때 24보다 큰 4의 배수는 28이므로 조건제시법으로 나타낸 집
 합 $\{x|x < k, x \text{는 4의 배수}\}$ 가 이 집합을 나타내려면
 $24 < k \leq 28$
 이를 만족시키는 자연수 k 는 25, 26, 27, 28이다.
 따라서 자연수 k 의 최댓값은 $M = 28$, 최솟값은 $m = 25$ 이므로
 $M + m = 28 + 25 = 53$

04 답 ⑤

집합 $A = \{x|x \text{는 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 에 대하여
 집합 $B = \{x|x = a \times 2^b, a \in A, b \in A\}$ 의 원소는
 (자연수) $\times$ (2의 거듭제곱) ㉠
 꼴로 나타낼 수 있는 수이다.
 ① 1은 ㉠ 꼴로 나타낼 수 없으므로 $1 \notin B$
 ② $2 = 1 \times 2^1$ 으로 나타낼 수 있으므로 $2 \in B$
 ③ $4 = 1 \times 2^2$ 또는 $4 = 2 \times 2^1$ 으로 나타낼 수 있으므로 $4 \in B$
 ④ $12 = 3 \times 2^2$ 또는 $12 = 6 \times 2^1$ 으로 나타낼 수 있으므로 $12 \in B$
 ⑤ 15는 ㉠ 꼴로 나타낼 수 없으므로 $15 \notin B$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

주의 집합 $A = \{x|x \text{는 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 에 대하여
 $a \in A, b \in A$ 인 두 수 a, b 에 대하여 $a \times 2^b$ 의 값을 구하면 다음 표와 같다.

$b \backslash a$	1	2	3	4	...
1	2	4	6	8	...
2	4	8	12	16	...
3	8	16	24	32	...
4	16	32	48	64	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$\therefore B = \{x|x = a \times 2^b, a \in A, b \in A\} = \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, \dots\}$

05 답 5

집합 $A = \{x | x^2 + 4x + 5 = 0, x \text{는 실수}\}$ 는 이차방정식 $x^2 + 4x + 5 = 0$ 의 실근의 집합이므로 $n(A)$ 는 실근의 개수를 의미한다.

이차방정식 $x^2 + 4x + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 1 \times 5 = -1 < 0$$

즉, 실근이 존재하지 않으므로 $n(A) = 0$

이때 $n(A) = n(B)$ 이라면 $n(B) = 0$ 이어야 한다.

집합 $B = \{x | x^2 + 2ax + 6a = 0, x \text{는 실수}\}$ 는 이차방정식 $x^2 + 2ax + 6a = 0$ 의 실근의 집합이므로 $n(B) = 0$ 이라면 이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2 + 2ax + 6a = 0$ 의 판별식을 D' 이라 하면

$$\frac{D'}{4} = a^2 - 6a < 0$$

$$a(a-6) < 0 \quad \therefore 0 < a < 6$$

따라서 이를 만족시키는 정수 a 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

06 답 ②

집합 $A = \{\emptyset, 1, \{1\}, \{1, 2\}\}$ 에 대하여

①, ④ 2는 집합 A 의 원소가 아니므로 $2 \notin A, \{2\} \not\subset A$

② $\{1\}$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\{1\} \in A$

③ $\emptyset$ 은 집합 A 의 원소이지만 $\{\emptyset\}$ 은 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{\emptyset\} \notin A$

⑤ $\{1, 2\}$ 는 집합 A 의 원소이지만 2는 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{1, 2\} \in A, \{1, 2\} \not\subset A$

따라서 옳은 것은 ②이다.

07 답 ④

집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여

$a \in A, b \in A$ 인 두 수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$b \backslash a$	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

또, $a \in A, b \in A$ 인 두 수 a, b 에 대하여 ab 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$b \backslash a$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

$$C = \{-1, 0, 1\}$$

따라서 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는

$$A = C \subset B$$

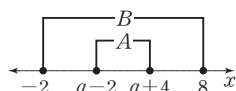
08 답 5

$-2 \leq x - a \leq 4$ 에서 $a - 2 \leq x \leq a + 4$ 이므로

$$A = \{x | a - 2 \leq x \leq a + 4\},$$

$$B = \{x | -2 \leq x \leq 8\}$$

$A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$$-2 \leq a - 2, a + 4 \leq 8 \quad \therefore 0 \leq a \leq 4$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a 는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

09 답 48

자연수 n 에 대하여 자연수 전체집합의 부분집합 A_n 이

$$A_n = \{x | x \text{는 } \sqrt{n} \text{ 이하의 홀수}\} \text{이므로}$$

$$A_{25} = \{x | x \text{는 } \sqrt{25} \text{ 이하의 홀수}\}$$

$$= \{x | x \text{는 } 5 \text{ 이하의 홀수}\}$$

$$= \{1, 3, 5\}$$

이때 $A_n \subset A_{25}$ 이라면 $1 \leq \sqrt{n} < 7$ 이어야 하므로

$$1 \leq n < 49$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 48이다.

참고 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n}$ 이하의 홀수는

$$1 \leq n \leq 81 \text{ 일 때, } 1$$

$$9 \leq n \leq 24 \text{ 일 때, } 1, 3$$

$$25 \leq n \leq 48 \text{ 일 때, } 1, 3, 5$$

$$49 \leq n \leq 80 \text{ 일 때, } 1, 3, 5, 7$$

⋮

10 답 ②

집합 $A = \{x | 3x^2 + x + a = 0\}$ 은 이차방정식 $3x^2 + x + a = 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 집합이다.

이때 $B = \left\{-1, b - \frac{1}{3}\right\}$ 이고 $A \subset B, B \subset A$ 이면 $A = B$ 이므로

이차방정식 $3x^2 + x + a = 0$ 의 해가 $-1, b - \frac{1}{3}$ 이다.

$x = -1$ 이 이차방정식의 해이므로

$$3 \times (-1)^2 + (-1) + a = 0 \quad \therefore a = -2$$

이를 이차방정식에 대입하면

$$3x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+1)(3x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}$$

$$\text{즉, } b - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ 이므로 } b = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$$

11 답 ③

$$x^2 - 11x + 18 \leq 0 \text{ 에서}$$

$$(x-2)(x-9) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq x \leq 9$$

$$\therefore A = \{x | x^2 - 11x + 18 \leq 0, x \text{는 정수}\}$$

$$= \{x | 2 \leq x \leq 9, x \text{는 정수}\}$$

$$= \{2, 3, 4, \dots, 9\}$$

이때 집합 A 의 부분집합 중에서 모든 원소가 홀수로만 이루어진

집합의 개수는 집합 $\{3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^4 = 16$$

12 답 63

$$A = \{x | x \text{는 } 24 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

집합 A 에 대하여 집합 X 가 $X \subset A, X \neq A$ 를 만족시키므로 집합 X 는 집합 A 의 진부분집합이다.

따라서 집합 A 의 부분집합 중에서 1, 3을 반드시 원소로 갖는 진부분집합의 개수는

$$2^{8-2} - 1 = 2^6 - 1 = 63$$

13 답 96

$$2x-5 \leq x+5 \text{에서 } x \leq 10 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$x+5 \leq 4x+4 \text{에서 } 3x \geq 1 \quad \therefore x \geq \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

⑦, ①에서 부등식 $2x-5 \leq x+5 \leq 4x+4$ 의 해는

$$\frac{1}{3} \leq x \leq 10$$

$$\therefore A = \{x \mid 2x-5 \leq x+5 \leq 4x+4, x \text{는 정수}\}$$

$$= \left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x \leq 10, x \text{는 정수}\right\}$$

$$= \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

즉, 집합 A 의 부분집합 중에서 3, 4, 5, 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수 a 는

$$a = 2^{10-4} = 2^6 = 64$$

또, 집합 A 의 부분집합 중에서 4, 5, 6, 7, 8을 원소로 갖지 않는 집합의 개수 b 는

$$b = 2^{10-5} = 2^5 = 32$$

$$\therefore a+b = 64+32 = 96$$

14 답 ④

$$A = \{x \mid x \leq n \text{이고}, x, n \text{은 자연수}\}$$

$$= \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$\text{이므로 } n(A) = n$$

즉, 집합 A 의 부분집합 중에서 2는 반드시 원소로 갖고, 1, 6은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{n-1-2} = 2^{n-3}$$

$$\text{이 개수가 } 128 \text{이므로 } 2^{n-3} = 128 = 2^7$$

$$\text{따라서 } n-3=7 \text{이므로 } n=10$$

15 답 ①

주어진 벤 다이어그램에서

$$A = \{3, 5, 6\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$A \subset X \subset B$ 를 만족시키는 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중에서 3, 5, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 X 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 1, 3, 5, 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수

$$\text{이므로 } 2^{8-4} = 2^4 = 16$$

16 답 12

두 집합 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$, $B \not\subset X$ 를 만족시키는 집합 X 는 집합 B 의 진부분집합 중에서 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

이때 $n(B) = n$ 이고 조건을 만족시키는 집합 X 의 개수가 255이므로

$$2^{n-4} - 1 = 255$$

$$\text{따라서 } 2^{n-4} = 256 = 2^8 \text{이므로}$$

$$n-4=8 \quad \therefore n=12$$

II-2 | 집합의 연산

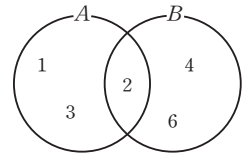
095~107쪽

001 답 (1) 풀이 참조

$$(2) 2, 3$$

$$(3) 2$$

(1) 두 집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$(2) A \cup B = \{1, \boxed{2}, \boxed{3}, 4, 6\}$$

$$(3) A \cap B = \{\boxed{2}\}$$

002 답 (1) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, i, o, u\}$,

$$A \cap B = \{a, e\}$$

$$(2) A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\},$$

$$A \cap B = \{3, 6\}$$

$$(3) A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16\},$$

$$A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}$$

(1) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$
이므로

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, i, o, u\},$$

$$A \cap B = \{a, e\}$$

(2) $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
 $B = \{3, 6, 9\}$

이므로

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\},$$

$$A \cap B = \{3, 6\}$$

(3) $A = \{x \mid x \text{는 한 자리의 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$,
 $B = \{x \mid x \text{는 } 16 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

이므로

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16\},$$

$$A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}$$

003 답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ×

(1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ 에서 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소이다.

(2) $A = \{a, p, l, e\}$, $B = \{c, l, h, t\}$ 에서 $A \cap B = \{l\}$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

(3) $A = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 3, 9\}$,
 $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 } 5 \text{의 배수}\} = \{5, 10\}$ 에서
 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소이다.

(4) $x^2+2x+1=0$ 에서 $(x+1)^2=0 \quad \therefore x=-1$

$$\therefore A = \{x \mid x^2+2x+1=0\} = \{-1\}$$

$$x^2+x-2 \leq 0 \text{에서 } (x+2)(x-1) \leq 0$$

$$\text{즉, } -2 \leq x \leq 1 \text{이므로}$$

$$B = \{x \mid x^2+x-2 \leq 0, x \text{는 정수}\}$$

$$= \{x \mid -2 \leq x \leq 1, x \text{는 정수}\}$$

$$= \{-2, -1, 0, 1\}$$

따라서 $A \cap B = \{-1\}$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

004 답 (1) 풀이 참조, 5, 6, 7

(2) 풀이 참조, 7, 9, 2, 4

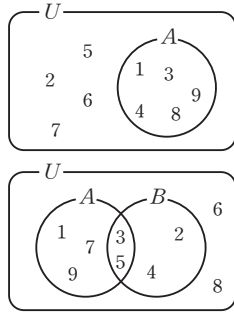
(1) 전체집합 U 의 부분집합 A 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$A^c = \{2, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}\}$$

(2) 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$A - B = \{1, \boxed{7}, \boxed{9}\},$$

$$B - A = \{\boxed{2}, \boxed{4}\}$$



005 답 (1) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

(2) $\{2, 4, 5, 6\}$

(3) $\{4, 7, 8, 9\}$

(4) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

$U = \{x | x \text{는 한 자리의 자연수}\}$
 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(1) $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로

$$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

(2) $A = \{1, 3, 7, 8, 9\}$ 이므로

$$A^c = \{2, 4, 5, 6\}$$

(3) $A = \{x | x \text{는 30의 약수}\} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ 이므로

$$A^c = \{4, 7, 8, 9\}$$

(4) $A = \{x | x \text{는 3의 배수}\} = \{3, 6, 9\}$ 이므로

$$A^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

006 답 (1) $A - B = \{a, d, e\}, B - A = \{g\}$

(2) $A - B = \{1, 4\}, B - A = \{12\}$

(3) $A - B = \{3, 7, 9\}, B - A = \emptyset$

(4) $A - B = \{12\}, B - A = \{5, 6, 7, 9\}$

(3) $A = \{x | x \text{는 10 이하의 홀수인 자연수}\}$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{x | x \text{는 5의 양의 약수}\}$$

$$= \{1, 5\}$$

$$\therefore A - B = \{3, 7, 9\}, B - A = \emptyset$$

(4) $A = \{x | x \text{는 12 이하의 4의 배수}\}$

$$= \{4, 8, 12\}$$

$$B = \{x | 4 \leq x < 10, x \text{는 자연수}\}$$

$$= \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\therefore A - B = \{12\}, B - A = \{5, 6, 7, 9\}$$

007 답 $\{2, 3, 5\}$

두 집합 A, B 에 대하여 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분은 집합 $A \cap B$ 를 나타낸다.

이때

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$B = \{x | x \text{는 한 자리의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$$

이므로 구하는 집합은

$$A \cap B = \{2, 3, 5\}$$

008 답 ④

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 3, 4, 5\},$$

$$C = \{x | x \text{는 5 이하의 홀수인 자연수}\} = \{1, 3, 5\}$$

$$\textcircled{1} A \cap B = \{3, 5\}$$

$$\textcircled{2} A \cap C = \{1, 3, 5\}$$

$$\textcircled{3} B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\textcircled{4} (A \cap B) \cap C = \{3, 5\} \cap \{1, 3, 5\} = \{3, 5\}$$

$$\textcircled{5} A \cap (B \cup C) = \{1, 3, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 3, 5\}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

009 답 20

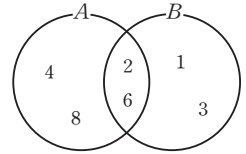
$$B = \{x | x \text{는 6의 양의 약수}\} = \{1, 2, 3, 6\}$$

이때 $A \cap B = \{2, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ 이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로 집합

A 의 모든 원소의 합은

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20$$



010 답 ③, ④

$A = \{1, 3, 5\}$ 라 하면

① $B = \emptyset$ 일 때, $A \cap B = \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소이다.

② $B = \{2, 4\}$ 일 때, $A \cap B = \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소이다.

③ $B = \{1, 2, 3\}$ 일 때, $A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

④ $B = \{x | x \text{는 5의 양의 약수}\} = \{1, 5\}$ 일 때,

$$A \cap B = \{1, 5\}$$
이므로 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

⑤ $B = \{x | x \text{는 4의 양의 배수}\} = \{4, 8, 12, \dots\}$ 일 때,

$$A \cap B = \emptyset$$
이므로 두 집합 A, B 는 서로소이다.

따라서 주어진 집합과 서로소가 아닌 집합은 ③, ④이다.

011 답 ②

① $A = \{x | x \text{는 자연수}\}, B = \{x | x \text{는 정수}\}$ 에서

$$A \cap B = A \neq \emptyset$$
이므로 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

② $A = \{x | x \text{는 12의 양의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\},$

$$B = \{x | x \text{는 10의 양의 배수}\} = \{10, 20, 30, \dots\}$$
이므로

$$A \cap B = \emptyset,$$
 즉 두 집합 A, B 는 서로소이다.

③ $A = \{x | x^2 = 1\} = \{-1, 1\}, B = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$ 에서

$$A \cap B = A \neq \emptyset$$
이므로 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

④ $A = \{x | x \geq 0\}, B = \{x | x \leq 0\}$ 에서 $A \cap B = \{0\}$ 이므로

두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

⑤ $x^2 + 3x + 2 = 0$ 에서 $(x+2)(x+1) = 0$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -1$$

$$\therefore A = \{x | x^2 + 3x + 2 = 0\} = \{-2, -1\}$$

$$\text{또, } |x| = 2 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 2 \text{이므로}$$

$$B = \{x | |x| = 2\} = \{-2, 2\}$$

즉, $A \cap B = \{-2\}$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

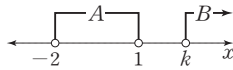
따라서 두 집합 A, B 가 서로소인 것은 ②이다.

012 답 1

두 집합 A, B 가 서로소이려면 $A \cap B = \emptyset$ 이어야 한다.

즉, 두 집합을 수직선에 나타내었을

때, 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$k \geq 1$

따라서 구하는 정수 k 의 최솟값은 1이다.

013 답 4

집합 $A = \{1, 2, 5, 6, 8\}$ 의 부분집합 중에서 집합 $B = \{1, 5, 8\}$

과 서로소인 집합은 집합 $\{2, 6\}$ 의 부분집합과 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$$2^2 = 4$$

014 답 ⑤

$$U = \{x | x \text{는 한 자리의 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$A = \{x | x \text{는 2의 배수}\} = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{x | x \text{는 6의 약수}\} = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$\textcircled{1} A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\textcircled{2} B^c = \{4, 5, 7, 8, 9\}$$

$$\textcircled{3} A - B = \{4, 8\}$$

$$\textcircled{4} B - A = \{1, 3\}$$

$$\textcircled{5} A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \text{이므로}$$

$$(A \cup B)^c = \{5, 7, 9\}$$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

015 답 6

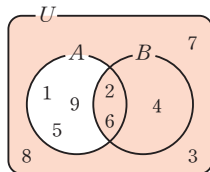
주어진 벤 다이어그램에서 $A - B = \{1, 5, 9\}$ 이므로

$$(A - B)^c = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$$

따라서 구하는 원소의 개수는 6이다.

다른 풀이

집합 $(A - B)^c$ 은 오른쪽 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이므로 구하는 원소는 2, 3, 4, 6, 7, 8의 6개이다.



016 답 ③

$$U = \{x | x \text{는 15 이하의 홀수인 자연수}\}$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

의 두 부분집합 $A = \{3, 7, 11, 13\}$,

$B = \{x | x \text{는 3의 배수}\} = \{3, 9, 15\}$ 에 대하여

$A - B = \{7, 11, 13\}$, $B - A = \{9, 15\}$ 이므로

$$(A - B)^c = \{1, 3, 5, 9, 15\},$$

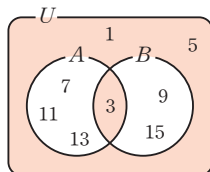
$$(B - A)^c = \{1, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

$$\therefore (A - B)^c \cap (B - A)^c = \{1, 3, 5\}$$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$$1 + 3 + 5 = 9$$

참고 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 집합 $(A - B)^c \cap (B - A)^c$ 은 색칠한 부분과 같다.



017 답 10

두 집합 $A = \{2, 3, a\}$, $B = \{1, 4, b-3\}$ 에 대하여

$A \cap B = \{3, 4\}$ 에서 $4 \in A$, $3 \in B$

$4 \in A$ 이므로 $a = 4$

$3 \in B$ 이므로 $b - 3 = 3 \quad \therefore b = 6$

$$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$$

018 답 6

두 집합 $A = \{5, 7\}$, $B = \{7, a, a+2\}$ 에 대하여

$A \cup B = \{5, 6, 7, 8\}$ 에서 $6 \in B$, $8 \in B$

이때 $a \in B$, $(a+2) \in B$ 이므로

$$a = 6$$

019 답 ④

$A = \{1, 2, a, a+1\}$, $A - B = \{2, 4\}$ 에서 $4 \in A$ 이므로

$a = 4$ 또는 $a + 1 = 4 \quad \therefore a = 4$ 또는 $a = 3$

(i) $a = 3$ 일 때,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 5, 6\}$ 이므로

$A - B = \{2, 3, 4\}$, 즉 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 4$ 일 때,

$A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{1, 5, 7\}$ 이므로

$A - B = \{2, 4\}$, 즉 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a = 4$, $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{1, 5, 7\}$ 이므로

$A \cap B = \{1, 5\}$, $B - A = \{7\}$

따라서 옳은 것은 ④이다.

020 답 24

$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ 이므로

$B = \{2, 4, 5, 6, 9\}$,

$(A - B) \cup (B - A) = \{4, 6, 8\}$ 에서

$A - B = \{8\}$, $B - A = \{4, 6\}$

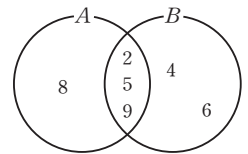
주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나

타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$A = \{2, 5, 8, 9\}$$

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은

$$2 + 5 + 8 + 9 = 24$$



021 답 (1) = (2) $\neq$ (3) = (4) =
(5) = (6) $\neq$ (7) = (8) =

(1) $U^c = \emptyset$ 이므로 $A \cup U^c = A \cup \emptyset \equiv A$

(2) $\emptyset^c = U$ 이므로 $A \cap \emptyset^c = A \cap U = A \not\equiv A^c$

(3) $\emptyset^c = U$, $U^c = \emptyset$ 이므로 $(\emptyset^c)^c = U^c \equiv \emptyset$

(4) $A \cup A^c = U$ 이므로 $(A \cup A^c) \cap A = U \cap A \equiv A$

(5) $A \cup A = A$ 이므로 $U \cap (A \cup A) = U \cap A \equiv A$

(6) $A - B \not\equiv B - A$

(7) $(A^c)^c = A$ 이므로 $U - (A^c)^c = U - A \equiv A^c$

(8) $A \cap (A \cap B)^c = A - (A \cap B) \equiv A - B$

022 답 (1) ×

(2) ○

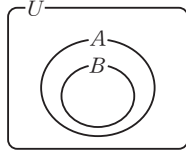
(3) ○

$B \subset A$ 이므로 이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

(1) $A \cap B^c = A - B \neq \emptyset$

(2) $B \subset A$ 이므로 $A^c \subset B^c$

(3) $A \cap B = B$ 이므로 $B - (A \cap B) = \emptyset$



023 답 (1) ×

(2) ○

(3) ○

$A \cap B = \emptyset$ 이므로 이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

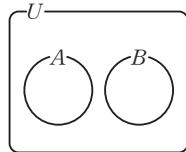
(1) $A - B = A \neq \emptyset$

(2) $A \cap B = \emptyset$ 이면

$B \subset A^c, A \subset B^c$

(3) $A \cap B = \emptyset$ 이므로

$A - (A \cap B) = A - \emptyset = A$



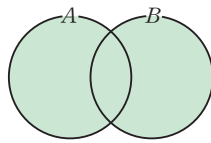
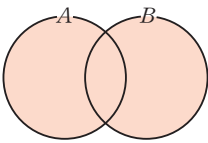
024 답 풀이 참조

(1)

$A \cup B$

$\equiv$

$B \cup A$

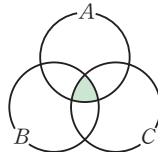
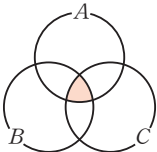


(2)

$(A \cap B) \cap C$

$\equiv$

$A \cap (B \cap C)$

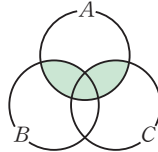
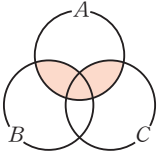


(3)

$A \cap (B \cup C)$

$\equiv$

$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

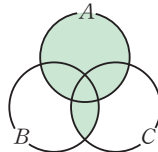
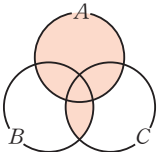


(4)

$A \cup (B \cap C)$

$\equiv$

$(A \cup B) \cap (A \cup C)$



025 답

(1) {1, 2, 3, 4}

(2) {3, 7}

(3) {1, 2, 3, 4, 5, 8}

(4) {2}

(5) {4, 6, 7, 9}

(6) {3, 4}

(7) {3, 4, 7, 9, 11}

(8) {1, 2, 3}

(1) $A \cup B = B \cup A = \{1, 2, 3, 4\}$

(2) $B \cap A = A \cap B = \{3, 7\}$

(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$= \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$

(4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$= \{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 5\} = \{2\}$

(5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$= \{4, 6\} \cup \{4, 7, 9\} = \{4, 6, 7, 9\}$

(6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4\}$

(7) $A \cup (A \cap B) = A \cup B$ 이므로 $A \cup B = \{3, 4, 7, 9, 11\}$

(8) $A \cup (A \cap B) = A$ 이므로 $A = \{1, 2, 3\}$

026 답 (1) A^c

(2) $\cup$

027 답 (1) {3, 5}

(2) {1, 2, 4, 6, 7}

(3) {1, 2, 4, 6, 7}, =

(4) {1, 2, 3, 4, 5, 7}

(5) {6}

(6) {6}, =

$U = \{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$

(1) $A \cap B = \{3, 5\}$

(2) $A^c = \{2, 4, 6\}, B^c = \{1, 6, 7\}$ 이므로

$A^c \cup B^c = \{1, 2, 4, 6, 7\}$

(3) (1)에 의하여 $(A \cap B)^c = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ 이므로

$A^c \cup B^c \equiv (A \cap B)^c$

(4) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

(5) $A^c = \{2, 4, 6\}, B^c = \{1, 6, 7\}$ 이므로

$A^c \cap B^c = \{6\}$

(6) (4)에 의하여 $(A \cup B)^c = \{6\}$ 이므로

$A^c \cap B^c \equiv (A \cup B)^c$

028 답 (1) $B^c, B^c, \emptyset, \emptyset$

(2) $B, \cup, \cup, \cap$

(3) A, A, A, A

(1) $A \cap (A \cup B)^c = A \cap (A^c \cap B^c)$

$= (A \cap A^c) \cap B^c$ ↖ 결합법칙

$= \emptyset \cap B^c$

$= \emptyset$

(2) $A \cap (A - B)^c = A \cap (A \cap B^c)^c$

$= A \cap (A^c \cup B)$ ↖ 드모르간의 법칙

$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B)$ ↖ 분배법칙

$= \emptyset \cup (A \cap B)$

$= A \cap B$

(3) $(A \cup B) \cap (B - A)^c = (A \cup B) \cap (B \cap A^c)^c$

$= (A \cup B) \cap (B^c \cup A)$ ↖ 드모르간의 법칙

$= (A \cup B) \cap (A \cup B^c)$ ↖ 교환법칙

$= A \cup (B \cap B^c)$ ↖ 분배법칙

$= A \cup \emptyset$

$= A$

029 답 ②

① $A \cap U^c = A \cap \emptyset = \emptyset$

② $(U^c)^c = \emptyset^c = U$

③ $A - B = A \cap B^c$

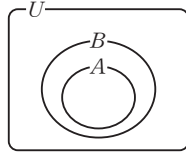
- ④ $(A \cap A^c) \cup A = \emptyset \cup A = A$
 ⑤ $U - A^c = U \cap (A^c)^c = U \cap A = A$
 따라서 옳은 것은 ②이다.

030 답 ④

- ① $A \cup B$
 ② $A^c \cap B = B \cap A^c = B - A$
 ③ $A - B = A \cap B^c$
 ④ $A - B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B$
 ⑤ $B - A = B \cap A^c = A^c \cap B$
 따라서 $A \cap B$ 와 항상 같은 집합은 ④이다.

031 답 ⑤

$A \subset B$ 이므로 이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



- ① $A \cup B = B$
 ② $B - A^c = B \cap (A^c)^c = B \cap A = A$
 ③ $A \cap (A \cup B) = A \cap B = A$
 ④ $A \cup (A \cap B) = A \cup A = A$
 ⑤ $(A \cup B) \cap (A \cap B) = B \cap A = A$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

032 답 14

$$\begin{aligned} (U - A^c) \cap (A \cap B^c) &= \{U \cap (A^c)^c\} \cap (A \cap B^c) \\ &= (U \cap A) \cap (A \cap B^c) \\ &= A \cap (A \cap B^c) \\ &= A \cap B^c \\ &= A - B \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6, 8\}, B = \{1, 2, 4, 9\} \text{이므로} \\ (U - A^c) \cap (A \cap B^c) &= A - B = \{6, 8\} \\ \text{따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은} \\ 6 + 8 &= 14 \end{aligned}$$

033 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

- 주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 A, B 는 서로소이다.
 ㄱ. $A \subset B^c$
 ㄴ. $A \cap B = \emptyset$ 이므로 $B - A = B$
 ㄷ. $A - B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B = \emptyset$
 ㄹ. $(A \cup B) - B = A$
 따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

034 답 ②

- ㄱ. $A \cup \emptyset^c = A \cup U = U$
 ㄴ. $U \cap (A \cap A) = U \cap A = A$
 ㄷ. $B - A = B \cap A^c = A^c \cap B$
 ㄹ. $(A \cap A^c) \cup B = \emptyset \cup B = B$
 ㅁ. $(A \cap \emptyset^c) \cap B = (A \cap U) \cap B = A \cap B$
 $A - B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B$
 $\therefore (A \cap \emptyset^c) \cap B = A - B^c$
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

035 답 ①

$$\begin{aligned} A^c \cap (A - B^c) &= A^c \cap \{A \cap (B^c)^c\} \\ &= A^c \cap (A \cap B) \\ &= (A^c \cap A) \cap B \\ &= \emptyset \cap B \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

036 답 6

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c \cup B &= (A^c \cap B^c) \cup B \\ &= (A^c \cup B) \cap (B^c \cup B) \\ &= (A^c \cup B) \cap U \\ &= A^c \cup B \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} U &= \{x \mid x \text{는 한 자리의 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 9\}, \\ A &= \{2, 3, 5, 7, 9\}, B = \{1, 2, 5, 8\} \text{이므로} \\ A^c &= \{1, 4, 6, 8\} \\ \therefore (A \cup B)^c \cup B &= A^c \cup B \\ &= \{1, 4, 6, 8\} \cup \{1, 2, 5, 8\} \\ &= \{1, 2, 4, 5, 6, 8\} \end{aligned}$$

따라서 구하는 원소의 개수는 6이다.

037 답 ⑤

- ① $B^c - A^c = B^c \cap (A^c)^c$
 $= B^c \cap A$
 $= A \cap B^c$
 $= A - B$
 ② $(A^c \cup B)^c = (A^c)^c \cap B^c$
 $= A \cap B^c$
 $= A - B$
 ③ $(A^c \cap B^c)^c \cap B^c = (A \cup B) \cap B^c$
 $= (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)$
 $= (A \cap B^c) \cup \emptyset$
 $= A \cap B^c$
 $= A - B$
 ④ $\{B \cup (A - B)\} \cap B^c = \{B \cup (A \cap B^c)\} \cap B^c$
 $= \{(B \cup A) \cap (B \cup B^c)\} \cap B^c$
 $= \{(B \cup A) \cap U\} \cap B^c$
 $= (B \cup A) \cap B^c$
 $= (B \cap B^c) \cup (A \cap B^c)$
 $= \emptyset \cup (A \cap B^c)$
 $= A \cap B^c$
 $= A - B$
 ⑤ $(A \cap B) - (A^c \cap B^c)^c = (A \cap B) - (A \cup B)$
 $= (A \cap B) \cap (A \cup B)^c$
 $= (A \cap B) \cap (A^c \cap B^c)$
 $= A \cap A^c \cap B \cap B^c$
 $= (A \cap A^c) \cap (B \cap B^c)$
 $= \emptyset \cap \emptyset$
 $= \emptyset$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

038 답 5

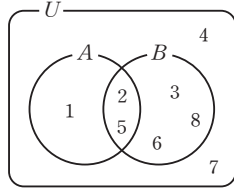
$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{4, 7\}$$

즉, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이고

$A - B = \{1\}$, $A \cap B = \{2, 5\}$, $(A \cup B)^c = \{4, 7\}$ 이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore B = \{2, 3, 5, 6, 8\}$$

따라서 구하는 원소의 개수는 5이다.



039 답 8

$$A \cap \{(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c)\}$$

$$= A \cap \{(A \cap A^c) \cup B^c\}$$

$$= A \cap (\emptyset \cup B^c)$$

$$= A \cap B^c$$

$$= A - B$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9\} - \{2, 3, 6, 9, 10\}$$

$$= \{1, 5, 7\}$$

따라서 이 집합의 원소의 최댓값은 7, 최솟값은 1이므로 그 합은 $7+1=8$

040 답 4

$$U = \{x | x \text{는 } 15 \text{ 이하의 소수인 자연수}\}$$

$$= \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

$$A = \{2, 5, 7, 13\}$$

$$\text{이때 } A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{2, 3, 11, 13\} \text{에서}$$

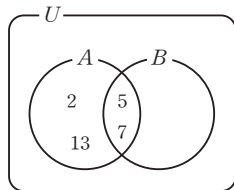
$$A \cap B = \{5, 7\}$$

이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 집합 B는 5, 7을 반드시 원소로 갖고 2, 13은 원소로 갖지 않는 집합이므로

$$\{5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{5, 7, 11\}, \{3, 5, 7, 11\}$$

의 4개이다.



041 답 ②

$$\neg. A - (A - B) = A \cap (A \cap B^c)^c$$

$$= A \cap (A^c \cup B)$$

$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B)$$

$$= \emptyset \cup (A \cap B)$$

$$= A \cap B$$

$$\neg. (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B$$

$$= U \cap B$$

$$= B$$

$$\neg. A \cup (A^c \cup B)^c = A \cup (A \cap B^c)$$

$$= A \cup (A - B)$$

$$= A$$

$$\neg. (A^c - B^c) \cup (B^c - A^c) = \{A^c \cap (B^c)^c\} \cup \{B^c \cap (A^c)^c\}$$

$$= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A)$$

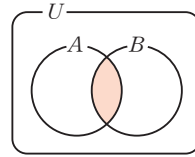
$$= (B - A) \cup (A - B)$$

따라서 항상 옳은 것은 ㄴ이다.

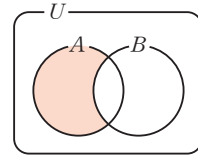
042 답 ⑤

각 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

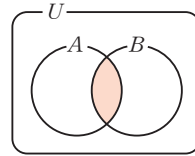
① $A \cap B$



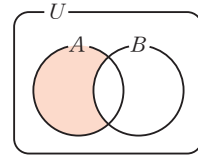
② $A - B$



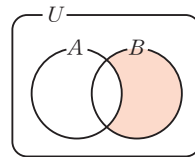
③ $B - A^c = B \cap A$



④ $A - (A \cap B)$



⑤ $(A \cup B) - A$



따라서 주어진 벤 다이어그램과 같은 것은 ⑤이다.

다른 풀이

주어진 벤 다이어그램이 나타내는 집합은 $B - A$ 이다.

① $A \cap B$

② $A - B$

③ $B - A^c = B \cap (A^c)^c$

$$= B \cap A$$

$$= A \cap B$$

④ $A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^c$

$$= A \cap (A^c \cup B^c)$$

$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$$

$$= \emptyset \cup (A \cap B^c)$$

$$= A \cap B^c$$

$$= A - B$$

⑤ $(A \cup B) - A = (A \cup B) \cap A^c$

$$= (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c)$$

$$= \emptyset \cup (B \cap A^c)$$

$$= B \cap A^c$$

$$= B - A$$

따라서 주어진 벤 다이어그램이 나타내는 집합과 같은 집합은 ⑤이다.

043 답 ④

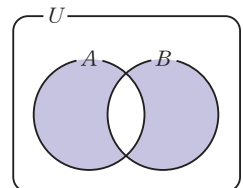
$$(A^c - B^c) \cup (B \cup A^c)^c$$

$$= \{A^c \cap (B^c)^c\} \cup \{B^c \cap (A^c)^c\}$$

$$= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A)$$

$$= (B - A) \cup (A - B)$$

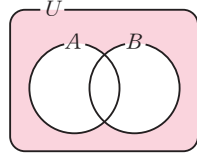
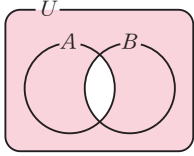
따라서 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 ④이다.



044 답 ㄴ, ㄹ

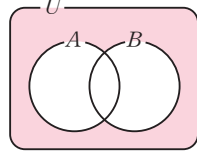
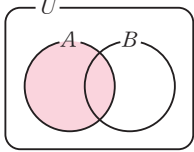
각 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

ㄱ. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ ㄴ. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$



ㄷ. $(A \cap B) \cup (A - B)$

ㄹ. $U \cap (A \cup B)^c = (A \cup B)^c$



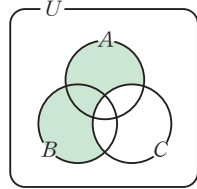
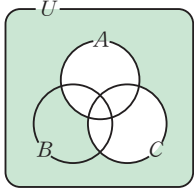
따라서 주어진 벤 다이어그램과 같은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

045 답 ③, ④

각 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

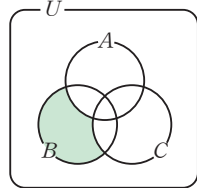
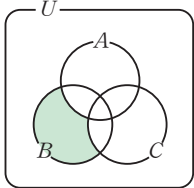
① $(A \cup C)^c$

② $(A \cup B) - C$

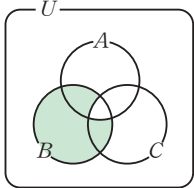


③ $B \cap (A \cup C)^c$

④ $A^c \cap B \cap C^c = B \cap (A \cup C)^c$



⑤ $(B - A) \cup (B - C)$

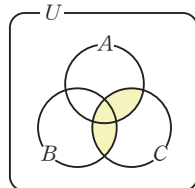


따라서 주어진 벤 다이어그램과 같은 것은 ③, ④이다.

046 답 ②

$$\begin{aligned} & (A \cap C) \cup (B - C^c) \\ &= (A \cap C) \cup \{B \cap (C^c)^c\} \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ &= (A \cup B) \cap C \end{aligned}$$

따라서 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 ②이다.



047 답 8

$A \cup X = A$ 에서 $X \subset A$
 $B \cap X = B$ 에서 $B \subset X$

즉, $B \subset X \subset A$ 이므로

$\{2, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 X 의 개수는 집합 A 의 부분집합 중에서 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{5-2} = 2^3 = 8$

048 답 16

$(A - B) \cup X = X$ 에서 $(A - B) \subset X$

$A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$

$\therefore (A - B) \subset X \subset A$

이때 $A = \{x | x \text{는 } 12 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로

$A - B = \{6, 12\}$

$\therefore \{6, 12\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

따라서 집합 X 의 개수는 집합 A 의 부분집합 중에서 6, 12를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{6-2} = 2^4 = 16$

049 답 4

$(A - B) \cup X = X$ 에서 $(A - B) \subset X$

$(A \cup B) \cap X = X$ 에서 $X \subset (A \cup B)$

$\therefore (A - B) \subset X \subset (A \cup B)$

이때 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ 이므로

$A - B = \{1, 3, 9\}$, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

$\therefore \{1, 3, 9\} \subset X \subset \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

한편, $(B - A) \cap X = \emptyset$ 에서

$B - A = \{6\}$ 이므로

$\{6\} \cap X = \emptyset$

$\therefore \{1, 3, 9\} \subset X \subset \{1, 3, 5, 7, 9\}$

따라서 집합 X 의 개수는 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중에서 1, 3, 9를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{5-3} = 2^2 = 4$

참고 $(A \cup B) \cap X = X$ 에서 $X \subset (A \cup B)$ 이지만 $(B - A) \cap X = \emptyset$ 이므로 X 는 사실상 집합 A 의 부분집합이다.

050 답 56

$\{a, b, c\} \cap X \neq \emptyset$ 에서 집합 X 는 a, b, c 중 적어도 하나의 원소를 갖는 집합이다.

이때 X 는 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합이므로 U 의 부분집합 중에서 a, b, c 를 원소로 갖지 않는 집합을 제외하면 된다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$2^6 - 2^{6-3} = 64 - 8 = 56$

주의 $\{a, b, c\} \cap X \neq \emptyset$ 에서 집합 X 를 a, b, c 를 모두 원소로 갖는 집합이라고 착각하지 않도록 주의한다.

예를 들어 $X = \{a, d, f\}$ 이면 $\{a, b, c\} \cap \{a, d, f\} = \{a\} \neq \emptyset$ 이므로

조건 $\{a, b, c\} \cap X \neq \emptyset$ 을 만족시킨다.

051 답 -1

$$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{에서 } (x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \text{에서 } (x+3)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = -1$$

$$\therefore B = \{x | x^2 + 4x + 3 = 0\} = \{-3, -1\}$$

즉, $A \cup B = \{-3, -1, 2\}$, $A \cap B = \{-1\}$ 이므로

$$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) - (A \cap B) = \{-3, 2\}$$

따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은

$$-3 + 2 = -1$$

참고 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$)의 서로 다른 두 실근이

α, β ($\alpha < \beta$)일 때

$$\textcircled{1} \{x | ax^2 + bx + c = 0\} = \{\alpha, \beta\}$$

$$\textcircled{2} \{x | ax^2 + bx + c < 0\} = \{x | \alpha < x < \beta\}$$

$$\textcircled{3} \{x | ax^2 + bx + c > 0\} = \{x | x < \alpha \text{ 또는 } x > \beta\}$$

052 답 ③

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \text{에서 } (x+5)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore A = \{x | x^2 + 3x - 10 = 0\} = \{-5, 2\}$$

$$A \cap B = \{2\} \text{이므로 } 2 \in B$$

즉, 이차방정식 $x^2 + ax + 8 = 0$ 의 한 근이 2이다.

$$x = 2 \text{를 } x^2 + ax + 8 = 0 \text{에 대입하면}$$

$$4 + 2a + 8 = 0, 2a = -12 \quad \therefore a = -6$$

이차방정식 $x^2 + ax + 8 = 0$, 즉 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 에서

$$(x-2)(x-4) = 0 \quad \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 4$$

$$\therefore B = \{2, 4\}$$

$$\therefore B - A = \{2, 4\} - \{-5, 2\} = \{4\}$$

따라서 집합 $B - A$ 의 원소인 것은 ③이다.

053 답 ③

$$x^2 + x - 2 \leq 0 \text{에서 } (x+2)(x-1) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 1$$

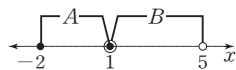
$$\therefore A = \{x | x^2 + x - 2 \leq 0\} = \{x | -2 \leq x \leq 1\}$$

이때 집합 $B = \{x | x^2 + ax + b < 0\}$ 에 대하여

$A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \{x | -2 \leq x < 5\}$ 가 되도록 두 집합 A, B

를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림

과 같다.



$$\therefore B = \{x | 1 < x < 5\}$$

$$= \{x | (x-1)(x-5) < 0\}$$

$$= \{x | x^2 - 6x + 5 < 0\}$$

따라서 $a = -6$, $b = 5$ 이므로

$$b - a = 5 - (-6) = 11$$

054 답 (1) 9

(2) 8

(3) 6

(4) 10

(5) 2

(6) 4

$$\textcircled{1} n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 5 + 7 - 3 = 9$$

$$\textcircled{2} n(A^c) = n(U) - n(A)$$

$$= 13 - 5 = 8$$

$$\textcircled{3} n(B^c) = n(U) - n(B)$$

$$= 13 - 7 = 6$$

$$\textcircled{4} n((A \cap B)^c) = n(U) - n(A \cap B)$$

$$= 13 - 3 = 10$$

$$\textcircled{5} n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$= 5 - 3 = 2$$

$$\textcircled{6} n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 7 - 3 = 4$$

055 답

(1) 14

(2) 16

(3) 3

(4) 7

$$\textcircled{1} n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 12 + 9 - 7 = 14$$

$$\textcircled{2} n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 12 + 9 - 5 = 16$$

$$\textcircled{3} n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 12 + 9 - 18 = 3$$

$$\textcircled{4} n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 12 + 9 - 14 = 7$$

056 답 26

$$n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$$

$$- n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 23 + 17 + 12 - 11 - 9 - 8 + 2$$

$$= 26$$

057 답 22

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= n(A) + \{n(B) - n(A \cap B)\}$$

$$= n(A) + n(B - A)$$

$$= 12 + 10 = 22$$

058 답 ③

$$n(A \cap B^c) = n(A - B)$$

$$= n(A \cup B) - n(B)$$

$$= 61 - 29 = 32$$

$$n(A^c \cap B) = n(B \cap A^c)$$

$$= n(B - A)$$

$$= n(A \cup B) - n(A)$$

$$= 61 - 37 = 24$$

$$\therefore n(A \cap B^c) + n(A^c \cap B) = 32 + 24 = 56$$

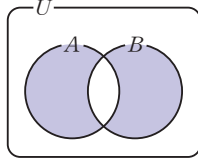
다른 풀이

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서} \\ n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 37 + 29 - 61 = 5 \\ \therefore n(A \cap B^c) + n(A^c \cap B) &= n(A \cup B) - n(A \cap B) \\ &= 61 - 5 = 56 \end{aligned}$$

참고 두 집합 $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ 는 오른쪽 벤

다이어그램의 색칠한 부분과 같으므로

$$\begin{aligned} n(A \cap B^c) + n(A^c \cap B) \\ &= n(A \cup B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$



059 답 7

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 19 + 26 - 12 = 33 \\ \therefore n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \\ &= 40 - 33 = 7 \end{aligned}$$

060 답 42

$$\begin{aligned} U &= \{x | x \text{는 } 50 \text{ 이하의 자연수}\}, A = \{x | x \text{는 짝수}\}, \\ B &= \{x | x \text{는 } 3 \text{의 배수}\} \text{이므로} \\ n(A \cap B) &= \{6, 12, 18, \dots, 48\} \text{이고} \\ n(U) &= 50, n(A) = 25, n(B) = 16, n(A \cap B) = 8 \\ \therefore n(A \cup B^c) &= n((A^c \cap B)^c) = n((B - A)^c) \\ &= n(U) - n(B - A) \\ &= n(U) - \{n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= 50 - (16 - 8) = 42 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} n(U) &= 50, n(A) = 25, n(B) = 16, n(A \cap B) = 8 \text{이므로} \\ n(A \cup B^c) &= n(A) + n(B^c) - n(A \cap B^c) \\ &= n(A) + \{n(U) - n(B)\} - \{n(A) - n(A \cap B)\} \\ &= 25 + (50 - 16) - (25 - 8) = 42 \end{aligned}$$

061 답 ①

$$\begin{aligned} A^c - B^c &= A^c \cap (B^c)^c = A^c \cap B = B - A \text{이므로} \\ n(A^c - B^c) &= n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ \text{이때 } n(U) &= 36, n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 7 \text{이므로} \\ n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) = 36 - 7 = 29 \\ \text{즉, } n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서} \\ n(A) &= 28, n(A \cap B) = 12 \text{이므로} \\ 29 &= 28 + n(B) - 12 \quad \therefore n(B) = 13 \\ \text{따라서 } \textcircled{1} \text{에서} \\ n(A^c - B^c) &= n(B) - n(A \cap B) = 13 - 12 = 1 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} A^c - B^c &= A^c \cap (B^c)^c = A^c \cap B = B - A \text{이므로} \\ n(A^c - B^c) &= n(B - A) = n(A \cup B) - n(A) \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ \text{이때 } n(U) &= 36, n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 7 \text{이므로} \\ n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) = 36 - 7 = 29 \\ \text{따라서 } \textcircled{1} \text{에서} \\ n(A^c - B^c) &= n(A \cup B) - n(A) = 29 - 28 = 1 \end{aligned}$$

062 답 33

은수네 학교 학생 전체의 집합을 U , 두 도서관 A, B 를 이용한 경험이 있는 학생의 집합을 각각 A, B 라 하면

$$n(U) = 200, n(A) = 135, n(B) = 156$$

또, 두 도서관 중 어느 곳도 이용한 경험이 없는 학생의 집합은 $(A \cup B)^c$ 이므로

$$n((A \cup B)^c) = 11$$

이때 $n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 200 - 11 = 189$ 이므로

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 135 + 156 - 189 = 102$$

A 도서관만 이용한 경험이 있는 학생의 집합은 $A - B$ 이므로 구하는 학생 수는

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 135 - 102 = 33$$

따라서 A 도서관만 이용한 경험이 있는 학생 수는 33이다.

063 답 ④

경은이네 반 학생 전체의 집합을 U , 야구와 축구를 좋아한다고 답한 학생의 집합을 각각 A, B 라 하면

$$n(U) = 28, n(A) = 16, n(B) = 18$$

이때 답을 하지 않은 학생은 없으므로

$$U = A \cup B$$

즉, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(U)$$

$$= 16 + 18 - 28 = 6$$

야구와 축구 중 하나만 좋아한다고 답한 학생의 집합은

$(A - B) \cup (B - A)$ 이므로 구하는 학생 수는

$$n((A - B) \cup (B - A))$$

$$= n(A - B) + n(B - A)$$

$$= \{n(A) - n(A \cap B)\} + \{n(B) - n(A \cap B)\}$$

$$= (16 - 6) + (18 - 6) = 22$$

따라서 경은이네 반 학생 중 야구와 축구 중 하나만 좋아한다고 답한 학생 수는 22이다.

중단원 점검 문제

II-2 | 집합의 연산

108~109쪽

01 답 16

$$A = \{x | x \text{는 } 10 \text{보다 작은 홀수}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$C = \{x | x \text{는 } 15 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 3, 5, 15\}$$

$$\begin{aligned} \therefore A \cap (B \cup C) &= \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 2, 3, 5, 7, 15\} \\ &= \{1, 3, 5, 7\} \end{aligned}$$

따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

02 답 ③

$A-B=A$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소이다.
 이때 $A=\{2, 3\}$, $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로
 $B=\{1, 4, 5, 6\}$

03 답 ⑤

$U=\{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 에서
 $A=\{x|x=3n-2, n \text{은 자연수}\}=\{1, 4, 7, 10\}$,
 $B=\{x|x=4n-1, n \text{은 자연수}\}=\{3, 7\}$
 이므로
 $A^C=\{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$, $B^C=\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$
 $\therefore B^C-A^C=\{1, 4, 10\}$
 따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은
 $1+4+10=15$

04 답 9

두 집합 $A=\{2, a+2, a^2-1\}$, $B=\{1, 3, a+3\}$ 에 대하여
 $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로
 $a+3=2$ 또는 $a+3=4$ 또는 $a+3=5$
 $\therefore a=-1$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$
 (i) $a=-1$ 일 때,
 $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$
 $\therefore A \cup B=\{0, 1, 2, 3\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 (ii) $a=1$ 일 때,
 $A=\{0, 2, 3\}$, $B=\{1, 3, 4\}$
 $\therefore A \cup B=\{0, 1, 2, 3, 4\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 (iii) $a=2$ 일 때,
 $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 5\}$
 $\therefore A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
 (i)~(iii)에서 $a=2$, $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 5\}$
 따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은
 $2+3+4=9$

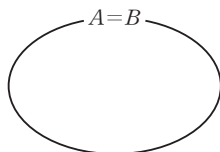
05 답 ②

- ① $(A \cap \emptyset) \cup U = \emptyset \cup U = U$
- ② $(A \cup \emptyset^C) \cap B = (A \cup U) \cap B = U \cap B = B$
- ③ $B - (A^C)^C = B - A = B \cap A^C = A^C \cap B$
- ④ $A \cup (U \cap B) = A \cup B$
- ⑤ $(A \cup B) - (B - A) = (A \cup B) \cap (B \cap A^C)^C$
 $= (A \cup B) \cap (B^C \cup A)$
 $= (A \cup B) \cap (A \cup B^C)$
 $= A \cup (B \cap B^C)$
 $= A \cup \emptyset = A$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

06 답 ③

$(A-B) \cup (B-A) = \emptyset$ 이므로
 $A-B=\emptyset$, $B-A=\emptyset$
 즉, $A \subset B$, $B \subset A$ 이므로 $A=B$
 ① $A-B=A-A=\emptyset$



② $B-A=B-B=\emptyset$

③ $A=B$

④ $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ 이므로 $A \cap B = A = B \neq \emptyset$

⑤ $A \cup B = A = B$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

07 답 ①

$B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$, $A \cap B = B$

① $A \cup B = A$

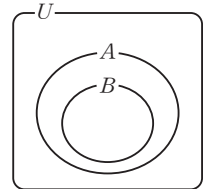
② $(A \cup B) \cap B = A \cap B = B$

③ $(A \cap B) \cup B = B \cup B = B$

④ $A \cap (A \cap B) = A \cap B = B$

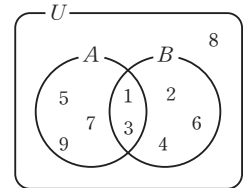
⑤ $(A \cup B) \cap (A \cap B) = A \cap B = B$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ①이다.



08 답 12

$U=\{x|x \text{는 } 10 \text{ 미만의 자연수}\}=\{1, 2, 3, \dots, 9\}$,
 $A=\{x|x \text{는 홀수}\}$
 $=\{1, 3, 5, 7, 9\}$,
 $B=\{x|x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$
 $=\{1, 2, 3, 4, 6\}$
 이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$\begin{aligned} \therefore (A \cup B^C) \cap (A^C \cup B) &= \{(A \cup B^C) \cap A^C\} \cup \{(A \cup B^C) \cap B\} \\ &= \{(A \cap A^C) \cup (B^C \cap A^C)\} \cup \{(A \cap B) \cup (B^C \cap B)\} \\ &= \{\emptyset \cup (B^C \cap A^C)\} \cup \{(A \cap B) \cup \emptyset\} \\ &= (B^C \cap A^C) \cup (A \cap B) \\ &= (A^C \cap B^C) \cup (A \cap B) \\ &= (A \cup B)^C \cup (A \cap B) \\ &= \{8\} \cup \{1, 3\} \\ &= \{1, 3, 8\} \end{aligned}$$

따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은

$1+3+8=12$

09 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $(A \cup B) \cap (A \cup B^C) = A \cup (B \cap B^C)$
 $= A \cup \emptyset = A$

ㄴ. $(A \cap B^C) \cap (A^C \cap B) = A \cap B^C \cap A^C \cap B$
 $= A \cap A^C \cap B \cap B^C$
 $= (A \cap A^C) \cap (B \cap B^C)$
 $= \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

ㄷ. $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A \cap (B \cup B^C)$
 $= A \cap U = A$

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄴ. $(A \cap B^C) \cap (A^C \cap B) = (A-B) \cap (B-A)$

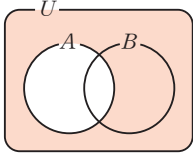
이때 두 집합 $A-B$ 와 $B-A$ 는 서로소이므로

$(A \cap B^C) \cap (A^C \cap B) = (A-B) \cap (B-A) = \emptyset$

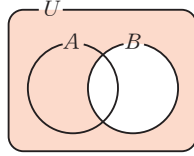
10 답 ⑤

각 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

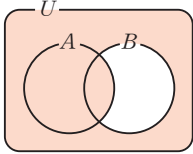
① $U - A$



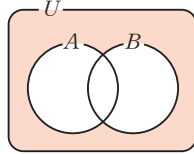
② $U - B$



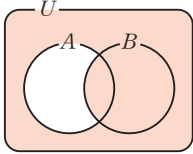
③ $A \cup B^c$



④ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$



⑤ $(A^c \cap B^c) \cup B$



따라서 주어진 벤 다이어그램과 같은 것은 ⑤이다.

다른 풀이

주어진 벤 다이어그램이 나타내는 집합은

$$(A - B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$$

① $U - A = A^c$

② $U - B = B^c$

③ $A \cup B^c$

④ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

$$\begin{aligned} \text{⑤ } (A^c \cap B^c) \cup B &= (A^c \cup B) \cap (B^c \cup B) \\ &= (A^c \cup B) \cap U \\ &= A^c \cup B \end{aligned}$$

따라서 주어진 벤 다이어그램이 나타내는 집합과 같은 집합은 ⑤이다.

11 답 ②

$$A \cup X = A \text{에서 } X \subset A$$

$$B \cap X = \emptyset \text{에서 } X \subset B^c$$

$$\text{즉, } X \subset (A \cap B^c) \text{이므로 } X \subset (A - B)$$

이때

$$U = \{x | x \text{는 } 50 \text{ 이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 50\},$$

$$A = \{x | x \text{는 } 6 \text{의 배수}\} = \{6, 12, 18, \dots, 48\},$$

$$B = \{x | x \text{는 } 4 \text{의 배수}\} = \{4, 8, 12, \dots, 48\}$$

이므로

$$A - B = \{6, 18, 30, 42\}$$

따라서 $X \subset (A - B)$, 즉 $X \subset \{6, 18, 30, 42\}$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는 집합 $A - B$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^4 = 16$

12 답 16

$$U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 10\} \text{이므로}$$

$$A = \{x | x \text{는 } 24 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$\text{이때 } A - (A - B^c) = A \text{에서}$$

$$\begin{aligned} A - (A - B^c) &= A \cap \{A \cap (B^c)^c\}^c \\ &= A \cap (A \cap B)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B^c) \\ &= A \cap B^c = A \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } A \subset B^c$$

따라서 $B \subset A^c$ 이고, $A^c = \{5, 7, 9, 10\}$ 이므로 집합 B 의 개수는 $2^4 = 16$

13 답 7

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0 \text{에서 } (x+3)(x-1) \leq 0 \text{이므로}$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

$$\therefore A = \{x | x^2 + 2x - 3 \leq 0\} = \{x | -3 \leq x \leq 1\}$$

이때 집합 $B = \{x | x^2 - ax - b \leq 0\}$ 에 대하여

$$A \cap B = \{x | -2 \leq x \leq 1\}, A \cup B = \{x | -3 \leq x \leq 3\} \text{이 되도록}$$

두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내

면 오른쪽 그림과 같다.

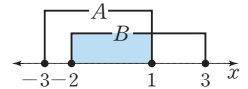
$$\therefore B = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$$

$$= \{x | (x+2)(x-3) \leq 0\}$$

$$= \{x | x^2 - x - 6 \leq 0\}$$

$$\text{따라서 } a=1, b=6 \text{이므로}$$

$$a+b=1+6=7$$



14 답 ④

$$A^c \cup B = (A \cap B^c)^c = (A - B)^c \text{이므로}$$

$$n(A^c \cup B) = n((A - B)^c)$$

$$= n(U) - n(A - B)$$

$$= n(U) - \{n(A) - n(A \cap B)\} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때

$$U = \{x | x \text{는 } 50 \text{ 이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$$

이므로

$$A = \{x | x \text{는 } 30 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\},$$

$$B = \{x | x \text{는 } 3 \text{의 배수}\} = \{3, 6, 9, \dots, 48\}$$

$$\therefore A \cap B = \{3, 6, 15, 30\}$$

$$\text{따라서 } n(U) = 50, n(A) = 8, n(A \cap B) = 4 \text{이므로 } \textcircled{7} \text{에서}$$

$$n(A^c \cup B) = n(U) - \{n(A) - n(A \cap B)\}$$

$$= 50 - (8 - 4) = 46$$

15 답 ③

$n(A) < n(B)$ 이므로 $A \subset B$ 일 때, $n(A \cap B)$ 는 최대이고 최댓값은

$$M = n(A) = 14$$

또, $A \cup B = U$ 일 때, $n(A \cap B)$ 는 최소이고

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서 최솟값은}$$

$$m = n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(U)$$

$$= 14 + 17 - 22 = 9$$

$$\therefore M + m = 14 + 9 = 23$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서} \\ n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 14 + 17 - n(A \cup B) \\ &= 31 - n(A \cup B) \end{aligned}$$

이때 $A \subset (A \cup B)$, $B \subset (A \cup B)$ 이므로

$$n(A) \leq n(A \cup B), n(B) \leq n(A \cup B) \text{에서}$$

$$n(A \cup B) \geq 17 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, $(A \cup B) \subset U$ 이므로 $n(A \cup B) \leq n(U)$ 에서

$$n(A \cup B) \leq 22 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에서 $17 \leq n(A \cup B) \leq 22$ 이므로

$$-22 \leq -n(A \cup B) \leq -17$$

$$31 - 22 \leq 31 - n(A \cup B) \leq 31 - 17$$

$$\therefore 9 \leq n(A \cap B) \leq 14$$

따라서 $M=14$, $m=9$ 이므로 $M+m=14+9=23$

풍생 비법 유한집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A) < n(B)$ 일 때

① $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우

→ $n(A \cup B)$ 가 최소일 때, 즉 $A \subset B$

→ $n(A \cap B) = n(A)$

② $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우

→ $n(A \cup B)$ 가 최대일 때, 즉 $n(A \cap B) = 0$ 이거나 $A \cup B = U$

16 답 ③

이 반 학생 전체의 집합을 U , A, B 두 문제를 맞힌 학생의 집합을 각각 A, B 라 하면

$$n(A)=18, n(B)=15$$

둘 중 어느 문제도 맞히지 못한 학생의 집합은 $(A \cup B)^c$ 이므로 $n((A \cup B)^c)=6$

두 문제 A, B 중 한 문제만 맞힌 학생의 집합은

$$(A-B) \cup (B-A) \text{이므로}$$

$$n((A-B) \cup (B-A))=11$$

$$\therefore n(A-B) + n(B-A) = 11$$

이때 $A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$ 이고

세 집합 $A-B, A \cap B, B-A$ 는 모두 서로소이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A-B) + n(A \cap B) + n(B-A) \\ &= 11 + n(A \cap B) \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= 18 + 15 - n(A \cap B) \\ &= 33 - n(A \cap B) \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7} = \textcircled{8}$ 이므로

$$11 + n(A \cap B) = 33 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 11, n(A \cup B) = 11 + 11 = 22 (\because \textcircled{7})$$

$$\begin{aligned} \therefore n(U) &= n(A \cup B) + n((A \cup B)^c) \\ &= 22 + 6 = 28 \end{aligned}$$

따라서 이 반 전체 학생 수는 28이다.

001 답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ×

(1) '삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이다.'는 참임을 명확하게 판별할 수 있는 문장이므로 명제이다.

(2) '아름다운'이라는 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

(3) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ 는 거짓임을 명확하게 판별할 수 있는 식이므로 명제이다.

(4) $3x+1 > x-3$ 은 $x > -2$ 일 때는 참, 그 외의 경우에는 거짓이다. 즉, x 의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 명제가 아니다.

002 답 (1) 거짓 (2) 참 (3) 거짓 (4) 참

(1) (홀수)+(홀수)=(짝수)이므로 명제 '두 홀수의 합은 홀수이다.'는 거짓이다.

(3) $\sqrt{16}=4$, 즉 유리수이므로 명제 ' $\sqrt{16}$ 은 무리수이다.'는 거짓이다.

003 답 (1) 조 (2) 명 (3) 조 (4) 명

(1) x 가 1, 2, 3, 4, 5이면 참, 그 외의 경우에는 거짓이다.

즉, x 의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다.

(2) x 가 짝수이면 $x+1$ 은 홀수이다. 즉, 거짓인 명제이다.

(3) $-3 \leq x \leq 3$ 이면 참, 그 외의 경우에는 거짓이다.

즉, x 의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다.

(4) $4+5=9 \geq 7$ 이므로 참인 명제이다.

004 답 (1) {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}

(2) {3, 4, 5, 6, 7, 8}

(3) {3, 5}

(4) {1}

전체집합은 $\{x|x \text{는 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$

(1) 자연수 중에서 30의 약수는 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30이므로 조건 ' x 는 30의 약수이다.'의 진리집합은

{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}

(2) $3 \leq x < 9$ 인 자연수 x 는 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 조건

' $3 \leq x < 9$ '의 진리집합은

{3, 4, 5, 6, 7, 8}

(3) $x(x+2)(x-3)(x-5)=0$ 에서

$$x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=3 \text{ 또는 } x=5$$

이므로 조건 ' $x(x+2)(x-3)(x-5)=0$ '의 진리집합은 {3, 5}

(4) $x^2+x-6 < 0$ 에서 $(x+3)(x-2) < 0$

$$\therefore -3 < x < 2$$

따라서 조건 ' $x^2+x-6 < 0$ '의 진리집합은

{1}

005 답 (1) 2의 배수는 홀수이다.

(2) $\sqrt{5}$ 는 무리수가 아니다.

(3) 3은 $\sqrt{16}$ 보다 크거나 같다.

(4) π 는 유리수이다.

(5) $3+5 \neq 8$

(6) -1 은 0보다 크다.

006 답 (1) x 는 소수가 아니다.

(2) $x^2 \neq 1$

(3) $3x+5=7$

(4) x 는 6보다 크지 않다.

(5) $x^2+3x+1>0$

(6) x 는 실수이다.

007 답 (1) 거짓

(2) $\sqrt{(-2)^2}$ 은 무리수가 아니다.

(3) 참

(1) $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$ 는 유리수이다. 즉, 주어진 명제

‘ $\sqrt{(-2)^2}$ 은 무리수이다.’는 거짓이다.

(2) 명제 ‘ $\sqrt{(-2)^2}$ 은 무리수이다.’의 부정은 ‘ $\sqrt{(-2)^2}$ 은 무리수가 아니다.’이다.

(3) 주어진 명제가 거짓이므로 그 부정은 참이다.

008 답 (1) 참

(2) 정삼각형은 이등변삼각형이 아니다.

(3) 거짓

(1) 정삼각형의 세 변의 길이는 모두 같으므로 세 변 중 어느 두 변을 골라도 그 두 변의 길이는 서로 같다. 즉, 주어진 명제 ‘정삼각형은 이등변삼각형이다.’는 참이다.

(2) 명제 ‘정삼각형은 이등변삼각형이다.’의 부정은 ‘정삼각형은 이등변삼각형이 아니다.’이다.

(3) 주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.

009 답 (1) $\{5, 7, 8, 9, 10\}$

(2) $\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(3) $\{1, 9, 10\}$

전체집합 $U=\{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 에 대하여 주어진 조건의 진리집합을 P 라 하자.

(1) $P=\{x|x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}=\{1, 2, 3, 4, 6\}$ 이므로 주어진 조건의 부정의 진리집합은

$P^C=\{5, 7, 8, 9, 10\}$

(2) $x^2-4x+3=0$ 에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

즉, $P=\{x|x^2-4x+3=0\}=\{x|(x-1)(x-3)=0\}=\{1, 3\}$

이므로 주어진 조건의 부정의 진리집합은

$P^C=\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(3) $x^2-10x+16 \leq 0$ 에서 $(x-2)(x-8) \leq 0$

$\therefore 2 \leq x \leq 8$

즉,

$P=\{x|x^2-10x+16 \leq 0\}=\{x|2 \leq x \leq 8\}=\{2, 3, 4, \dots, 8\}$

이므로 주어진 조건의 부정의 진리집합은

$P^C=\{1, 9, 10\}$

010 답 (1) $\{1, 2, 3, 4\}$ (2) $\{1, 2, 3\}$ (3) $\{2, 3, 4, 5\}$

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

(1) $P=\{2, 4\}, Q=\{1, 2, 3\}$

따라서 조건 ‘ p 또는 q ’의 진리집합은

$P \cup Q=\{1, 2, 3, 4\}$

(2) $P=\{3\}, Q=\{1, 2\}$

따라서 조건 ‘ p 또는 q ’의 진리집합은

$P \cup Q=\{1, 2, 3\}$

(3) $x^2-7x+10=0$ 에서 $(x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5$

$\therefore P=\{2, 3, 4\}, Q=\{2, 5\}$

따라서 조건 ‘ p 또는 q ’의 진리집합은

$P \cup Q=\{2, 3, 4, 5\}$

011 답 (1) $\{3, 6\}$ (2) $\{3\}$ (3) $\{1, 3\}$

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

(1) $P=\{3, 6\}, Q=\{1, 2, 3, 6\}$

따라서 조건 ‘ p 그리고 q ’의 진리집합은

$P \cap Q=\{3, 6\}$

(2) $x^2-4x+3=0$ 에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore P=\{3, 4\}, Q=\{1, 3\}$

따라서 조건 ‘ p 그리고 q ’의 진리집합은

$P \cap Q=\{3\}$

(3) $|x-2| \leq 1$ 에서 $-1 \leq x-2 \leq 1$

$\therefore 1 \leq x \leq 3$

$\therefore P=\{1, 2, 3\}, Q=\{1, 3, 5, 7\}$

따라서 조건 ‘ p 그리고 q ’의 진리집합은

$P \cap Q=\{1, 3\}$

012 답 (1) x 는 소수도 아니고 짝수도 아니다.

(2) $x=0$ 또는 $x=1$

(3) $2 < x \leq 5$

013 답 ③

① $5-3=2 < 10$ 이므로 참인 명제이다.

② 소수 중에서 2는 짝수이므로 거짓인 명제이다.

③ ‘큰’이라는 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

④ 4는 8의 배수가 아니므로 거짓인 명제이다.

⑤ 네 각의 크기가 모두 같은 사각형은 직사각형이므로 거짓인 명제이다.

따라서 명제가 아닌 것은 ③이다.

014 답 ③, ⑤

① $x > -\frac{1}{2}$ 이면 참, 그 외의 경우에는 거짓이다.

즉, x 의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다.

② $x^2-3x=0$ 에서 $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

$x=0$ 또는 $x=3$ 이면 참, 그 외의 경우에는 거짓이다.

즉, x 의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다.

- ③ $x^2+x-1 < 3+x+x^2$ 에서 $-1 < 3$ 이므로 참인 명제이다.
 ④ $x=1, 2, 3, \dots, 9$ 이면 참, 그 외의 경우에는 거짓이다.
 즉, x 의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다.
 ⑤ 참인 명제이다.
 따라서 조건이 아닌 것은 ③, ⑤이다.

015 답 ②

- ㄱ. $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
 $x=-1$ 또는 $x=2$ 이면 참, 그 외의 경우에는 거짓이다.
 즉, x 의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다.
 ㄴ. $5-(x+1)=2-x$ 의 좌변을 정리하면
 $4-x=2-x, 4=2$
 즉, 거짓인 명제이다.
 ㄷ. $x+1=3x+5$ 에서 $2x=-4 \therefore x=-2$
 $x=-2$ 이면 참, 그 외의 경우에는 거짓이다.
 즉, x 의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다.
 ㄹ. $2x+3x=6x-x$ 의 양변을 정리하면 $5x=5x$
 즉, 참인 명제이다.
 따라서 명제는 ㄴ, ㄹ, 명제가 아닌 것은 ㄱ, ㄷ이다.

016 답 $a \notin A$ 또는 $a \notin B$

017 답 ②

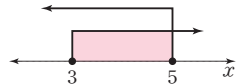
- 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.
 ① $\sqrt{8} \geq 3$ (거짓)
 ② $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다. (참)
 ③ 두 홀수의 곱은 홀수가 아니다. (거짓)
 ④ 마름모는 평행사변형이 아니다. (거짓)
 ⑤ 맞꼭지각의 크기는 서로 같지 않다. (거짓)
 따라서 명제의 부정이 참인 것은 ②이다.

다른 풀이

어떤 명제의 부정이 참이면 그 명제는 거짓이다.
 따라서 주어진 명제 중 거짓인 것을 찾으면 되므로 ②이다.

018 답 $3 \leq x \leq 5$

조건 ' p 또는 $\sim q$ '의 부정은 ' $\sim p$ 그리고 q '이다.
 이때 $p: x < 3, q: x \leq 5$ 에서 $\sim p: x \geq 3$ 이므로
 ' $\sim p$ 그리고 q '는 오른쪽 그림에서
 $x \geq 3$ 그리고 $x \leq 5$, 즉 $3 \leq x \leq 5$ 이다.



019 답 ④

- ㄱ. $p: ab \neq 0$ 에서 ' $p: a \neq 0$ 그리고 $b \neq 0$ '이므로
 $\sim p$ 는 $a=0$ 또는 $b=0$
 ㄴ. ' $p: a > 0$ 이고 $b > 0$ '이므로
 $\sim p$ 는 $a \leq 0$ 또는 $b \leq 0$
 ㄷ. $p: ab=0$ 에서 ' $p: a=0$ 또는 $b=0$ '이므로
 $\sim p$ 는 $a \neq 0$ 그리고 $b \neq 0$, 즉 $a^2+b^2 \neq 0$
 따라서 조건 p 와 그 부정 $\sim p$ 가 바르게 짝 지어진 것은 ㄴ, ㄷ이다.

020 답 ⑤

전체집합 $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 주어진 조건의 진리집합을 P 라 하자.

- ① 조건 ' x 는 홀수이다.'의 진리집합은 $P=\{1, 3, 5\}$
 ② $|x| \geq 5$ 에서 $x \leq -5$ 또는 $x \geq 5$
 즉, 조건 ' $|x| \geq 5$ '의 진리집합은 $P=\{5\}$
 ③ $x^2=9$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=3$
 즉, 조건 ' $x^2=9$ '의 진리집합은 $P=\{3\}$
 ④ $x^2+x-6=0$ 에서 $(x+3)(x-2)=0$
 $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$
 즉, 조건 ' $x^2+x-6=0$ '의 진리집합은 $P=\{2\}$
 ⑤ $x^2-5x-6 > 0$ 에서 $(x+1)(x-6) > 0$
 $\therefore x < -1$ 또는 $x > 6$
 즉, 조건 ' $x^2-5x-6 > 0$ '의 진리집합은 $P=\emptyset$
 따라서 진리집합이 공집합인 것은 ⑤이다.

021 답 85

$U=\{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}=\{1, 2, 3, \dots, 20\}$
 $x^2-17x+42 < 0$ 에서 $(x-3)(x-14) < 0$
 $\therefore 3 < x < 14$
 조건 $p: x^2-17x+42 < 0$ 의 진리집합을 P 라 하면
 $P=\{4, 5, 6, \dots, 13\}$
 따라서 조건 p 의 진리집합의 모든 원소의 합은
 $4+5+6+\dots+13=85$

022 답 $\{5, 7, 9\}$

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 에 대하여 조건 ' $p: x$ 는 24의 약수이다.'의 진리집합을 P 라 하면
 $P=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
 따라서 조건 $\sim p$ 의 진리집합은
 $P^c=\{5, 7, 9\}$

023 답 8

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P=\{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots, 100\}$,
 $Q=\{6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots, 96\}$
 따라서 조건 ' p 그리고 q '의 진리집합은
 $P \cap Q=\{12, 24, 36, \dots, 96\}$
 이므로 원소의 개수는 8이다.

다른 풀이

두 조건 p, q 가 ' $p: x$ 는 4의 배수이다.',
 ' $q: x$ 는 6의 배수이다.'이므로 조건 ' p 그리고 q '는
 ' x 는 4의 배수이고 6의 배수이다.'이다.
 이를 만족시키는 x 는 4와 6의 공배수이므로 두 수의 최소공배수인 12의 배수이다.
 따라서 조건 ' p 그리고 q '는 ' x 는 12의 배수이다.'와 같으므로 구하는 진리집합은 $\{12, 24, 36, \dots, 96\}$ 이고, 원소의 개수는 8이다.

024 답 ①

전체집합을 U 라 하면 $U=\{1, 2, 3, \dots\}$

이때 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, Q=\{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$$

$$\therefore \{3, 6, 12\}=P \cap Q$$

따라서 진리집합이 $\{3, 6, 12\}$ 인 조건은 ' p 그리고 q '이다.

다른 풀이

① 조건 ' p 그리고 q '의 진리집합은

$$P \cap Q = \{3, 6, 12\}$$

② 조건 ' p 또는 q '의 진리집합은

$$P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$$

③ 조건 ' $\sim p$ 그리고 q '의 진리집합은

$$P^c \cap Q = \{9, 15, 18, 21, \dots\}$$

④ 조건 ' $\sim p$ 그리고 $\sim q$ '의 진리집합은

$$P^c \cap Q^c = (P \cup Q)^c = \{5, 7, 8, 10, 11, \dots\}$$

⑤ 조건 ' $\sim p$ 또는 $\sim q$ '의 진리집합은

$$P^c \cup Q^c = (P \cap Q)^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, \dots\}$$

따라서 진리집합이 $\{3, 6, 12\}$ 인 조건은 ①이다.

참고 드모르간의 법칙

$$\textcircled{1} (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \textcircled{2} (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

025 답 ④

두 조건의 진리집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

또, 조건 ' $2 \leq x < 7$ '의 진리집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 조건 ' $2 \leq x < 7$ '의 진리집합은

$$P^c \cap Q^c = (P \cup Q)^c$$

다른 풀이

조건 p 가 ' $p: x < 2$ '이므로

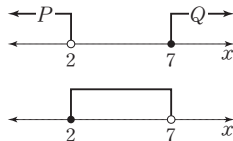
$$P = \{x | x < 2\}, P^c = \{x | x \geq 2\}$$

또, 조건 q 가 ' $q: x \geq 7$ '이므로

$$Q = \{x | x \geq 7\}, Q^c = \{x | x < 7\}$$

따라서 조건 ' $2 \leq x < 7$ '의 진리집합은

$$\begin{aligned} \{x | 2 \leq x < 7\} &= \{x | x \geq 2\} \cap \{x | x < 7\} \\ &= P^c \cap Q^c = (P \cup Q)^c \end{aligned}$$



026 답 2

전체집합을 U 라 하면

$$U = \{x | x \text{는 정수}\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

이때 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

조건 ' $\sim p$ 그리고 q '의 진리집합은 $P^c \cap Q$ 이다.

$$x^2 + 2x - 15 \geq 0 \text{에서 } (x+5)(x-3) \geq 0 \text{이므로}$$

$$x \leq -5 \text{ 또는 } x \geq 3$$

즉, $P = \{x | x \leq -5 \text{ 또는 } x \geq 3, x \text{는 정수}\}$ 이므로

$$P^c = \{x | -5 < x < 3, x \text{는 정수}\}$$

$$= \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\text{또, } x^3 - 7x^2 + 10x = 0 \text{에서 } x(x^2 - 7x + 10) = 0$$

$$x(x-2)(x-5) = 0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=5$$

$$\therefore Q = \{0, 2, 5\}$$

따라서 구하는 진리집합은 $P^c \cap Q = \{0, 2\}$ 이므로 모든 원소의 합은

$$0+2=2$$

027 답 $\{-3, -2, 0, 2, 3\}$

$$U = \{x | |x| \leq 3, x \text{는 정수}\}$$

$$= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

이때 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

조건 ' $\sim p$ 또는 $\sim q$ '의 진리집합은 $P^c \cup Q^c$ 이다.

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0 \text{에서 } (x+3)(x-1) \leq 0 \text{이므로}$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

즉, $P = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ 이므로 $P^c = \{2, 3\}$

$$\text{또, } x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

즉, $Q = \{-1, 1, 2\}$ 이므로 $Q^c = \{-3, -2, 0, 3\}$

따라서 구하는 진리집합은

$$P^c \cup Q^c = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$$

다른 풀이

조건 ' $\sim p$ 또는 $\sim q$ '의 진리집합은

$$P^c \cup Q^c = (P \cap Q)^c$$

$$p: x^2 + 2x - 3 \leq 0 \text{이므로 } P = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

$$q: x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \text{이므로 } Q = \{-1, 1, 2\}$$

$$\therefore P \cap Q = \{-1, 1\}$$

따라서 구하는 진리집합은

$$P^c \cup Q^c = (P \cap Q)^c = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$$

028 답 (1) 가정: x 는 4의 배수이다.

결론: x 는 짝수이다.

(2) 가정: 사각형 ABCD는 직사각형이다.

결론: 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

(3) 가정: $x=5$

$$\text{결론: } 4x-3=17$$

(4) 가정: $x>3$

$$\text{결론: } x>5$$

029 답 (1) 참 (2) 참 (3) 거짓 (4) 참

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

$$(1) P = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$Q = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.

$$(2) x-3=0 \text{에서 } x=3$$

$$\therefore P = \{3\}$$

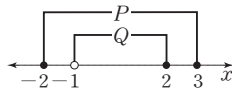
$$x^2 - x - 6 = 0 \text{에서 } (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore Q = \{-2, 3\}$$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.

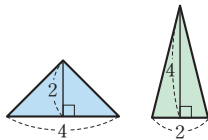
- (3) $P = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$
 $Q = \{x | -1 < x \leq 2\}$
 따라서 $P \not\subset Q$ 이므로 명제
 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.



- (4) $x^2 + 3x + 2 = 0$ 에서 $(x+2)(x+1) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = -1$
 $\therefore P = \{-2, -1\}$
 $x^2 + 3x \leq 0$ 에서 $x(x+3) \leq 0$
 $\therefore -3 \leq x \leq 0$
 $\therefore Q = \{x | -3 \leq x \leq 0\}$
 따라서 $P \subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.

- 030** 답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참 (4) 참
 (5) 거짓 (6) 거짓 (7) 거짓 (8) 참

- (1) $x = -1$ 이면 $2x + 3 = 2 \times (-1) + 3 = 1$
 즉, 주어진 명제는 참이다.
 (2) [반례] 18은 6의 배수이지만 12의 약수는 아니다.
 즉, 주어진 명제는 거짓이다.
 (3) $x \geq 2, y \geq 2$ 이면 $x + y \geq 4$
 즉, 주어진 명제는 참이다.
 (4) $x = 2$ 이면 $x^2 - 2x - 3 = 2^2 - 2 \times 2 - 3 = -3 < 0$
 즉, 주어진 명제는 참이다.
 (5) [반례] $x = 2$ 일 때, $x + 1 = 3$ 은 홀수이다.
 즉, 주어진 명제는 거짓이다.
 (6) [반례] $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$ 이면 a, b 가 무리수이지만
 $a + b = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ 은 유리수이다.
 즉, 주어진 명제는 거짓이다.
 (7) [반례] 밑변의 길이와 높이가 각각
 오른쪽 그림과 같은 두 삼각형의 넓
 이는 서로 같지만 두 삼각형은 합동
 이 아니다.
 즉, 주어진 명제는 거짓이다.
 (8) x, y 가 실수일 때, $x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = 0, y = 0$ 이므로 $xy = 0$
 이다.
 즉, 주어진 명제는 참이다.

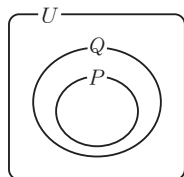


다른 풀이

- (4) $x^2 - 2x - 3 < 0$ 에서 $(x+1)(x-3) < 0$
 $\therefore -1 < x < 3$
 $p: x = 2, q: x^2 - 2x - 3 < 0$ 이라 하면 주어진 명제는 $p \rightarrow q$
 이다.
 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{2\}, Q = \{x | -1 < x < 3\}$
 따라서 $P \subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.

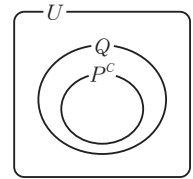
- 031** 답 (1) ○ (2) ○ (3) × (4) ○

- (1) 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$
 (2) $P \cap Q = P$
 (3) $P \cup Q = Q$
 (4) $P \cap Q^c = P - Q = \emptyset$



- 032** 답 (1) × (2) ○ (3) × (4) ×

- 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P^c \subset Q$
 (1) $P^c \subset Q$ 이므로 $Q^c \subset P$
 (2) $P \cup Q = U$
 (3) $P \cap Q^c = P - Q = Q^c$
 (4) $P - Q^c = P \cap (Q^c)^c$
 $= P \cap Q \neq \emptyset (\because P^c \neq Q)$



- 033** 답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 거짓 (4) 참

- (1) 주어진 벤 다이어그램에서 $P \subset Q$ 이므로
 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.
 (2) 주어진 벤 다이어그램에서 $P^c \not\subset Q$ 이므로
 명제 $\sim p \rightarrow q$ 는 거짓이다.
 (3) 주어진 벤 다이어그램에서 $P^c \not\subset Q^c$ 이므로
 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 는 거짓이다.
 (4) 주어진 벤 다이어그램에서 $Q^c \subset P^c$ 이므로
 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 참이다.

- 034** 답 (1) 거짓 (2) 참 (3) 참 (4) 거짓

- (1) 조건 ' $x < 5$ '의 진리집합을 P 라 하면
 $P = \{1, 2, 3, 4\}$
 따라서 $P \neq U$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
 (2) $x^2 - 2x = 0$ 에서 $x(x-2) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
 즉, 조건 ' $x^2 - 2x = 0$ '의 진리집합을 P 라 하면
 $P = \{2\}$
 따라서 $P \neq \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
 (3) x 에 1, 2, 3, 4, 5를 각각 대입하면 $2x + 6$ 의 값은
 8, 10, 12, 14, 16이므로 모두 짝수이다.
 즉, 조건 ' $2x + 6$ 은 짝수이다.'의 진리집합을 P 라 하면
 $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 따라서 $P = U$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
 (4) $3x + 3 \leq 0$ 에서 $x \leq -1$
 따라서 조건 ' $3x + 3 \leq 0$ '의 진리집합을 P 라 하면
 $P = \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

- 035** 답 (1) 거짓 (2) 거짓 (3) 참 (4) 참

- 실수 x 에 대한 명제이므로 전체집합을 U 라 하면
 $U = \{x | x \text{는 실수}\}$
 (1) x 가 실수일 때, 조건 ' $x^2 > 0$ '의 진리집합을 P 라 하면
 $P = \{x | x \neq 0\}$
 따라서 $P \neq U$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
 (2) $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ 이므로 $x^2 - x + 2 = 0$ 을 만족시
 키는 실수 x 는 존재하지 않는다.
 따라서 조건 ' $x^2 - x + 2 = 0$ '의 진리집합을 P 라 하면
 $P = \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
 (3) $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여
 $x^2 + x + 1 > 0$ 이 성립한다.

따라서 조건 ' $x^2+x+1>0$ '의 진리집합을 P 라 하면 $P=U$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(4) $x^2+2x+1\leq 0$ 에서 $(x+1)^2\leq 0$

$\therefore x=-1$

즉, 조건 ' $x^2+2x+1\leq 0$ '의 진리집합을 P 라 하면

$P=\{-1\}$

따라서 $P\neq\emptyset$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

036 답 (1) 어떤 정수 x 에 대하여 $x^2\leq 0$ 이다.

(2) 모든 유리수 x 에 대하여 $\sqrt{x}\geq 0$ 이다.

(3) 어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+4x+4<0$ 이다.

(4) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+3x-4\neq 0$ 이다.

037 답 (1) 어떤 이등변삼각형은 정삼각형이 아니다. (참)

(2) 모든 실수 x 에 대하여 $|x|>0$ 이다. (거짓)

(3) 어떤 실수 x 에 대하여 $x^2-x\geq 0$ 이다. (참)

(4) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2\geq 0$ 이다. (참)

(1) 명제 '모든 이등변삼각형은 정삼각형이다.'의 부정은 '어떤 이등변삼각형은 정삼각형이 아니다.'이고 참이다.

(2) 명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $|x|\leq 0$ 이다.'의 부정은 '모든 실수 x 에 대하여 $|x|>0$ 이다.'이다.

이때 전체집합을 U 라 하면 $U=\{x|x \text{는 실수}\}$ 이고

조건 ' $|x|>0$ '의 진리집합을 P 라 하면

$P=\{x|x\neq 0\}$ 이므로 $P\neq U$

따라서 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

(3) 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2-x<0$ 이다.'의 부정은 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2-x\geq 0$ 이다.'이다.

$x^2-x\geq 0$ 에서 $x(x-1)\geq 0 \quad \therefore x\leq 0 \text{ 또는 } x\geq 1$

이때 전체집합을 U 라 하면 $U=\{x|x \text{는 실수}\}$ 이고

조건 ' $x^2-x\geq 0$ '의 진리집합을 P 라 하면

$P=\{x|x\leq 0 \text{ 또는 } x\geq 1\}$ 이므로 $P\neq\emptyset$

따라서 주어진 명제의 부정은 참이다.

(4) 명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2<0$ 이다.'의 부정은 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2\geq 0$ 이다.'이다.

이때 전체집합을 U 라 하면 $U=\{x|x \text{는 실수}\}$ 이고

조건 ' $x^2\geq 0$ '의 진리집합을 P 라 하면

$P=U$ 이므로 주어진 명제의 부정은 참이다.

다른 풀이

(1) 명제 '모든 이등변삼각형은 정삼각형이다.'는 거짓이므로 이 명제의 부정은 참이다.

(2) 명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $|x|\leq 0$ 이다.'의 진리집합은 $\{0\}\neq\emptyset$ 이므로 참이다.

즉, 이 명제의 부정은 거짓이다.

(3) 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2-x<0$ 이다.'의 진리집합은 $\{x|0<x<1\}\neq U$ 이므로 거짓이다.

즉, 이 명제의 부정은 참이다.

(4) 명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2<0$ 이다.'의 진리집합은 $\emptyset$ 이므로 거짓이다.

즉, 이 명제의 부정은 참이다.

038 답 ④

① [반례] 6은 3의 배수이지만 9의 배수는 아니다.

② [반례] $n=3$ 일 때, $n^2+1=3^2+1=10$ 은 짝수이다.

③ [반례] $a=-1, b=-2$ 이면 $ab=2$ 는 양수이지만 $a+b=-3$ 은 음수이다.

④ 실수 x 에 대하여 $x^3=1$ 이면 $x=1$ 이므로 $x^2=1$ 이다.
즉, 주어진 명제는 참이다.

⑤ [반례] $a=2, b=-2$ 이면 $a^2=b^2=4$ 이지만 $a\neq b$ 이다.
따라서 참인 명제는 ④이다.

039 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. [반례] $x=0, y=0$ 이면 $xy=0$ 이지만 $x^2+y^2=0$ 이다.

ㄴ. [반례] $x=3, y=-2$ 이면 $x+y=1>0$ 이지만 $x>0, y<0$ 이다.

ㄷ. x, y 가 실수이므로 $x^2+y^2=0$ 이면 $x=0, y=0$

$\therefore |x|+|y|=0$

즉, 주어진 명제는 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

040 답 ①

명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 거짓임을 보이는 반례는 q 이면서 $\sim p$ 가 아닌 원소, 즉 집합 Q 에는 속하면서 집합 P^c 에는 속하지 않는 원소이므로 집합 $Q \cap (P^c)^c = Q \cap P = P \cap Q$ 의 원소이다.

041 답 3

전체집합을 U 라 하면

$U=\{x|x \text{는 10보다 작은 자연수}\}=\{1, 2, 3, \dots, 9\}$

두 조건 p, q 를 ' p : x 가 3의 배수이다.', ' q : $x>5$ 이다.'라 하고 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P=\{3, 6, 9\}, Q=\{6, 7, 8, 9\}$

이때 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례는 p 이면서 q 가 아닌 원소, 즉 집합 P 에는 속하면서 집합 Q 에는 속하지 않는 원소이므로 집합 $P \cap Q^c$ 의 원소이다.

따라서 $P \cap Q^c = P - Q = \{3\}$ 이므로 $x=3$

042 답 ㄴ, ㄷ

두 조건 p, q 의 진리집합 P, Q 에 대하여

$Q - P = \emptyset$ 이므로 $Q \subset P$

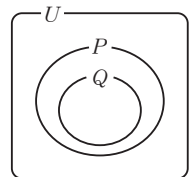
ㄱ. $P \not\subset Q^c$ 이므로

명제 $p \rightarrow \sim q$ 는 거짓이다.

ㄴ. $Q \subset P$ 이므로 명제 $q \rightarrow p$ 는 참이다.

ㄷ. $Q \subset P$ 에서 $P^c \subset Q^c$ 이므로 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 는 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.



043 답 ④

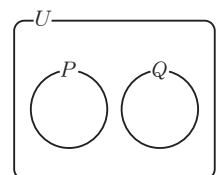
두 조건 p, q 에 대하여 명제 $p \rightarrow \sim q$

가 참이므로 진리집합 P, Q 에 대하여

$P \subset Q^c$

① $P \cap Q = \emptyset \neq P$

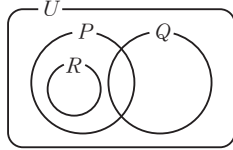
② $P \cup Q \neq P$



- ③ $P-Q=P \neq \emptyset$
 ④ $(P \cup Q) - P = Q$
 ⑤ $(P \cup Q) \cap (P \cap Q) = (P \cup Q) \cap \emptyset = \emptyset \neq Q$
 따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

044 답 ③

- ① $P \not\subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.
 ② $P \not\subset R$ 이므로 명제 $p \rightarrow r$ 는 거짓이다.
 ③ $R \subset P$ 에서 $P^c \subset R^c$ 이므로 명제 $\sim p \rightarrow \sim r$ 는 참이다.
 ④ $Q \not\subset P^c$ 이므로 명제 $q \rightarrow \sim p$ 는 거짓이다.
 ⑤ $R \not\subset P^c$ 이므로 명제 $r \rightarrow \sim p$ 는 거짓이다.
 따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

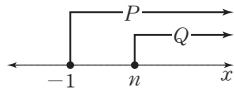


045 답 9

$x^2 - 6x + 8 \leq 0$ 에서 $(x-2)(x-4) \leq 0$
 $\therefore 2 \leq x \leq 4$
 즉, 명제 ' $x=k$ 이면 $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ 이다.'가 참이 되도록 하는 정수 k 의 값은 2 또는 3 또는 4이다.
 따라서 구하는 합은
 $2+3+4=9$

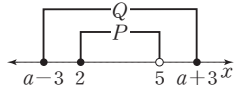
046 답 -1

두 조건 ' $p: x+1 \geq 0$ ', ' $q: x \geq n$ '의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{x | x+1 \geq 0\} = \{x | x \geq -1\}$
 $Q = \{x | x \geq n\}$
 이때 명제 $q \rightarrow p$ 가 참이 되려면
 $Q \subset P$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서
 $n \geq -1$
 따라서 정수 n 의 최솟값은 -1이다.



047 답 4

두 조건 p, q 를 각각 $p: 2 \leq x < 5, q: |x-a| \leq 3$ 이라 하고 진리 집합을 각각 P, Q 라 하자.
 $|x-a| \leq 3$ 에서 $-3 \leq x-a \leq 3$ 이므로
 $a-3 \leq x \leq a+3$
 $\therefore P = \{x | 2 \leq x < 5\}, Q = \{x | a-3 \leq x \leq a+3\}$
 주어진 명제, 즉 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서
 $a-3 \leq 2, 5 \leq a+3 \quad \therefore 2 \leq a \leq 5$
 따라서 자연수 a 는 2, 3, 4, 5의 4개이다.



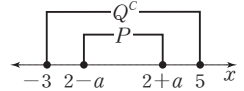
048 답 ②

$|x-2| \leq a$ ($a > 0$)에서 $-a \leq x-2 \leq a$
 $\therefore 2-a \leq x \leq 2+a$
 $x^2 - 2x - 15 > 0$ 에서 $(x+3)(x-5) > 0$
 $\therefore x < -3$ 또는 $x > 5$
 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{x | |x-2| \leq a\} = \{x | 2-a \leq x \leq 2+a\}$

$$Q = \{x | x^2 - 2x - 15 > 0\} = \{x | x < -3 \text{ 또는 } x > 5\}$$

$$\therefore Q^c = \{x | -3 \leq x \leq 5\}$$

이때 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이 되려면
 $P \subset Q^c$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서
 $-3 \leq 2-a, 2+a \leq 5$
 $\therefore 0 < a \leq 3$ ($\because a > 0$)



따라서 양수 a 의 최댓값은 3이다.

049 답 ⑤

- ① [반례] $x=0$ 일 때, $|x|=0$ 이다.
 ② $x=0, 1, 2, 3, 4$ 일 때, $x^2 \geq 0$ 이므로
 명제 '어떤 x 에 대하여 $x^2 < 0$ 이다.'는 거짓이다.
 ③ [반례] $x=4$ 일 때, $x-4=4-4=0$ 이다.
 ④ $x=0, 1, 2, 3, 4$ 일 때, $|x|=x$ 이므로
 명제 '어떤 x 에 대하여 $|x| > x$ 이다.'는 거짓이다.
 ⑤ $x=0, 1, 2, 3, 4$ 일 때, $x^2+x \geq 0$ 이므로
 명제 '모든 x 에 대하여 $x^2+x \geq 0$ 이다.'는 참이다.
 따라서 참인 명제는 ⑤이다.

050 답 ⑤

- ① 부정은 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ 이다.'이고 참이다.
 ② 부정은 '모든 실수 x 에 대하여 $|x| \geq 0$ 이다.'이고 참이다.
 ③ 부정은 '어떤 실수 x 에 대하여 $(x+1)^2 < 1$ 이다.'이다.
 $(x+1)^2 < 1$ 에서 $x^2+2x+1 < 1$,
 $x^2+2x < 0, x(x+2) < 0$
 $\therefore -2 < x < 0$
 즉, $-2 < x < 0$ 인 x 에 대하여 $(x+1)^2 < 1$ 이 성립하므로 주어진 명제의 부정은 참이다.
 ④ 부정은 '어떤 실수 x 에 대하여 $|x+2| < 2$ 이다.'이다.
 $|x+2| < 2$ 에서 $-2 < x+2 < 2$
 $\therefore -4 < x < 0$
 즉, $-4 < x < 0$ 인 x 에 대하여 $|x+2| < 2$ 가 성립하므로 주어진 명제의 부정은 참이다.
 ⑤ 부정은 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+2x+3=0$ 이다.'이다.
 이때 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+2x+3 \neq 0$ 이다.
 즉, 주어진 명제의 부정은 거짓이다.
 따라서 주어진 명제 중 그 부정이 거짓인 것은 ⑤이다.

다른 풀이

어떤 명제가 참일 때, 그 명제의 부정은 거짓이므로 참인 명제를 찾으면 된다.

- ① 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 < 0$ 을 만족시키는 x 는 존재하지 않는다.
 즉, 명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 < 0$ 이다.'의 진리집합은 $\emptyset$ 이므로 이 명제는 거짓이다.
 ② 모든 실수 x 에 대하여 $|x| \geq 0$ 이므로 $|x| < 0$ 을 만족시키는 x 는 존재하지 않는다.
 즉, 명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $|x| < 0$ 이다.'의 진리집합은 $\emptyset$ 이므로 이 명제는 거짓이다.

- ③ [반례] $x = -1$ 일 때, $(x+1)^2 = (-1+1)^2 = 0 < 1$
 ④ [반례] $x = -1$ 일 때, $|x+2| = |-1+2| = 1 < 2$
 ⑤ $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$

즉, 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2x + 3 \neq 0$ 이다.'는 참이다.
 따라서 주어진 명제 중 그 부정이 거짓인 것, 즉 주어진 명제가 참인 것은 ⑤이다.

051 답 7

명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2kx + 4k + 12 > 0$ 이다.'가 참이 되려면 이차방정식 $x^2 + 2kx + 4k + 12 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\frac{D}{4} = k^2 - (4k + 12) < 0$$

$$k^2 - 4k - 12 < 0, (k+2)(k-6) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 6$$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, \dots, 5$ 의 7개이다.

052 답 (1) 역: $x^2 = 1$ 이면 $x = 1$ 이다. (거짓)

대우: $x^2 \neq 1$ 이면 $x \neq 1$ 이다. (참)

(2) 역: $xy > 0$ 이면 $x > 0, y > 0$ 이다. (거짓)

대우: $xy \leq 0$ 이면 $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이다. (참)

(3) 역: x 가 12의 약수이면 x 는 6의 약수이다. (거짓)

대우: x 가 12의 약수가 아니면 x 는 6의 약수가 아니다. (참)

(4) 역: 두 삼각형이 합동이면 두 삼각형의 넓이는 같다. (참)

대우: 두 삼각형이 합동이 아니면 두 삼각형의 넓이는 같지 않다. (거짓)

(1) 역: $x^2 = 1$ 이면 $x = 1$ 이다. (거짓)

[반례] $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x \neq 1$ 이다.

대우: $x^2 \neq 1$ 이면 $x \neq 1$ 이다. (참)

(2) 역: $xy > 0$ 이면 $x > 0, y > 0$ 이다. (거짓)

[반례] $x = -1, y = -1$ 이면 $xy = 1 > 0$ 이지만

$x < 0, y < 0$ 이다.

대우: $xy \leq 0$ 이면 $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이다. (참)

(3) 역: x 가 12의 약수이면 x 는 6의 약수이다. (거짓)

[반례] $x = 4$ 이면 x 는 12의 약수이지만 6의 약수는 아니다.

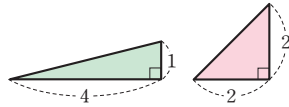
대우: x 가 12의 약수가 아니면 x 는 6의 약수가 아니다. (참)

(4) 역: 두 삼각형이 합동이면 두 삼각형의 넓이는 같다. (참)

대우: 두 삼각형이 합동이 아니면 두 삼각형의 넓이는 같지 않다. (거짓)

[반례] 오른쪽 그림의 두 삼

각형은 합동이 아니지만 두 삼각형의 넓이는 서로 같다.



053 답 (1) × (2) ○ (3) × (4) ○

(1) 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이지만 그 역 $q \rightarrow p$ 의 참, 거짓은 알 수 없다.

(2) 명제 $q \rightarrow p$ 가 참이면 그 대우 $\sim p \rightarrow \sim q$ 는 반드시 참이다.

(3) 명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이지만 그 역 $\sim p \rightarrow q$ 의 참, 거짓은 알 수 없다.

(4) 명제 $\sim q \rightarrow p$ 가 참이면 그 대우 $\sim p \rightarrow q$ 는 반드시 참이다.

054 답 (1) r (2) q (3) q (4) $\sim p$ (5) r

(1) 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow r$ 가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $p \rightarrow \boxed{r}$ 가 참이다.

(2) 두 명제 $q \rightarrow p, p \rightarrow r$ 가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $\boxed{q} \rightarrow r$ 가 참이다.

(3) 명제 $\sim q \rightarrow \sim r$ 가 참이면 그 대우 $r \rightarrow q$ 도 참이다.

즉, 두 명제 $p \rightarrow r, r \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $p \rightarrow \boxed{q}$ 가 참이다.

(4) 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이면 그 대우 $q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

즉, 두 명제 $r \rightarrow q, q \rightarrow \sim p$ 가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $r \rightarrow \boxed{\sim p}$ 가 참이다.

(5) 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참이면 그 대우 $q \rightarrow p$ 도 참이다.

즉, 두 명제 $r \rightarrow q, q \rightarrow p$ 가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $\boxed{r} \rightarrow p$ 가 참이다.

055 답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ○ (5) ×

(1) 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

(2) 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이지만 그 역 $q \rightarrow p$ 가 참인지는 알 수 없다.

(3) 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow r$ 가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $p \rightarrow r$ 는 반드시 참이다.

(4) (3)에 의하여 명제 $p \rightarrow r$ 가 참이므로 그 대우 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

(5) (4)에 의하여 명제 $\sim r \rightarrow \sim p$ 가 참이지만 그 역 $\sim p \rightarrow \sim r$ 가 참인지는 알 수 없다.

056 답 ⑤

명제 $\sim p \rightarrow q$ 의 역이 참이므로 명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이다.

또, 명제 $q \rightarrow \sim p$ 의 대우 $p \rightarrow \sim q$ 도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ⑤이다.

057 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 참이지만 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 의 참, 거짓은 알 수 없다.

ㄴ. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이면 그 대우 $q \rightarrow \sim p$ 는 참이다.

ㄷ. 명제 $\sim q \rightarrow p$ 가 참이면 그 대우 $\sim p \rightarrow q$ 는 참이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

058 답 ④

명제 ' $x > y$ 이면 $x^2 > y^2$ 이다.'의 대우는

' $x^2 \leq y^2$ 이면 $x \leq y$ 이다.'이다.

[반례] $x = -1, y = -3$ 이면 $x^2 \leq y^2$ 이지만 $x > y$ 이다.

따라서 주어진 명제의 대우는 거짓이다.

다른 풀이

어떤 명제와 그 대우의 참, 거짓은 일치하므로 주어진 명제의 참, 거짓을 따져도 된다.

[반례] $x = -1, y = -3$ 이면 $x > y$ 이지만 $x^2 < y^2$ 이다.

따라서 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

공생 비법 명제와 그 대우의 참, 거짓

어떤 명제와 그 대우의 참, 거짓은 일치한다. 따라서 명제와 그 대우의 참, 거짓을 확인할 때는 둘 중 하나만 확인해도 충분하다.

- ① 명제의 참, 거짓을 빠르게 확인할 수 없을 때
→ 그 대우의 참, 거짓을 따져 본다.
- ② 명제의 대우의 참, 거짓을 빠르게 확인할 수 없을 때
→ 명제의 참, 거짓을 따져 본다.

059 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 대우: x 가 4의 약수가 아니면 x 는 8의 약수가 아니다. (거짓)

[반례] $x=8$ 이면 x 는 4의 약수가 아니지만 8의 약수이다.

ㄴ. 대우: $x+y \leq 0$ 이면 $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이다. (참)

ㄷ. 대우: $xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이다. (참)

따라서 대우가 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

어떤 명제와 그 대우의 참, 거짓은 일치하므로 대우가 참인 명제는 그 명제도 참이다.

ㄱ. x 가 8의 약수이면 x 는 4의 약수이다. (거짓)

[반례] $x=8$ 이면 x 는 8의 약수이지만 4의 약수는 아니다.

ㄴ. $x > 0$, $y > 0$ 이면 $x+y > 0$ 이다. (참)

ㄷ. $x=0$ 또는 $y=0$ 이면 $xy=0$ 이다. (참)

따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이므로 그 대우가 참인 명제도 ㄴ, ㄷ이다.

참고 $\sim(p \text{ 또는 } q) \Rightarrow \sim p \text{ 그리고 } \sim q$

$\sim(p \text{ 그리고 } q) \Rightarrow \sim p \text{ 또는 } \sim q$

060 답 ③

ㄱ. 역: $x^2 > y^2$ 이면 $x > y$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-3$, $y=2$ 이면 $x^2 > y^2$ 이지만 $x < y$ 이다.

ㄴ. 역: $x < 0$ 이면 $|x| > x$ 이다. (참)

ㄷ. 역: $xy=0$ 이면 $x=0$, $y=0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=0$ 이면 $xy=0$ 이지만 $x \neq 0$, $y=0$ 이다.

ㄹ. 역: $x^2-2x-3=0$ 이면 $x=3$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-1$ 이면

$$x^2-2x-3=(-1)^2-2 \times (-1)-3=0 \text{이지만}$$

$$x \neq 3 \text{이다.}$$

따라서 역이 거짓인 명제는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

061 답 ③

① 역: $x+y=0$ 이면 $x^2+y^2=0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=-1$ 이면 $x+y=0$ 이지만

$$x^2+y^2=1^2+(-1)^2=2 \neq 0 \text{이다.}$$

명제: $x^2+y^2=0$ 이면 $x+y=0$ 이다. (참)

주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

② 역: $x > 0$ 이고 $y < 0$ 이면 $xy < 0$ 이다. (참)

명제: $xy < 0$ 이면 $x > 0$ 이고 $y < 0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-1$, $y=2$ 이면 $xy < 0$ 이지만 $x < 0$, $y > 0$ 이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

③ 역: $x=y=0$ 이면 $|x|+|y|=0$ 이다. (참)

명제: $|x|+|y|=0$ 이면 $x=y=0$ 이다. (참)

주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

④ 역: x 가 10의 배수이면 x 는 5의 배수이다. (참)

명제: x 가 5의 배수이면 x 는 10의 배수이다. (거짓)

[반례] $x=5$ 이면 x 는 5의 배수이지만 10의 배수는 아니다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

⑤ 역: $x+y$ 가 유리수이면 x , y 중 적어도 하나가 유리수이다.

(거짓)

[반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ 이면 $x+y=0$ 은 유리수이지만

x , y 모두 유리수가 아니다.

명제: x , y 중 적어도 하나가 유리수이면 $x+y$ 는 유리수이다.

(거짓)

[반례] $x=\sqrt{2}$, $y=0$ 이면 x , y 중 적어도 하나가 유리수이지만

$x+y$ 는 유리수가 아니다.

따라서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ③이다.

참고 ① 명제 ' $x^2+y^2=0$ 이면 $x+y=0$ 이다.'의 증명

→ x , y 가 실수이므로 $x^2+y^2=0$ 이면 $x=0$, $y=0$ ∴ $x+y=0$

③ 명제 ' $|x|+|y|=0$ 이면 $x=y=0$ 이다.'의 증명

→ x , y 가 실수이므로 $|x|+|y|=0$ 이면 $x=0$, $y=0$ ∴ $x=y=0$

062 답 2

명제 $p \rightarrow q$ 의 역 $q \rightarrow p$ 가 참이므로 $Q \subset P$

이때 $P=\{1, 3, a^2+1\}$, $Q=\{5, a+1\}$ 이므로 $5 \in P$

즉, $a^2+1=5$ 에서 $a^2=4$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=2$$

(i) $a=-2$ 일 때,

$$P=\{1, 3, 5\}, Q=\{-1, 5\} \text{이므로}$$

$$Q \not\subset P$$

(ii) $a=2$ 일 때,

$$P=\{1, 3, 5\}, Q=\{3, 5\} \text{이므로}$$

$$Q \subset P$$

(i), (ii)에서 $a=2$

063 답 ①

명제 ' $x^2+2ax+8 \neq 0$ 이면 $x \neq 4$ 이다.'가 참이므로 그 대우 ' $x=4$

이면 $x^2+2ax+8=0$ 이다.'도 참이다.

즉, $x=4$ 를 $x^2+2ax+8=0$ 에 대입하면

$$4^2+2a \times 4+8=0, 8a=-24$$

$$\therefore a=-3$$

064 답 3

명제 ' $x+y \geq 10$ 이면 $x \geq k$ 또는 $y \geq 7$ 이다.'가 참이 되려면 그 대

우 ' $x < k$ 이고 $y < 7$ 이면 $x+y < 10$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

이때 $x < k$ 이고 $y < 7$ 이면 $x+y < k+7$ 이므로

$$k+7 \leq 10 \quad \therefore k \leq 3$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 3이다.

065 답 ②

두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면

$$P=\{x \mid 3 < x < 7\}, Q=\{x \mid x > a\}$$

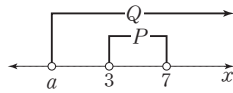
명제 $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참이면 그 대우 $p \rightarrow q$ 도 참이므로

$$P \subset Q$$

즉, 오른쪽 그림에서

$$a \leq 3$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 3이다.



066 답 6

명제 ' $|x-k| > 3$ 이면 $|x-2| > 2$ 이다.'가 참이 되려면 그 대우 ' $|x-2| \leq 2$ 이면 $|x-k| \leq 3$ 이다.'가 참이어야 한다.

두 조건 p, q 를 $p: |x-2| \leq 2, q: |x-k| \leq 3$ 이라 하고 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

$$p: |x-2| \leq 2 \text{에서 } -2 \leq x-2 \leq 2 \quad \therefore 0 \leq x \leq 4$$

$$\therefore P = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$$

$$q: |x-k| \leq 3 \text{에서 } -3 \leq x-k \leq 3 \quad \therefore k-3 \leq x \leq k+3$$

$$\therefore Q = \{x | k-3 \leq x \leq k+3\}$$

이때 주어진 명제의 대우 $p \rightarrow q$ 가 참이므로

$$P \subset Q$$

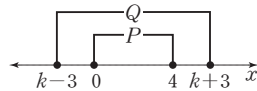
즉, 오른쪽 그림에서

$$k-3 \leq 0, 4 \leq k+3$$

$$\therefore 1 \leq k \leq 3$$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3이므로 그 합은

$$1+2+3=6$$



067 답 ④

두 명제 $p \rightarrow r, \sim q \rightarrow \sim r$ 가 모두 참이므로 각 명제의 대우 $\sim r \rightarrow \sim p, r \rightarrow q$ 도 모두 참이다.

또, 두 명제 $p \rightarrow r, r \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $p \rightarrow q$ 도 참이고, 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

068 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ

두 명제 $r \rightarrow \sim p, \sim q \rightarrow p$ 가 모두 참이므로 각 명제의 대우 $p \rightarrow \sim r, \sim p \rightarrow q$ 도 모두 참이다.

또, 두 명제 $r \rightarrow \sim p, \sim p \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $r \rightarrow q$ 도 참이고, 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim r$ 도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ이다.

069 답 ⑤

두 명제 $p \rightarrow \sim r, \sim p \rightarrow \sim q$ 가 모두 참이므로 각 명제의 대우 $r \rightarrow \sim p, q \rightarrow p$ 도 모두 참이다.

또, 두 명제 $r \rightarrow \sim p, \sim p \rightarrow \sim q$ 가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $r \rightarrow \sim q$ 도 참이고, 그 대우 $q \rightarrow \sim r$ 도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

070 답 (1) ① 참 ② 거짓 ③ 충분

(2) ① 거짓 ② 참 ③ 필요

(3) ① 참 ② 참 ③ 필요충분

(1) $p \rightarrow q: x=1$ 이면 $x^2=1$ 이다. (참)

$q \rightarrow p: x^2=1$ 이면 $x=1$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-1$ 이면 $x^2=1$ 이지만 $x \neq 1$ 이다.

따라서 $p \Rightarrow q$ 이고 $q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 **충분** 조건이다.

(2) $p \rightarrow q: x > 0$ 이면 $x \geq 1$ 이다. (거짓)

[반례] $x = \frac{1}{2}$ 이면 $x > 0$ 이지만 $x < 1$ 이다.

$q \rightarrow p: x \geq 1$ 이면 $x > 0$ 이다. (참)

따라서 $q \Rightarrow p$ 이고 $p \not\Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 **필요** 조건이다.

(3) $p \rightarrow q: x$ 가 2의 배수이면 짝수인 자연수이다. (참)

$q \rightarrow p: x$ 가 짝수인 자연수이면 2의 배수이다. (참)

따라서 $p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow p$, 즉 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 **필요충분** 조건이다.

071 답 (1) ① $P=\{2\}, Q=\{-3, 2\}$

② $P \subset Q$

③ 충분

(2) ① $P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, Q=\{1, 2, 3, 6\}$

② $Q \subset P$

③ 필요

(3) ① $P=\{x | 2 \leq x \leq 3\}, Q=\{x | 2 \leq x \leq 3\}$

② $P=Q$

③ 필요충분

(1) ① $q: x^2+x-6=0$ 에서 $(x+3)(x-2)=0$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore P = \{2\}, Q = \{-3, 2\}$$

② $P \subset Q$

③ $p \Rightarrow q$ 이고 $q \not\Rightarrow p$ 이므로

p 는 q 이기 위한 **충분** 조건이다.

(2) ① $P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, Q=\{1, 2, 3, 6\}$

② $Q \subset P$

③ $q \Rightarrow p$ 이고 $p \not\Rightarrow q$ 이므로

p 는 q 이기 위한 **필요** 조건이다.

(3) ① $q: x^2-5x+6 \leq 0$ 에서 $(x-2)(x-3) \leq 0$

$$\therefore 2 \leq x \leq 3$$

$$\therefore P = \{x | 2 \leq x \leq 3\}, Q = \{x | 2 \leq x \leq 3\}$$

② $P=Q$

③ $p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow p$, 즉 $p \Leftrightarrow q$ 이므로

p 는 q 이기 위한 **필요충분** 조건이다.

072 답 (1) 필요충분조건

(2) 충분조건

(3) 필요조건

(4) 필요조건

(5) 충분조건

(6) 충분조건

(7) 필요조건

(8) 필요충분조건

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

(1) $p: x^2=4$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$$\therefore P = \{-2, 2\}$$

$$q: |x|=2 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore Q = \{-2, 2\}$$

즉, $P=Q$ 이므로 $p \Leftrightarrow q$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

(2) $P = \{1\}$

$$q: x^2+2x-3=0 \text{에서 } (x+3)(x-1)=0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore Q = \{-3, 1\}$$

즉, $P \subset Q$, $Q \not\subset P$ 이므로 $p \Rightarrow q$, $q \not\Rightarrow p$

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

(3) $p \rightarrow q$: $xy=0$ 이면 $x=0$, $y=0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-1$, $y=0$ 이면 $xy=0$ 이지만 $x \neq 0$ 이다.

$q \rightarrow p$: $x=0$, $y=0$ 이면 $xy=0$ 이다. (참)

따라서 $p \not\Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

(4) ' p : x 는 한 자리의 자연수이다.'에서

$$P = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

' q : x 는 10 이하의 소수인 자연수이다.'에서

$$Q = \{2, 3, 5, 7\}$$

즉, $Q \subset P$, $P \not\subset Q$ 이므로 $q \Rightarrow p$, $p \not\Rightarrow q$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

(5) $p \rightarrow q$: x, y 가 유리수이면 $x+y$ 는 유리수이다. (참)

$q \rightarrow p$: $x+y$ 가 유리수이면 x, y 는 유리수이다. (거짓)

[반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ 이면 $x+y=0$ 은 유리수이지만 x, y 는 유리수가 아니다.

따라서 $p \Rightarrow q$ 이고 $q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

(6) $p \rightarrow q$: $x > 2$, $y > 2$ 이면 $xy > 4$ 이다. (참)

$q \rightarrow p$: $xy > 4$ 이면 $x > 2$, $y > 2$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-3$, $y=-5$ 이면 $xy=15 > 4$ 이지만 $x=-3 < 2$, $y=-5 < 2$ 이다.

따라서 $p \Rightarrow q$ 이고 $q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

(7) $P = \{x | x \geq 0\}$

$$q: x^2 - 3x + 2 \leq 0 \text{에서 } (x-1)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 2$$

$$\therefore Q = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$$

즉, $Q \subset P$, $P \not\subset Q$ 이므로 $q \Rightarrow p$, $p \not\Rightarrow q$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

(8) p : $|x| < 5$ 에서 $-5 < x < 5$

$$\therefore P = \{x | -5 < x < 5\}$$

$$q: x^2 - 25 < 0 \text{에서 } (x+5)(x-5) < 0$$

$$\therefore -5 < x < 5$$

$$\therefore Q = \{x | -5 < x < 5\}$$

즉, $P=Q$ 이므로 $p \Leftrightarrow q$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

073 답 1

단계1. 두 조건 p, q 를 이용하여 반드시 참이 되는 명제 구하기

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 반드시 참이 되는 명제는

$p \rightarrow q$ 이다.

단계2. 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계 구하기

$p \Rightarrow q$ 이므로 $P \subset Q$

단계3. 상수 a 의 값 구하기

$$P = \{1\}, Q = \{x | x^2 + ax - 2 = 0\} \text{에서}$$

$$P \subset Q \text{이므로 } 1 \in Q$$

즉, $x=1$ 을 $x^2 + ax - 2 = 0$ 에 대입하면

$$1 + a - 2 = 0 \quad \therefore a = 1$$

074 답 $a \geq 2$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 반드시 참이 되는 명제는

$q \rightarrow p$ 이다.

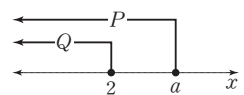
즉, $q \Rightarrow p$ 이므로 $Q \subset P$

$$P = \{x | x \leq a\},$$

$$Q = \{x | x - 2 \leq 0\} = \{x | x \leq 2\}$$

이때 $Q \subset P$ 이므로 오른쪽 그림에서

$$a \geq 2$$



075 답 1

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

p 가 q 이기 위한 필요충분조건이므로 반드시 참이 되는 명제는

$p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$ 이다.

즉, $p \Leftrightarrow q$ 이므로 $P=Q$

$$P = \{x | a \leq x \leq 2\}$$

$$q: x^2 - 3x + 2 \leq 0 \text{에서 } (x-1)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 2$$

$$\therefore Q = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$$

이때 $P=Q$ 이므로 $a=1$

076 답 ③

• 두 조건 p, q 를 $p: x^2=9$, $q: x=3$ 이라 하고 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$x^2=9 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore P = \{-3, 3\}, Q = \{3\}$$

즉, $P \not\subset Q$, $Q \subset P$ 이므로 $q \Rightarrow p$ 이고 $p \not\Rightarrow q$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $x^2=9$ 는 $x=3$ 이기 위한 필요 조건이다.

• 두 조건 r, s 를 $r: x > 1$, $s: x^2 \geq 1$ 이라 하고 r, s 의 진리집합을 각각 R, S 라 하면

$$x^2 \geq 1 \text{에서 } x^2 - 1 \geq 0, (x+1)(x-1) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1$$

$$\therefore R = \{x | x > 1\}, S = \{x | x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1\}$$

즉, $R \subset S$, $S \not\subset R$ 이므로 $r \Rightarrow s$ 이고 $s \not\Rightarrow r$ 이다.

따라서 r 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $x > 1$ 은 $x^2 \geq 1$ 이기 위한 충분 조건이다.

$\therefore$ (가) 필요, (나) 충분

077 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $p: x-2 < 0$ 에서 $x < 2$

$$q: 3x-4 < x+6 \text{에서 } 2x < 10 \quad \therefore x < 5$$

즉, $p \Rightarrow q$ 이고 $q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄴ. $p: x=y$
 $q: x^2=y^2$ 에서 $x^2-y^2=0, (x+y)(x-y)=0$
 $\therefore x=-y$ 또는 $x=y$
 즉, $p \Rightarrow q$ 이고 $q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄷ. $p: xy>0$ 에서 $x>0, y>0$ 또는 $x<0, y<0$
 $q: x>0$ 이고 $y>0$
 즉, $q \Rightarrow p$ 이고 $p \not\Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

따라서 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄴ, ㄷ이다.

078 답 ④, ⑤

- ① $p: x=3$
 $q: 3x^2-5x-12=0$ 에서 $(3x+4)(x-3)=0$
 $\therefore x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=3$
 즉, $p \Rightarrow q$ 이고 $q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
- ② $p: |x| \leq 1$ 에서 $-1 \leq x \leq 1$
 $q: -2 \leq x \leq 3$
 즉, $p \Rightarrow q$ 이고 $q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
- ③ $p: x^2=1$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
 $q: x^3=x$ 에서 $x^3-x=0$
 $x(x+1)(x-1)=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
 즉, $p \Rightarrow q$ 이고 $q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
- ④ $p: |xy|=xy$ 에서 $xy>0$
 $\therefore x>0, y>0$ 또는 $x<0, y<0$
 $q: x>0$ 이고 $y>0$
 즉, $q \Rightarrow p$ 이고 $p \not\Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.
- ⑤ $p: x^2+y^2>0$ 에서 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$
 $q: xy>0$ 에서 $x>0, y>0$ 또는 $x<0, y<0$
 즉, $q \Rightarrow p$ 이고 $p \not\Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

따라서 p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ④, ⑤이다.

참고 ⑤ $[p \rightarrow q \text{의 반례}] x=-1, y=1$ 이면 $x^2+y^2=2>0$ 이지만 $xy=-1<0$ 이다.

079 답 ㄴ

ㄱ. $p: x^2=y^2$ 에서 $x^2-y^2=0$
 $(x+y)(x-y)=0$
 $\therefore x=-y$ 또는 $x=y$
 $q: x^3=y^3$ 에서 $x^3-y^3=0$
 $(x-y)(x^2+xy+y^2)=0 \quad \therefore x=y \quad (\because x, y \text{는 실수})$
 즉, $q \Rightarrow p$ 이고 $p \not\Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

ㄴ. $p: x^2+y^2=0$ 에서 $x=0$ 이고 $y=0$
 $q: |x|+|y|=0$ 에서 $x=0$ 이고 $y=0$
 즉, $p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow p$, 즉 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $p: x^2+y^2>0$ 에서 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$
 $q: x+y>0$
 즉, $q \Rightarrow p$ 이고 $p \not\Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

따라서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄴ이다.

참고 ㄷ. $[p \rightarrow q \text{의 반례}] x=0, y=-1$ 이면 $x^2+y^2=1>0$ 이지만 $x+y=-1<0$ 이다.

080 답 ②

- ㄱ. 명제 $p \rightarrow q$ 는 ' $x=0$ 이고 $y=0$ 이면 $x+y=0$ 이다.'이고 참이다.
 명제 $q \rightarrow p$ 는 ' $x+y=0$ 이면 $x=0$ 이고 $y=0$ 이다.'이고 거짓이다.
 [반례] $x=1, y=-1$ 이면 $x+y=0$ 이지만 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이다.
 즉, $p \Rightarrow q$ 이고 $q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ㄴ. 명제 $p \rightarrow r$ 는 ' $x=0$ 이고 $y=0$ 이면 $xy=0$ 이다.'이고 참이다.
 명제 $r \rightarrow p$ 는 ' $xy=0$ 이면 $x=0$ 이고 $y=0$ 이다.'이고 거짓이다.
 [반례] $x=1, y=0$ 이면 $xy=0$ 이지만 $x \neq 0$ 이다.
 즉, $p \Rightarrow r$ 이고 $r \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 충분조건이다.
- ㄷ. 명제 $p \rightarrow s$ 는 ' $x=0$ 이고 $y=0$ 이면 $x+yi=0$ 이다.'이고 참이다.
 명제 $s \rightarrow p$ 는 ' $x+yi=0$ 이면 $x=0$ 이고 $y=0$ 이다.'이고 참이다.
 즉, $p \Rightarrow s$ 이고 $s \Rightarrow p$, 즉 $p \Leftrightarrow s$ 이므로 p 는 s 이기 위한 필요충분조건이다.
- ㄹ. 명제 $r \rightarrow s$ 는 ' $xy=0$ 이면 $x+yi=0$ 이다.'이고 거짓이다.
 [반례] $x=1, y=0$ 이면 $xy=0$ 이지만 $x+yi=1 \neq 0$ 이다.
 명제 $s \rightarrow r$ 는 ' $x+yi=0$ 이면 $xy=0$ 이다.'이고 참이다.
 즉, $s \Rightarrow r$ 이고 $r \not\Rightarrow s$ 이므로 r 는 s 이기 위한 필요조건이다.
- 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

주의 x, y 가 모두 실수라는 조건이 있으므로 ㄷ에서 $p \rightarrow s, s \rightarrow p$ 가 둘 다 참이다. 만약 이 조건이 없다면 $s \rightarrow p$ 는 거짓이다.
 이처럼 수의 종류에 대하여 주어지는 전제 조건에 따라 참, 거짓이 달라질 수 있으므로 주의하여 판단한다.

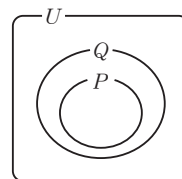
참고 실수 a, b 에 대하여 복소수 $a+bi$ 에서 $a+bi=0$ 이면 $a=b=0$

081 답 ㄷ, ㄹ

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로

- $P \subset Q$
 ㄱ. $P^c \not\subset Q^c$
 ㄴ. $P \cap Q = P$
 ㄷ. $P - Q^c = P \cap (Q^c)^c = P \cap Q = P$
 ㄹ. $P^c \cup Q = U$

따라서 항상 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.



082 답 ①

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로

$$P \subset Q$$

$\sim q$ 는 $\sim r$ 이기 위한 필요조건이므로

$$R^c \subset Q^c \quad \therefore Q \subset R$$

$$\therefore P \subset Q \subset R$$

083 답 ③

$$(Q-P) \cup (R-P^c) = \emptyset \text{이므로}$$

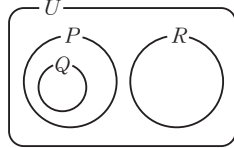
$$Q-P = \emptyset, R-P^c = \emptyset$$

$$Q-P = \emptyset \text{에서 } Q \subset P$$

$$R-P^c = R \cap (P^c)^c = R \cap P = \emptyset \text{에}$$

서 P, R 는 서로소이므로 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤 다이어

그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



①, ③ $Q \subset P$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

②, ④ $P \subset R^c$ 이므로 p 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이다.

⑤ $Q \subset R^c$ 이므로 q 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이다.

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

084 답 8

$$2x+1=5 \text{에서 } 2x=4 \quad \therefore x=2$$

즉, $x=2$ 가 $x^2-ax+b=0$ 이기 위한 필요충분조건이므로 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 해가 $x=2$ 하나뿐이어야 한다.

이때 중근 $x=2$ 를 해로 갖고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$$(x-2)^2=0 \quad \therefore x^2-4x+4=0$$

이 이차방정식이 $x^2-ax+b=0$ 과 일치하므로

$$a=4, b=4 \quad \therefore a+b=8$$

085 답 ④

$$x^2-6x+8 < 0 \text{에서 } (x-2)(x-4) < 0$$

$$\therefore 2 < x < 4$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid 2 < x < 4\}, Q = \{x \mid x > k\}$$

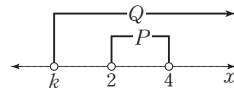
이때 p 가 q 이기 위한 충분조건이므로

$$P \subset Q$$

즉, 오른쪽 그림에서

$$k \leq 2$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 2이다.



086 답 6

$$p: 3x+a \neq 0 \text{에서 } x \neq -\frac{a}{3}$$

$$q: x^2+2x-3=0 \text{에서 } (x+3)(x-1)=0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \left\{x \mid x \neq -\frac{a}{3}\right\}, Q = \{-3, 1\}$$

$$\therefore P^c = \left\{-\frac{a}{3}\right\}$$

이때 p 가 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이므로

$$Q^c \subset P \quad \therefore P^c \subset Q$$

$$\text{즉, } -\frac{a}{3} = -3 \text{ 또는 } -\frac{a}{3} = 1 \text{이므로}$$

$$a=9 \text{ 또는 } a=-3$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$9 + (-3) = 6$$

087 답 3

$$q: x^2-9x+18 \leq 0 \text{에서 } (x-3)(x-6) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq x \leq 6$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid -2 < x < k\}, Q = \{x \mid 3 \leq x \leq 6\}$$

$$\therefore P^c = \{x \mid x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq k\}$$

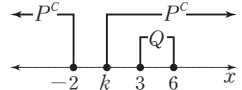
이때 $\sim p$ 가 q 이기 위한 필요조건이므로

$$Q \subset P^c$$

즉, 오른쪽 그림에서

$$-2 < k \leq 3$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 3이다.



중단원 점검 문제

II-3 | 명제

128~129쪽

01 답 ④

① '높다.'라는 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

② x 의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다.

③ 6은 3의 배수이지만 짝수이다. 즉, '3의 배수는 홀수이다.'는 거짓인 명제이다.

④ '두 홀수의 합은 짝수이다.'는 참인 명제이다.

⑤ 직사각형이 아닌 평행사변형의 두 대각선의 길이는 서로 다르다. 즉, '평행사변형의 두 대각선의 길이는 서로 같다.'는 거짓인 명제이다.

따라서 참인 명제는 ④이다.

02 답 ③

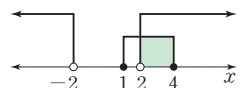
조건 ' $\sim p$ 또는 q '의 부정은 ' p 그리고 $\sim q$ '이다.

이때 $p: 1 \leq x \leq 4$ 이고 $q: |x| \leq 2$ 에서 $-2 \leq x \leq 2$ 이므로

조건 $\sim q$ 는 $x < -2$ 또는 $x > 2$ 이므로

오른쪽 그림에서 조건 ' p 그리고 $\sim q$ '

는 $2 < x \leq 4$ 이다.



03 답 ②

$U = \{x | x \text{는 } 12 \text{ 이하의 소수인 자연수}\}$

$$= \{2, 3, 5, 7, 11\}$$

이때 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \text{에서 } x(x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore P = \{2, 3\}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \text{에서 } (2x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore Q = \{2\}$$

따라서 조건 ' $\sim p$ 또는 q '의 진리집합은

$$P^c \cup Q = \{5, 7, 11\} \cup \{2\} = \{2, 5, 7, 11\}$$

이므로 이 집합의 원소가 아닌 것은 ②이다.

04 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 명제 $p \rightarrow q: x=y$ 이면 $xz=yz$ 이다. (참)

ㄴ. 명제 $p \rightarrow q: x+y < 0$ 이면 $xy < 0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-1, y=-1$ 이면 $x+y < 0$ 이지만

$$xy = 1 > 0 \text{이다.}$$

ㄷ. 명제 $p \rightarrow q: xy$ 가 짝수이면 x, y 가 모두 짝수이다. (거짓)

[반례] $x=2, y=3$ 이면 $xy=6$ 은 짝수이지만

y 는 짝수가 아니다.

따라서 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

05 답 12

명제 $q \rightarrow p$ 가 거짓임을 보이는 반례는 q 이면서 p 가 아닌 원소, 즉 집합 Q 에는 속하면서 집합 P 에는 속하지 않는 원소이므로 집합 $Q \cap P^c = Q - P$ 의 원소이다.

따라서 명제 $q \rightarrow p$ 가 거짓임을 보이는 모든 원소는 5, 7이므로 그 합은 $5+7=12$ 이다.

06 답 ②

$$P \cap Q = P \text{이므로 } P \subset Q$$

$$Q \cup R = Q \text{이므로 } R \subset Q$$

① $P \subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 반드시 참이다.

②, ③ $R \subset Q$ 이므로 명제 $r \rightarrow q$ 는 반드시 참이지만 명제 $q \rightarrow r$ 의 참, 거짓은 판별할 수 없다.

④ $P \subset Q$ 에서 $Q^c \subset P^c$ 이므로 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 반드시 참이다.

⑤ $R \subset Q$ 에서 $Q^c \subset R^c$ 이므로 명제 $\sim q \rightarrow \sim r$ 는 반드시 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ②이다.

07 답 4

$$p: |x-k| \leq 1 \text{에서 } -1 \leq x-k \leq 1$$

$$\therefore k-1 \leq x \leq k+1$$

$$q: x^2 - 3x - 4 \leq 0 \text{에서 } (x+1)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 4$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | k-1 \leq x \leq k+1\}, Q = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$$

이때 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓이 되려면 $P \not\subset Q$ 이어야 한다.

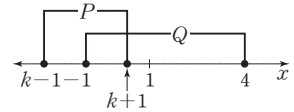
그런데 $-1 \leq k-1$ 이고 $k+1 \leq 4$ 인 경우, 즉 $0 \leq k \leq 3$ 일 때는 $P \subset Q$ 가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore k < 0 \text{ 또는 } k > 3$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 4이다.

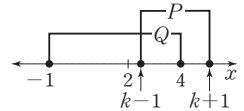
참고 (i) $k < 0$ 일 때, $k+1 < 10$ 이므로

두 집합 P, Q 는 오른쪽 그림과 같고 $P \not\subset Q$ 이다.



(ii) $k > 3$ 일 때, $k-1 > 20$ 이므로 두 집합 $P,$

Q 는 오른쪽 그림과 같고 $P \not\subset Q$ 이다.



08 답 ⑤

ㄱ. [반례] $x=-1$ 이면 $x^3 = -1 < 0$ 이다.

$$\text{ㄴ. } x^2 + x \leq 0 \text{에서 } x(x+1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 0$$

즉, $-1 \leq x \leq 0$ 인 x 에 대하여 $x^2 + x \leq 0$ 이 성립하므로 주어진 명제는 참이다.

$$\text{ㄷ. } x^2 + x = 0 \text{에서 } x(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

즉, $x = -1$ 또는 $x = 0$ 일 때, $x(x+1) = 0$ 이 성립하므로 주어진 명제는 참이다.

$$\text{ㄹ. } x \geq 0 \text{일 때, } |x| = x \geq 0 \quad \therefore |x| + x \geq 0$$

$$x < 0 \text{일 때, } |x| = -x \quad \therefore |x| + x = 0$$

즉, 주어진 명제는 참이다.

따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

09 답 4

명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + 2k - 3 \leq 0$ 이다.'가 거짓이 되려면 이 명제의 부정

'모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + 2k - 3 > 0$ 이다.'

가 참이 되어야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2 + 4x + 2k - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (2k-3) < 0$$

$$4 - 2k + 3 < 0, 2k > 7 \quad \therefore k > \frac{7}{2}$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 4이다.

10 답 ③

ㄱ. 역: $x=y$ 이면 $x^2=y^2$ 이다. (참)

명제: $x^2=y^2$ 이면 $x=y$ 이다. (거짓)

[반례] $x=1, y=-1$ 이면 $x^2=y^2$ 이지만 $x \neq y$ 이다.

즉, 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

ㄴ. 역: $x^2+y^2=0$ 이면 $xy=0$ 이다. (참)

두 실수 x, y 에 대하여 $x^2+y^2=0$ 이면 $x=0, y=0$ 이므로 $xy=0$ 이다.

명제: $xy=0$ 이면 $x^2+y^2=0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=1, y=0$ 이면 $xy=0$ 이지만 $x^2+y^2=1 \neq 0$ 이다.

즉, 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

ㄷ. 역: $|x| \leq 1$ 이면 $x^2=1$ 이다. (거짓)

[반례] $x=0$ 이면 $|x| \leq 1$ 이지만 $x^2=0 \neq 1$ 이다.

명제: $x^2=1$ 이면 $|x| \leq 1$ 이다. (참)

즉, 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

따라서 역은 참이고, 대우는 거짓인 명제는 $\neg, \perp$ 이다.

11 답 $a \leq -5$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

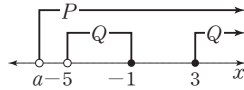
$$P = \{x | x > a\}, Q = \{x | -5 < x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 3\}$$

이때 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참이 되려면 그 대우 $q \rightarrow p$ 가 참이어야 한다.

즉, $Q \subset P$ 이어야 하므로

오른쪽 그림에서

$$a \leq -5$$

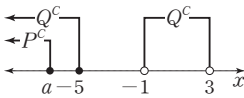


참고 대우를 이용하지 않고도 구할 수 있다.

$$P^c = \{x | x \leq a\}, Q^c = \{x | x \leq -5 \text{ 또는 } -1 < x < 3\}$$

이때 $P^c \subset Q^c$ 이어야 하므로

오른쪽 그림에서 $a \leq -5$ 이다.



12 답 ③

① $p: xy=0$ 에서 $x=0$ 또는 $y=0$

즉, $p \iff q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

② 명제 $p \rightarrow q: x+y=0$ 이면 $x=0$ 이고 $y=0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=1, y=-1$ 이면 $x+y=0$ 이지만

$x \neq 0, y \neq 0$ 이다.

명제 $q \rightarrow p: x=0$ 이고 $y=0$ 이면 $x+y=0$ 이다. (참)

즉, $q \implies p$ 이고 $p \not\implies q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

③ 명제 $p \rightarrow q: x > y > 1$ 이면 $(x-1)(y-1) > 0$ 이다. (참)

명제 $q \rightarrow p: (x-1)(y-1) > 0$ 이면 $x > y > 1$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-1, y=-1$ 이면 $(x-1)(y-1)=4 > 0$ 이지만

$x < 1, y < 1$ 이다.

즉, $p \implies q$ 이고 $q \not\implies p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

④ 명제 $p \rightarrow q: xy = |xy|$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-1, y=-1$ 이면 $xy = |xy| = 1$ 이지만

$x < 0, y < 0$ 이다.

명제 $q \rightarrow p: x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$ 이면 $xy = |xy|$ 이다. (참)

즉, $q \implies p$ 이고 $p \not\implies q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

⑤ 명제 $p \rightarrow q: x < \frac{1}{x}$ 이면 $0 < x < 1$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-2$ 이면 $\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$ 이므로 $x < \frac{1}{x}$ 이지만 $x < 0$ 이다.

명제 $q \rightarrow p: 0 < x < 1$ 이면 $x < \frac{1}{x}$ 이다. (참)

즉, $q \implies p$ 이고 $p \not\implies q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

따라서 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은

③이다.

13 답 $\neg, \perp, \supset$

두 명제 $p \rightarrow r, q \rightarrow \sim r$ 가 모두 참이므로

$$p \implies r, q \implies \sim r$$

$$q \implies \sim r \text{이므로 대우에 의하여 } r \implies \sim q$$

$$p \implies r, r \implies \sim q \text{이므로 삼단논법에 의하여 } p \implies \sim q$$

$$p \implies \sim q \text{이므로 대우에 의하여 } q \implies \sim p$$

$\neg, r \implies \sim q$ 이므로 r 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다. (참)

$\perp, p \implies \sim q$ 이므로 $\sim q$ 는 p 이기 위한 필요조건이다. (참)

$\supset, q \implies \sim p$ 이므로 $\sim p$ 는 q 이기 위한 필요조건이다. (참)

따라서 항상 옳은 것은 $\neg, \perp, \supset$ 이다.

14 답 ④

주어진 벤 다이어그램에서

$$Q \subset P, P \cap R = \emptyset, Q \cap R = \emptyset$$

① $Q \subset P$ 에서 $q \implies p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

②, ⑤ $Q \cap R = \emptyset$ 에서 $Q \subset R^c, R \subset Q^c$

즉, $q \implies \sim r, r \implies \sim q$ 이므로 q 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이고, $\sim q$ 는 r 이기 위한 필요조건이다.

③, ④ $P \cap R = \emptyset$ 에서 $P \subset R^c, R \subset P^c$

즉, $p \implies \sim r, r \implies \sim p$ 이므로 r 는 $\sim p$ 이기 위한 충분조건이고, $\sim p$ 는 r 이기 위한 필요조건이다.

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

15 답 2

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{3\}$$

$$Q = \{x | (x-1)(x-a)=0\} = \{1, a\} \text{ (단, } a \neq 1\text{)}$$

$$R = \{x | x^2 + bx + c = 0\}$$

이때 p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

즉, $3 \in P$ 에서 $3 \in Q$ 이므로 $a=3$

또, r 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로

$$Q = R$$

즉, $x^2 + bx + c = (x-1)(x-a) = (x-1)(x-3)$ 에서

$$x^2 + bx + c = x^2 - 4x + 3 \text{이므로}$$

$$b = -4, c = 3$$

$$\therefore a + b + c = 3 + (-4) + 3 = 2$$

참고 $1 \in Q, 3 \in Q$ 에서 $1 \in R, 3 \in R$ 이므로 이차방정식 $x^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 $x=1$ 또는 $x=3$ 이다.

16 답 ④

$p: |x| \leq n$ 에서 $-n \leq x \leq n$

$$q: x^2 + 2x - 8 \leq 0 \text{에서 } (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 2$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | -n \leq x \leq n\}, Q = \{x | -4 \leq x \leq 2\}$$

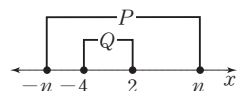
이때 p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$

즉, 오른쪽 그림에서

$$-n \leq -4, 2 \leq n$$

$$\therefore n \geq 4$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 4이다.



001 답 풀이 참조

주어진 명제의 대우 '자연수 n 에 대하여 n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.'가 참임을 보이면 된다.

n 이 홀수이면 $n=2k-1$ (k 는 자연수)

로 나타낼 수 있으므로

$$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$$

즉, n^2 도 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

002 답 풀이 참조

주어진 명제의 대우 '자연수 n 에 대하여 n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.'가 참임을 보이면 된다.

n 이 짝수이면 $n=2k$ (k 는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$$

즉, n^2 도 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

003 답 유리수, 2, 2, 무리수

주어진 명제의 결론을 부정하여 $\sqrt{2}$ 가 유리수라고 가정하면

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \quad (m, n \text{은 서로소인 자연수})$$

로 나타낼 수 있다. 양변을 제곱하면

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2, \quad 2 = \frac{n^2}{m^2}$$

$$\therefore 2 \times m^2 = n^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, n^2 이 짝수이므로 n 도 짝수이다.

$n=2k$ (k 는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

①에 대입하여 정리하면

$$2m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \quad \therefore m^2 = 2 \times k^2$$

즉, m^2 이 짝수이므로 m 도 짝수이다.

따라서 m, n 이 서로소인 자연수라는 가정에 모순이므로

$\sqrt{2}$ 는 무리수이다.

004 답 풀이 참조

주어진 명제의 결론을 부정하여 $2+\sqrt{2}$ 를 유리수라고 가정하면

$$2+\sqrt{2}=m \quad (m \text{은 유리수})$$

로 나타낼 수 있으므로

$$\sqrt{2}=m-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $m-2=(\text{유리수})-(\text{유리수})$ 는 유리수이므로 ①에서 $\sqrt{2}$ 가 무리수라는 가정에 모순이다.

따라서 $\sqrt{2}$ 가 무리수이면 $2+\sqrt{2}$ 도 무리수이다.

005 답 (1) $\times$ (2) $\bigcirc$ (3) $\times$
(4) $\bigcirc$ (5) $\bigcirc$ (6) $\times$

(1) $3x-5>0$ 에서 $x>\frac{5}{3} \Rightarrow$ 절대부등식이 아니다.

(2) $2-|x|\leq 2$ 에서 $|x|\geq 0$

모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하므로 절대부등식이다.

(3) $|x+2|-1>0$ 에서 $|x+2|>1$

$$x+2<-1 \text{ 또는 } x+2>1$$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>-1 \Rightarrow$ 절대부등식이 아니다.

(4) $(x-3)^2\geq 0$ 은 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하므로 절대부등식이다.

(5) $(x+2)^2>2x$ 에서 $x^2+4x+4>2x$

$$\therefore x^2+2x+4>0$$

이때 $x^2+2x+4=(x+1)^2+3$ 이므로 위의 부등식은 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하고, 절대부등식이다.

(6) $x^2+2x-3>0$ 에서 $(x+3)(x-1)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>1 \Rightarrow$ 절대부등식이 아니다.

006 답 $\frac{1}{2}b, \frac{3}{4}, \geq, 0$

$$(a+b)^2-ab=a^2+2ab+b^2-ab$$

$$=a^2+ab+b^2$$

$$=\left(a^2+ab+\frac{1}{4}b^2\right)+\frac{3}{4}b^2$$

$$=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2$$

이때 $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2\geq 0, \frac{3}{4}b^2\geq 0$ 이므로

$$(a+b)^2-ab=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$$

$$\therefore (a+b)^2\geq ab$$

여기서 등호는 $a=b=0$ 일 때 성립한다.

풍생비법 두 식의 대소 비교

A, B 가 실수일 때

$$\textcircled{1} A-B>0 \iff A>B$$

$$\textcircled{2} A-B=0 \iff A=B$$

$$\textcircled{3} A-B<0 \iff A<B$$

007 답 풀이 참조

$$a^2+b^2+2-(2a+2b)=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)$$

$$=(a-1)^2+(b-1)^2$$

이때 $(a-1)^2\geq 0, (b-1)^2\geq 0$ 이므로

$a^2+b^2+2\geq 2a+2b$ (단, 등호는 $a=b=1$ 일 때 성립한다.)

008 답 $\sqrt{b}, \sqrt{b}, \geq, b$

$$a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a})^2-2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$$

$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$$

$$\therefore a+b\geq 2\sqrt{ab}$$

여기서 등호는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, 즉 $a=b$ 일 때 성립한다.

009 답 (1) 4 (2) 2 (3) 25 (4) 6

(1) $a>0, \frac{4}{a}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+\frac{4}{a}\geq 2\sqrt{a\times\frac{4}{a}}=2\times 2=4$$

(단, 등호는 $a=2$ 일 때 성립한다.)

따라서 $a+\frac{4}{a}$ 의 최솟값은 4이다.

(2) $a > 0, b > 0$ 에서 $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}} = 2$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.)
 따라서 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 의 최솟값은 2이다.

(3) $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.)
 이때 $a+b=10$ 이므로 위의 식에 대입하면
 $10 \geq 2\sqrt{ab}, \sqrt{ab} \leq 5 \quad \therefore ab \leq 25$
 따라서 ab 의 최댓값은 25이다.

(4) $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.)
 이때 $ab=9$ 이므로 위의 식에 대입하면
 $a+b \geq 2\sqrt{9} \quad \therefore a+b \geq 6$
 따라서 $a+b$ 의 최솟값은 6이다.

참고 (1) 등호는 $a=\frac{4}{a}$ 일 때 성립하므로 $a^2=4$

이때 $a > 0$ 이므로 등호가 성립하는 경우는 $a=2$ 일 때이다.

(2) 등호는 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ 일 때 성립하므로 $a^2=b^2$

이때 $a > 0, b > 0$ 이므로 등호가 성립하는 경우는 $a=b$ 일 때이다.

010 **답** $2abxy, ay-bx, ay=bx$

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax+by)^2$
 $= (a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2) - (a^2x^2 + \boxed{2abxy} + b^2y^2)$
 $= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$
 $= (\boxed{ay-bx})^2 \geq 0$
 $\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
 여기서 등호는 $\boxed{ay=bx}$ 일 때 성립한다.

011 **답** (1) 4 (2) -13 (3) 5

(1) $x+y=1 \times x + \boxed{1} \times y$ 이므로
 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(1^2+1^2) \times (x^2+y^2) \geq (1 \times x + 1 \times y)^2$
 (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립한다.)
 즉, $2 \times (x^2+y^2) \geq (x+y)^2$ 에서 $x^2+y^2=8$ 이므로
 $2 \times \boxed{8} \geq (x+y)^2, (x+y)^2 \leq \boxed{16}$
 $\therefore \boxed{-4} \leq x+y \leq \boxed{4}$
 따라서 $x+y$ 의 최댓값은 4이다.

(2) $3x+2y=3 \times x + 2 \times y$ 이므로
 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(3^2+2^2) \times (x^2+y^2) \geq (3 \times x + 2 \times y)^2$
 (단, 등호는 $2x=3y$ 일 때 성립한다.)
 즉, $13 \times (x^2+y^2) \geq (3x+2y)^2$ 에서 $x^2+y^2=13$ 이므로
 $13 \times 13 \geq (3x+2y)^2, (3x+2y)^2 \leq 13^2$
 $\therefore -13 \leq 3x+2y \leq 13$
 따라서 $3x+2y$ 의 최솟값은 -13이다.

(3) $2x+y=2 \times x + 1 \times y$ 이므로
 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+1^2) \times (x^2+y^2) \geq (2 \times x + 1 \times y)^2$
 (단, 등호는 $x=2y$ 일 때 성립한다.)
 즉, $5 \times (x^2+y^2) \geq (2x+y)^2$ 에서 $2x+y=5$ 이므로
 $5 \times (x^2+y^2) \geq 5^2 \quad \therefore x^2+y^2 \geq 5$
 따라서 x^2+y^2 의 최솟값은 5이다.

012 **답** 풀이 참조

주어진 명제의 대우 '자연수 n 에 대하여 n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다.'가 참임을 보이려면 된다.
 n 이 3의 배수가 아니면
 $n=3k-1$ 또는 $n=3k-2$ (k 는 자연수)
 로 나타낼 수 있다.

(i) $n=3k-1$ 일 때,
 $n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$
 $=3(3k^2-2k)+1$
 이므로 n^2 은 3의 배수가 아니다.

(ii) $n=3k-2$ 일 때,
 $n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$
 $=3(3k^2-4k+1)+1$
 이므로 n^2 은 3의 배수가 아니다.

(i), (ii)에서 n^2 은 3의 배수가 아니다.
 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

013 **답** 풀이 참조

주어진 명제의 대우 '두 실수 x, y 에 대하여 $x < 0$ 이고 $y < 0$ 이면 $x+y < 0$ 이다.'가 참임을 보이려면 된다.
 두 실수가 모두 음수일 때, 이 두 수의 합도 음수이므로
 $x < 0$ 이고 $y < 0$ 이면 $x+y < 0$
 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

다른 풀이

명제 '두 실수 x, y 에 대하여 $x+y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$ 이다.'를 다음과 같이 귀류법으로 증명할 수도 있다.
 두 실수 x, y 에 대하여 주어진 명제의 결론을 부정하여 $x < 0$ 이고 $y < 0$ 이라고 가정하면 (음수)+(음수)=(음수)이므로
 $x+y < 0$
 이는 $x+y \geq 0$ 이라는 가정에 모순이다.
 따라서 $x+y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$ 이다.

014 **답** ③

주어진 명제의 대우 '두 자연수 a, b 에 대하여 $a+b$ 가 **홀수**이면 a^2+b^2 도 **홀수**이다.'가 참임을 보이려면 된다.
 이때 $a+b$ 가 홀수인 경우는 a 가 홀수, b 가 짝수 또는 a 가 짝수, b 가 홀수이다.

(i) a 가 홀수, b 가 **짝수**일 때,
 $a=2n-1, b=2m$ (n, m 은 자연수)로 나타낼 수 있으므로
 $a^2+b^2=(2n-1)^2+(2m)^2$
 $=4n^2+4m^2-4n+1$
 $=\boxed{2} \times (2n^2+2m^2-2n)+1$
 즉, a^2+b^2 은 홀수이다.

(ii) a 가 짝수, b 가 홀수일 때,

$$\begin{aligned} a &= 2n, b = 2m - 1 \quad (n, m \text{은 자연수}) \text{로 나타낼 수 있으므로} \\ a^2 + b^2 &= (2n)^2 + (2m-1)^2 \\ &= 4n^2 + 4m^2 - 4m + 1 \\ &= 2(2n^2 + 2m^2 - 2m) + 1 \end{aligned}$$

즉, $a^2 + b^2$ 은 홀수이다.

(i), (ii)에서 $a+b$ 가 홀수이면 $a^2 + b^2$ 도 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$\therefore$ (㉠) 홀수, (㉡) 짝수, (㉢) 1, (㉣) 2, (㉤) $2m$

따라서 옳지 않은 것은 ㉢이다.

015 답 ㉤

주어진 명제의 결론을 부정하여 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이라고 가정하자.

(i) $a \neq 0$ 이고 $b=0$ 일 때,

$$a^2 > 0, b^2 = 0 \text{이므로 } a^2 + b^2 > 0$$

(ii) $a=0$ 이고 $b \neq 0$ 일 때,

$$a^2 = 0, b^2 > 0 \text{이므로 } a^2 + b^2 > 0$$

(iii) $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 일 때,

$$a^2 > 0, b^2 > 0 \text{이므로 } a^2 + b^2 > 0$$

(i)~(iii)에서 $a^2 + b^2 \neq 0$ 이므로 $a^2 + b^2 = 0$ 이라는 가정에 모순이다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

$\therefore$ (㉠) 또는, (㉡) $b=0$, (㉢) 0, (㉣) $a=0$, (㉤) $b^2 > 0$

따라서 바르게 짝 지어진 것은 ㉤이다.

주의 ' $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ '인 경우는

① a 만 0이 아닌 경우

② b 만 0이 아닌 경우

③ a, b 가 모두 0이 아닌 경우

의 세 가지로 나누어 생각할 수 있다.

③의 a, b 가 모두 0이 아닌 경우를 빠뜨리지 않도록 주의하자.

풍생비법 증명 방법의 선택

명제의 증명 방법은 다음과 같다.

(1) 직접증명법: 명제를 가정과 결론의 순서로 증명하는 방법

(2) 간접증명법

① 대우를 이용한 증명법: 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 그 대우가 참임을 증명하는 방법

② 귀류법: 명제 또는 명제의 결론을 부정하여 모순이 생기는 것을 보임으로써 주어진 명제가 참임을 증명하는 방법

직접증명법으로 증명하기 어려울 때 간접증명법을 이용한다. 문제에서 특별히 증명 방법을 지정한 경우가 아니라면 먼저 대우를 생각해 보고, 대우 역시 증명이 쉽지 않으면 결론을 부정하는 귀류법을 이용한다.

016 답 풀이 참조

주어진 명제의 결론을 부정하여 $x=0$ 또는 $y=0$ 이라고 가정하자.

(i) $x=0$ 이고 $y \neq 0$ 일 때, $xy=0$

(ii) $x \neq 0$ 이고 $y=0$ 일 때, $xy=0$

(iii) $x=0$ 이고 $y=0$ 일 때, $xy=0$

(i)~(iii)에서 $xy=0$ 이므로 $xy \neq 0$ 이라는 가정에 모순이다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

다른 풀이

실수 x, y 에 대한 명제 ' $xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이다.'를 다음과 같이 대우를 이용하여 증명할 수 있다.

주어진 명제의 대우 ' $x=0$ 또는 $y=0$ 이면 $xy=0$ 이다.'가 참임을 증명하면 된다.

(i) $x=0$ 이고 $y \neq 0$ 일 때, $xy=0$

(ii) $x \neq 0$ 이고 $y=0$ 일 때, $xy=0$

(iii) $x=0$ 이고 $y=0$ 일 때, $xy=0$

(i)~(iii)에서 $xy=0$

주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

017 답 풀이 참조

주어진 명제의 결론을 부정하여 x, y 가 모두 홀수라고 가정하자.

$x=2m-1, y=2n-1$ (m, n 은 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2m-1)^2 + (2n-1)^2 \\ &= 4m^2 - 4m + 1 + 4n^2 - 4n + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2n^2 - 2m - 2n + 1) \end{aligned}$$

즉, $x^2 + y^2$ 은 짝수이므로 $x^2 + y^2$ 이 홀수라는 가정에 모순이다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

018 답 (㉠) $\frac{1}{2}$, (㉡) $b-c$, (㉢) c

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$= \frac{1}{2} \times (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \}$$

이때 $(a-b)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$ 이므로

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

여기서 등호는 $a-b=0, b-c=0, c-a=0$ 일 때, 즉

$a=b=c$ 일 때 성립한다.

$$\therefore (㉠) \frac{1}{2}, (㉡) b-c, (㉢) c$$

019 답 (㉠) $2\sqrt{xy}$, (㉡) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

$x > y > 0$ 에서 $\sqrt{x-y} > 0, \sqrt{x}-\sqrt{y} > 0$ 이므로

$(\sqrt{x-y})^2 > (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ 임을 보이면 된다. 이때

$$\begin{aligned} (\sqrt{x-y})^2 - (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \\ &= (x-y) - (x-2\sqrt{xy}+y) \\ &= 2\sqrt{xy} - 2y \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) > 0$$

따라서 $(\sqrt{x-y})^2 > (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ 이므로

$\sqrt{x-y} > \sqrt{x}-\sqrt{y}$ 이다.

$$\therefore (㉠) 2\sqrt{xy}, (㉡) \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

020 답 ㉢

$$|x| + |y| > 0, |x+y| > 0 \text{이므로}$$

$(|x| + |y|)^2 \geq |x+y|^2$ 임을 보이면 된다. 이때

$$\begin{aligned}
 & (|x|+|y|)^2 - |x+y|^2 \\
 &= (x^2+2|xy|+y^2) - (x^2+2xy+y^2) \\
 &= 2(|xy|-xy)
 \end{aligned}$$

이때 $|xy| \geq xy$, 즉 $|xy|-xy \geq 0$ 이므로

$$(|x|+|y|)^2 - |x+y|^2 = 2(|xy|-xy) \geq 0$$

따라서 $(|x|+|y|)^2 \geq |x+y|^2$ 이므로

$$|x|+|y| \geq |x+y|$$

이고 등호는 $|xy|=xy$, 즉 $\boxed{xy} \geq 0$ 일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) 0, (나) 0, (다) $|xy|-xy$, (라) 0, (마) xy

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

021 답 2x

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{y+1} - \frac{y}{x+1} &= \frac{x(x+1)-y(y+1)}{(x+1)(y+1)} \\
 &= \frac{x^2-y^2+x-y}{(x+1)(y+1)} \\
 &= \frac{(x+y)(x-y)+x-y}{(x+1)(y+1)} \\
 &= \frac{(\boxed{x-y})(\boxed{x+y}+1)}{(x+1)(y+1)}
 \end{aligned}$$

이때 $x > y > 0$ 이므로

$$\boxed{x-y} > 0, \boxed{x+y}+1 > 0, x+1 > 0, y+1 > 0$$

따라서 $\frac{x}{y+1} - \frac{y}{x+1} > 0$ 이므로 $\frac{x}{y+1} > \frac{y}{x+1}$

즉, $A=x-y$, $B=x+y$ 이므로

$$A+B=2x$$

022 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$\begin{aligned}
 \text{ㄱ. } & (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2 \\
 &= (a+b+2\sqrt{ab}) - (a+b) \\
 &= 2\sqrt{ab} > 0 \quad (\because a > 0, b > 0) \\
 \text{즉, } & (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2 \text{에서 } \sqrt{a}+\sqrt{b} > 0, \sqrt{a+b} > 0 \text{이므로} \\
 & \sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄴ. } & |a+b|^2 - |a-b|^2 \\
 &= (a^2+b^2+2ab) - (a^2+b^2-2ab) \\
 &= 4ab > 0 \quad (\because a > 0, b > 0) \\
 \text{즉, } & |a+b|^2 > |a-b|^2 \text{에서 } |a+b| > 0, |a-b| > 0 \text{이므로} \\
 & |a+b| > |a-b|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄷ. } & a+b+c - (\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \\
 &= \frac{1}{2}(2a+2b+2c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca}) \\
 &= \frac{1}{2}\{(a-2\sqrt{ab}+b) + (b-2\sqrt{bc}+c) + (c-2\sqrt{ca}+a)\} \\
 &= \frac{1}{2}\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 + (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\}
 \end{aligned}$$

이때

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0, (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \geq 0, (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2 \geq 0$$

이므로

$$a+b+c - (\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \geq 0$$

즉, $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ 이고

등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c}$, 즉 $a=b=c$ 일 때 성립한다.

따라서 절대부등식인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

023 답 ②

$a > 0, b > 0$ 에서 $3b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+3b \geq 2\sqrt{a \times 3b} = 2\sqrt{3ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=3b \text{일 때 성립한다.})$$

이때 $ab=12$ 이므로 위의 식에 대입하면

$$a+3b \geq 2\sqrt{3 \times 12} = 2 \times 6 = 12$$

따라서 $a+3b$ 의 최솟값은 12이다.

024 답 69

$a > 0, b > 0$ 에서 $3a > 0, 2b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a+2b \geq 2\sqrt{3a \times 2b} = 2\sqrt{6ab}$$

(단, 등호는 $3a=2b$ 일 때 성립한다.)

이때 $3a+2b=36$ 이므로 위의 식에 대입하면

$$36 \geq 2\sqrt{6ab}, \sqrt{6ab} \leq 18, 6ab \leq 324$$

$$\therefore ab \leq 54$$

즉, ab 의 최댓값은 54이다.

한편, 등호는 $3a=2b$, 즉 $a=\frac{2}{3}b$ 일 때 성립하고 그때의 ab 의 값

이 54이므로

$$ab = \frac{2}{3}b \times b = 54, b^2 = 81 \quad \therefore b = 9 \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

따라서 $A=6, B=9, M=54$ 이므로

$$A+B+M=6+9+54=69$$

025 답 ④

$$\begin{aligned}
 (2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right) &= 4+6 \times \frac{y}{x} + 6 \times \frac{x}{y} + 9 \\
 &= 13+6\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right) \quad \dots\dots ㉠
 \end{aligned}$$

이때 $x > 0, y > 0$ 에서 $\frac{y}{x} > 0, \frac{x}{y} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \times \frac{x}{y}} = 2$$

이고 등호가 성립하는 때는 $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$ 일 때이다.

즉, $x^2=y^2$ 에서 $x=y$ 또는 $x=-y$

이때 $x > 0, y > 0$ 이므로 등호는 $x=y$ 일 때 성립한다.

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned}
 (2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right) &= 13+6\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right) \\
 &\geq 13+6 \times 2 = 25
 \end{aligned}$$

이므로 구하는 최솟값은 25이다.

주의 주어진 식을 전개하지 않고 각각 산술평균과 기하평균의 관계를 적용

하여 $2x+3y \geq 2\sqrt{6xy}, \frac{2}{x} + \frac{3}{y} \geq 2\sqrt{\frac{6}{xy}}$ 으로부터

$$(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right) \geq 2\sqrt{6xy} \times 2\sqrt{\frac{6}{xy}} = 24$$

와 같이 계산하지 않도록 주의한다.

$2x+3y \geq 2\sqrt{6xy}$ 의 등호가 성립하는 것은 $2x=3y$ 일 때이고,

$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} \geq 2\sqrt{\frac{6}{xy}}$ 의 등호가 성립하는 것은 $\frac{2}{x} = \frac{3}{y}$ 일 때이다.

그런데 이를 동시에 만족시키는 경우는 존재하지 않는다.

따라서 이와 같은 문제에서는 반드시 전개한 후, 산술평균과 기하평균의 관계를 적용할 수 있도록 한다.

026 답 12

$x > 3$ 에서 $x-3 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{x-3} &= x-3 + \frac{4}{x-3} + 3 \\ &\geq 2\sqrt{(x-3) \times \frac{4}{x-3}} + 3 \\ &= 2\sqrt{4} + 3 \\ &= 4 + 3 = 7 \end{aligned}$$

이때 등호가 성립하는 경우는 $x-3 = \frac{4}{x-3}$ 일 때이므로

$$(x-3)^2 = 4, \quad x-3 = \pm 2$$

$$\therefore x=5 \text{ 또는 } x=1$$

그런데 $x > 3$ 이므로 조건을 만족시키는 경우는

$$x=5$$

따라서 $m=7, a=5$ 이므로

$$m+a=7+5=12$$

027 답 ③

x, y 가 실수이고 $x+y=1 \times x+1 \times y$ 이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (1 \times x+1 \times y)^2 \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{ 일 때 성립한다.})$$

즉, $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$ 에서 $x^2+y^2=32$ 이므로

$$(x+y)^2 \leq 2 \times 32 = 64$$

$$\therefore -8 \leq x+y \leq 8$$

따라서 $x+y$ 의 최댓값은 8이다.

028 답 ④

x, y 가 실수이고 $2x+y=2 \times x+1 \times y$ 이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (2 \times x+1 \times y)^2 \quad (\text{단, 등호는 } x=2y \text{ 일 때 성립한다.})$$

즉, $5(x^2+y^2) \geq (2x+y)^2$ 에서 $x^2+y^2=20$ 이므로

$$(2x+y)^2 \leq 5 \times 20 = 100$$

$$\therefore -10 \leq 2x+y \leq 10$$

따라서 $2x+y$ 의 최댓값은 $M=10$, 최솟값은 $m=-10$ 이므로

$$M-m=10-(-10)=20$$

029 답 ①

x, y 가 실수이고 $3x+4y=3 \times x+4 \times y$ 이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3 \times x+4 \times y)^2 \quad (\text{단, 등호는 } 4x=3y \text{ 일 때 성립한다.})$$

즉, $25(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$ 에서 $3x+4y=10$ 이므로

$$25(x^2+y^2) \geq 10^2$$

$$\therefore x^2+y^2 \geq 4$$

따라서 x^2+y^2 의 최솟값은 4이다.

030 답 26

$$x^2+y^2=13 \text{ 이므로}$$

$$x^2+2x+y^2+3y=x^2+y^2+2x+3y$$

$$=2x+3y+13$$

..... ㉠

한편, x, y 가 실수이고 $2x+3y=2 \times x+3 \times y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (2 \times x+3 \times y)^2$$

(단, 등호는 $3x=2y$ 일 때 성립한다.)

즉, $13(x^2+y^2) \geq (2x+3y)^2$ 에서 $x^2+y^2=13$ 이므로

$$(2x+3y)^2 \leq 13 \times 13 \quad \therefore -13 \leq 2x+3y \leq 13$$

$$\therefore 0 \leq 2x+3y+13 \leq 26$$

따라서 ㉠에서 $0 \leq x^2+2x+y^2+3y \leq 26$ 이므로 구하는 최댓값은 26이다.

중단원 점검 문제

II-4 | 여러 가지 증명법

136쪽

01 답 (다)

주어진 명제의 대우 '실수 x 에 대하여 x 가 유리수'이면 x^2 이 유리수이다.'가 참임을 보이면 된다.

x 가 유리수이면 서로소인 두 자연수 a, b 에 대하여

$$x = \pm \frac{a}{b} \text{로 나타낼 수 있으므로 } x^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

이때 두 자연수 a, b 가 서로소이면 a^2, b^2 도 서로소이므로

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} \text{도 유리수이다.}$$

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$\therefore$ (가), (나), (라) 유리수, (다) 서로소

따라서 나머지 셋과 다른 하나는 (다)이다.

02 답 풀이 참조

주어진 명제의 결론을 부정하여 x, y 가 모두 짝수라고 가정하면

$x=2m, y=2n$ (m, n 은 자연수)으로 나타낼 수 있다.

이때 x, y 는 모두 2를 약수로 가지므로 x, y 가 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

03 답 (가) $|xy|-xy$, (나) xy

(i) $|x| \geq |y|$ 일 때,

$$\begin{aligned} &|x-y|^2 - (|x|-|y|)^2 \\ &= (x^2+y^2-2xy) - (x^2+y^2-2|xy|) \\ &= 2|xy| - 2xy \\ &= 2(|xy|-xy) \geq 0 \quad (\because |xy| \geq xy) \end{aligned}$$

이때 $|x-y| \geq 0, |x|-|y| \geq 0$ 이므로

$$|x-y|^2 \geq (|x|-|y|)^2 \text{에서}$$

$$|x-y| \geq |x|-|y|$$

(ii) $|x| < |y|$ 일 때,
 $|x-y| \geq 0$, $|x|-|y| < 0$ 이므로
 $|x-y| \geq |x|-|y|$
 (i), (ii)에서 $|x-y| \geq |x|-|y|$
 이때 등호는 $|x| \geq |y|$ 이고 $|xy| = \boxed{xy}$ 일 때, 즉
 $|x| \geq |y|$ 이고 $xy \geq 0$ 일 때 성립한다.
 $\therefore$ (㉞) $|xy| - xy$, (㉟) xy

04 답 ⑤

ㄱ. a, b 가 실수이므로

$$a^2 + b^2 - ab = \left(a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2\right) + \frac{3}{4}b^2$$

$$= \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$
 즉, $a^2 + b^2 \geq ab$ 이고 등호는 $a = b = 0$ 일 때 성립한다.
 ㄴ. $a > b$ 에서 $\sqrt{a-b} > 0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b} > 0$ 이므로

$$(\sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = (a-b) - (a+b-2\sqrt{ab})$$

$$= 2\sqrt{ab} - 2b$$

$$= 2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) > 0$$
 즉, $(\sqrt{a}-b)^2 > (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ 이고
 $\sqrt{a-b} > 0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b} > 0$ 이므로
 $\sqrt{a-b} > \sqrt{a}-\sqrt{b}$
 ㄷ. $|a| + |b| \geq 0$, $|a-b| \geq 0$ 이므로

$$(|a| + |b|)^2 - |a-b|^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2|ab| - (a^2 + b^2 - 2ab)$$

$$= 2(|ab| + ab) \geq 0 \quad (\because |ab| \geq -ab)$$
 즉, $(|a| + |b|)^2 \geq |a-b|^2$ 에서
 $|a| + |b| \geq |a-b|$ 이고 등호는 $ab \leq 0$ 일 때 성립한다.
 따라서 절대부등식인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

05 답 ①

$3x + y = 30$ 이므로

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{y} = \frac{3x+y}{3xy} = \frac{30}{3xy} = \frac{10}{xy} \quad \dots\dots ㉞$$
 $x > 0$, $y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $3x + y \geq 2\sqrt{3xy}$ (단, 등호는 $3x = y$ 일 때 성립한다.)
 이때 $3x + y = 30$ 이므로
 $2\sqrt{3xy} \leq 30$, $\sqrt{3xy} \leq 15$, $3xy \leq 225$
 즉, $xy \leq 75$ 이므로 $\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{75}$
 따라서 ㉞에서 $\frac{1}{3x} + \frac{1}{y} = \frac{10}{xy} \geq \frac{10}{75} = \frac{2}{15}$ 이므로 구하는 최솟값
 은 $\frac{2}{15}$ 이다.

06 답 8

$(a+1)(b+2) = ab + 2a + b + 2 \quad \dots\dots ㉞$
 직선 $y = f(x)$ 의 기울기가 $\frac{a}{2}$, 직선 $y = g(x)$ 의 기울기가 $\frac{1}{b}$ 이고
 이 두 직선이 서로 평행하므로

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{b} \quad \therefore ab = 2 \quad \dots\dots ㉟$$

$a > 0$, $b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $2a + b \geq 2\sqrt{2ab} = 2\sqrt{2 \times 2} = 4 \quad (\because ㉟) \quad \dots\dots ㉞$
 (단, 등호는 $2a = b$ 일 때 성립한다.)

㉞, ㉞을 ㉞에 대입하면
 $(a+1)(b+2) \geq 2+4+2=8$
 따라서 $(a+1)(b+2)$ 의 최솟값은 8이다.

참고 두 직선 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ 이 평행하면
 $m = m'$, $n \neq n'$

07 답 20

x, y 가 실수이고 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \times x + \frac{1}{2} \times y$ 이므로
 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}(x^2 + y^2) \geq \left(\frac{1}{4} \times x + \frac{1}{2} \times y\right)^2$$
 (단, 등호는 $2x = y$ 일 때 성립한다.)
 즉, $\frac{5}{16}(x^2 + y^2) \geq \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right)^2$ 에서 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{5}{2}$ 이므로

$$\frac{5}{16}(x^2 + y^2) \geq \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 \geq \frac{25}{4} \times \frac{16}{5} = 20$$
 따라서 $x^2 + y^2$ 의 최솟값은 20이다.

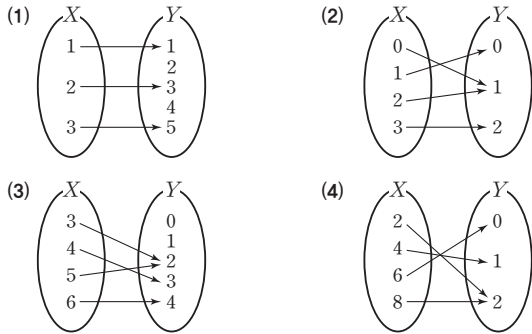
III

함수와 그래프

III-1 | 함수

140~162쪽

001 답 풀이 참조



002 답 (1) ○ (2) × (3) × (4) ○

- (1) X 의 각 원소에 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
 (2) X 의 원소 1에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
 (3) X 의 원소 3에 대응하는 Y 의 원소가 2개이므로 함수가 아니다.
 (4) X 의 각 원소에 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

003 답 4, 6, 하나, 함수이다.

$$y = x + 1$$

$$\Rightarrow x=1\text{일 때 } y=1+1=2,$$

$$x=3\text{일 때 } y=3+1=\boxed{4},$$

$$x=5\text{일 때 } y=5+1=\boxed{6}$$

$\Rightarrow X$ 의 각 원소에 Y 의 원소가 하나씩 대응하므로 함수이다.

004 답 (1) ○ (2) × (3) ×

$$(1) y = x^2 + 2 \text{이므로}$$

$$x=-1\text{일 때, } y=(-1)^2+2=3$$

$$x=0\text{일 때, } y=0^2+2=2$$

$$x=1\text{일 때, } y=1^2+2=3$$

즉, X 의 각 원소에 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

$$(2) y = |x-3| \text{이므로}$$

$$x=-1\text{일 때, } y=|-1-3|=4$$

$$x=0\text{일 때, } y=|0-3|=3$$

$$x=1\text{일 때, } y=|1-3|=2$$

즉, X 의 원소 -1 에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

$$(3) y = x^3 + 3x \text{이므로}$$

$$x=-1\text{일 때, } y=(-1)^3+3 \times (-1)=-4$$

$$x=0\text{일 때, } y=0^3+3 \times 0=0$$

$$x=1\text{일 때, } y=1^3+3 \times 1=4$$

즉, X 의 원소 $-1, 1$ 에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

005 답 (1) 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{1, 2, 3, 4\}$,

$$\text{치역: } \{1, 2, 3\}$$

$$(2) \text{정의역: } \{-1, 0, 1\}, \text{공역: } \{1, 2, 3\}, \text{치역: } \{1, 3\}$$

$$(3) \text{정의역: } \{1, 2, 3, 4\}, \text{공역: } \{5, 6, 7, 8\},$$

$$\text{치역: } \{5, 8\}$$

006 답 (1) $\{1, 4, 7, 10\}$

$$(2) \{4, 5, 8, 13\}$$

$$(3) \{1\}$$

$$(4) \{2, 18, 52, 110\}$$

$$(1) y = 3x - 2 \text{이므로}$$

$$x=1\text{일 때, } y=3 \times 1 - 2 = 1$$

$$x=2\text{일 때, } y=3 \times 2 - 2 = 4$$

$$x=3\text{일 때, } y=3 \times 3 - 2 = 7$$

$$x=4\text{일 때, } y=3 \times 4 - 2 = 10$$

따라서 치역은 $\{1, 4, 7, 10\}$ 이다.

$$(2) y = (x-1)^2 + 4 \text{이므로}$$

$$x=1\text{일 때, } y=(1-1)^2+4=4$$

$$x=2\text{일 때, } y=(2-1)^2+4=5$$

$$x=3\text{일 때, } y=(3-1)^2+4=8$$

$$x=4\text{일 때, } y=(4-1)^2+4=13$$

따라서 치역은 $\{4, 5, 8, 13\}$ 이다.

$$(3) y = |x+1| - x \text{이므로}$$

$$x=1\text{일 때, } y=|1+1|-1=1$$

$$x=2\text{일 때, } y=|2+1|-2=1$$

$$x=3\text{일 때, } y=|3+1|-3=1$$

$$x=4\text{일 때, } y=|4+1|-4=1$$

따라서 치역은 $\{1\}$ 이다.

$$(4) y = x^3 + 3x^2 - 2 \text{이므로}$$

$$x=1\text{일 때, } y=1^3+3 \times 1^2-2=2$$

$$x=2\text{일 때, } y=2^3+3 \times 2^2-2=18$$

$$x=3\text{일 때, } y=3^3+3 \times 3^2-2=52$$

$$x=4\text{일 때, } y=4^3+3 \times 4^2-2=110$$

따라서 치역은 $\{2, 18, 52, 110\}$ 이다.

007 답 (1) 정의역: $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역: $\{y|y \text{는 실수}\}$

$$(2) \text{정의역: } \{x|x \text{는 실수}\}, \text{치역: } \{y|y \geq -2\}$$

$$(3) \text{정의역: } \{x|x \text{는 실수}\}, \text{치역: } \{y|y \geq 1\}$$

$$(4) \text{정의역: } \{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}, \text{치역: } \{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$$

$$(1) y = -\frac{1}{2}x + 5 \text{는 모든 실수에서 정의되고 } x \text{가 모든 실수일 때,}$$

y 의 값도 모든 실수이다.

따라서 정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역은 $\{y|y \text{는 실수}\}$ 이다.

$$(2) y = x^2 - 2 \text{는 모든 실수에서 정의된다.}$$

$$\text{이때 } x^2 \geq 0 \text{이므로 } x^2 - 2 \geq -2$$

따라서 정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역은 $\{y|y \geq -2\}$ 이다.

$$(3) y = |x-2| + 1 \text{는 모든 실수에서 정의된다.}$$

$$\text{이때 } |x-2| \geq 0 \text{이므로 } |x-2| + 1 \geq 1$$

따라서 정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역은 $\{y|y \geq 1\}$ 이다.

(4) $y = \frac{1}{x}$ 은 $x \neq 0$ 인 모든 실수에서 정의되고

이때 $\frac{1}{x} \neq 0$ 이다.

따라서 정의역은 $\{x | x \neq 0 \text{인 실수}\}$, 치역은 $\{y | y \neq 0 \text{인 실수}\}$ 이다.

008 **답** (1) $f(2)=5, f(5)=11$ (2) $f(2)=4, f(5)=2$

(1) $x=2 < 3$ 일 때, $f(x)=x^2+1$ 이므로

$$f(2)=2^2+1=5$$

$x=5 \geq 3$ 일 때, $f(x)=2x+1$ 이므로

$$f(5)=2 \times 5 + 1 = 11$$

(2) $x=2$, 즉 짝수일 때, $f(x)=\frac{1}{2}x+3$ 이므로

$$f(2)=\frac{1}{2} \times 2 + 3 = 4$$

$x=5$, 즉 홀수일 때, $f(x)=x-3$ 이므로

$$f(5)=5-3=2$$

009 **답** (1) $-1, 0, 1, =$ (2) $0, 2, \neq$

(1) $f(x)=x, g(x)=x^3$

$$\rightarrow f(-1)=-1, f(0)=0, f(1)=1 \text{이고}$$

$$g(-1)=-1, g(0)=0, g(1)=1 \text{이므로}$$

$$f(-1)=g(\boxed{-1})=-1, f(0)=g(\boxed{0})=0,$$

$$f(1)=g(\boxed{1})=1$$

$$\rightarrow f \boxed{=} g$$

(2) $f(x)=x+1, g(x)=x^2+1$

$$\rightarrow f(-1)=\boxed{0}, f(0)=1, f(1)=2 \text{이고}$$

$$g(-1)=\boxed{2}, g(0)=1, g(1)=2 \text{이므로}$$

$$f(-1) \neq g(-1), f(0)=g(0), f(1)=g(1)$$

$$\rightarrow f \boxed{\neq} g$$

010 **답** (1) 서로 같은 함수가 아니다.

(2) 서로 같은 함수이다.

(3) 서로 같은 함수이다.

(1) $f(x)=\frac{x+1}{2}$ 이므로 $f(-1)=0, f(1)=1$

$$g(x)=2x+1 \text{이므로 } g(-1)=-1, g(1)=3$$

$$\therefore f(-1) \neq g(-1), f(1) \neq g(1)$$

따라서 두 함수 f, g 는 서로 같은 함수가 아니다.

(2) $f(x)=|x|+1$ 이므로 $f(-1)=2, f(1)=2$

$$g(x)=x^2+1 \text{이므로 } g(-1)=2, g(1)=2$$

$$\therefore f(-1)=g(-1), f(1)=g(1)$$

따라서 두 함수 f, g 는 서로 같은 함수이다.

(3) $f(x)=2x+3$ 이므로 $f(-1)=1, f(1)=5$

$$g(x)=x^2+2x+2 \text{이므로 } g(-1)=1, g(1)=5$$

$$\therefore f(-1)=g(-1), f(1)=g(1)$$

따라서 두 함수 f, g 는 서로 같은 함수이다.

011 **답** (1) 서로 같은 함수가 아니다.

(2) 서로 같은 함수이다.

(3) 서로 같은 함수가 아니다.

(4) 서로 같은 함수가 아니다.

(1) 두 함수 $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$ 의 정의역과 공역은 실수 전체의 집합이다.

이때 f 의 치역은 실수 전체의 집합이고,

$$g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \text{이므로 } g \text{의 치역은 } \{y | y \geq 0\} \text{이다.}$$

따라서 두 함수 f, g 의 치역이 같지 않으므로 두 함수는 서로 같은 함수가 아니다.

(2) 두 함수 $f(x)=|x+1|, g(x)=\sqrt{(x+1)^2}$ 의 정의역과 공역은 실수 전체의 집합이고 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x)=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|=f(x)$$

따라서 두 함수 f, g 는 서로 같은 함수이다.

(3) 함수 $f(x)=x+1$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이고,

$$\text{함수 } g(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \text{의 정의역은 } \{x | x \neq 1 \text{인 실수}\} \text{이다.}$$

따라서 두 함수 f, g 의 정의역이 같지 않으므로 두 함수는 서로 같은 함수가 아니다.

(4) 함수 $f(x)=\frac{1}{x+1}$ 의 정의역은 $\{x | x \neq -1 \text{인 실수}\}$ 이고,

$$\text{함수 } g(x)=\frac{x-1}{x^2-1} \text{의 정의역은}$$

$$\{x | x \neq -1, x \neq 1 \text{인 실수}\} \text{이다.}$$

따라서 두 함수 f, g 의 정의역이 같지 않으므로 두 함수는 서로 같은 함수가 아니다.

다른 풀이

(1) 두 함수 $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$ 의 정의역과 공역은 실수 전체의 집합이다.

$$\text{이때 } f(-1)=-1, g(-1)=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1 \text{이므로}$$

$$f(-1) \neq g(-1)$$

따라서 X 의 원소 중에서 두 함수의 함수값이 다른 경우가 있으므로 두 함수 f, g 는 서로 같은 함수가 아니다.

주의 (3)에서 $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$ 로 생각하여 두 함수가 서로 같은 함수라고 판단하지 않도록 주의한다. 이와 같이 계산하기 위해서는 반드시 $x \neq 1$ 이라는 조건이 필요하기 때문이다.

마찬가지로 (4)에서 $g(x)=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}$ 로 생각하여 두 함수가 서로 같은 함수라고 판단하지 않도록 한다.

012 **답** $a=3, b=0$

단계1. $f(1), f(2), g(1), g(2)$ 의 값 구하기

집합 $X=\{1, 2\}$ 가 정의역일 때,

$$f(x)=x^2+2 \text{이므로}$$

$$f(1)=1^2+2=3, f(2)=2^2+2=6$$

..... ㉠

$$g(x)=ax+b \text{이므로}$$

$$g(1)=a+b, g(2)=2a+b$$

..... ㉡

단계2. $f=g$ 가 되도록 하는 두 식 구하기

$$f=g \text{가 되려면}$$

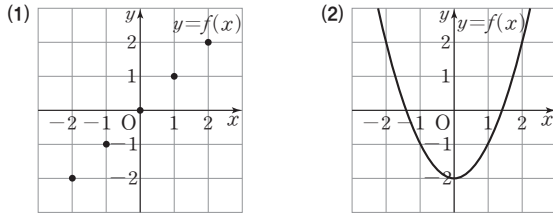
$$f(1)=g(1), f(2)=g(2) \text{이어야 하므로 } ㉠, ㉡ \text{에서}$$

$$a+b=3, 2a+b=6$$

단계3. 상수 a, b 의 값 구하기

두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=0$

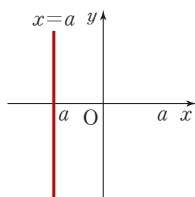
013 답 풀이 참조



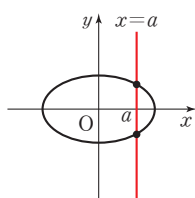
014 답 (1) ×

(1) 정의역의 원소 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 주어진 그래프가 무수히 많은 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.

(3) ○



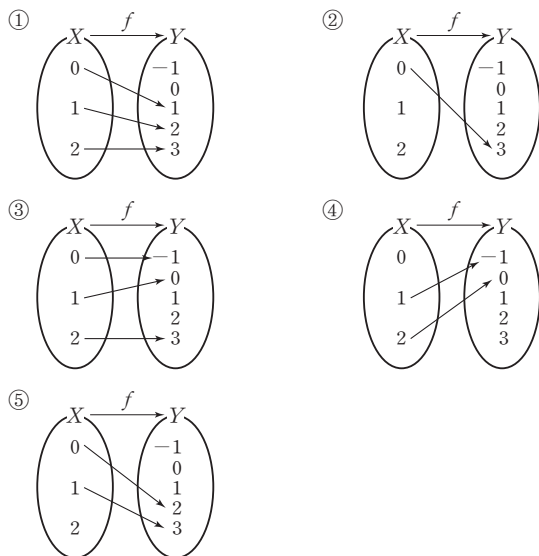
(2) 정의역의 원소 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 주어진 그래프가 두 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.



(3) 정의역의 각 원소 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 주어진 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

015 답 ①, ③

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

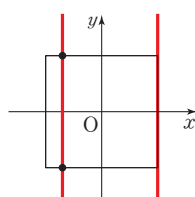


따라서 대응 f 중 함수인 것은 ①, ③이다.

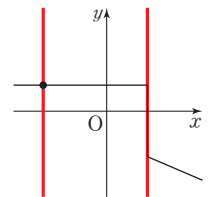
016 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ. 정의역의 각 원소 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 주어진 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

ㄴ. 정의역의 원소 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 주어진 그래프가 무수히 많은 점에서 만나거나 두 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.



ㄴ. 정의역의 원소 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 주어진 그래프가 한 점에서 만나거나 무수히 많은 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.



따라서 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

017 답 ⑤

① $f(x) = -x - 3$ 이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서
 $-1 \leq -x \leq 1$, $-4 \leq -x - 3 \leq -2$
 $\therefore -4 \leq f(x) \leq -2$

② $f(x) = -2x + 1$ 이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서
 $-2 \leq -2x \leq 2$, $-1 \leq -2x + 1 \leq 3$
 $\therefore -1 \leq f(x) \leq 3$

③ $f(x) = x + 1$ 이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서
 $0 \leq x + 1 \leq 2$ $\therefore 0 \leq f(x) \leq 2$

④ $f(x) = x^2 - 1$ 이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서
 $0 \leq x^2 \leq 1$, $-1 \leq x^2 - 1 \leq 0$
 $\therefore -1 \leq f(x) \leq 0$

⑤ $f(x) = |x| + 2$ 이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서
 $0 \leq |x| \leq 1$, $2 \leq |x| + 2 \leq 3$
 $\therefore 2 \leq f(x) \leq 3$

따라서 X 에서 Y 로의 함수인 것은 ⑤이다.

참고 부등식의 성질을 이용하여 $f(x)$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.

실수 a, b, c 에 대하여

① $a > b$ 이면 $a + c > b + c$, $a - c > b - c$

② $a > b, c > 0$ 이면 $ac > bc$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

③ $a > b, c < 0$ 이면 $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

018 답 23

$x < 0$ 일 때, $f(x) = |x - 4| + 3$ 이므로

$$f(-2) = |-2 - 4| + 3 = 9$$

$x \geq 0$ 일 때, $f(x) = 3x - 1$ 이므로

$$f(5) = 3 \times 5 - 1 = 14$$

$$\therefore f(-2) + f(5) = 9 + 14 = 23$$

019 답 ⑤

$$\frac{x+1}{3} = -1 \text{에서 } x+1 = -3 \quad \therefore x = -4$$

즉, $f\left(\frac{x+1}{3}\right) = x^2 - 1$ 의 양변에 $x = -4$ 를 대입하면

$$f(-1) = (-4)^2 - 1 = 15$$

다른 풀이

$$f\left(\frac{x+1}{3}\right) = x^2 - 1 \text{에서 } \frac{x+1}{3} = t \text{로 놓으면}$$

$$x+1 = 3t \quad \therefore x = 3t - 1$$

$$f\left(\frac{x+1}{3}\right) = x^2 - 1 \text{의 양변에 } x = 3t - 1 \text{을 대입하면}$$

$$f(t) = (3t - 1)^2 - 1$$

$$\therefore f(-1) = \{3 \times (-1) - 1\}^2 - 1 = 15$$

020 답 ④

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y=\{0, 1, 2\}$ 로의 함수 f 가 $f(x)=(x^2+1)$ 을 3으로 나누었을 때의 나머지이므로
 $x=1$ 일 때, $f(1)=(2를 3으로 나누었을 때의 나머지)=2$
 $x=2$ 일 때, $f(2)=(5를 3으로 나누었을 때의 나머지)=2$
 $x=3$ 일 때, $f(3)=(10을 3으로 나누었을 때의 나머지)=1$
 $x=4$ 일 때, $f(4)=(17을 3으로 나누었을 때의 나머지)=2$
 따라서 $a=f(2)=2, f(3)=1$ 에서 $b=3$ 이므로
 $a+b=2+3=5$

021 답 ③

$2 \leq x \leq 5$ 에서 $4 \leq 2x \leq 10, 1 \leq 2x-3 \leq 7$
 $\therefore 1 \leq y \leq 7$
 따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y | 1 \leq y \leq 7\}$ 이다.

풍생 방법 정의역, 공역, 치역 나타내기

함수는 두 집합 사이의 관계로 정의되므로 정의역, 공역, 치역은 반드시 집합 기호를 이용하여 나타낸다.

022 답 5

정의역이 집합 $X=\{1, 2, 3\}$ 인 함수 $f(x)=-2x+a$ 에 대하여
 $f(1)=a-2, f(2)=a-4, f(3)=a-6$
 이때 $a-2 > a-4 > a-6$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 치역은
 $\{a-2, a-4, a-6\}$
 치역의 모든 원소의 합이 3이므로
 $a-2+a-4+a-6=3$
 $3a=15 \therefore a=5$

023 답 ③

일차함수 $f(x)=ax+b$ 에 대하여 $a>0$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 즉, 정의역 $X=\{x | -2 \leq x \leq 4\}$ 와 치역 $Y=\{y | 2 \leq y \leq 5\}$ 에 대하여 $f(-2)=2, f(4)=5$ 가 되어야 하므로
 $-2a+b=2, 4a+b=5$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}, b=3$
 $\therefore 10a+b=10 \times \frac{1}{2}+3=8$

주의 일차함수의 성질을 이용하기 위해서는 $a>0$ 이라는 조건을 놓치지 않도록 한다.

024 답 ④

ㄱ. $f(x)=x$ 이므로 $f(-1)=-1, f(0)=0, f(1)=1$
 $g(x)=-x$ 이므로 $g(-1)=1, g(0)=0, g(1)=-1$
 즉, $f(-1) \neq g(-1), f(0)=g(0), f(1) \neq g(1)$ 이므로 $f \neq g$
 ㄴ. $f(x)=x+3$ 이므로 $f(-1)=2, f(0)=3, f(1)=4$
 $g(x)=x^3+3$ 이므로 $g(-1)=2, g(0)=3, g(1)=4$
 즉, $f(-1)=g(-1), f(0)=g(0), f(1)=g(1)$ 이므로 $f=g$

ㄷ. $f(x)=x^2$ 이므로 $f(-1)=1, f(0)=0, f(1)=1$
 $g(x)=|x|$ 이므로 $g(-1)=1, g(0)=0, g(1)=1$
 즉, $f(-1)=g(-1), f(0)=g(0), f(1)=g(1)$ 이므로 $f=g$

따라서 $f=g$ 인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

025 답 9

정의역이 $X=\{1, 3\}$ 인 두 함수 f, g 가 서로 같으므로
 $f(1)=g(1), f(3)=g(3)$
 $f(1)=g(1)$ 에서 $a+1=1+1+b$
 $\therefore a-b=1$ ㉠
 $f(3)=g(3)$ 에서 $3a+1=9+3+b$
 $\therefore 3a-b=11$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5, b=4$
 $\therefore a+b=5+4=9$

026 답 ④

정의역이 $X=\{0, 1, 2\}$ 인 함수 $f(x)=|x-1|+2$ 에 대하여
 $f(0)=3, f(1)=2, f(2)=3$
 ① $g(x)=x+1$ 이므로 $g(0)=1, g(1)=2, g(2)=3$
 즉, $f(0) \neq g(0)$ 이므로 $f \neq g$
 ② $g(x)=x+3$ 이므로 $g(0)=3, g(1)=4, g(2)=5$
 즉, $f(1) \neq g(1), f(2) \neq g(2)$ 이므로 $f \neq g$
 ③ $g(x)=x^2-1$ 이므로 $g(0)=-1, g(1)=0, g(2)=3$
 즉, $f(0) \neq g(0), f(1) \neq g(1)$ 이므로 $f \neq g$
 ④ $g(x)=x^2-2x+3$ 이므로 $g(0)=3, g(1)=2, g(2)=3$
 즉, $f(0)=g(0), f(1)=g(1), f(2)=g(2)$ 이므로 $f=g$
 ⑤ $g(x)=|x-2|+1$ 이므로 $g(0)=3, g(1)=2, g(2)=1$
 즉, $f(2) \neq g(2)$ 이므로 $f \neq g$
 따라서 $g(x)$ 가 될 수 있는 것은 ④이다.

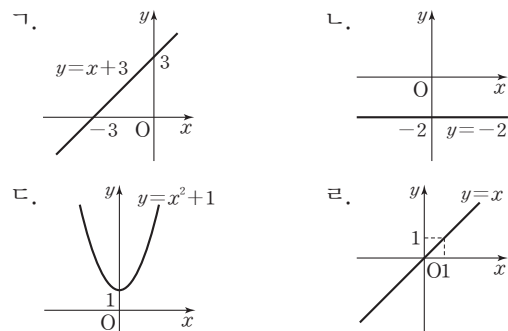
027 답 (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄹ (3) ㄱ
 (4) ㄱ, ㄴ, ㄷ (5) ㄱ, ㄴ

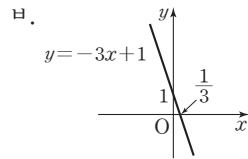
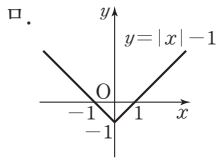
028 답 (1) ㄱ, ㄴ, ㄹ (2) ㄱ, ㄴ, ㄹ (3) ㄴ
 (4) ㄷ

029 답 (1) ㄱ (2) ㄹ (3) ㄱ, ㄴ, ㄷ

030 답 (1) ㄱ, ㄹ, ㄷ (2) ㄱ, ㄹ, ㄷ (3) ㄹ
 (4) ㄴ

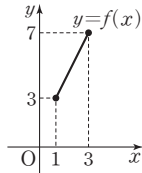
각 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



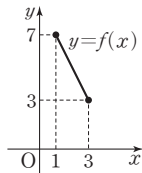


031 ㉠ (1) 풀이 참조 (2) $a = -2, b = 9$

(1) 정의역과 공역이 각각 $X = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$,
 $Y = \{y | 3 \leq y \leq 7\}$ 인 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여
 $a > 0$ 이면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다. 이때 함수
 $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면 치역과 **공역**이 같아야 한다.
 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과
 같이 두 점 (1, 3), (3, 7)을 양 끝 점으로
 하는 선분이므로
 $f(1) = 3, f(3) = 7$
 즉, $a + b = 3, 3a + b = 7$ 이므로
 두 식을 연립하여 풀면
 $a = 2, b = 1$



(2) 정의역과 공역이 각각 $X = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$,
 $Y = \{y | 3 \leq y \leq 7\}$ 인 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여
 $a < 0$ 이면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다. 이때 함수
 $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면 치역과 공역이 같아야 한다.
 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과
 같이 두 점 (1, 7), (3, 3)을 양 끝 점으로
 하는 선분이므로
 $f(1) = 7, f(3) = 3$
 즉, $a + b = 7, 3a + b = 3$ 이므로
 두 식을 연립하여 풀면
 $a = -2, b = 9$



풍생 비법 일대일대응이 되기 위한 조건

함수 $f(x)$ 가 일대일대응이려면
 ① x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.
 $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} ax+b & (x \geq k) \\ cx+d & (x < k) \end{cases}$ 일 때,
 a, c 의 부호가 같아야 하므로 $ac > 0$ 이어야 한다.
 ② 정의역이 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 일 때, 공역의 양 끝 값이 $f(a), f(b)$ 이어야 한다.

032 ㉠ (1) 9 (2) 8 (3) 64

(1) 1의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3가지
 2의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3가지
 따라서 $X = \{1, 2\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3\}$ 으로의 함수의 개수는
 $3^2 = 9$
 (2) -1의 함수값이 될 수 있는 것은 a, b 의 2가지
 0의 함수값이 될 수 있는 것은 a, b 의 2가지
 1의 함수값이 될 수 있는 것은 a, b 의 2가지
 따라서 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에서 $Y = \{a, b\}$ 로의 함수의 개수는
 $2^3 = 8$

(3) 2의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7의 4가지
 4의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7의 4가지
 6의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7의 4가지
 따라서 $X = \{2, 4, 6\}$ 에서 $Y = \{1, 3, 5, 7\}$ 로의 함수의 개수는
 $4^3 = 64$

033 ㉠ (1) 24 (2) 120 (3) 504

(1) 1의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7의 4가지
 2의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7 중에서 1의 함수값을
 제외한 3가지
 3의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7 중에서 1, 2의 함수
 값을 제외한 2가지
 따라서 $X = \{1, 2, 3\}$ 에서 $Y = \{1, 3, 5, 7\}$ 로의 일대일함수
 의 개수는
 $4 \times 3 \times 2 = 24$
 (2) 1의 함수값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d, e 의 5가지
 3의 함수값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d, e 중에서 1의 함수
 값을 제외한 4가지
 5의 함수값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d, e 중에서 1, 3의 함
 숫값을 제외한 3가지
 7의 함수값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d, e 중에서 1, 3, 5의
 함수값을 제외한 2가지
 따라서 $X = \{1, 3, 5, 7\}$ 에서 $Y = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일
 함수의 개수는
 $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$
 (3) 3의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, ..., 9의 9가지
 6의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, ..., 9 중에서 3의 함수
 값을 제외한 8가지
 9의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, ..., 9 중에서 3, 6의 함
 숫값을 제외한 7가지
 따라서 $X = \{3, 6, 9\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 로의 일대일함
 수의 개수는
 $9 \times 8 \times 7 = 504$

참고 일대일함수의 개수는 각각 (1) ${}_4P_3$, (2) ${}_5P_4$, (3) ${}_9P_3$

034 ㉠ (1) 6 (2) 24 (3) 120

(1) 1의 함수값이 될 수 있는 것은 4, 5, 6의 3가지
 2의 함수값이 될 수 있는 것은 4, 5, 6 중에서 1의 함수값을 제
 외한 2가지
 3의 함수값이 될 수 있는 것은 4, 5, 6 중에서 1, 2의 함수값을
 제외한 1가지
 따라서 $X = \{1, 2, 3\}$ 에서 $Y = \{4, 5, 6\}$ 으로의 일대일대응의
 개수는
 $3 \times 2 \times 1 = 6$
 (2) 0의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7의 4가지
 1의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7 중에서 0의 함수값을
 제외한 3가지
 2의 함수값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7 중에서 0, 1의 함수
 값을 제외한 2가지

3의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7 중에서 0, 1, 2의 함숫값을 제외한 1가지
따라서 $X=\{0, 1, 2, 3\}$ 에서 $Y=\{1, 3, 5, 7\}$ 로의 일대일 대응의 개수는

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

(3) 1의 함숫값이 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8, 10의 5가지

3의 함숫값이 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8, 10 중에서 1의 함숫값을 제외한 4가지

5의 함숫값이 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8, 10 중에서 1, 3의 함숫값을 제외한 3가지

7의 함숫값이 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8, 10 중에서 1, 3, 5의 함숫값을 제외한 2가지

9의 함숫값이 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8, 10 중에서 1, 3, 5, 7의 함숫값을 제외한 1가지

따라서 $X=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 에서 $Y=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 으로의 일대일대응의 개수는

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

참고 일대일대응의 개수는 각각 (1) ${}_3P_3=3!$, (2) ${}_4P_4=4!$, (3) ${}_5P_5=5!$

035 답 (1) 4 (2) 3 (3) 5

(1) 공역 $Y=\{1, 2, 3, 4\}$ 의 원소의 개수가 4이므로 상수함수의 개수는 4이다.

(2) 공역 $Y=\{3, 6, 9\}$ 의 원소의 개수가 3이므로 상수함수의 개수는 3이다.

(3) 공역 $Y=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 원소의 개수가 5이므로 상수함수의 개수는 5이다.

036 답 ⑤

주어진 함수를 $f(x)$ 라 하자.

① $f(1)=f(2)=1$ 이므로 일대일함수가 아니다.

② $f(3)=f(4)=2$ 이므로 일대일함수가 아니다.

③ $f(0)=f(3)=0$ 이므로 일대일함수가 아니다.

④ $f(1)=f(3)=3$ 이므로 일대일함수가 아니다.

⑤ 정의역의 모든 x 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이므로 일대일함수이다.

따라서 일대일함수의 그래프는 ⑤이다.

037 답 ②

$f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$ 를 만족시키는 함수는 일대일함수이다.

① [반례] 함수 $f(x)=3$ 에 대하여

$$f(1)=3, f(2)=3 \text{이므로 } f(1)=f(2) \text{이지만 } 1 \neq 2$$

즉, 함수 $f(x)=3$ 은 일대일함수가 아니다.

② 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x$ 에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $\frac{1}{2}x_1=\frac{1}{2}x_2$

$$\therefore x_1=x_2$$

즉, 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x$ 는 일대일함수이다.

③ [반례] 함수 $f(x)=x^2+1$ 에 대하여

$$f(-1)=2, f(1)=2 \text{이므로 } f(-1)=f(1) \text{이지만 } -1 \neq 1$$

즉, 함수 $f(x)=x^2+1$ 은 일대일함수가 아니다.

④ [반례] 함수 $f(x)=|x|$ 에 대하여

$$f(-1)=1, f(1)=1 \text{이므로 } f(-1)=f(1) \text{이지만 } -1 \neq 1$$

즉, 함수 $f(x)=|x|$ 는 일대일함수가 아니다.

⑤ [반례] 함수 $f(x)=(x-1)^2$ 에 대하여

$$f(0)=1, f(2)=1 \text{이므로 } f(0)=f(2) \text{이지만 } 0 \neq 2$$

즉, 함수 $f(x)=(x-1)^2$ 은 일대일함수가 아니다.

따라서 조건을 만족시키는 함수는 ②이다.

038 답 ④

집합 $X=\{1, 3, 5\}$ 에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 로의 함수 f 가 일대일함수이고 $f(3)=3$ 이므로 $f(1), f(5)$ 의 값은 서로 다르면서 1, 2, 4, 5 중 하나이어야 한다.

즉, $f(1)+f(5)$ 의 값이 최대가 되려면

$$f(1)=4, f(5)=5 \text{ 또는 } f(1)=5, f(5)=4$$

이어야 하므로 $M=4+5=9$

또, $f(1)+f(5)$ 의 값이 최소가 되려면

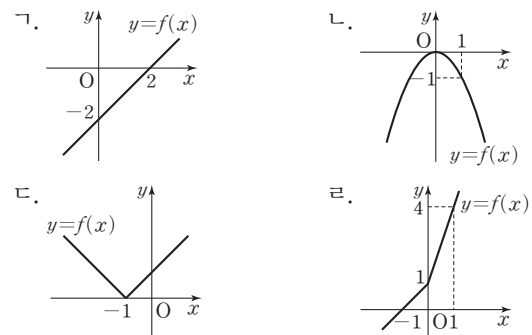
$$f(1)=1, f(5)=2 \text{ 또는 } f(1)=2, f(5)=1$$

이어야 하므로 $m=1+2=3$

$$\therefore M+m=9+3=12$$

039 답 ②

각 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

다른 풀이

ㄴ. [반례] $x_1=-1, x_2=1$ 이면 $x_1 \neq x_2$ 이지만

$$f(x_1)=f(x_2)=-1 \text{이므로 일대일대응이 아니다.}$$

ㄷ. [반례] $x_1=-2, x_2=0$ 이면 $x_1 \neq x_2$ 이지만

$$f(x_1)=f(x_2)=1 \text{이므로 일대일대응이 아니다.}$$

따라서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

040 답 -3

함수 $f(x)=-2x+b$ 에서 x 의 계수가 -2 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

즉, X 에서 Y 로의 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이므로

$$f(-2)=a, f(1)=-a$$

$$\therefore 4+b=a, -2+b=-a$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=-1$

$$\therefore ab=3 \times (-1) = -3$$

041 답 4

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+3 & (x \geq 1) \\ (5-a)x+2a-2 & (x < 1) \end{cases}$ 이 일대일대응이 되려면

두 직선 $y=ax+3$, $y=(5-a)x+2a-2$ 의 기울기의 부호가 같아야 하므로

$$a(5-a) > 0, a(a-5) < 0 \quad \therefore 0 < a < 5$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

주의 $a=0$ 또는 $a=5$ 이면 어느 한쪽 구간에서 상수함수가 되므로 일대일 대응이 될 수 없다.

042 답 ③

집합 $X=\{1, 3, 5\}$ 에서 집합 X 로의 함수이므로

$$\neg. f(1)=1, f(3)=3, f(5)=5$$

즉, $f(x)=(x$ 를 6으로 나누었을 때의 나머지)는 항등함수이다.

$$\neg. g(1)=1, g(3)=3, g(5)=5$$

즉, $g(x)=|x|$ 는 항등함수이다.

$$\neg. h(1)=5, h(3)=3, h(5)=1$$

즉, $h(x)=-x+6$ 은 항등함수가 아니다.

따라서 항등함수인 것은 $\neg, \neg$ 이다.

043 답 4

정의역이 $X=\{1, 3\}$ 인 함수 $f(x)=\begin{cases} x+a & (x \geq 2) \\ x^2-2x+b & (x < 2) \end{cases}$ 에서

$$x=1 < 2 \text{이므로 } f(1)=1^2-2 \times 1+b=b-1$$

$$x=3 \geq 2 \text{이므로 } f(3)=3+a$$

이때 f 가 상수함수이므로 $f(1)=f(3)$ 에서

$$b-1=3+a \quad \therefore b-a=4$$

044 답 4

함수 f 는 항등함수이므로 $f(2)=2, f(3)=3$

$$f(2)+g(5)=3 \text{에서}$$

$$2+g(5)=3 \quad \therefore g(5)=3-2=1$$

함수 g 는 상수함수이므로 $g(3)=g(5)=1$

$$\therefore f(3)+g(3)=3+1=4$$

045 답 190

집합 $X=\{2, 5, 7\}$ 에서 집합 $Y=\{0, 2, 4, 6, 8\}$ 로의

함수의 개수는 $a=5 \times 5 \times 5=5^3=125$

일대일함수의 개수는 $b=5 \times 4 \times 3=60$

상수함수의 개수는 $c=5$

$$\therefore a+b+c=125+60+5=190$$

046 답 12

$f(3)=3$ 으로 정해져 있으므로 $f(1), f(5)$ 의 값만 결정하면 된다.

이때 공역이 $Y=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 이므로

$f(1)$ 의 값으로 가능한 것은 3을 제외한 4가지

$f(5)$ 의 값으로 가능한 것은 3과 $f(1)$ 의 값을 제외한 3가지

따라서 $f(3)=3$ 을 만족시키는 일대일함수 f 의 개수는

$$4 \times 3 = 12$$

047 답 ②

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 X 로의 함수 f 에 대하여

$$f(1)+f(2)=5 \text{이므로}$$

$$f(1)=1, f(2)=4 \text{ 또는 } f(1)=2, f(2)=3$$

$$\text{또는 } f(1)=3, f(2)=2 \text{ 또는 } f(1)=4, f(2)=1$$

이때 f 는 일대일대응이므로

$$(i) f(1)=1, f(2)=4 \text{일 때,}$$

$$f(3)=2, f(4)=3 \text{ 또는 } f(3)=3, f(4)=2$$

$$(ii) f(1)=2, f(2)=3 \text{일 때,}$$

$$f(3)=1, f(4)=4 \text{ 또는 } f(3)=4, f(4)=1$$

$$(iii) f(1)=3, f(2)=2 \text{일 때,}$$

$$f(3)=1, f(4)=4 \text{ 또는 } f(3)=4, f(4)=1$$

$$(iv) f(1)=4, f(2)=1 \text{일 때,}$$

$$f(3)=2, f(4)=3 \text{ 또는 } f(3)=3, f(4)=2$$

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$2+2+2+2=8$$

048 답 (1) 1 (2) 4 (3) 1

$$(4) 5 (5) 8 (6) 7$$

$$(1) (g \circ f)(1)=g(f(1))=g(5)=1$$

$$(2) (g \circ f)(2)=g(f(2))=g(7)=4$$

$$(3) (g \circ f)(3)=g(f(3))=g(6)=1$$

$$(4) (f \circ g)(5)=f(g(5))=f(1)=5$$

$$(5) (f \circ g)(7)=f(g(7))=f(4)=8$$

$$(6) (f \circ g)(8)=f(g(8))=f(2)=7$$

049 답 (1) 18 (2) 7 (3) 1

$$(1) f(1)=2+3=5 \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(1)=g(f(1))=g(5)=5^2-2 \times 5+3=18$$

$$(2) g(1)=1-2+3=2 \text{이므로}$$

$$(f \circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=2 \times 2+3=7$$

$$(3) f(-2)=2 \times (-2)+3=-1 \text{이므로}$$

$$(f \circ f)(-2)=f(f(-2))=f(-1)=2 \times (-1)+3=1$$

050 답 (1) x^2-4x+5

$$(2) -x^2+1$$

$$(3) x^4+2x^2+2$$

$$(1) (g \circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+2)$$

$$=(-x+2)^2+1=x^2-4x+5$$

$$(2) (f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)$$

$$=-(x^2+1)+2=-x^2+1$$

$$(3) (g \circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2+1)$$

$$=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$$

051 답 (1) $2x^2+8x+8$

$$(2) 2x^2+2$$

$$(3) \neq$$

$$(1) (g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x+2)$$

$$=2(x+2)^2=2x^2+8x+8$$

$$(2) (f \circ g)(x)=f(g(x))=f(2x^2)=2x^2+2$$

$$(3) (1), (2) \text{에 의하여 } (g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

052 답 (1) $-2x-7$

$$(2) -2x-13$$

$$(3) -x-7$$

$$(4) -2x-13$$

$$(5) =$$

$$\begin{aligned}
 (1) (h \circ g)(x) &= h(g(x)) = h(-x-4) = 2(-x-4) + 1 \\
 &= -2x-7 \\
 (2) ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(x+3) \\
 &= -2(x+3) - 7 \quad (\because (1)) \\
 &= -2x-13 \\
 (3) (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x+3) = -(x+3) - 4 \\
 &= -x-7 \\
 (4) (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\
 &= h(-x-7) \quad (\because (3)) \\
 &= 2(-x-7) + 1 = -2x-13 \\
 (5) (2), (4)에 의하여 (h \circ g) \circ f &\equiv h \circ (g \circ f)
 \end{aligned}$$

053 답 (1) -2 (2) 4 (3) 7

$$\begin{aligned}
 (1) f(2) &= 2 \times 2 + 3 = 7 \text{이므로} \\
 ((h \circ g) \circ f)(2) &= (h \circ g)(f(2)) \\
 &= (h \circ g)(7) \\
 &= \boxed{-7} + 5 = \boxed{-2} \\
 (2) f(-1) &= 2 \times (-1) + 3 = 1 \text{이므로} \\
 (h \circ g \circ f)(-1) &= ((h \circ g) \circ f)(-1) \\
 &= (h \circ g)(f(-1)) = (h \circ g)(1) \\
 &= -1 + 5 = 4 \\
 (3) (h \circ g)(3) &= -3 + 5 = 2 \text{이므로} \\
 ((f \circ h) \circ g)(3) &= (f \circ (h \circ g))(3) = f((h \circ g)(3)) \\
 &= f(2) = 2 \times 2 + 3 = 7
 \end{aligned}$$

054 답 (1) 22 (2) -3 (3) 13

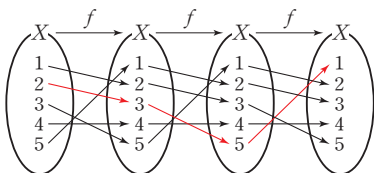
$$\begin{aligned}
 (1) h(2) &= 2 \times 2 + 1 = 5 \text{이므로} \\
 ((f \circ g) \circ h)(2) &= (f \circ g)(h(2)) = (f \circ g)(5) \\
 &= 5^2 - 3 = 22 \\
 (2) (f \circ g)(-1) &= (-1)^2 - 3 = -2 \text{이므로} \\
 (h \circ f \circ g)(-1) &= (h \circ (f \circ g))(-1) \\
 &= h((f \circ g)(-1)) \\
 &= h(-2) \\
 &= 2 \times (-2) + 1 = -3 \\
 (3) (f \circ g)(3) &= 3^2 - 3 = 6 \text{이므로} \\
 ((h \circ f) \circ g)(3) &= (h \circ (f \circ g))(3) \\
 &= h((f \circ g)(3)) \\
 &= h(6) \\
 &= 2 \times 6 + 1 = 13
 \end{aligned}$$

055 답 ①

$$(f \circ f \circ f)(2) = f(f(f(2))) = f(f(3)) = f(5) = 1$$

다른 풀이

다음 그림에서 $(f \circ f \circ f)(2) = 1$



056 답 5

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(5) &= f(g(5)) = f(2) = 3 \\
 (g \circ f)(1) &= g(f(1)) = g(5) = 2 \\
 \therefore (f \circ g)(5) + (g \circ f)(1) &= 3 + 2 = 5
 \end{aligned}$$

057 답 34

$$\begin{aligned}
 x=2 \geq 0 \text{ 일 때, } g(x) &= 2x+1 \text{ 이므로} \\
 (f \circ g)(2) &= f(g(2)) = f(5) = 3 \times 5 - 2 = 13 \\
 \text{한편, } f(-1) &= 3 \times (-1) - 2 = -5 \text{ 이고} \\
 x=-5 < 0 \text{ 일 때, } g(x) &= x^2 + x + 1 \text{ 이므로} \\
 (g \circ f)(-1) &= g(f(-1)) = g(-5) \\
 &= (-5)^2 + (-5) + 1 = 21 \\
 \therefore (f \circ g)(2) + (g \circ f)(-1) &= 13 + 21 = 34
 \end{aligned}$$

058 답 -1

$$\begin{aligned}
 x=1 \geq 0 \text{ 일 때, } g(x) &= 2x^2 + 1 \text{ 이므로} \\
 (f \circ g)(1) &= f(g(1)) = f(3) = 9 + a \\
 \text{이때 } (f \circ g)(1) &= 7 \text{ 이므로} \\
 9 + a &= 7 \quad \therefore a = -2 \\
 \text{따라서 } x=-2 < 0 \text{ 일 때, } g(x) &= -x^2 + 3 \text{ 이므로} \\
 g(a) &= g(-2) = -(-2)^2 + 3 = -1
 \end{aligned}$$

059 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -x + a, g(x) = bx^2 + 1 \text{ 이고} \\
 g(0) &= 1 \text{ 이므로 } (f \circ g)(0) = 1 \text{ 에서} \\
 f(g(0)) &= f(1) = -1 + a = 1 \\
 \therefore a &= 2, f(x) = -x + 2 \\
 \text{이때 } f(3) &= -3 + 2 = -1 \text{ 이므로} \\
 (g \circ f)(3) &= g(f(3)) = g(-1) = b + 1 = 4 \\
 \therefore b &= 3, g(x) = 3x^2 + 1 \\
 \therefore f(1) + g(1) &= (-1 + 2) + (3 + 1) = 5
 \end{aligned}$$

060 답 7

$$\begin{aligned}
 (i) f(1) &= 1 \text{ 일 때,} \\
 (f \circ f)(1) &= f(f(1)) = f(1) = 3 \\
 \text{이때 } f(1) &= 1 \text{ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.} \\
 (ii) f(1) &= 3 \text{ 일 때,} \\
 (f \circ f)(1) &= f(f(1)) = f(3) = 3 \\
 \text{이때 함수 } f &\text{가 일대일대응이라는 조건을 만족시키지 않는다.} \\
 (iii) f(1) &= 5 \text{ 일 때,} \\
 (f \circ f)(1) &= f(f(1)) = f(5) = 3 \\
 \text{이때 함수 } f &\text{는 일대일대응이므로} \\
 f(3) &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (i) \sim (iii) \text{ 에서 } f(1) &= 5, f(3) = 1, f(5) = 3 \text{ 이므로} \\
 f(1) - f(3) + f(5) &= 5 - 1 + 3 = 7
 \end{aligned}$$

061 답 1

$$\begin{aligned}
 \text{주어진 그림에서} \\
 f(1) &= 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1 \\
 (i) g(4) &= 2 \text{ 이므로} \\
 (f \circ g)(4) &= f(g(4)) = f(2) = 3
 \end{aligned}$$

이때 $f \circ g = g \circ f$ 이므로 $(g \circ f)(4) = 3$

즉, $g(f(4)) = 3$ 에서 $f(4) = 1$ 이므로

$$g(1) = 3$$

(ii) $g(1) = 3$ 이므로

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 4$$

이때 $f \circ g = g \circ f$ 이므로 $(g \circ f)(1) = 4$

즉, $g(f(1)) = 4$ 에서 $f(1) = 2$ 이므로

$$g(2) = 4$$

(iii) $g(2) = 4$ 이므로

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(4) = 1$$

이때 $f \circ g = g \circ f$ 이므로 $(g \circ f)(2) = 1$

즉, $g(f(2)) = 1$ 에서 $f(2) = 3$ 이므로

$$g(3) = 1$$

062 답 ③

$$f(x) = x^2 - 1, (g \circ h)(x) = 3x - 4 \text{에서}$$

$$g \circ (h \circ f) = (g \circ h) \circ f \text{이고 } f(3) = 3^2 - 1 = 8 \text{이므로}$$

$$(g \circ (h \circ f))(3) = ((g \circ h) \circ f)(3)$$

$$= (g \circ h)(f(3))$$

$$= (g \circ h)(8)$$

$$= 3 \times 8 - 4 = 20$$

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \text{이고 } (g \circ h)(1) = 3 - 4 = -1 \text{이므로}$$

$$((f \circ g) \circ h)(1) = (f \circ (g \circ h))(1)$$

$$= f((g \circ h)(1))$$

$$= f(-1)$$

$$= (-1)^2 - 1 = 0$$

$$\therefore (g \circ (h \circ f))(3) + ((f \circ g) \circ h)(1) = 20 + 0 = 20$$

063 답 2

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \text{이므로}$$

$$(f \circ (g \circ h))(a) = ((f \circ g) \circ h)(a)$$

$$= (f \circ g)(h(a))$$

$$= (f \circ g)(-a^2 + a + 5)$$

$$= 2(-a^2 + a + 5) + 3$$

$$= -2a^2 + 2a + 13$$

$$\text{이때 } (f \circ (g \circ h))(a) = 9 \text{이므로}$$

$$-2a^2 + 2a + 13 = 9, 2a^2 - 2a - 4 = 0$$

$$a^2 - a - 2 = 0, (a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0)$$

064 답 4

$$(f \circ g)(x) = x + 3 \text{이므로}$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$$

$$= (f \circ g)(h(x))$$

$$= h(x) + 3$$

$$\text{이때 } (f \circ (g \circ h))(x) = -3x + 1 \text{이므로}$$

$$h(x) + 3 = -3x + 1 \quad \therefore h(x) = -3x - 2$$

$$\therefore h(-2) = -3 \times (-2) - 2 = 4$$

065 답 ①

$$f(x) = -x + 1 \text{이므로}$$

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = -h(x) + 1$$

$$\text{이때 } (f \circ h)(x) = g(x) \text{이고 } g(x) = 3x + 4 \text{이므로}$$

$$-h(x) + 1 = 3x + 4$$

$$\therefore h(x) = -3x - 3$$

066 답 2

$$f(x) = 2x + k \text{이므로}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x + k)$$

$$= 2(2x + k) + k$$

$$= 4x + 3k$$

함수 $(f \circ f)(x) = 4x + 3k$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가

하므로 $1 \leq x \leq 5$ 에서 $x = 1$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$$\text{이때 } (f \circ f)(1) = 4 \times 1 + 3k = 3k + 4 \text{이므로}$$

$$3k + 4 = 10 \quad \therefore k = 2$$

067 답 ⑤

$$f(x) = x - 3, g(x) = -2x + 3 \text{이므로}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-2x + 3)$$

$$= (-2x + 3) - 3$$

$$= -2x$$

$$\therefore (h \circ f \circ g)(x) = h((f \circ g)(x)) = h(-2x)$$

$$\text{이때 } (h \circ f \circ g)(x) = g(x) \text{이므로}$$

$$h(-2x) = -2x + 3$$

..... ㉠

$$-2x = t \text{로 놓으면 } x = -\frac{1}{2}t \text{이므로 ㉠에 대입하면}$$

$$h(t) = -2 \times \left(-\frac{1}{2}t\right) + 3 = t + 3$$

$$\therefore h(x) = x + 3$$

다른 풀이

역함수를 학습한 후에는 다음과 같이 풀 수도 있다.

$$(h \circ f \circ g)(x) = g(x) \text{에서}$$

$$(h \circ f)(x) = I(x) \text{ (단, } I \text{는 항등함수)}$$

즉, 함수 $h(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이다.

$$f(x) = x - 3 \text{에서 } y = x - 3 \text{이라 하면}$$

$$x = y + 3$$

$$x, y \text{를 바꿔 쓰면 } y = x + 3 \text{이므로}$$

$$h(x) = x + 3$$

068 답 ⑤

$$f(x) = 2x \text{이므로}$$

$$f^1(x) = 2x$$

$$f^2(x) = (f \circ f^1)(x) = f(f^1(x)) = f(2x)$$

$$= 2 \times 2x = 2^2x$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f(2^2x)$$

$$= 2 \times 2^2x = 2^3x$$

⋮

$$\text{따라서 } f^n(x) = 2^n x \text{이므로}$$

$$f^2(1) + f^6(1) + f^{10}(1) = 2^2 \times 1 + 2^6 \times 1 + 2^{10} \times 1$$

$$= 4 + 64 + 1024 = 1092$$

다른 풀이

$$f(x) = 2x \text{이므로}$$

$$f^1(1) = 2$$

$$f^2(1) = (f \circ f^1)(1) = f(f^1(1)) = f(2) = 2 \times 2 = 2^2$$

$$f^3(1) = (f \circ f^2)(1) = f(f^2(1)) = f(2^2) = 2 \times 2^2 = 2^3$$

⋮

$$\text{따라서 } f^n(1) = 2^n \text{이므로}$$

$$f^2(1) + f^6(1) + f^{10}(1) = 2^2 + 2^6 + 2^{10} = 4 + 64 + 1024 = 1092$$

069 답 6

$$(i) f^1(1) = f(1) = 2$$

$$f^2(1) = (f \circ f^1)(1) = f(f^1(1)) = f(2) = 3$$

$$f^3(1) = (f \circ f^2)(1) = f(f^2(1)) = f(3) = 1$$

$$f^4(1) = (f \circ f^3)(1) = f(f^3(1)) = f(1) = 2$$

⋮

즉, $f^n(1)$ 의 값은 2, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

$$\text{이때 } 100 = 3 \times 33 + 1 \text{이므로 } f^{100}(1) = f^1(1) = 2$$

$$(ii) f^1(2) = f(2) = 3$$

$$f^2(2) = (f \circ f^1)(2) = f(f^1(2)) = f(3) = 1$$

$$f^3(2) = (f \circ f^2)(2) = f(f^2(2)) = f(1) = 2$$

$$f^4(2) = (f \circ f^3)(2) = f(f^3(2)) = f(2) = 3$$

⋮

즉, $f^n(2)$ 의 값은 3, 1, 2가 이 순서대로 반복된다.

$$\text{이때 } 101 = 3 \times 33 + 2 \text{이므로}$$

$$f^{101}(2) = f^2(2) = 1$$

$$(iii) f^1(3) = f(3) = 1$$

$$f^2(3) = (f \circ f^1)(3) = f(f^1(3)) = f(1) = 2$$

$$f^3(3) = (f \circ f^2)(3) = f(f^2(3)) = f(2) = 3$$

$$f^4(3) = (f \circ f^3)(3) = f(f^3(3)) = f(3) = 1$$

⋮

즉, $f^n(3)$ 의 값은 1, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.

$$\text{이때 } 102 = 3 \times 34 \text{이므로}$$

$$f^{102}(3) = f^3(3) = 3$$

$$(i) \sim (iii) \text{에서}$$

$$f^{100}(1) + f^{101}(2) + f^{102}(3) = 2 + 1 + 3 = 6$$

070 답 -3

$$f(x) = 5 - x \text{이므로}$$

$$f^1(x) = 5 - x$$

$$f^2(x) = (f \circ f^1)(x) = f(f^1(x)) = f(5 - x)$$

$$= 5 - (5 - x) = x$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f(x)$$

$$= 5 - x$$

⋮

$$\text{따라서 } f^n(x) = \begin{cases} 5-x & (n=1, 3, 5, \dots) \\ x & (n=2, 4, 6, \dots) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f^{2027}(a) = 11 \text{에서 } 5 - a = 11 \quad \therefore a = -6$$

$$f^{2028}(3) = b \text{에서 } b = 3$$

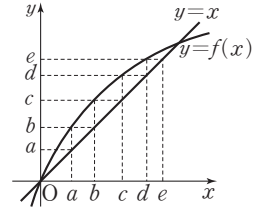
$$\therefore a + b = -6 + 3 = -3$$

071 답 ④

직선 $y=x$ 를 이용하여 y 축과 점선이

이 만나는 점의 y 좌표를 구해 표시하면 오른쪽 그림과 같다.

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ f \circ f)(a) &= f(f(f(a))) \\ &= f(f(b)) \\ &= f(c) = d \end{aligned}$$



072 답 ①

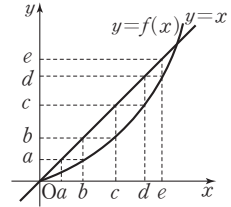
직선 $y=x$ 를 이용하여 y 축과 점선이

만나는 점의 y 좌표를 구해 표시하면 오른쪽 그림과 같으므로

$$\begin{aligned} (f \circ f)(c) &= f(f(c)) \\ &= f(b) \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(e) &= f(f(f(e))) \\ &= f(f(d)) \\ &= f(c) \\ &= b \end{aligned}$$

$$\therefore (f \circ f)(c) + (f \circ f \circ f)(e) = a + b$$



073 답 3

주어진 그래프에서

$$f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 2$$

이므로

$$\begin{aligned} (f \circ f)(1) &= f(f(1)) \\ &= f(3) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(3) &= f(f(f(3))) \\ &= f(f(4)) \\ &= f(2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore (f \circ f)(1) - (f \circ f \circ f)(3) = 4 - 1 = 3$$

074 답 (1) ×

(2) ○

(1) 함수 f 가 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

(2) 함수 f 가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

참고 역함수가 존재하기 위해서는 일대일대응이어야 하므로 함수의 그래프에서 x 축에 평행한 직선을 그었을 때 교점이 하나이어야 한다. 즉, 계속 증가하는 함수이거나 계속 감소하는 함수이어야 한다.

075 답 (1) 3

(2) 2

(3) 1

$$(1) f(3) = 5 \text{이므로 } f^{-1}(5) = 3$$

$$(2) f(2) = 6 \text{이므로 } f^{-1}(6) = 2$$

$$(3) f(1) = 7 \text{이므로 } f^{-1}(7) = 1$$

076 답 (1) 2

(2) 6

(3) $-\frac{7}{2}$

$$f^{-1}(2) = k \text{라 하면 } f(k) = 2$$

$$(1) f(k) = 3k - 4 = 2 \text{에서}$$

$$k = 2 \quad \therefore f^{-1}(2) = 2$$

$$(2) f(k) = \frac{1}{2}k - 1 = 2 \text{에서}$$

$$k=6 \quad \therefore f^{-1}(2)=6$$

$$(3) f(k) = -2k - 5 = 2 \text{에서}$$

$$k = -\frac{7}{2} \quad \therefore f^{-1}(2) = -\frac{7}{2}$$

$$077 \text{ 답 (1) } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$(2) f^{-1}(x) = 3x - 3$$

$$(3) f^{-1}(x) = -\frac{3}{2}x + 6$$

(1) $f(x) = 2x - 1$ 에서 $y = 2x - 1$ 이라 하고, x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$2x = y + 1 \quad \therefore x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

$$x, y \text{를 바꿔 쓰면 } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

(2) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ 에서 $y = \frac{1}{3}x + 1$ 이라 하고, x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$\frac{1}{3}x = y - 1 \quad \therefore x = 3y - 3$$

$$x, y \text{를 바꿔 쓰면 } y = 3x - 3$$

$$\therefore f^{-1}(x) = 3x - 3$$

(3) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ 에서 $y = -\frac{2}{3}x + 4$ 라 하고, x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$\frac{2}{3}x = -y + 4 \quad \therefore x = -\frac{3}{2}y + 6$$

$$x, y \text{를 바꿔 쓰면 } y = -\frac{3}{2}x + 6$$

$$\therefore f^{-1}(x) = -\frac{3}{2}x + 6$$

다른 풀이

(1) $f(x) = 2x - 1$ 에서 $y = 2x - 1$ 이라 하고

$$y = 2x - 1 \text{의 } x \text{와 } y \text{를 바꾸면 } x = 2y - 1$$

$$y \text{를 } x \text{에 대한 식으로 나타내면 } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

(2) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ 에서 $y = \frac{1}{3}x + 1$ 이라 하고

$$y = \frac{1}{3}x + 1 \text{의 } x \text{와 } y \text{를 바꾸면 } x = \frac{1}{3}y + 1$$

$$y \text{를 } x \text{에 대한 식으로 나타내면 } y = 3x - 3$$

$$\therefore f^{-1}(x) = 3x - 3$$

(3) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ 에서 $y = -\frac{2}{3}x + 4$ 라 하고

$$y = -\frac{2}{3}x + 4 \text{의 } x \text{와 } y \text{를 바꾸면 } x = -\frac{2}{3}y + 4$$

$$y \text{를 } x \text{에 대한 식으로 나타내면 } y = -\frac{3}{2}x + 6$$

$$\therefore f^{-1}(x) = -\frac{3}{2}x + 6$$

078 답 (1) 4

(2) 2

(3) 3

주어진 함수에서

$$f(1)=4, f(2)=1, f(3)=3, f(4)=2$$

$$(1) (f^{-1})^{-1}(1) = f(1) = 4$$

$$(2) (f \circ f^{-1})(2) = 2$$

$$(3) (f^{-1} \circ f)(3) = 3$$

079 답 (1) 1

(2) 3

(3) 3

$$(1) (g \circ f)^{-1}(1) = (f^{-1} \circ g^{-1})(1) = f^{-1}(g^{-1}(1)) \\ = f^{-1}(2) = 1$$

$$(2) (g \circ f)^{-1}(4) = (f^{-1} \circ g^{-1})(4) = f^{-1}(g^{-1}(4)) \\ = f^{-1}(4) = 3$$

$$(3) (f \circ g)^{-1}(3) = (g^{-1} \circ f^{-1})(3) = g^{-1}(f^{-1}(3)) \\ = g^{-1}(2) = 3$$

080 답 (1) 13

(2) 2

(3) 3

(4) 1

(5) 4

$$(1) (f \circ g^{-1})^{-1}(-3) = (g \circ f^{-1})(-3) = g(f^{-1}(-3))$$

$$f^{-1}(-3) = k \text{라 하면 } f(k) = -3 \text{이므로}$$

$$-k + 3 = -3 \quad \therefore k = 6$$

$$\therefore (f \circ g^{-1})^{-1}(-3) = g(f^{-1}(-3))$$

$$= g(6) = 2 \times 6 + 1 = 13$$

$$(2) (f^{-1} \circ g)^{-1}(-2) = (g^{-1} \circ f)(-2)$$

$$= g^{-1}(f(-2))$$

$$= g^{-1}(5)$$

$$g^{-1}(5) = k \text{라 하면 } g(k) = 5 \text{이므로}$$

$$2k + 1 = 5 \quad \therefore k = 2$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)^{-1}(-2) = g^{-1}(5) = 2$$

$$(3) (f^{-1} \circ f \circ g)(1) = g(1) = 2 + 1 = 3$$

$$(4) ((f \circ g)^{-1} \circ f)(3) = (g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(3)$$

$$= g^{-1}(3)$$

$$g^{-1}(3) = k \text{라 하면 } g(k) = 3 \text{이므로}$$

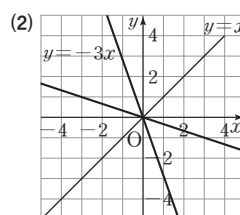
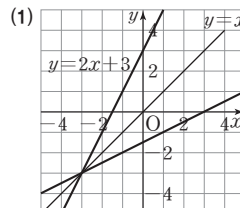
$$2k + 1 = 3 \quad \therefore k = 1$$

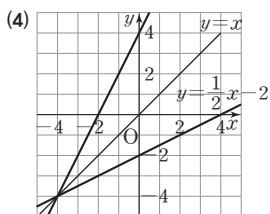
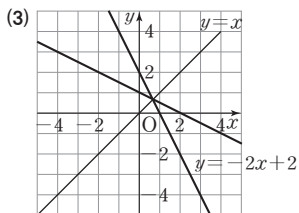
$$\therefore ((f \circ g)^{-1} \circ f)(3) = g^{-1}(3) = 1$$

$$(5) (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(4) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g)(4) = 4$$

081 답 풀이 참조

주어진 함수의 역함수의 그래프는 주어진 함수의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 다음과 같다.





082 답 (1) d (2) b (3) e (4) d

(1) 단계1. 점선과 y 축의 교점의 y 좌표 구하기

직선 $y=x$ 를 이용하여 점선과 y 축의 교점의 y 좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.

단계2. $f^{-1}(c)=k$ 로 놓고 k 의 값 구하기

$f^{-1}(c)=k$ 라 하면

$f(k)=c$

그래프에서 $f(d)=c$ 이므로

$k=d \quad \therefore f^{-1}(c)=d$

(2) $f^{-1}(a)=k$ 라 하면 $f(k)=a$

그래프에서 $f(b)=a$ 이므로 $k=b$

$\therefore f^{-1}(a)=b$

(3) $(f^{-1} \circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$=f^{-1}(d)$

..... ㉠

이때 $f^{-1}(d)=k$ 라 하면 $f(k)=d$

그래프에서 $f(e)=d$ 이므로 $k=e \quad \therefore f^{-1}(d)=e$

이를 ㉠에 대입하면

$(f^{-1} \circ f^{-1})(c)=f^{-1}(d)=e$

(4) $(f \circ f \circ f)^{-1}(a)=(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a)$

$=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(a)))$

$=f^{-1}(f^{-1}(b))$

..... ㉡

이때 $f^{-1}(b)=k$ 라 하면 $f(k)=b$

그래프에서 $f(c)=b$ 이므로 $k=c \quad \therefore f^{-1}(b)=c$

이를 ㉡에 대입하면

$(f \circ f \circ f)^{-1}(a)=f^{-1}(f^{-1}(b))$

$=f^{-1}(c)$

$=d$

083 답 풀이 참조

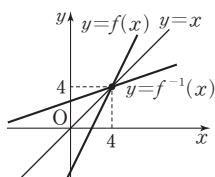
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

즉, 구하는 교점의 x 좌표는

$2x-4=x$ 에서 $x=4$

이때 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로

구하는 좌표는 $(4, 4)$ 이다.



084 답 (1) (1, 1) (2) (-2, -2)

(1) 함수 $f(x)=3x-2$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

즉, 구하는 교점의 x 좌표는

$3x-2=x$ 에서 $2x=2 \quad \therefore x=1$

이때 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 구하는 교점의 좌표는

$(1, 1)$ 이다.

(2) 함수 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

즉, 구하는 교점의 x 좌표는

$\frac{3}{2}x+1=x$ 에서 $\frac{1}{2}x=-1 \quad \therefore x=-2$

이때 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 구하는 교점의 좌표는

$(-2, -2)$ 이다.

085 답 ㉢

$f(2)=1$ 이고 $f(3)=2$ 에서 $f^{-1}(2)=3$ 이므로

$f(2)+f^{-1}(2)=1+3=4$

086 답 ㉠

$f^{-1}(5)=-1$ 에서 $f(-1)=5$ 이므로

$-a+2=5 \quad \therefore a=-3, f(x)=-3x+2$

$\therefore f(2)=-3 \times 2+2=-4$

087 답 ㉣

$f^{-1}(1)=1$ 에서 $f(1)=1$ 이므로

$a+b=1$

..... ㉠

$f^{-1}(-5)=2$ 에서 $f(2)=-5$ 이므로

$4a+b=-5$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2, b=3$

$\therefore ab=(-2) \times 3=-6$

088 답 14

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($x \geq 1$)에서

$f(0)=2$ 이므로 $c=2$

$f^{-1}(4)=1$ 에서 $f(1)=4$ 이므로

$a+b+2=4 \quad \therefore a+b=2$

..... ㉢

$f^{-1}(8)=2$ 에서 $f(2)=8$ 이므로

$4a+2b+2=8 \quad \therefore 2a+b=3$

..... ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=1, b=1$

따라서 $f(x)=x^2+x+2$ 이므로

$f(3)=3^2+3+2=14$

089 답 4

$x \geq 2$ 일 때, $f(x)=x+5 \geq 7$

$x < 2$ 일 때, $f(x)=2x+3 < 7$

$f^{-1}(8)=a$ 라 하면 $f(a)=8 \geq 7$ 이므로

$a+5=8 \quad \therefore a=3, f^{-1}(8)=3$

$f^{-1}(5)=b$ 라 하면 $f(b)=5<7$ 이므로

$$2b+3=5, 2b=2 \quad \therefore b=1, f^{-1}(5)=1$$

$$\therefore f^{-1}(8)+f^{-1}(5)=3+1=4$$

주의 $f^{-1}(8)+f^{-1}(5)$ 에서 8과 5가 모두 2보다 큰 값이라는 이유로 $x \geq 2$ 일 때의 함수 $f(x)=x+5$ 를 이용하지 않도록 주의한다.

090 답 ②

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+a)$$

$$= b(x+a) - 1 = bx + ab - 1$$

이때 $(g \circ f)(x) = -2x + c$ 이므로

$$bx + ab - 1 = -2x + c$$

$$\therefore b = -2, c = ab - 1$$

$f^{-1}(3)=5$ 에서 $f(5)=3$ 이므로

$$5+a=3 \quad \therefore a=-2$$

$$\therefore c = ab - 1 = -2 \times (-2) - 1 = 3$$

$$\therefore a+b+c = -2 + (-2) + 3 = -1$$

091 답 ③

$$-2x+1=3 \text{에서 } 2x=-2 \quad \therefore x=-1$$

$f^{-1}(x)=g(-2x+1)$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$f^{-1}(-1)=g(3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)=3x-2$ 에 대하여 $f^{-1}(-1)=k$ 라 하면 $f(k)=-1$ 이므로

$$3k-2=-1 \quad \therefore k=\frac{1}{3}, f^{-1}(-1)=\frac{1}{3}$$

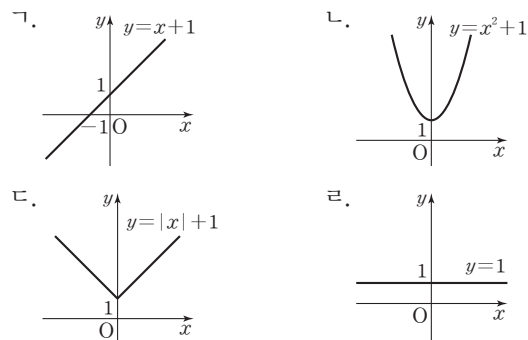
따라서 ①에서

$$g(3)=f^{-1}(-1)=\frac{1}{3}$$

092 답 ①

어떤 함수의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

이때 주어진 각 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



이 중 일대일대응인 함수의 그래프는 ㉠뿐이다.

따라서 역함수가 존재하는 함수는 ㉠이다.

093 답 ④

함수 $f(x)=3x+b$ 의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다. 이때 일차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 기울기가 양수인 직선이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

$$\therefore f(1)=-1, f(3)=a$$

$$f(1)=-1 \text{에서 } 3+b=-1 \quad \therefore b=-4$$

즉, $f(x)=3x-4$ 이므로 $a=f(3)=3 \times 3 - 4 = 5$

$$\therefore a+b=5+(-4)=1$$

094 답 9

$x < 1$ 일 때, $f(x)=3x+5$, 즉 $y=f(x)$ 의 그래프가 기울기가 양수인 직선이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다. 이때 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

즉, $x \geq 1$ 일 때의 $f(x)=a(x-1)^2+b$ 에서

$$a > 0$$

이때 오른쪽 그림과 같이 $x \geq 1$ 일 때

$f(x)=a(x-1)^2+b$ 의 그래프가

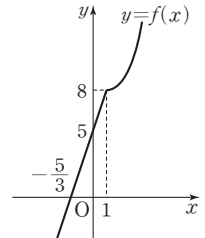
점 $(1, 8)$ 을 지나야 하므로

$$b=8$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 1이므로

$a+b$ 의 최솟값은

$$1+8=9$$



095 답 -1

$y=-2x+a$ 라 하고, x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$2x=-y+a \quad \therefore x=-\frac{1}{2}y+\frac{a}{2}$$

$$x, y \text{를 바꿔 쓰면 } y=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$$

이것이 $f^{-1}(x)=bx+1$ 과 같으므로

$$-\frac{1}{2}=b, \frac{a}{2}=1 \quad \therefore a=2, b=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore ab=2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

096 답 -1

$y=ax+2$ 라 하고, x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$ax=y-2 \quad \therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{2}{a}$$

$$x, y \text{를 바꿔 쓰면 } y=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$$

이때 두 함수 $f(x)=ax+2$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$ 가 서로 같으므로

$$a=\frac{1}{a}, 2=-\frac{2}{a}$$

$$2=-\frac{2}{a} \text{에서 } 2a=-2 \quad \therefore a=-1$$

097 답 ④

$f(2x+1)=4x-3$ 에서 $2x+1=t$ 라 하면

$$x=\frac{t-1}{2}$$

이를 $f(2x+1)=4x-3$ 에 대입하면

$$f(t)=4 \times \frac{t-1}{2} - 3 = 2t - 5 \quad \therefore f(x)=2x-5$$

$y=2x-5$ 라 하고, x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$2x=y+5 \quad \therefore x=\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}$$

$$x, y \text{를 바꿔 쓰면 } y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

따라서 구하는 역함수는 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 이다.

098 답 ④

$(f \circ g^{-1})(3) = f(g^{-1}(3))$ ㉠
 $g^{-1}(3) = k$ 라 하면 $g(k) = 3$ 이므로
 $2k - 1 = 3 \quad \therefore k = 2, g^{-1}(3) = 2$
 이를 ㉠에 대입하면
 $(f \circ g^{-1})(3) = f(g^{-1}(3)) = f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$

099 답 5

$f(1) = 2$ 에서 $f^{-1}(2) = 1$ 이므로
 $(g \circ f^{-1})(2) = g(f^{-1}(2)) = g(1) = 2$
 $f(3) = 4$ 에서 $f^{-1}(4) = 3$ 이므로
 $(f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(4) = 3$
 $\therefore (g \circ f^{-1})(2) + (f^{-1} \circ g)(3) = 2 + 3 = 5$

100 답 5

$(g \circ f^{-1})(a) = -5$ 에서
 $g(f^{-1}(a)) = -5$ ㉠
 $f^{-1}(a) = k$ 라 하면 ㉠에서 $g(k) = -5$
 $k - 3 = -5$ 에서 $k = -2 \quad \therefore f^{-1}(a) = -2$
 따라서 $f(-2) = a$ 이므로
 $a = -2 \times (-2) + 1 = 5$

101 답 ①

$f(x) = 2x + 3$ 이므로
 $(f^{-1})^{-1}(2) = f(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$
 $(f^{-1} \circ f)(4) = 4$
 $\therefore (f^{-1})^{-1}(2) + (f^{-1} \circ f)(4) = 7 + 4 = 11$

102 답 1

$f(2) = -2 \times 2 + 1 = -3$ 이므로
 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2)$
 $= (g^{-1} \circ f)(2)$
 $= g^{-1}(f(2))$
 $= g^{-1}(-3)$ ㉠
 $g^{-1}(-3) = k$ 라 하면 $g(k) = -3$ 이므로
 $k - 4 = -3 \quad \therefore k = 1, g^{-1}(-3) = 1$
 이를 ㉠에 대입하면
 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) = g^{-1}(-3) = 1$

103 답 5

$h(x) = (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g^{-1})(x)$
 $= (g \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g^{-1})(x)$
 $= (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$
 $= f^{-1}(g^{-1}(x))$
 $h(a) = 1$ 에서 $f^{-1}(g^{-1}(a)) = 1$ 이므로
 $g^{-1}(a) = k$ 라 하면 $f^{-1}(k) = 1$
 $\therefore k = f(1) = -1 + 2 = 1$
 따라서 $g^{-1}(a) = 1$ 에서
 $a = g(1) = 2 + 3 = 5$

다른 풀이

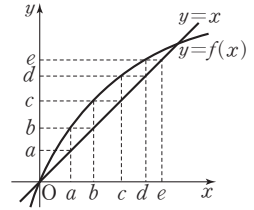
$h(a) = 1$ 에서 $f^{-1}(g^{-1}(a)) = 1$ 이므로
 $f(f^{-1}(g^{-1}(a))) = f(1)$
 즉, $g^{-1}(a) = f(1) = 1$ 이므로 $a = g(1) = 2 + 3 = 5$

104 답 ③

직선 $y = x$ 를 이용하여 x 축과 점선
 이 만나는 점의 x 좌표를 구해 표시하
 면 오른쪽 그림과 같다.

이때
 $(f^{-1} \circ f^{-1})(e) = f^{-1}(f^{-1}(e))$
 에서 $f^{-1}(e) = k$ 라 하면
 $f(k) = e$

그래프에서 $f(d) = e$ 이므로 $k = d$
 $\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(e) = f^{-1}(f^{-1}(e)) = f^{-1}(d)$
 또, $f^{-1}(d) = l$ 이라 하면 $f(l) = d$
 그래프에서 $f(c) = d$ 이므로 $l = c$
 $\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(e) = f^{-1}(f^{-1}(e)) = f^{-1}(d) = c$



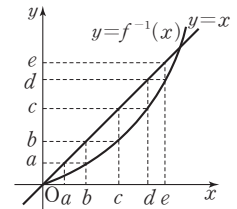
105 답 ④

직선 $y = x$ 를 이용하여 x 축과 점선이
 만나는 점의 x 좌표를 구해 표시하면
 오른쪽 그림과 같으므로

$f^{-1}(b) = a, f^{-1}(c) = b,$
 $f^{-1}(d) = c, f^{-1}(e) = d$
 $\therefore f(a) = b, f(b) = c, f(c) = d,$
 $f(d) = e$

$\therefore (f \circ f \circ f)(a) = f(f(f(a))) = f(f(b)) = f(c) = d$

주의 주어진 그래프가 $y = f(x)$ 의 그래프가 아닌 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프임을 확인한다.



106 답 1

$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f^{-1})(3) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3)$
 $= (g^{-1} \circ f^{-1})(3)$
 $= g^{-1}(f^{-1}(3))$ ㉠

이때 $f^{-1}(3) = k$ 라 하면 $f(k) = 3$

그래프에서 $f(1) = 3$ 이므로 $k = 1$

즉, ㉠에서

$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f^{-1})(3) = g^{-1}(f^{-1}(3))$
 $= g^{-1}(1)$ ㉡

이때 $g^{-1}(1) = l$ 이라 하면 $g(l) = 1$

그래프에서 $g(1) = 1$ 이므로 $l = 1$

따라서 ㉡에서

$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f^{-1})(3) = g^{-1}(1) = 1$

107 답 5

함수 $f(x) = ax + b$ 의 그래프가 점 $(3, -1)$ 을 지나므로

$f(3) = -1$, 즉 $3a + b = -1$ ㉠

$f(x)$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 $(3, -1)$ 을 지나므로
 $f^{-1}(3) = -1$ 에서

$$f(-1)=3, \text{ 즉 } -a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$

따라서 $f(x)=-x+2$ 이므로

$$f(-3)=-(-3)+2=5$$

참고 일차함수의 그래프와 그 역함수의 그래프가 직선 $y=x$ 위의 점이 아닌 점에서 만나는 경우는 두 함수가 일치하는 경우뿐이다.

108 답 7

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 4)$ 를 지나므로 그 역함수

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 점 $(4, 2)$ 를 지난다. 이때 두 함수

$y=f(x), y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(2, 4), (4, 2)$ 를 지난다.

$f(x)=ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(2)=4 \text{에서 } 2a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$f(4)=2 \text{에서 } 4a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=6$

따라서 $f(x)=-x+6$ 이므로

$$f(-1)=-(-1)+6=7$$

109 답 ②

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같으므로 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3} = x, x^2 - 3x + 2 = 0, (x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 두 교점의 좌표는 $(1, 1), (2, 2)$ 이므로 두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

참고 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 사이의 거리

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

중단원 점검 문제

III-1 | 함수

163~164쪽

01 답 ①

ㄱ. $f(x)=x^2$ 이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $0 \leq x^2 \leq 1$

$$\therefore 0 \leq f(x) \leq 1$$

ㄴ. $g(x)=2x+1$ 이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서

$$-2 \leq 2x \leq 2, -1 \leq 2x+1 \leq 3$$

$$\therefore -1 \leq g(x) \leq 3$$

ㄷ. $h(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$ 이므로

$$-1 \leq x < 0 \text{에서 } 0 < -x \leq 1, -1 < -x-1 \leq 0$$

$$\therefore -1 < h(x) \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{에서 } -1 \leq x-1 \leq 0$$

$$\therefore -1 < h(x) \leq 0$$

따라서 X 에서 Y 로의 함수인 것은 ㄱ이다.

다른 풀이

ㄴ. [반례] $g(-1)=2 \times (-1)+1=-1 \notin Y$

즉, 정의역의 원소 -1 에 대응되는 공역의 원소가 없다.

ㄷ. [반례] $h(0)=0-1=-1 \notin Y$

즉, 정의역의 원소 0 에 대응되는 공역의 원소가 없다.

따라서 X 에서 Y 로의 함수인 것은 ㄱ이다.

02 답 2

자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $f(x)$ 가

$f(x)=(x^2)$ 을 3으로 나누었을 때의 나머지)이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $x=3k-2$ (k 는 자연수)일 때,

$$x^2 = (3k-2)^2 = 9k^2 - 12k + 4$$

$$= 3(3k^2 - 4k + 1) + 1$$

$$\text{이므로 } f(x)=1$$

(ii) $x=3k-1$ (k 는 자연수)일 때,

$$x^2 = (3k-1)^2 = 9k^2 - 6k + 1$$

$$= 3(3k^2 - 2k) + 1$$

$$\text{이므로 } f(x)=1$$

(iii) $x=3k$ (k 는 자연수)일 때,

$$x^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3 \times 3k^2$$

$$\text{이므로 } f(x)=0$$

(i)~(iii)에서 함수 $f(x)$ 의 치역은 $\{0, 1\}$ 이므로 원소의 개수는 2이다.

03 답 1

정의역이 $X=\{0, 1\}$ 이므로 $f(x)=|x+1|$ 에서

$$f(0)=|0+1|=1, f(1)=|1+1|=2$$

$g(x)=x^2+ax+b$ 에서

$$g(0)=0+0+b=b, g(1)=1+a+b$$

이때 $f=g$ 에서 $f(0)=g(0), f(1)=g(1)$

$$f(0)=g(0) \text{에서 } b=1$$

$$f(1)=g(1) \text{에서}$$

$$1+a+b=2, 1+a+1=2 \quad \therefore a=0$$

$$\therefore b-a=1-0=1$$

04 답 ④

집합 $X=\{x|x \geq 1\}$ 에서

집합 $Y=\{y|y \text{는 실수}\}$ 로의 함수

$f(x)=(x-1)^2$ 의 그래프는 오른쪽 그

림과 같으므로 치역은 $\{y|y \geq 0\}$ 이다.

①, ②, ④ $a \geq 1, b \geq 1$ 일 때,

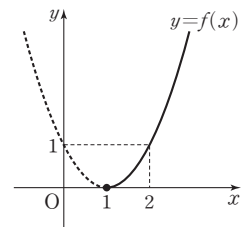
$$f(a)=f(b) \text{이면 } a=b \text{이므로 일대}$$

일함수이다. 그러나 치역과 공역이 같지 않으므로 일대일대응은 아니다.

③ 그래프는 오른쪽 위로 향한다.

⑤ 그래프는 직선 $y=k$ ($k > 0$)와 한 점에서 만난다.

따라서 함수 $f(x)$ 에 대한 설명으로 옳은 것은 ④이다.



05 답 5

$$f(x) = x^2 - 5x + 5 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x \geq \frac{5}{2}$ 에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하므로 집합 $X = \{x | x \geq a\}$ 에서 X 로의 함수 f 가 일대일함수가 되려면 $a \geq \frac{5}{2}$ 이어야 한다.

또, 일대일함수 f 가 일대일대응이 되려면 치역과 공역이 서로 같아야 하므로 $f(a) = a$ 가 성립해야 한다.

$$f(a) = a^2 - 5a + 5 = a \text{에서 } a^2 - 6a + 5 = 0$$

$$(a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 5 \left(\because a \geq \frac{5}{2} \right)$$

06 답 ⑤

조건 (가)에서 f 가 항등함수이므로

$$f(1) = 1$$

또, 조건 (가)에서 g 가 상수함수이므로

$$g(x) = k \quad (k=1, 2, 3, 4, 5) \text{라 하면}$$

$$g(1) = g(3) = k$$

조건 (나)에서 $f(x) + g(x) + h(x) = 7$ 이므로

$$f(1) + g(1) + h(1) = 7$$

$$1 + k + h(1) = 7 \quad \therefore h(1) = 6 - k$$

$$\therefore g(3) + h(1) = k + (6 - k) = 6$$

다른 풀이

조건 (가)에서 f 가 항등함수이므로

$$f(1) = 1$$

또, 조건 (가)에서 g 가 상수함수이므로

$$g(3) = g(1)$$

조건 (나)에서 $f(1) + g(1) + h(1) = 7$ 이므로

$$g(3) + h(1) = g(1) + h(1)$$

$$= 7 - f(1)$$

$$= 7 - 1 = 6$$

07 답 1

함수 g 가 항등함수이므로 $g(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = 2$

$$f(0) = g(1) = h(2) \text{에서 } f(0) = 1, h(2) = 1$$

함수 h 가 상수함수이므로 $h(0) = h(1) = h(2) = 1$

$$f(1) \times h(0) = g(2) \text{에서}$$

$$f(1) \times 1 = 2 \quad \therefore f(1) = 2$$

함수 f 가 일대일대응이고 $f(0) = 1, f(1) = 2$ 이므로

$$f(2) = 0$$

$$\therefore f(2) + g(0) + h(1) = 0 + 0 + 1 = 1$$

08 답 12

$f(x) + x$ 의 값이 홀수이려면

x 가 홀수이면 $f(x)$ 는 짝수, x 가 짝수이면 $f(x)$ 는 홀수이어야 한다.

(i) x 가 홀수, 즉 1 또는 3일 때,

$f(1), f(3)$ 의 값은 Y 의 원소 중 짝수인 수, 즉 2, 4 중에서 겹치지 않게 하나씩으로 정할 수 있다.

즉, $f(1), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$2 \times 1 = 2$$

(ii) x 가 짝수, 즉 2 또는 4일 때,

$f(2), f(4)$ 의 값은 Y 의 원소 중 홀수인 수, 즉 1, 3, 5 중에서 겹치지 않게 하나씩으로 정할 수 있다.

즉, $f(2), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$2 \times 6 = 12$$

주의 함수 f 가 일대일함수임을 놓치지 말고 이용하도록 한다.

09 답 12

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(-x+3) = 2x-1$$

..... ㉠

에서 $-x+3=t$ 로 놓으면 $x=3-t$

이를 ㉠에 대입하면

$$g(t) = 2(3-t) - 1 = -2t + 5$$

따라서 $g(x) = -2x + 5$ 이므로

$$g(3) + g(-4) = (-2 \times 3 + 5) + \{-2 \times (-4) + 5\} \\ = -1 + 13 = 12$$

다른 풀이

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(-x+3) = 2x-1$$

..... ㉠

$-x+3=3$ 에서 $x=0$ 이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$g(3) = -1$$

$-x+3=-4$ 에서 $x=7$ 이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$g(-4) = 2 \times 7 - 1 = 13$$

$$\therefore g(3) + g(-4) = -1 + 13 = 12$$

10 답 11

99는 홀수이므로 $f^1(99) = 99 + 1 = 100$

100은 짝수이므로

$$f^2(99) = (f \circ f^1)(99) = f(f^1(99))$$

$$= f(100) = \frac{100}{2} = 50$$

50은 짝수이므로

$$f^3(99) = (f \circ f^2)(99) = f(f^2(99))$$

$$= f(50) = \frac{50}{2} = 25$$

25는 홀수이므로

$$f^4(99) = (f \circ f^3)(99) = f(f^3(99))$$

$$= f(25) = 25 + 1 = 26$$

26은 짝수이므로

$$f^5(99) = (f \circ f^4)(99) = f(f^4(99))$$

$$= f(26) = \frac{26}{2} = 13$$

:

이와 같이 계속되므로 f 를 한 번 합성할 때마다 x 의 값이 짝수이면 2로 나누고, x 의 값이 홀수이면 1을 더하면 된다.

$n=1, 2, 3, \dots$ 일 때, $f^n(99)$ 의 합숫값은 순서대로 다음과 같다.

$$99 \rightarrow 100 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$$

따라서 그 값이 처음으로 1이 되는 것은 $f^{12}(99)$ 이므로 구하는 n 의 최솟값은 11이다.

11 답 ②

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 X 로의 함수 f 의 역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.

$$f(1)+2f(3)=12 \text{에서}$$

$$f(1)=2, f(3)=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

f 가 일대일대응이면 f^{-1} 도 일대일대응이고 ①에 의하여

$f^{-1}(2)=1, f^{-1}(5)=3$ 이므로 $f^{-1}(1), f^{-1}(3)$ 은 1, 3을 제외한 함숫값을 가져야 한다.

$$\text{이때 } f^{-1}(1)-f^{-1}(3)=2 \text{이므로}$$

$$f^{-1}(1)=4, f^{-1}(3)=2$$

$$\therefore f(4)=1, f(2)=3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } f(5)=4, f^{-1}(4)=5$$

$$\therefore f(4)+f^{-1}(4)=1+5=6$$

참고 $f(1)+2f(3)=12$ 를 만족시키는 경우를 찾으면 다음과 같다.

$$(i) f(3)=1 \text{이면 } f(1)=10 \notin X$$

$$(ii) f(3)=2 \text{ 이면 } f(1)=8 \notin X$$

$$(iii) f(3)=3 \text{ 이면 } f(1)=6 \notin X$$

$$(iv) f(3)=4 \text{ 이면 } f(1)=4$$

이 경우는 $f(1)+2f(3)=12$ 는 성립하지만 f 가 일대일대응이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 X 에서 X 로의 일대일대응 f 에 대하여

$f(1)+2f(3)=12$ 를 만족시키는 경우는 ②뿐이다.

12 답 ②

① $f(x)=-2x$ 에서 $y=-2x$ 라 하고 x 를 y 에 대한 식으로 나타

$$\text{내면 } x=-\frac{1}{2}y$$

$$x, y \text{를 바꿔 쓰면 } y=-\frac{1}{2}x \text{이므로 } f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x$$

$$\therefore f \neq f^{-1}$$

② $f(x)=-x-2$ 에서 $y=-x-2$ 라 하고 x 를 y 에 대한 식으로

$$\text{나타내면 } x=-y-2$$

$$x, y \text{를 바꿔 쓰면 } y=-x-2 \text{이므로 } f^{-1}(x)=-x-2$$

$$\therefore f = f^{-1}$$

③ $f(x)=x+1$ 에서 $y=x+1$ 이라 하고 x 를 y 에 대한 식으로 나

$$\text{타내면 } x=y-1$$

$$x, y \text{를 바꿔 쓰면 } y=x-1 \text{이므로 } f^{-1}(x)=x-1$$

$$\therefore f \neq f^{-1}$$

④ $f(x)=\frac{1}{2}x+2$ 에서 $y=\frac{1}{2}x+2$ 라 하고 x 를 y 에 대한 식으로

$$\text{나타내면 } \frac{1}{2}x=y-2, x=2y-4$$

$$x, y \text{를 바꿔 쓰면 } y=2x-4 \text{이므로 } f^{-1}(x)=2x-4$$

$$\therefore f \neq f^{-1}$$

⑤ $f(x)=3x$ 에서 $y=3x$ 라 하고 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$x=\frac{1}{3}y$$

$$x, y \text{를 바꿔 쓰면 } y=\frac{1}{3}x \text{이므로 } f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x$$

$$\therefore f = f^{-1}$$

따라서 $f=f^{-1}$ 를 만족시키는 것은 ②이다.

13 답 ②

주어진 $y=f(x)$ 의 그래프에 의하여

$$f(1)=1, f(2)=4, f(3)=3, f(4)=2$$

$$\therefore f^{-1}(4)=2$$

또, 주어진 $y=(g \circ f)(x)$ 의 그래프에 의하여

$$(g \circ f)(1)=3, \text{ 즉 } g(f(1))=g(1)=3$$

$$(g \circ f)(2)=1, \text{ 즉 } g(f(2))=g(4)=1$$

$$(g \circ f)(3)=2, \text{ 즉 } g(f(3))=g(3)=2$$

$$(g \circ f)(4)=4, \text{ 즉 } g(f(4))=g(2)=4$$

$$\text{즉, } g^{-1}(2)=3 \text{이므로}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(4)=g^{-1}(f^{-1}(4))=g^{-1}(2)=3$$

$$\therefore g(4)+(g^{-1} \circ f^{-1})(4)=1+3=4$$

14 답 3

$$(g^{-1} \circ (f \circ g^{-1})^{-1})(2)=(g^{-1} \circ g \circ f^{-1})(2)$$

$$=f^{-1}(2)$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$$\text{이때 } f(x)=\begin{cases} x^2-4x+5 & (x \geq 2) \\ x-1 & (x < 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$x \geq 2 \text{에서 } f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1 \geq 1$$

$$x < 2 \text{에서 } f(x)=x-1 < 1$$

$$f^{-1}(2)=k \text{라 하면 } f(k)=2 \geq 1 \text{이므로 } k \geq 2 \text{이고}$$

$$k^2-4k+5=2, k^2-4k+3=0$$

$$(k-1)(k-3)=0 \quad \therefore k=3 (\because k \geq 2)$$

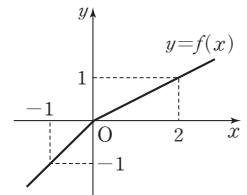
따라서 $f^{-1}(2)=3$ 이므로 ①에서

$$(g^{-1} \circ (f \circ g^{-1})^{-1})(2)=f^{-1}(2)=3$$

15 답 ③

주어진 그래프에 의하여

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$$



$$\neg. f(2)=\frac{1}{2} \times 2=1 \text{이므로}$$

$$f^{-1}(1)=2$$

$$\neg. f(-1)=-1 \text{이므로 } f^{-1}(-1)=-1$$

$$\therefore f(-1)=f^{-1}(-1)$$

$$\text{ㄷ. } f(-1)=-1 \text{이므로}$$

$$(f \circ f)(-1)=f(f(-1))=f(-1)$$

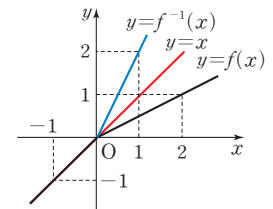
ㄹ. $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함

수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는

$x \leq 0$ 에서 일치하므로 교점은

무수히 많다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.



001 답 (1) ㄴ, ㄹ, ㄷ, ㄹ (2) ㄱ, ㄷ, ㄹ
 ㄴ. $\frac{2x-1}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ 이므로 다항식이다.

002 답 (1) $\frac{3x+5}{(x-1)(x+3)}$ (2) $\frac{5x+2}{(2x-1)(x+1)}$
 (3) $\frac{2x-5}{(x+2)(2x+1)}$ (4) $\frac{11x-1}{(3x+1)(x-2)}$
 (1) $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+3} = \frac{2(x+3) + (x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{3x+5}{(x-1)(x+3)}$
 (2) $\frac{3}{2x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3(x+1) + (2x-1)}{(2x-1)(x+1)} = \frac{5x+2}{(2x-1)(x+1)}$
 (3) $\frac{3}{x+2} - \frac{4}{2x+1} = \frac{3(2x+1) - 4(x+2)}{(x+2)(2x+1)}$

$$= \frac{2x-5}{(x+2)(2x+1)}$$

 (4) $\frac{2}{3x+1} - \frac{3}{2-x} = \frac{2(2-x) - 3(3x+1)}{(3x+1)(2-x)}$

$$= \frac{11x-1}{(3x+1)(x-2)}$$

003 답 (1) $\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}$ (2) $\frac{x}{(x+2)(x-3)}$
 (3) $\frac{x+2}{x(x-2)}$ (4) $\frac{x(x+2)}{(x-1)(x-2)}$
 (1) $\frac{x^2+x-6}{x+1} \times \frac{x^2-1}{x^2-9} = \frac{(x+3)(x-2)}{x+1} \times \frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-3)}$

$$= \frac{(x-2)(x-1)}{x-3}$$

 (2) $\frac{x+1}{x^2-2x-8} \times \frac{x^2-4x}{x^2-2x-3}$

$$= \frac{x+1}{(x+2)(x-4)} \times \frac{x(x-4)}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{x}{(x+2)(x-3)}$$

 (3) $\frac{x+2}{x^2} \div \frac{x^2-3x+2}{x^2-x} = \frac{x+2}{x^2} \div \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)}$

$$= \frac{x+2}{x^2} \times \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{x+2}{x(x-2)}$$

 (4) $\frac{x^2-4}{x^2+x-6} \div \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x}$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)} \div \frac{(x-1)(x-2)}{x(x+3)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x(x+3)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x-1)(x-2)}$$

004 답 (1) $\frac{-x-5}{x(x+3)}$ (2) $\frac{5x^2-7x+6}{x(x-1)(x-3)}$
 (3) $\frac{(x+1)(x+3)}{x-2}$ (4) $\frac{5x+1}{4x+3}$
 (1) $\frac{1}{x^2+3x} + \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x(x+3)} + \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x}$

$$= \frac{1+x-2(x+3)}{x(x+3)}$$

$$= \frac{-x-5}{x(x+3)}$$

(2) $\frac{x-1}{x^2-4x+3} - \frac{2}{x^2-x} + \frac{4}{x-3}$

$$= \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} - \frac{2}{x(x-1)} + \frac{4}{x-3}$$

$$= \frac{x(x-1) - 2(x-3) + 4x(x-1)}{x(x-1)(x-3)}$$

$$= \frac{5x^2-7x+6}{x(x-1)(x-3)}$$

 (3) $\frac{x^2+x}{x+2} \div \frac{x^2}{x^2+x-2} \times \frac{x^2+3x}{x^2-3x+2}$

$$= \frac{x(x+1)}{x+2} \div \frac{x^2}{(x+2)(x-1)} \times \frac{x(x+3)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{x(x+1)}{x+2} \times \frac{(x+2)(x-1)}{x^2} \times \frac{x(x+3)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{(x+1)(x+3)}{x-2}$$

 (4) $\frac{3}{2x-1} \times \frac{4x^2-1}{4x+3} - \frac{x^2+2x}{x^2-2x} \div \frac{4x+3}{x-2}$

$$= \frac{3}{2x-1} \times \frac{(2x+1)(2x-1)}{4x+3} - \frac{x(x+2)}{x(x-2)} \div \frac{4x+3}{x-2}$$

$$= \frac{3}{2x-1} \times \frac{(2x+1)(2x-1)}{4x+3} - \frac{x(x+2)}{x(x-2)} \times \frac{x-2}{4x+3}$$

$$= \frac{3(2x+1)}{4x+3} - \frac{x+2}{4x+3}$$

$$= \frac{5x+1}{4x+3}$$

005 답 (1) $\frac{6x-1}{x(x+1)}$ (2) $\frac{4}{(x+1)(x+5)}$
 (3) $\frac{11x+1}{(x-1)(x+2)}$ (4) $\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}$
 (1) $\frac{2x-1}{x} + \frac{-2x+5}{x+1} = \frac{2x-1}{x} + \frac{-2(x+1)+7}{x+1}$

$$= \left(2 - \frac{1}{x}\right) + \left(-2 + \frac{7}{x+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{7}{x+1}$$

$$= \frac{-(x+1)+7x}{x(x+1)}$$

$$= \frac{6x-1}{x(x+1)}$$

 (2) $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+6}{x+5} = \frac{(x+1)+1}{x+1} - \frac{(x+5)+1}{x+5}$

$$= \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+5}\right)$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5}$$

$$= \frac{x+5-(x+1)}{(x+1)(x+5)}$$

$$= \frac{4}{(x+1)(x+5)}$$

 (3) $\frac{3x+1}{x-1} + \frac{-3x+1}{x+2} = \frac{3(x-1)+4}{x-1} + \frac{-3(x+2)+7}{x+2}$

$$= \left(3 + \frac{4}{x-1}\right) + \left(-3 + \frac{7}{x+2}\right)$$

$$= \frac{4}{x-1} + \frac{7}{x+2}$$

$$= \frac{4(x+2)+7(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{11x+1}{(x-1)(x+2)}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{x^2+x+2}{x+1} - \frac{x^2-x+1}{x-1} &= \frac{x(x+1)+2}{x+1} - \frac{x(x-1)+1}{x-1} \\
 &= \left(x + \frac{2}{x+1}\right) - \left(x + \frac{1}{x-1}\right) \\
 &= \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} \\
 &= \frac{2(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{x-3}{(x+1)(x-1)}
 \end{aligned}$$

006 답 (1) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ (2) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right)$
 (3) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$ (4) $4 \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right)$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{1}{x(x+1)} &= \frac{1}{(\boxed{x+1})-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\boxed{x+1}} \right) \\
 &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{(x+2)-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{3}{(x-1)(x+2)} &= \frac{3}{(x+2)-(x-1)} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) \\
 &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{8}{(2x-1)(2x+1)} &= \frac{8}{(2x+1)-(2x-1)} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) \\
 &= 4 \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right)
 \end{aligned}$$

007 답 ③

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+x} + \frac{3}{x^2-2x} &= \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x(x+1)} + \frac{3}{x(x-2)} \\
 &= \frac{x(x-2)-2(x-2)+3(x+1)}{x(x+1)(x-2)} \\
 &= \frac{x^2-x+7}{x(x+1)(x-2)}
 \end{aligned}$$

008 답 4

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^2+x} &= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x(x+1)} \\
 &= \frac{x(x+1)+x(x-2)-3(x-2)}{x(x+1)(x-2)} \\
 &= \frac{2x^2-4x+6}{x(x+1)(x-2)}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x(x+1)(x-2)} = \frac{2x^2-4x+6}{x(x+1)(x-2)} \text{에서}$$

$$a=0, b=2, c=-4, d=6$$

$$\therefore a+b+c+d=0+2-4+6=4$$

009 답 $\frac{(x+3)(x+4)}{x+2}$

$$\begin{aligned}
 A &\div \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x} \times \frac{2x^2-x-1}{x^2+3x} \\
 &= A \div \frac{(x+4)(x-1)}{x(x+2)} \times \frac{(2x+1)(x-1)}{x(x+3)} \\
 &= A \times \frac{x(x+2)}{(x+4)(x-1)} \times \frac{(2x+1)(x-1)}{x(x+3)} \\
 &= A \times \frac{(x+2)(2x+1)}{(x+3)(x+4)}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } A \times \frac{(x+2)(2x+1)}{(x+3)(x+4)} = 2x+1 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 A &= (2x+1) \times \frac{(x+3)(x+4)}{(x+2)(2x+1)} \\
 &= \frac{(x+3)(x+4)}{x+2}
 \end{aligned}$$

010 답 23

주어진 등식의 좌변을 계산하면

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\
 &= \frac{(a+b)x-(2a+b)}{x^2-3x+2}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{(a+b)x-(2a+b)}{x^2-3x+2} = \frac{5x-7}{x^2-3x+2} \text{이 } x \text{에 대한 항등식이므로}$$

로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a+b=5, 2a+b=7$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=3$

$$\therefore 10a+b=10 \times 2+3=23$$

011 답 ②

주어진 등식의 좌변을 계산하면

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2+2x-3}{x^2-x} \times \frac{x^2+4x}{x+2} &= \frac{(x-1)(x+3)}{x(x-1)} \times \frac{x(x+4)}{x+2} \\
 &= \frac{(x+3)(x+4)}{x+2} \\
 &= \frac{x^2+7x+12}{x+2}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{x^2+7x+12}{x+2} = \frac{x^2+ax+b}{x+c} \text{가 } x \text{에 대한 항등식이므로 양변}$$

의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=7, b=12, c=2$$

$$\therefore a+b+c=7+12+2=21$$

012 답 -2

주어진 등식의 우변을 계산하면

$$\begin{aligned}
 \frac{ax+3}{x^2+x+1} + \frac{b}{x-1} &= \frac{(ax+3)(x-1)+b(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{(a+b)x^2+(3-a+b)x+b-3}{x^3-1}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{3x^2+4x+c}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2+(3-a+b)x+b-3}{x^3-1} \text{이 } x \text{에 대}$$

한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$3=a+b \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$4=3-a+b \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$c=b-3 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=2$

$b=2$ 를 ㉢에 대입하면 $c=-1$

$$\therefore abc=1 \times 2 \times (-1)=-2$$

013 답 ①

$$\begin{aligned} & \frac{2x+5}{x+2} - \frac{2x^2-2x-7}{x^2-x-6} \\ &= \frac{2(x+2)+1}{x+2} - \frac{2(x+2)(x-3)+5}{(x+2)(x-3)} \\ &= \left(2 + \frac{1}{x+2}\right) - \left\{2 + \frac{5}{(x+2)(x-3)}\right\} \\ &= \frac{1}{x+2} - \frac{5}{(x+2)(x-3)} \\ &= \frac{(x-3)-5}{(x+2)(x-3)} \\ &= \frac{x-8}{(x+2)(x-3)} \end{aligned}$$

풍생 비법 (분자의 차수) ≥ (분모의 차수)인 유리식의 통분

분자의 차수가 분모의 차수보다 같거나 큰 유리식을 계산할 때, 분자의 차수를 낮추지 않고 바로 통분하여 계산하면 이후 분자의 차수가 너무 높아 계산이 복잡한 경우가 생긴다.
따라서 간단한 경우라면 바로 통분하여 계산해도 좋으나 식이 여러 개인 경우에는 분자의 차수를 낮춘 후 계산하는 것이 더 좋다.

014 답 4

$$\begin{aligned} & 2x - \frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} \\ &= 2x - \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} - \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} \\ &= 2x - \left(x-1 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(x+1 + \frac{1}{x-1}\right) \\ &= -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{-(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-2x}{(x+1)(x-1)} \\ &\text{즉, } \frac{-2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{f(x)}{x^2-1} \text{에서} \\ &f(x) = -2x \\ &\therefore f(-2) = -2 \times (-2) = 4 \end{aligned}$$

다른 풀이

주어진 유리식을 바로 통분하여 계산하면

$$\begin{aligned} & 2x - \frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} \\ &= \frac{2x(x+1)(x-1) - x^2(x-1) - x^2(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{2x^3 - 2x - x^3 + x^2 - x^3 - x^2}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-2x}{(x+1)(x-1)} \\ &\text{즉, } \frac{-2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{f(x)}{x^2-1} \text{에서} \\ &f(x) = -2x \\ &\therefore f(-2) = -2 \times (-2) = 4 \end{aligned}$$

015 답 ⑤

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{x} - \frac{x+3}{x+2} - \frac{x-4}{x-3} + \frac{x-6}{x-5} \\ &= \frac{x+1}{x} - \frac{(x+2)+1}{x+2} - \frac{(x-3)-1}{x-3} + \frac{(x-5)-1}{x-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{x-3}\right) + \left(1 - \frac{1}{x-5}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-5} \\ &= \frac{(x+2)-x}{x(x+2)} + \frac{(x-5)-(x-3)}{(x-3)(x-5)} \\ &= \frac{2}{x(x+2)} - \frac{2}{(x-3)(x-5)} \\ &= \frac{2\{(x-3)(x-5) - x(x+2)\}}{x(x+2)(x-3)(x-5)} \\ &= \frac{-20x+30}{x(x+2)(x-3)(x-5)} \end{aligned}$$

즉, $\frac{-20x+30}{x(x+2)(x-3)(x-5)} = \frac{ax+b}{x(x+2)(x-3)(x-5)}$ 가
x에 대한 항등식이므로

$$a = -20, b = 30$$

$$\therefore a+b = -20+30 = 10$$

016 답 6

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{1}{(x+1)-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(x+2)-(x+1)} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(x+3)-(x+2)} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{(x+3)-x}{x(x+3)} \\ &= \frac{3}{x(x+3)} \end{aligned}$$

즉, $\frac{3}{x(x+3)} = \frac{a}{x(x+b)}$ 가 x에 대한 항등식이므로

$$a = 3, b = 3$$

$$\therefore a+b = 3+3 = 6$$

017 답 14

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{2}{x^2+6x+8} + \frac{3}{x^2+11x+28} \\ &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{3}{(x+4)(x+7)} \\ &= \frac{1}{(x+2)-(x+1)} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &\quad + \frac{2}{(x+4)-(x+2)} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\quad + \frac{3}{(x+7)-(x+4)} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} \right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+7} = \frac{(x+7)-(x+1)}{(x+1)(x+7)} \\ &= \frac{6}{(x+1)(x+7)} \end{aligned}$$

즉, $\frac{6}{(x+1)(x+7)} = \frac{a}{(x+b)(x+c)}$ 가 x에 대한 항등식이므로

$$a = 6, b = 1, c = 7$$

$$\therefore a+b+c = 6+1+7 = 14$$

018 답 13

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{x(x+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \\ & \quad + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x+2} \right) = \frac{x+1}{2(x+2)}$$

따라서 $\frac{x+1}{2(x+2)} = \frac{7}{15}$ 에서 $15x+15=14x+28$

$\therefore x=13$

019 답 (1) ㄴ, ㄹ (2) ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

ㄴ. $y = \frac{x+3}{4} = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ 이므로 다항함수이다.

020 답 (1) $\{x|x \neq -3 \text{인 실수}\}$

(2) $\{x|x \neq \frac{1}{3} \text{인 실수}\}$ (3) $\{x|x \text{는 실수}\}$

(4) $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$ (5) $\{x|x \text{는 실수}\}$

(1) $x+3=0$ 에서 $x=-3$

즉, 유리함수 $y = -\frac{1}{x+3}$ 의 정의역은 $\{x|x \neq -3 \text{인 실수}\}$

(2) $3x-1=0$ 에서 $x=\frac{1}{3}$

즉, 유리함수 $y = \frac{x+1}{3x-1}$ 의 정의역은 $\{x|x \neq \frac{1}{3} \text{인 실수}\}$

(3) $y = \frac{1-4x}{3} = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

즉, 다항함수이므로 정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$

(4) $x^2=0$ 에서 $x=0$

즉, 유리함수 $y = -\frac{1}{x^2}$ 의 정의역은 $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$

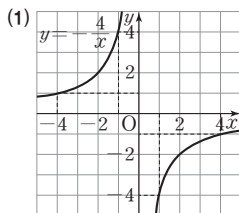
(5) $x^2 \geq 0$ 에서 $x^2+1 > 0$ 이므로 주어진 함수의 분모가 0이 되게 하는 x 는 없다.

즉, 유리함수 $y = \frac{2x}{x^2+1}$ 의 정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$

021 답 (1) 풀이 참조 (2) $x \neq 0, y \neq 0$

(3) 2, 4

(4) 0, 0



(2) 정의역은 $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$ 이고

치역은 $\{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$ 이다.

(3) 그래프가 지나는 사분면은 제2사분면과 제4사분면이다.

(4) 점근선의 방정식은 $x=0, y=0$ 이다.

풍생 비법 유리함수의 그래프 그리기 (1)

유리함수 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)의 그래프는 다음 순서로 그린다.

① k 의 값의 부호에 따라 그래프가 그려질 사분면을 정한다.

→ $k > 0$ 이면 제1사분면, 제3사분면에 그려진다.

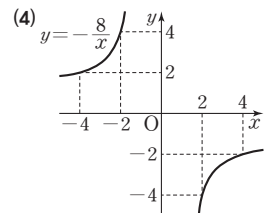
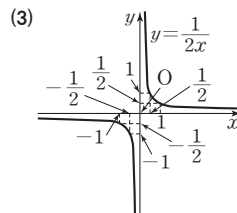
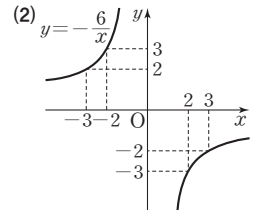
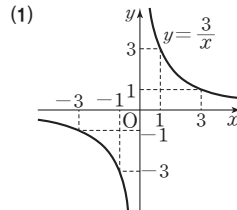
$k < 0$ 이면 제2사분면, 제4사분면에 그려진다.

② 그래프가 지나는 점을 찾는다.

→ x 좌표가 $\pm 1, \pm k$ 인 점의 좌표를 찾는다.

③ ①의 사분면에 ②의 점을 지나는 곡선을 그린다.

022 답 풀이 참조



023 답 (1) $y = \frac{1}{x-3} + 1$

(2) $y = \frac{3}{x+1} + 2$

(3) $y = -\frac{2}{x-2} - 3$

(4) $y = -\frac{6}{x+3} - 2$

(1) 함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{1}{x-3} + 1$$

(2) 함수 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{3}{x+1} + 2$$

(3) 함수 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\frac{2}{x-2} - 3$$

(4) 함수 $y = -\frac{6}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\frac{6}{x+3} - 2$$

024 답 (1) $p=-2, q=5$

(2) $p=3, q=1$

(3) $p=-1, q=-7$

(4) $p=4, q=-3$

(1) 함수 $y = -\frac{2}{x+2} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 $p=-2, q=5$ 이다.

- (2) 함수 $y = -\frac{2}{x-3} + 1$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 $p=3, q=1$ 이다.
- (3) 함수 $y = -\frac{2}{x+1} - 7$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 것이므로 $p=-1, q=-7$ 이다.
- (4) 함수 $y = -\frac{2}{x-4} - 3$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 $p=4, q=-3$ 이다.

025 답 (1) 풀이 참조

점근선의 방정식: $x=-1, y=3$

(2) 풀이 참조

점근선의 방정식: $x=2, y=2$

(3) 풀이 참조

점근선의 방정식: $x=-3, y=-1$

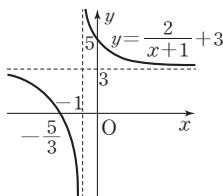
(4) 풀이 참조

점근선의 방정식: $x=1, y=-3$

- (1) 함수 $y = \frac{2}{x+1} + 3$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

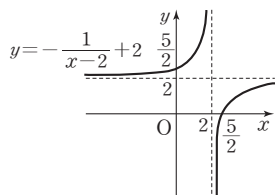
-1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

또, 점근선의 방정식은 $x=-1, y=3$ 이다.



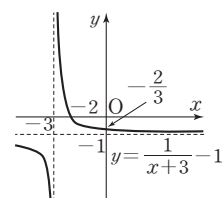
- (2) 함수 $y = -\frac{1}{x-2} + 2$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

또, 점근선의 방정식은 $x=2, y=2$ 이다.



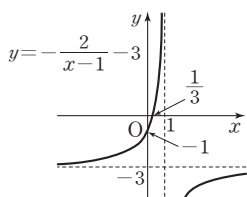
- (3) 함수 $y = \frac{1}{x+3} - 1$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

또, 점근선의 방정식은 $x=-3, y=-1$ 이다.



- (4) 함수 $y = -\frac{2}{x-1} - 3$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

또, 점근선의 방정식은 $x=1, y=-3$ 이다.



동생 방법 유리함수의 그래프 그리기 (2)

유리함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$ ($k \neq 0$)의 그래프는 다음 순서로 그린다.

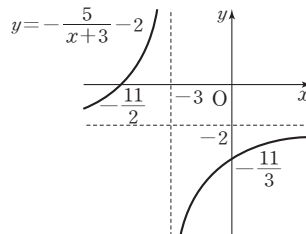
- ① 점근선 $x=p, y=q$ 를 좌표평면에 점선으로 나타낸다.
- ② 점근선을 좌표축이라 생각하고 k 의 값의 부호에 따라 그래프가 그려질 사분면을 정한다.
 $\Rightarrow k > 0$ 이면 제1사분면, 제3사분면에 그려진다.
 $k < 0$ 이면 제2사분면, 제4사분면에 그려진다.
- ③ 그래프와 x 축, y 축이 만나는 점의 좌표를 찾는다.
- ④ ②의 사분면에 ③의 점을 지나는 곡선을 그린다.

026 답 (1) × (2) × (3) ○ (4) ○ (5) × (6) ○

- (1) 함수 $y = -\frac{5}{x+3} - 2$ 의

그래프는 함수 $y = -\frac{5}{x}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.



- (2) 정의역은 $\{x | x \neq -3 \text{인 실수}\}$ 이다.

- (3) 치역은 $\{y | y \neq -2 \text{인 실수}\}$ 이다.

- (4) 점근선의 방정식은 $x=-3, y=-2$ 이다.

- (5) 그래프는 점 $(-3, -2)$ 에 대하여 대칭이다.

- (6) 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

027 답 -2, -1, 2, 3

주어진 그래프에서 함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = -2, y = -1$ 이므로

$$p = -2, q = -1$$

즉, 함수 $y = \frac{k}{x+2} - 1$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{1+2} - 1$$

$$\therefore k = 3$$

028 답 (1) $y = \frac{3}{x-2} + 1$

$$(2) y = \frac{1}{x+1} + 2$$

$$(3) y = \frac{5}{x+2} - 1$$

$$(4) y = -\frac{5}{x-1} - 3$$

$$(1) y = \frac{x+1}{x-2} = \frac{(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1$$

$$(2) y = \frac{2x+3}{x+1} = \frac{2(x+1)+1}{x+1} = \frac{1}{x+1} + 2$$

$$(3) y = \frac{3-x}{x+2} = \frac{-(x+2)+5}{x+2} = \frac{5}{x+2} - 1$$

$$(4) y = -\frac{3x+2}{x-1} = \frac{-3x-2}{x-1} = \frac{-3(x-1)-5}{x-1} = -\frac{5}{x-1} - 3$$

029 답 (1) 풀이 참조

점근선의 방정식: $x=1, y=1$

(2) 풀이 참조

점근선의 방정식: $x=2, y=-3$

(3) 풀이 참조

점근선의 방정식: $x = -2, y = 2$

(4) 풀이 참조

점근선의 방정식: $x = -3, y = -1$

$$(1) y = \frac{x+3}{x-1} = \frac{(x-1)+4}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 1$$

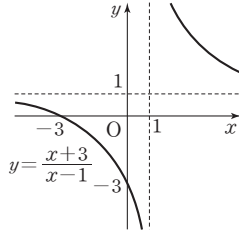
즉, 주어진 함수의 그래프는 함수

$y = \frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으

로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼
평행이동한 것이므로 오른쪽 그림
과 같다.

또, 점근선의 방정식은 $x = 1,$

$y = 1$ 이다.



$$(2) y = \frac{-3x+4}{x-2} = \frac{-3(x-2)-2}{x-2} = -\frac{2}{x-2} - 3$$

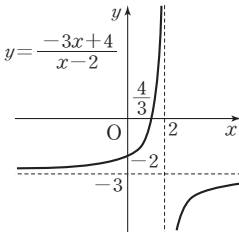
즉, 주어진 함수의 그래프는 함수

$y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향

으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3
만큼 평행이동한 것이므로 오른
쪽 그림과 같다.

또, 점근선의 방정식은 $x = 2,$

$y = -3$ 이다.



$$(3) y = \frac{2x+5}{x+2} = \frac{2(x+2)+1}{x+2} = \frac{1}{x+2} + 2$$

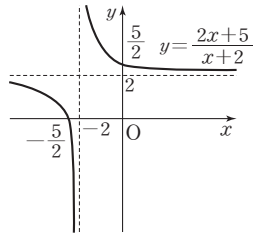
즉, 주어진 함수의 그래프는 함

수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방

향으로 -2만큼, y 축의 방향으
로 2만큼 평행이동한 것이므로
오른쪽 그림과 같다.

또, 점근선의 방정식은 $x = -2,$

$y = 2$ 이다.



$$(4) y = \frac{2-x}{x+3} = \frac{-(x+3)+5}{x+3} = \frac{5}{x+3} - 1$$

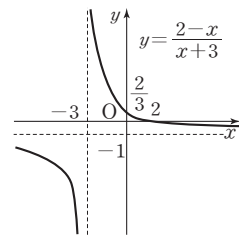
즉, 주어진 함수의 그래프는 함수

$y = \frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으

로 -3만큼, y 축의 방향으로 -1
만큼 평행이동한 것이므로 오른
쪽 그림과 같다.

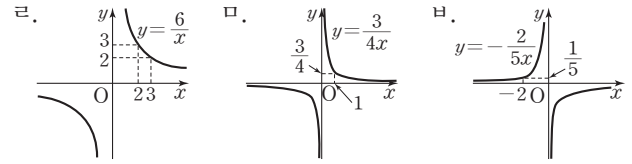
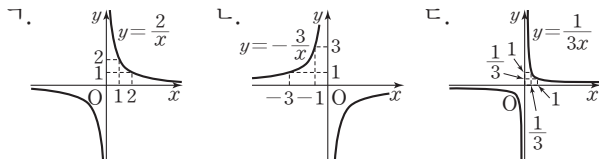
또, 점근선의 방정식은 $x = -3,$

$y = -1$ 이다.



030 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

각 함수의 그래프는 다음과 같다.



따라서 그 그래프가 제1사분면, 제3사분면을 지나는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

다른 풀이

함수 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)에서

$k > 0$ 이면 그 그래프가 제1사분면, 제3사분면에 그려지고,

$k < 0$ 이면 그 그래프가 제2사분면, 제4사분면에 그려진다.

각 함수에서 k 의 값은 다음과 같다.

$$\text{ㄱ. } k = 2 > 0$$

$$\text{ㄴ. } k = -3 < 0$$

$$\text{ㄷ. } k = \frac{1}{3} > 0$$

$$\text{ㄹ. } k = 6 > 0$$

$$\text{ㅁ. } k = \frac{3}{4} > 0$$

$$\text{ㅂ. } k = -\frac{2}{5} < 0$$

따라서 그 그래프가 제1사분면, 제3사분면을 지나는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

031 답 ④

④ $k > 0$ 이면 그래프는 제1사분면, 제3사분면을 지나고

$k < 0$ 이면 그래프는 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

032 답 ①

함수 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)의 그래프는

$k > 0$ 이면 제1사분면, 제3사분면을 지나고

$k < 0$ 이면 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

함수 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프의 일부는 제2사분면을 지나므로

$$a < 0$$

함수 $y = \frac{b}{x}, y = \frac{c}{x}$ 의 그래프의 일부는 제1사분면을 지나므로

$$b > 0, c > 0$$

$$\therefore a < b, a < c \quad \dots\dots ㉠$$

또, 함수 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)의 그래프는 $|k|$ 의 값이 커질수록 원점에

서 멀어진다. 이때 $b > 0, c > 0$ 이고 함수 $y = \frac{c}{x}$ 의 그래프가 원점

에서 더 멀리 떨어져 있으므로

$$c > b \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 세 상수 a, b, c 사이의 대소 관계는

$$a < b < c$$

033 답 20

함수 $y = \frac{3}{x+a} + 4$ 의 정의역은 $\{x | x \neq -a \text{인 실수}\}$ 이고 치역은

$\{y | y \neq 4 \text{인 실수}\}$ 이므로

$$a = 5, b = 4$$

$$\therefore ab = 5 \times 4 = 20$$

034 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $x=2$ 를 $y=-\frac{1}{x-1}+3$ 에 대입하면 $y=-\frac{1}{2-1}+3=2$

즉, 그래프는 점 (2, 2)를 지난다.

ㄴ. 정의역은 $\{x|x \neq 1 \text{인 실수}\}$, 치역은 $\{y|y \neq 3 \text{인 실수}\}$ 이다.

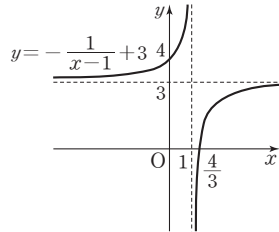
ㄷ. 점근선의 방정식은 $x=1, y=3$

즉, 직선 $y=3$ 은 그래프의 점근선 중 하나이다.

ㄹ. 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.



035 답 2

k 는 자연수이므로 $k > 0$

함수 $y=\frac{3}{x-k}+2$ 의 그래프는 함수 $y=\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

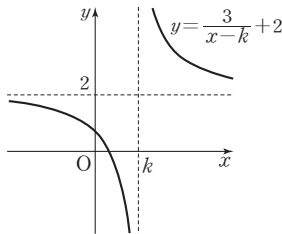
이때 이 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, $x=0$ 일 때 y 의 값이 0보다 크거나 같아야 하므로

$$y=\frac{3}{0-k}+2 \geq 0, \quad \frac{3}{k} \leq 2$$

$$\therefore k \geq \frac{3}{2} \quad (\because k > 0)$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 2이다.



036 답 5

$$y=\frac{ax+2}{x+b}=\frac{a(x+b)+2-ab}{x+b}=\frac{2-ab}{x+b}+a$$

즉, 함수 $y=\frac{ax+2}{x+b}$ 의 정의역은 $\{x|x \neq -b \text{인 실수}\}$ 이고

치역은 $\{y|y \neq a \text{인 실수}\}$ 이므로

$$-b=-2, a=3 \quad \therefore a=3, b=2$$

$$\therefore a+b=3+2=5$$

주의 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형할 때, 계산 실수를 하지 않도록 주의한다. 변형한 식을 다시 처음의 식으로 되돌리는 과정을 수행하면 실수 예방에 도움이 된다.

037 답 ③, ⑤

$$y=\frac{5-3x}{x-2}=\frac{-3(x-2)-1}{x-2}=-\frac{1}{x-2}-3$$

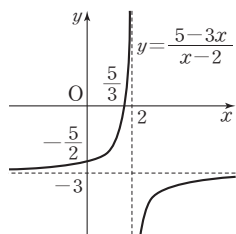
즉, 함수 $y=\frac{5-3x}{x-2}$ 의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같다.

① 치역은 $\{y|y \neq -3 \text{인 실수}\}$ 이다.

② $x \neq 2$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2, y=-3$ 이다.



④ 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는 $\frac{5}{3}$ 이다.

⑤ 그래프는 제1, 3, 4사분면을 지나고 제2사분면을 지나지 않는다. 따라서 옳은 것은 ③, ⑤이다.

038 답 4

$$y=\frac{-x-k+3}{x-2}=\frac{-(x-2)-k+1}{x-2}=\frac{-k+1}{x-2}-1$$

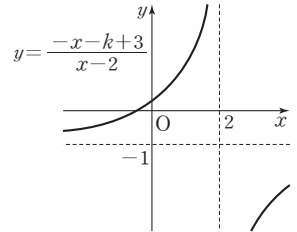
이때 $k > 1$ 이고 함수 $y=\frac{-x-k+3}{x-2}$ 의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, $x=0$ 일 때 y 의 값이 0보다 커야 하므로

$$y=\frac{-k+3}{-2} > 0, \quad -k+3 < 0$$

$$\therefore k > 3$$

따라서 구하는 자연수 k 의 최솟값은 4이다.



039 답 ④

$$y=\frac{2x+7}{x+3}=\frac{2(x+3)+1}{x+3}=\frac{1}{x+3}+2$$

즉, 함수 $y=\frac{2x+7}{x+3}$ 의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$$k=1, m=-3, n=2$$

$$\therefore k-m+n=1-(-3)+2=6$$

040 답 2

함수 $y=\frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{k}{x-(-2)}+3 \quad \therefore y=\frac{k}{x+2}+3$$

이 그래프가 점 $(-1, 5)$ 를 지나므로

$$5=\frac{k}{-1+2}+3$$

$$\therefore k=2$$

041 답 ①

함수 $y=-\frac{2}{x-2}+3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-\frac{2}{x-a-2}+3$$

이 그래프가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로 $1=-\frac{2}{1-a-2}+3$

$$\frac{2}{a+1}=-2, a+1=-1 \quad \therefore a=-2$$

다른 풀이

함수 $y=-\frac{2}{x-2}+3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로 점 $(1, 1)$ 을 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 점 $(1-a, 1)$ 은 함수 $y=-\frac{2}{x-2}+3$ 의 그래프 위의 점이다.

즉, $1 = -\frac{2}{(1-a)-2} + 3$ 에서 $\frac{2}{a+1} = -2$ 이므로 $a = -2$

042 답 1

$$y = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = -\frac{3}{x+1} + 2$$

즉, 함수 $y = \frac{2x-1}{x+1}$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m = -1$, $n = 2$ 이므로

$$m+n = -1+2=1$$

다른 풀이

함수 $y = -\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\frac{3}{x-m} + n = \frac{-3+n(x-m)}{x-m} = \frac{nx-mn-3}{x-m}$$

이 그래프가 함수 $y = \frac{2x-1}{x+1}$ 의 그래프와 일치하므로

$$m = -1, n = 2 \quad \therefore m+n = -1+2=1$$

043 답 ①

$$y = \frac{a-2x}{x+b} = \frac{-2(x+b)+a+2b}{x+b} = \frac{a+2b}{x+b} - 2$$

즉, 함수 $y = \frac{a-2x}{x+b}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{a+2b}{x-3+b} - 2 + c$$

이 그래프가 함수 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프와 일치하므로

$$a+2b = -2, -3+b=0, -2+c=0$$

$$\therefore a = -8, b = 3, c = 2$$

$$\therefore a+bc = -8+3 \times 2 = -2$$

044 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

$$\text{ㄱ. } y = \frac{x+1}{x-2} = \frac{(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1$$

즉, 함수 $y = \frac{x+1}{x-2}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄷ. } y = \frac{3x+3}{x+2} = \frac{3(x+2)-3}{x+2} = -\frac{3}{x+2} + 3$$

즉, 함수 $y = \frac{3x+3}{x+2}$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄹ. } y = \frac{-2x+9}{x-3} = \frac{-2(x-3)+3}{x-3} = \frac{3}{x-3} - 2$$

즉, 함수 $y = \frac{-2x+9}{x-3}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄹ. } y = \frac{x+7}{2x+2} = \frac{(x+1)+6}{2(x+1)} = \frac{6}{2(x+1)} + \frac{1}{2} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2}$$

즉, 함수 $y = \frac{x+7}{2x+2}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축

의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프가 평행이동에 의하여 함수 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

045 답 ⑤

$$y = \frac{3x+1}{x-2} = \frac{3(x-2)+7}{x-2} = \frac{7}{x-2} + 3$$

즉, 함수 $y = \frac{3x+1}{x-2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=2, y=3$$

따라서 $a=2$, $b=3$ 이므로 $a+b=2+3=5$

046 답 -3

$$y = \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)+b-ac}{x+c} = \frac{b-ac}{x+c} + a$$

즉, 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-c, y=a \quad \therefore a=-4, c=-2$$

이때 함수 $y = \frac{-4x+b}{x-2}$ 의 그래프가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{-4+b}{1-2} \quad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b+c = -4+3+(-2) = -3$$

다른 풀이

함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=-4$ 이므로 함수의

식을 $y = \frac{k}{x-2} - 4$ ($k \neq 0$)로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{k}{1-2} - 4, -k=5 \quad \therefore k=-5$$

즉, 함수의 식은

$$y = \frac{-5}{x-2} - 4 = \frac{-5-4(x-2)}{x-2} = \frac{-4x+3}{x-2}$$

이 함수가 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 와 일치하므로

$$a=-4, b=3, c=-2$$

$$\therefore a+b+c = -4+3+(-2) = -3$$

047 답 -2

$$y = \frac{2x+3}{x+a} = \frac{2(x+a)+3-2a}{x+a} = \frac{3-2a}{x+a} + 2$$

즉, 함수 $y = \frac{2x+3}{x+a}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-a, y=2$$

두 점근선의 교점의 좌표는 $(-a, 2)$

이 점이 직선 $y=3x-4$ 위의 점이므로

$$2 = 3 \times (-a) - 4, 3a = -6 \quad \therefore a = -2$$

048 답 ④

$$y = \frac{ax-1}{x+1} = \frac{a(x+1)-1-a}{x+1} = \frac{-a-1}{x+1} + a$$

즉, 함수 $y = \frac{ax-1}{x+1}$ 의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-1, a)$ 에 대하여 대칭이다.
두 점 $(-1, a), (b, 2)$ 가 일치하므로
 $a=2, b=-1 \quad \therefore a+b=2+(-1)=1$

049 답 4

$$y = \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)+b-ac}{x+c} = \frac{b-ac}{x+c} + a$$

즉, 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-c, a)$ 에 대하여 대칭이다.

두 점 $(-c, a), (-1, 3)$ 이 일치하므로
 $a=3, c=1$

한편, 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$, 즉 $y = \frac{3x+b}{x+1}$ 의 그래프가 원점을 지나므로
 $0 = \frac{0+b}{0+1} \quad \therefore b=0$
 $\therefore a+b+c=3+0+1=4$

050 답 4

$$y = \frac{-2x-3}{x+2} = \frac{-2(x+2)+1}{x+2} = \frac{1}{x+2} - 2$$

즉, 함수 $y = \frac{-2x-3}{x+2}$ 의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-2, -2)$

를 지나고 기울기가 ± 1 인 두 직선에 대하여 대칭이다.

점 $(-2, -2)$ 를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y - (-2) = x - (-2) \quad \therefore y = x$$

점 $(-2, -2)$ 를 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y - (-2) = -\{x - (-2)\} \quad \therefore y = -x - 4$$

두 직선 $y=x, y=x+a$ 가 일치하므로 $a=0$

두 직선 $y=-x-4, y=-x+b$ 가 일치하므로 $b=-4$

$$\therefore a-b=0-(-4)=4$$

051 답 4

주어진 그래프에서 함수 $y = \frac{a}{x-b} + c$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2, y=1$ 이므로

$$b=2, c=1$$

즉, 함수 $y = \frac{a}{x-2} + 1$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{a}{1-2} + 1 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore a+b+c=1+2+1=4$$

052 답 ④

주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=-1, y=-1$ 이므로 함수의 식을 $y = \frac{k}{x+1} - 1$ ($k < 0$)로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = \frac{k}{0+1} - 1 \quad \therefore k = -1$$

$$-2 = \frac{k}{0+1} - 1 \quad \therefore k = -1$$

따라서 함수의 식은

$$y = \frac{-1}{x+1} - 1 = \frac{-1-(x+1)}{x+1} = \frac{-x-2}{x+1}$$

이 함수가 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 와 일치하므로

$$a=-1, b=-2, c=1$$

$$\therefore ab+c=2+1=3$$

다른 풀이

$$y = \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)+b-ac}{x+c} = \frac{b-ac}{x+c} + a$$

즉, 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-c, y=a$$

이때 주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=-1, y=-1$ 이므로

$$a=-1, c=1$$

함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$, 즉 $y = \frac{-x+b}{x+1}$ 의 그래프가 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = \frac{0+b}{0+1} \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore ab+c=2+1=3$$

053 답 ㄴ, ㄷ

함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=p, y=q$$

주어진 그래프에서 $p < 0, q > 0$

점근선을 각각 좌표축으로 생각할 때, 주어진 그래프는 제2사분면, 제4사분면에 그려지므로

$$k < 0$$

$$\therefore k < 0, q > 0 \text{이므로 } k < q$$

$$\therefore p < 0, q > 0 \text{이므로 } pq < 0$$

ㄷ. 함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 의 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = \frac{k}{0-p} + q, \frac{k}{p} = q \quad \therefore k = pq$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

054 답 (1) 최댓값: 4, 최솟값: $\frac{3}{2}$

$$(2) \text{ 최댓값: } \frac{7}{5}, \text{ 최솟값: } -1$$

$$(3) \text{ 최댓값: } 6, \text{ 최솟값: } 4$$

$$(4) \text{ 최댓값: } 1, \text{ 최솟값: } -7$$

$$(5) \text{ 최댓값: } -\frac{13}{6}, \text{ 최솟값: } -3$$

$$(6) \text{ 최댓값: } 7, \text{ 최솟값: } 5$$

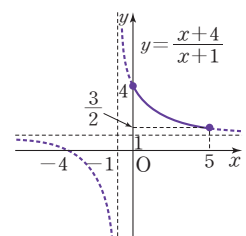
$$(1) y = \frac{x+4}{x+1} = \frac{(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 1$$

이므로 $0 \leq x \leq 5$ 인 범위에서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=0$ 일 때 최댓값은

$$\frac{0+4}{0+1} = 4,$$

$$x=5 \text{일 때 최솟값은 } \frac{5+4}{5+1} = \frac{3}{2}$$



$$(2) y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 2$$

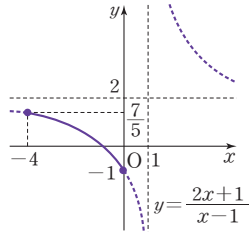
이므로 $-4 \leq x \leq 0$ 인 범위에서

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x = -4$ 일 때 최댓값은

$$\frac{-8+1}{-4-1} = \frac{7}{5},$$

$x = 0$ 일 때 최솟값은 $\frac{0+1}{0-1} = -1$



$$(3) y = \frac{3x}{x+2} = \frac{3(x+2)-6}{x+2} = -\frac{6}{x+2} + 3$$

이므로 $-8 \leq x \leq -4$ 인 범위에서

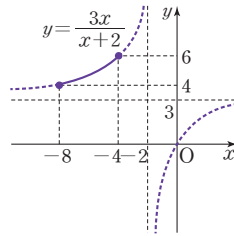
그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x = -4$ 일 때 최댓값은

$$\frac{3 \times (-4)}{-4+2} = 6,$$

$x = -8$ 일 때 최솟값은

$$\frac{3 \times (-8)}{-8+2} = 4$$



$$(4) y = \frac{3x-7}{x+1} = \frac{3(x+1)-10}{x+1} = -\frac{10}{x+1} + 3$$

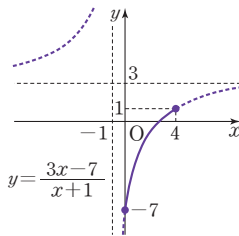
이므로 $0 \leq x \leq 4$ 인 범위에서

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x = 4$ 일 때 최댓값은

$$\frac{3 \times 4 - 7}{4+1} = 1,$$

$x = 0$ 일 때 최솟값은 $\frac{0-7}{0+1} = -7$



$$(5) y = \frac{7-2x}{x-3} = \frac{-2(x-3)+1}{x-3} = \frac{1}{x-3} - 2$$

이므로 $-3 \leq x \leq 2$ 인 범위에서

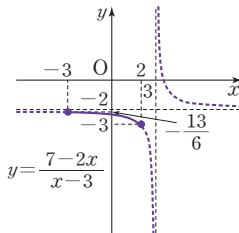
그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x = -3$ 일 때 최댓값은

$$\frac{7-2 \times (-3)}{-3-3} = -\frac{13}{6},$$

$x = 2$ 일 때 최솟값은

$$\frac{7-2 \times 2}{2-3} = -3$$



$$(6) y = \frac{4x-5}{x-2} = \frac{4(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 4$$

이므로 $3 \leq x \leq 5$ 인 범위에서

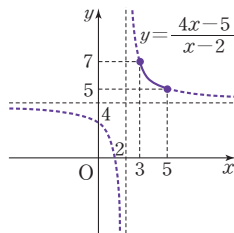
그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x = 3$ 일 때 최댓값은

$$\frac{4 \times 3 - 5}{3-2} = 7,$$

$x = 5$ 일 때 최솟값은

$$\frac{4 \times 5 - 5}{5-2} = 5$$



055 답 (1) $y = \frac{-x+2}{x-1}$

(2) $y = \frac{-3x-1}{x+1}$

(3) $y = \frac{2x-2}{x-3}$

(4) $y = \frac{x+2}{x+1}$

(1) $y = \frac{x+2}{x+1}$ 에서 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$y(x+1) = x+2, xy-x = -y+2$$

$$x(y-1) = -y+2 \quad \therefore x = \frac{-y+2}{y-1}$$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 구하는 역함수는

$$y = \frac{-x+2}{x-1}$$

(2) $y = \frac{-x-1}{x+3}$ 에서 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$y(x+3) = -x-1, xy+x = -3y-1$$

$$x(y+1) = -3y-1 \quad \therefore x = \frac{-3y-1}{y+1}$$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 구하는 역함수는

$$y = \frac{-3x-1}{x+1}$$

(3) $y = \frac{3x-2}{x-2}$ 에서 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$y(x-2) = 3x-2, xy-3x = 2y-2$$

$$x(y-3) = 2y-2 \quad \therefore x = \frac{2y-2}{y-3}$$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 구하는 역함수는

$$y = \frac{2x-2}{x-3}$$

(4) $y = \frac{2-x}{x-1}$ 에서 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$y(x-1) = 2-x, xy+x = y+2$$

$$x(y+1) = y+2 \quad \therefore x = \frac{y+2}{y+1}$$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 구하는 역함수는

$$y = \frac{x+2}{x+1}$$

056 답 (1) $a=1, b=-2, c=-1$

(2) $a=-5, b=-4, c=2$

(3) $a=-2, b=-2, c=-4$

(1) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ 에서 $y = \frac{x-2}{x-1}$ 라 하고 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$y(x-1) = x-2, xy-x = y-2$$

$$x(y-1) = y-2 \quad \therefore x = \frac{y-2}{y-1}$$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{x-2}{x-1}$

따라서 $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{x-1}$ 이므로 $\frac{x-2}{x-1} = \frac{ax+b}{x+c}$ 에서

$$a=1, b=-2, c=-1$$

(2) $f(x) = -\frac{3x+4}{2x-5}$ 에서 $y = -\frac{3x+4}{2x-5}$ 라 하고 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$y(2x-5) = -3x-4, 2xy+3x = -5y-4$$

$$x(2y+3) = -5y-4 \quad \therefore x = \frac{-5y-4}{2y+3}$$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{-5x-4}{2x+3}$

따라서 $f^{-1}(x) = \frac{-5x-4}{2x+3}$ 이므로 $\frac{-5x-4}{2x+3} = \frac{ax+b}{cx+d}$ 에서

$$a=-5, b=-4, c=2$$

(3) $f(x) = \frac{4x-2}{x+2}$ 에서 $y = \frac{4x-2}{x+2}$ 라 하고 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면
 $y(x+2) = 4x-2, xy-4x = -2y-2$
 $x(y-4) = -2y-2 \quad \therefore x = \frac{-2y-2}{y-4}$
 x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{-2x-2}{x-4}$
 따라서 $f^{-1}(x) = \frac{-2x-2}{x-4}$ 이므로 $\frac{-2x-2}{x-4} = \frac{ax+b}{x+c}$ 에서
 $a = -2, b = -2, c = -4$

057 답 ②

$$y = -\frac{x+3}{x-2} = \frac{-(x-2)-5}{x-2} = -\frac{5}{x-2} - 1$$

이므로 $-3 \leq x \leq 1$ 인 범위에서

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

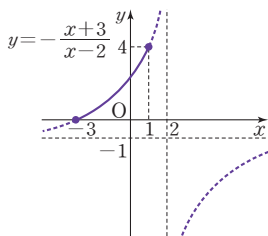
따라서 $x=1$ 일 때 최댓값은

$$M = -\frac{1+3}{1-2} = 4$$

$x=-3$ 일 때 최솟값은

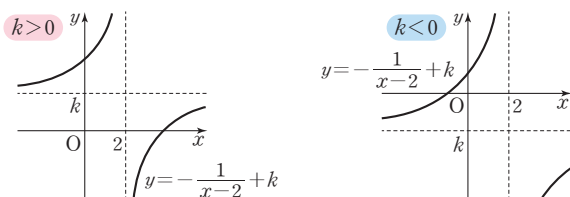
$$m = -\frac{-3+3}{-3-2} = 0$$

$$\therefore M+m = 4+0 = 4$$



058 답 4

함수 $f(x) = -\frac{1}{x-2} + k$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이므로 k 의 값의 부호에 따라 다음 그림과 같다.



두 경우 모두 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최대이고 $x=-2$ 일 때 최소이다.

이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 $\frac{13}{4}$ 이므로

$$f(-2) = \frac{13}{4} \text{ 에서 } -\frac{1}{-2-2} + k = \frac{13}{4}$$

$$\therefore k = 3$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{x-2} + 3$ 이므로 구하는 최댓값은

$$f(1) = -\frac{1}{1-2} + 3 = 4$$

059 답 5

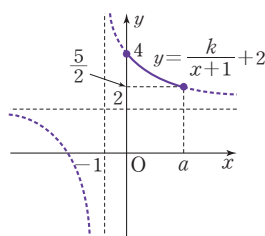
함수 $f(x) = \frac{k}{x+1} + 2$ 의 그래프

는 함수 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축의

방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으

로 2 만큼 평행이동한 것이다. 이때

$k > 0$ 이므로 $0 \leq x \leq a$ 인 범위에서



함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값이 4 이므로

$$f(0) = \frac{k}{0+1} + 2 = 4 \quad \therefore k = 2$$

함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 일 때 최솟값이 $\frac{5}{2}$ 이므로

$$f(a) = \frac{2}{a+1} + 2 = \frac{5}{2}, a+1=4 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a+k = 3+2 = 5$$

060 답 ②

$f(x) = \frac{2x+5}{x+a}$ 에서 $y = \frac{2x+5}{x+a}$ 라 하고 x 를 y 에 대한 식으로 나

타내면

$$y(x+a) = 2x+5, xy-2x = -ay+5$$

$$x(y-2) = -ay+5 \quad \therefore x = \frac{-ay+5}{y-2}$$

$$x \text{ 와 } y \text{ 를 바꾸어 쓰면 } y = \frac{-ax+5}{x-2}$$

따라서 $f^{-1}(x) = \frac{-ax+5}{x-2}$ 이므로 $\frac{-ax+5}{x-2} = \frac{-3x+b}{x-2}$ 에서

$$a=3, b=5$$

$$\therefore a+b = 3+5 = 8$$

061 답 -2

두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 이 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$f(x) = \frac{-3x-1}{2x+4}$ 에서 $y = \frac{-3x-1}{2x+4}$ 이라 하고 x 를 y 에 대한 식

으로 나타내면

$$y(2x+4) = -3x-1, 2xy+3x = -4y-1$$

$$x(2y+3) = -4y-1 \quad \therefore x = \frac{-4y-1}{2y+3}$$

$$x \text{ 와 } y \text{ 를 바꾸어 쓰면 } y = \frac{-4x-1}{2x+3}$$

따라서 $g(x) = \frac{-4x-1}{2x+3}$ 이므로 $\frac{-4x-1}{2x+3} = \frac{ax+b}{2x+c}$ 에서

$$a = -4, b = -1, c = 3$$

$$\therefore a+b+c = -4+(-1)+3 = -2$$

062 답 -1

$f(x) = \frac{ax+3}{x+1}$ 에서 $y = \frac{ax+3}{x+1}$ 이라 하고 x 를 y 에 대한 식으로

나타내면

$$y(x+1) = ax+3, xy-ax = -y+3$$

$$x(y-a) = -y+3 \quad \therefore x = \frac{-y+3}{y-a}$$

$$x \text{ 와 } y \text{ 를 바꾸어 쓰면 } y = \frac{-x+3}{x-a}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-x+3}{x-a}$$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치하므로 $f=f^{-1}$

따라서 $\frac{ax+3}{x+1} = \frac{-x+3}{x-a}$ 에서 $a = -1$

다른 풀이

$$f(x) = \frac{ax+3}{x+1} = \frac{a(x+1)+3-a}{x+1} = \frac{3-a}{x+1} + a$$

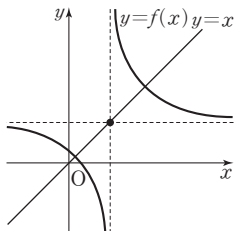
즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-1, a)$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치하려면 두 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있어야 하므로

$$a = -1$$

참고 $f=f^{-1}$ 인 유리함수

유리함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치하는 경우는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭인 경우이다. 따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있어야 한다.



063 답 -2

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(-2) = f^{-1}(f^{-1}(-2)) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $f(x) = \frac{-3x-7}{x+3}$ 에 대하여 $f^{-1}(-2)=k$ 라 하면

$f(k) = -2$ 이므로

$$\frac{-3k-7}{k+3} = -2, \quad -3k-7 = -2k-6 \quad \therefore k = -1$$

즉, $\textcircled{1}$ 에서

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(-2) = f^{-1}(f^{-1}(-2)) = f^{-1}(-1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$f^{-1}(-1)=l$ 이라 하면 $f(l) = -1$ 이므로

$$\frac{-3l-7}{l+3} = -1, \quad -3l-7 = -l-3$$

$$2l = -4 \quad \therefore l = -2$$

따라서 $\textcircled{2}$ 에서

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(-2) = f^{-1}(-1) = -2$$

다른 풀이

$f(x) = \frac{-3x-7}{x+3}$ 에서 $y = \frac{-3x-7}{x+3}$ 이라 하고 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$y(x+3) = -3x-7, \quad xy+3y = -3x-7$$

$$x(y+3) = -3y-7 \quad \therefore x = \frac{-3y-7}{y+3}$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y = \frac{-3x-7}{x+3}$$

따라서 $f^{-1}(x) = \frac{-3x-7}{x+3}$, 즉 $f=f^{-1}$ 이므로

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(-2) = (f^{-1} \circ f)(-2) = -2$$

중단원 점검 문제

III-2 | 유리함수

181~182쪽

01 답 ④

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} \\ &= \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} \\ &= \frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} \\ &= \frac{2(x^2+1)-2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} - \frac{4}{x^4+1} \\ &= \frac{4}{x^4-1} - \frac{4}{x^4+1} \\ &= \frac{4(x^4+1)-4(x^4-1)}{(x^4-1)(x^4+1)} \\ &= \frac{8}{x^8-1} \end{aligned}$$

02 답 ③

$$\begin{aligned} & \frac{2x^2+7x+3}{x^2-x} \times \left(\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1} \right) \div \frac{x^2+5x+6}{x^2+x} \\ &= \frac{(x+3)(2x+1)}{x(x-1)} \times \frac{(x+1)+2(x-2)}{(x-2)(x+1)} \div \frac{(x+2)(x+3)}{x(x+1)} \\ &= \frac{(x+3)(2x+1)}{x(x-1)} \times \frac{3(x-1)}{(x-2)(x+1)} \div \frac{(x+2)(x+3)}{x(x+1)} \\ &= \frac{(x+3)(2x+1)}{x(x-1)} \times \frac{3(x-1)}{(x-2)(x+1)} \times \frac{x(x+1)}{(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{3(2x+1)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{6x+3}{x^2-4} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{ax^2+bx+3}{x^2+cx-4} = \frac{6x+3}{x^2-4} \text{에서}$$

$$a=0, b=6, c=0$$

$$\therefore a+b+c=0+6+0=6$$

03 답 15

주어진 등식의 좌변을 계산하면

$$\begin{aligned} & \frac{x+2}{x} - \frac{x+4}{x+2} - \frac{x-5}{x-3} + \frac{x-7}{x-5} \\ &= \frac{x+2}{x} - \frac{(x+2)+2}{x+2} - \frac{(x-3)-2}{x-3} + \frac{(x-5)-2}{x-5} \\ &= \left(1 + \frac{2}{x}\right) - \left(1 + \frac{2}{x+2}\right) - \left(1 - \frac{2}{x-3}\right) + \left(1 - \frac{2}{x-5}\right) \\ &= \frac{2}{x} - \frac{2}{x+2} + \frac{2}{x-3} - \frac{2}{x-5} \\ &= \frac{2(x+2)-2x}{x(x+2)} + \frac{2(x-5)-2(x-3)}{(x-3)(x-5)} \\ &= \frac{4}{x(x+2)} + \frac{-4}{(x-3)(x-5)} \\ &= \frac{4(x-3)(x-5)-4x(x+2)}{x(x+2)(x-3)(x-5)} \\ &= \frac{-40x+60}{x(x+2)(x-3)(x-5)} \end{aligned}$$

즉, $\frac{ax+b}{x(x+2)(x-3)(x+c)} = \frac{-40x+60}{x(x+2)(x-3)(x-5)}$ 이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=-40, b=60, c=-5$$

$$\therefore a+b+c=-40+60+(-5)=15$$

04 답 $\frac{175}{264}$

$$f(x)=x^2+2x=x(x+2)\text{이므로}$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x(x+2)}$$

$$=\frac{1}{(x+2)-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(10)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{175}{132}$$

$$=\frac{175}{264}$$

05 답 6

점 A의 x 좌표를 a 라 하면 점 A는 직선 $y=-x-1$ 위의 점이므로 $A(a, -a-1)$

함수 $y=-\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 이때 직선 $y=x$ 과 직선 $y=-x-1$ 은 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore B(-a-1, a)$$

$$\text{이때 } \overline{AB}=5\sqrt{2}\text{이므로}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(-a-1-a)^2+\{a-(-a-1)\}^2}$$

$$=\sqrt{2(2a+1)^2}$$

$$=|2a+1|\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

$$\text{즉, } |2a+1|=5\text{에서 } 2a+1=-5 \text{ 또는 } 2a+1=5$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 A(-3, 2) 또는 A(2, -3)이고 점 A는 함수

$$y=-\frac{k}{x}\text{의 그래프 위의 점이므로}$$

$$2=-\frac{k}{-3} \text{ 또는 } -3=-\frac{k}{2}$$

$$\therefore k=6$$

다른 풀이

$$\text{함수 } y=-\frac{k}{x} \text{ ($k \neq 0$)의 그래프와 직선 } y=-x-1\text{의 교점의 } x$$

$$\text{좌표는 방정식 } -\frac{k}{x}=-x-1, \text{ 즉}$$

$$x^2+x-k=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

의 실근이다. 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 a, b ($ab \neq 0$)라 하면 이 두 점은 직선 $y=-x-1$ 위의 점이므로

$$A(a, -a-1), B(b, -b-1)$$

이고 a, b 는 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 실근이다.

이차방정식 $\textcircled{1}$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=-1, ab=-k$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

$$\overline{AB}=5\sqrt{2}, \text{ 즉 } \overline{AB}^2=50\text{에서 } 2(a-b)^2=50\text{이므로}$$

$$(a-b)^2=25, (a+b)^2-4ab=25$$

위의 식에 $\textcircled{2}$ 을 대입하면

$$(-1)^2-4 \times (-k)=25, 4k=24$$

$$\therefore k=6$$

06 답 ㄱ, ㄴ

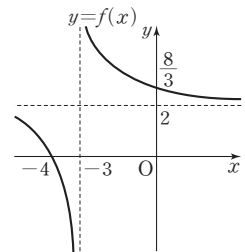
함수 $f(x)=\frac{2}{x+3}+2$ 의 그래프는

함수 $y=\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향

으로 -3만큼, y 축의 방향으로 2만큼

평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과

같다.



ㄱ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근

선의 방정식은 $x=-3, y=2$ 이고 두 점근선의 교점은

$(-3, 2)$ 이다.

즉, 그래프는 점 $(-3, 2)$ 에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 정의역은 $\{x|x \neq -3 \text{인 실수}\}$ 이다.

$$\text{ㄷ. } f(0)=\frac{2}{0+3}+2=\frac{8}{3}$$

즉, 그래프와 y 축의 교점의 y 좌표는 $\frac{8}{3}$ 이다.

ㄹ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-3, 2)$ 를 지나고 기울기가 ± 1 인 두 직선에 대하여 각각 대칭이다.

이때 기울기가 -1이고 점 $(-3, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=-(x-(-3))$$

$$\therefore y=-x-1$$

즉, 그래프는 직선 $y=-x-1$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07 답 ㉠

$$f(x)=\frac{2x-k}{x-1}\text{라 하면}$$

$$f(x)=\frac{2x-k}{x-1}=\frac{2(x-1)+2-k}{x-1}=\frac{2-k}{x-1}+2$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

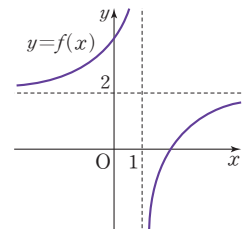
$$x=1, y=2$$

(i) $2-k < 0$, 즉 $k > 2$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 k 의 값에 관계없

이 제3사분면을 지나지 않는다.



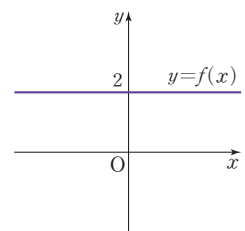
(ii) $2-k=0$, 즉 $k=2$ 일 때,

$$f(x)=\frac{2-2}{x-1}+2=2$$

즉, 상수함수 $y=f(x)$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사

분면을 지나지 않는다.



(iii) $2-k>0$, 즉 $k<2$ 일 때,

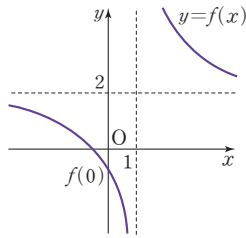
함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 제3사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $f(0)<0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } f(0) = \frac{0-k}{0-1} < 0 \text{에서 } k < 0$$

이때 $k<2$ 이므로 $k<0$

(i)~(iii)에서 실수 k 의 값의 범위는

$$k < 0$$



08 답 ①, ⑤

$$\textcircled{1} y = \frac{1}{2x+4} = \frac{1}{2(x+2)}$$

즉, 함수 $y = \frac{1}{2x+4}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{1}{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

$$\textcircled{2} y = \frac{2x-3}{2x-2} = \frac{2(x-1)-1}{2(x-1)} = -\frac{1}{2(x-1)} + 1$$

즉, 함수 $y = \frac{2x-3}{2x-2}$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{1}{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

$$\textcircled{3} y = \frac{1-2x}{2x+2} = \frac{-2(x+1)+3}{2(x+1)} = \frac{3}{2(x+1)} - 1$$

즉, 함수 $y = \frac{1-2x}{2x+2}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

$$\textcircled{4} y = \frac{4x-7}{2x-3} = \frac{2(2x-3)-1}{2x-3} = -\frac{1}{2(x-\frac{3}{2})} + 2$$

즉, 함수 $y = \frac{4x-7}{2x-3}$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{1}{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

$$\textcircled{5} y = \frac{6x+10}{2x+3} = \frac{3(2x+3)+1}{2x+3} = \frac{1}{2x+3} + 3 = \frac{1}{2(x+\frac{3}{2})} + 3$$

즉, 함수 $y = \frac{6x+10}{2x+3}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{1}{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프가 평행이동에 의하여 함수 $y = \frac{1}{2x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ①, ⑤이다.

09 답 2

원 $(x-1)^2+y^2=4$ 의 중심의 좌표는 $(1, 0)$

원 $(x+3)^2+(y-1)^2=4$ 의 중심의 좌표는 $(-3, 1)$

즉, 원 $(x-1)^2+y^2=4$ 를 원 $(x+3)^2+(y-1)^2=4$ 로 옮기는 평행이동은 x 축의 방향으로 $-3-1=-4$ 만큼, y 축의 방향으로 $1-0=1$ 만큼 옮기는 것이다.

이 평행이동에 의하여 함수 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프가 옮겨지는 그래프의 식은

$$y = -\frac{1}{x+4} + 1 = \frac{-1+(x+4)}{x+4} = \frac{x+3}{x+4}$$

이 그래프가 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프와 겹쳐지므로

$$a=1, b=3, c=4$$

$$\therefore a-b+c=1-3+4=2$$

10 답 ④

함수 $y = \frac{k}{x-2} + 1$ 에서

$$y=0 \text{일 때, } 0 = \frac{k}{x-2} + 1, \frac{k}{x-2} = -1$$

$$k = -x+2 \quad \therefore x = -k+2$$

$$\therefore A(-k+2, 0)$$

$$x=0 \text{일 때, } y = \frac{k}{0-2} + 1 = -\frac{1}{2}k+1$$

$$\therefore B(0, -\frac{1}{2}k+1)$$

또, 점근선의 방정식이 $x=2, y=1$ 이므로 $C(2, 1)$

이때 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 두 직선 AC, BC의 기울기가 서로 같아야 한다.

$$\text{즉, } \frac{1-0}{2-(-k+2)} = \frac{1-(-\frac{1}{2}k+1)}{2-0} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{k}{4}, k^2=4 \quad \therefore k=-2 (\because k<0)$$

다른 풀이

함수 $y = \frac{k}{x-2} + 1$ 의 그래프는 두

점근선의 교점 $C(2, 1)$ 에 대하여 대칭이므로 점 C를 지나는 직선이 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나면 이 두 점은 항상 점 C에 대하여 대칭이다. 즉, 두 점 A, B는 점 C에 대하여 대칭이다.

이때 두 점 A, B가 각각 x 축, y 축 위의 점이므로

$A(a, 0), B(0, b)$ 로 놓으면 선분 AB의 중점의 좌표는

$$(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$$

이 점이 점 $C(2, 1)$ 과 일치하므로

$$\frac{a}{2}=2, \frac{b}{2}=1 \quad \therefore a=4, b=2$$

따라서 점 $A(4, 0)$ 이 함수 $y = \frac{k}{x-2} + 1$ 의 그래프 위의 점이므로

$$0 = \frac{k}{4-2} + 1, \frac{k}{2} = -1 \quad \therefore k = -2$$

11 답 8

함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 y 축과 점 $(0, 1)$ 에서 만나므로

$$1 = \frac{b}{c} \quad \therefore b=c$$

..... ㉠

$$y = \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)+b-ac}{x+c} = \frac{b-ac}{x+c} + a$$

즉, 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은
 $x = -c$, $y = a$ 이므로 점 $(-c, a)$ 에 대하여 대칭이다.
 이 점이 점 $(-3, 2)$ 와 일치하므로
 $a=2, c=3, b=3$ ($\because$ ㉠)
 $\therefore a+b+c=2+3+3=8$

다른 풀이

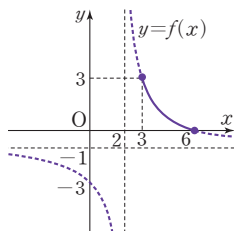
유리함수의 그래프가 점 $(-3, 2)$ 에 대칭이면 함수의 식을
 $y = \frac{k}{x+3} + 2$ ($k \neq 0$)로 놓을 수 있다.
 이 함수의 그래프가 y 축과 점 $(0, 1)$ 에서 만나므로
 $1 = \frac{k}{3} + 2 \quad \therefore k = -3$
 즉, 함수의 식은 $y = \frac{-3}{x+3} + 2 = \frac{-3+2(x+3)}{x+3} = \frac{2x+3}{x+3}$
 이 함수가 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 와 일치하므로
 $a=2, b=3, c=3 \quad \therefore a+b+c=2+3+3=8$

12 답 9

주어진 그래프에서 한 점근선의 방정식이 $x = -1$ 이므로 다른 한
 점근선의 방정식을 $y = l$ 이라 하면 함수의 식을
 $f(x) = \frac{k}{x+1} + l$ ($k > 0$)로 놓을 수 있다.
 이 함수의 그래프가 점 $(0, 6)$ 을 지나므로
 $6 = \frac{k}{0+1} + l \quad \therefore k+l=6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 또, 함수의 그래프가 점 $(-3, 0)$ 을 지나므로
 $0 = \frac{k}{-3+1} + l \quad \therefore k-2l=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $k=4, l=2$
 즉, 함수의 식은 $y = \frac{4}{x+1} + 2 = \frac{4+2(x+1)}{x+1} = \frac{2x+6}{x+1}$
 이 함수가 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 와 일치하므로
 $a=2, b=6, c=1 \quad \therefore a+b+c=2+6+1=9$

13 답 ①

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2, y=-1$ 이므로
 $f(x) = \frac{k}{x-2} - 1$ ($k \neq 0$)
 로 놓을 수 있다.
 이때 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, -3)$ 을 지나므로
 $-3 = \frac{k}{0-2} - 1 \quad \therefore k=4$
 $\therefore f(x) = \frac{4}{x-2} - 1$
 즉, $3 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의
 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $x=3$ 일 때 최댓값은 $\frac{4}{3-2} - 1 = 3$
 $x=6$ 일 때 최솟값은 $\frac{4}{6-2} - 1 = 0$
 따라서 최댓값과 최솟값의 합은
 $3+0=3$



14 답 -2

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로
 $1 = \frac{-a+b}{-1-2} \quad \therefore b=a-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$ 에서 $y = \frac{ax+b}{x-2}$ 라 하고 x 를 y 에 대한 식으로 나
 타내면
 $y(x-2) = ax+b, xy-ax=2y+b$
 $x(y-a) = 2y+b \quad \therefore x = \frac{2y+b}{y-a}$
 x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{2x+b}{x-a}$
 $\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x+b}{x-a}$
 이때 $(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$ 이므로
 $\frac{ax+b}{x-2} = \frac{2x+b}{x-a} \quad \therefore a=2, b=-1$ ($\because$ ㉠)
 $\therefore ab = 2 \times (-1) = -2$

다른 풀이

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로
 $f(-1)=1$
 이때 $(f \circ f)(x) = x$ 에서
 $(f \circ f)(-1) = f(f(-1)) = f(1) = -1$
 $f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$ 에서
 $f(-1) = \frac{-a+b}{-1-2} = 1, f(1) = \frac{a+b}{1-2} = -1$
 $\therefore a-b=3, a+b=1$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=-1$
 $\therefore ab = 2 \times (-1) = -2$

참고 a 의 값은 다음과 같이 구할 수도 있다.

$f(x) = \frac{ax+b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b+2a}{x-2} = \frac{2a+b}{x-2} + a$
 즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는 $(2, a)$
 이때 $(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역
 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치한다. 즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점
 근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있어야 하므로 $a=2$ 이다.

15 답 2

함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프가 점 $(3, 4)$ 를 지나므로
 $f(3) = 4$ 에서 $\frac{3a+b}{3-1} = 4 \quad \therefore 3a+b=8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 또, 함수 f 의 역함수를 f^{-1} 라 하면 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프도 점
 $(3, 4)$ 를 지나므로 $f^{-1}(3)=4$ 에서
 $f(4)=3$, 즉 $\frac{4a+b}{4-1} = 3 \quad \therefore 4a+b=9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=5$
 $\therefore f(x) = \frac{x+5}{x-1}$
 따라서 $a+b+1=1+5+1=7$ 이므로
 $f(a+b+1) = f(7) = \frac{7+5}{7-1} = 2$

001 답 (1) ○ (2) × (3) ×
(4) ○ (5) ○ (6) ×

002 답 (1) $x \geq 4$ (2) $x \geq -5$ (3) $x \geq 2$
(4) $x > \frac{3}{2}$ (5) $x > 3$ (6) $-1 \leq x < 2$

(1) $\sqrt{x-4}$ 에서 $x-4 \geq 0$ 이므로 $x \geq 4$
(2) $\sqrt{2x+10}-2$ 에서 $2x+10 \geq 0$ 이므로 $x \geq -5$
(3) $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-4}$ 에서 $x+3 \geq 0$, $2x-4 \geq 0$ 이므로
 $x \geq -3$, $x \geq 2 \quad \therefore x \geq 2$
(4) $\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$ 에서 $2x-3 > 0$ 이므로 $x > \frac{3}{2}$
(5) $\frac{1}{\sqrt{x+5}} + \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ 에서 $x+5 > 0$, $x-3 > 0$ 이므로
 $x > -5$, $x > 3 \quad \therefore x > 3$
(6) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-2x}}$ 에서 $x+1 \geq 0$, $4-2x > 0$ 이므로
 $x \geq -1$, $x < 2 \quad \therefore -1 \leq x < 2$

003 답 (1) $2x+1$ (2) $-2x+2$ (3) 1

(1) $x > 0$ 이면 $x+1 > 0$ 이므로
 $\sqrt{x^2} + \sqrt{(x+1)^2} = x + (x+1) = 2x+1$
(2) $x < 0$ 이면 $2-x > 0$ 이므로
 $\sqrt{x^2} + \sqrt{(2-x)^2} = -x + (2-x) = -2x+2$
(3) $1 < x < 2$ 이면 $x-1 > 0$, $x-2 < 0$ 이므로
 $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} = (x-1) + \{-(x-2)\}$
 $= x-1-x+2$
 $= 1$

004 답 (1) $x-4$ (2) $-2x$ (3) $2x-2$

(1) $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) = (\sqrt{x})^2 - 2^2 = x-4$
(2) $(1+\sqrt{2x+1})(1-\sqrt{2x+1}) = 1 - (\sqrt{2x+1})^2$
 $= 1 - (2x+1)$
 $= -2x$
(3) $(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3})$
 $= (\sqrt{3x+1})^2 - (\sqrt{x+3})^2$
 $= (3x+1) - (x+3)$
 $= 2x-2$

005 답 (1) $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ (2) $\frac{\sqrt{x+2}+1}{x+1}$
(3) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}$

(1) $\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
(2) $\frac{1}{\sqrt{x+2}-1} = \frac{\sqrt{x+2}+1}{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}$
 $= \frac{\sqrt{x+2}+1}{(x+2)-1}$
 $= \frac{\sqrt{x+2}+1}{x+1}$

(3) $\frac{2}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}}$
 $= \frac{2(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3})}$
 $= \frac{2(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3})}{(x+5)-(x+3)}$
 $= \frac{2(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3})}{2}$
 $= \sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}$

006 답 (1) $\frac{4}{x-4}$ (2) $2\sqrt{x+1}$ (3) $\frac{4\sqrt{x}}{x-1}$

(1) $\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}+2) - (\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$
 $= \frac{4}{x-4}$
(2) $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$
 $= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) + (\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$
 $= \frac{2\sqrt{x+1}}{(x+1)-x} = 2\sqrt{x+1}$
(3) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$
 $= \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$
 $= \frac{x+2\sqrt{x}+1 - (x-2\sqrt{x}+1)}{x-1}$
 $= \frac{4\sqrt{x}}{x-1}$

007 답 ③

$\sqrt{3x-9}+\sqrt{5-x}$ 의 값이 실수가 되려면

$3x-9 \geq 0$, $5-x \geq 0$

즉, $x \geq 3$, $x \leq 5$ 에서 $3 \leq x \leq 5$

따라서 구하는 실수 x 의 값의 범위는 $3 \leq x \leq 5$ 이다.

008 답 12

$\sqrt{x-3} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{15-3x}}$ 의 값이 실수가 되려면

$x-3 \geq 0$, $x-1 \geq 0$, $15-3x > 0$ 에서

$x \geq 3$, $x \geq 1$, $x < 5$

$\therefore 3 \leq x < 5$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 의 최댓값은 $M=4$, 최솟값은

$m=3$ 이므로

$Mm=4 \times 3=12$

009 답 12

$\sqrt{10+3x-x^2}$ 의 값이 실수가 되려면 $10+3x-x^2 \geq 0$ 에서

$x^2-3x-10 \leq 0$, $(x+2)(x-5) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 5$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 의 값은 $-2, -1, 0, \dots, 5$ 이므로

구하는 합은

$-2+(-1)+0+\dots+5=12$

010 답 3

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) + \sqrt{x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} \\ &= \frac{x+1-\sqrt{x}\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\sqrt{x+1}+x}{(x+1)-x} \\ &= 2x+1 \end{aligned}$$

따라서 $2x+1=ax+b$ 에서 $a=2, b=1$

$$\therefore a+b=2+1=3$$

011 답 ③

주어진 등식의 좌변을 계산하면

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-1}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1}} + \frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-1}} \\ &= \frac{(\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-1})^2}{(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1})(\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-1})} \\ & \quad + \frac{(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1})^2}{(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1})(\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-1})} \\ &= \frac{4x+1-2\sqrt{4x+1}\sqrt{4x-1}+4x-1}{(4x+1)-(4x-1)} \\ & \quad + \frac{4x+1+2\sqrt{4x+1}\sqrt{4x-1}+4x-1}{(4x+1)-(4x-1)} \\ &= \frac{16x}{2}=8x \end{aligned}$$

따라서 $8x=ax$ 에서 $a=8$

012 답 3

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} \\ &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(15) \\ &= (\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15}) \\ &= \sqrt{16}-\sqrt{1}=4-1=3 \end{aligned}$$

- 013 답 (1) × (2) ○ (3) ×
(4) ○ (5) ○ (6) ○

주의 함수의 식에서 분모, 분자에 상관없이 x 가 근호 안에 있고, 이를 근호를 포함하지 않는 식으로 바꿀 수 없을 때 이 함수가 무리함수임에 유의하자. 예를 들어 (4)에서 근호 안에 x^2 이 있으나 근호를 포함하지 않는 식으로 바꿀 수 없으므로 (4)는 무리함수이다.

- 014 답 (1) $\{x|x \geq 2\}$ (2) $\{x|x \leq 5\}$
(3) $\{x|x \geq -3\}$ (4) $\{x|x \geq \frac{4}{3}\}$
(5) $\{x|x \geq -5\}$ (6) $\{x|x \leq 2\}$

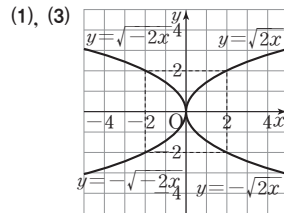
- (1) $y=\sqrt{x-2}$ 에서 $x-2 \geq 0$ 이므로 $x \geq 2$
즉, 무리함수 $y=\sqrt{x-2}$ 의 정의역은 $\{x|x \geq 2\}$
(2) $y=\sqrt{5-x}$ 에서 $5-x \geq 0$ 이므로 $x \leq 5$
즉, 무리함수 $y=\sqrt{5-x}$ 의 정의역은 $\{x|x \leq 5\}$

- (3) $y=-\sqrt{x+3}$ 에서 $x+3 \geq 0$ 이므로 $x \geq -3$
즉, 무리함수 $y=-\sqrt{x+3}$ 의 정의역은 $\{x|x \geq -3\}$
(4) $y=\sqrt{3x-4}+2$ 에서 $3x-4 \geq 0$ 이므로 $x \geq \frac{4}{3}$
즉, 무리함수 $y=\sqrt{3x-4}+2$ 의 정의역은 $\{x|x \geq \frac{4}{3}\}$
(5) $y=-\sqrt{x+5}-5$ 에서 $x+5 \geq 0$ 이므로 $x \geq -5$
즉, 무리함수 $y=-\sqrt{x+5}-5$ 의 정의역은 $\{x|x \geq -5\}$
(6) $y=-\sqrt{4-2x}+6$ 에서 $4-2x \geq 0$ 이므로 $x \leq 2$
즉, 무리함수 $y=-\sqrt{4-2x}+6$ 의 정의역은 $\{x|x \leq 2\}$

015 답 (1) 풀이 참조

(2) $\geq, \geq$

(3) 풀이 참조

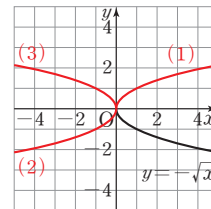


- (2) 정의역은 $\{x|x \geq 0\}$ 이고
치역은 $\{y|y \geq 0\}$ 이다.

016 답 (1) 풀이 참조, $y=\sqrt{x}$

(2) 풀이 참조, $y=-\sqrt{-x}$

(3) 풀이 참조, $y=\sqrt{-x}$



017 답 (1) 풀이 참조

정의역: $\{x|x \geq 0\}$, 치역: $\{y|y \geq 0\}$

(2) 풀이 참조

정의역: $\{x|x \leq 0\}$, 치역: $\{y|y \geq 0\}$

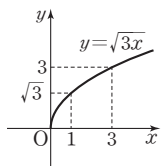
(3) 풀이 참조

정의역: $\{x|x \geq 0\}$, 치역: $\{y|y \leq 0\}$

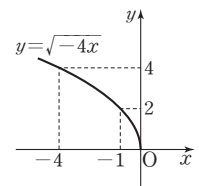
(4) 풀이 참조

정의역: $\{x|x \leq 0\}$, 치역: $\{y|y \leq 0\}$

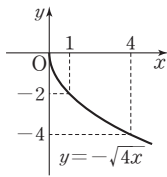
- (1) 함수 $y=\sqrt{3x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과
같고
정의역은 $\{x|x \geq 0\}$,
치역은 $\{y|y \geq 0\}$ 이다.



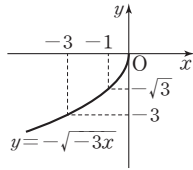
- (2) 함수 $y=\sqrt{-4x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과
같고
정의역은 $\{x|x \leq 0\}$,
치역은 $\{y|y \geq 0\}$ 이다.



- (3) 함수 $y = -\sqrt{4x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x \geq 0\}$,
치역은 $\{y|y \leq 0\}$ 이다.



- (4) 함수 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x \leq 0\}$,
치역은 $\{y|y \leq 0\}$ 이다.



풍생비법 무리함수의 그래프 그리기 (1)

무리함수 $y = \pm\sqrt{kx}$ ($k \neq 0$)의 그래프는 다음 순서로 그린다.

- ① k 의 값의 부호에 따라 그래프가 그려질 방향을 정한다.
 $\rightarrow k > 0$ 이면 원점을 기준으로 오른쪽 방향으로 그려진다.
 $k < 0$ 이면 원점을 기준으로 왼쪽 방향으로 그려진다.
- ② 근호 앞의 부호에 따라 그래프가 그려질 방향을 정한다.
 $\rightarrow$ 근호 앞이 $+$ 이면 위쪽을 향해 그려진다.
 $\rightarrow$ 근호 앞이 $-$ 이면 아래쪽을 향해 그려진다.
- ③ 그래프가 지나는 점을 찾는다.
 $\rightarrow x$ 좌표가 $\pm 1, \pm k$ 인 점의 좌표를 찾는다.
- ④ 원점에서 시작하여 ①, ②의 방향으로 ③의 점을 지나는 곡선을 그린다.

018 답 (1) ○ (2) × (3) × (4) × (5) ○ (6) ×

- (1) $a > 0$ 이면 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프는 제1사분면을 지난다.
(2) $a < 0$ 이면 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프는 제2사분면을 지난다.
(3) $|a|$ 의 값이 커질수록 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프는 x 축으로부터 멀어진다.
(4) 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 정의역은
 $a > 0$ 이면 $\{x|x \geq 0\}$, $a < 0$ 이면 $\{x|x \leq 0\}$ 이다.
(5) a 의 값에 관계없이 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 치역은 $\{y|y \geq 0\}$ 이다.
(6) $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프와 $y = \sqrt{-ax}$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

019 답 (1) × (2) × (3) ○ (4) × (5) ×

- (1) $a > 0$ 이면 함수 $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프는 제4사분면을 지난다.
(2) $a < 0$ 이면 함수 $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프는 제3사분면을 지난다.
(3) $a > 0$ 이면 함수 $y = -\sqrt{ax}$ 의 정의역은 $\{x|x \geq 0\}$ 이다.
(4) a 의 값에 관계없이 함수 $y = -\sqrt{ax}$ 의 치역은 $\{y|y \leq 0\}$ 이다.
(5) $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프와 $y = -\sqrt{-ax}$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

020 답 (1) $y = \sqrt{x-3}+1$

(2) $y = \sqrt{-2(x+1)}+2$

(3) $y = -\sqrt{5(x-2)}-3$

(4) $y = -\sqrt{-3(x+3)}-2$

- (1) 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = \sqrt{x-3}+1$

- (2) 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = \sqrt{-2(x+1)}+2$
(3) 함수 $y = -\sqrt{5x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = -\sqrt{5(x-2)}-3$
(4) 함수 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = -\sqrt{-3(x+3)}-2$

021 답 (1) $p=2, q=0$ (2) $p=1, q=2$

(3) $p=-3, q=-3$ (4) $p=5, q=-4$

- (1) 함수 $y = -\sqrt{-2(x-2)}$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $p=2, q=0$ 이다.
(2) 함수 $y = -\sqrt{-2(x-1)}+2$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $p=1, q=2$ 이다.
(3) 함수 $y = -\sqrt{-2(x+3)}-3$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로 $p=-3, q=-3$ 이다.
(4) 함수 $y = -\sqrt{-2(x-5)}-4$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로 $p=5, q=-4$ 이다.

022 답 (1) 풀이 참조

정의역: $\{x|x \geq 2\}$, 치역: $\{y|y \geq 1\}$

(2) 풀이 참조

정의역: $\{x|x \leq 3\}$, 치역: $\{y|y \geq -2\}$

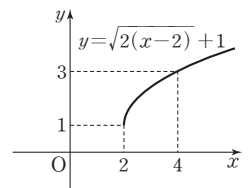
(3) 풀이 참조

정의역: $\{x|x \geq -1\}$, 치역: $\{y|y \leq -1\}$

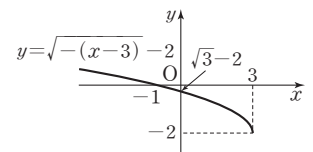
(4) 풀이 참조

정의역: $\{x|x \leq 3\}$, 치역: $\{y|y \leq 3\}$

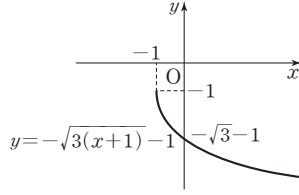
- (1) 함수 $y = \sqrt{2(x-2)}+1$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x \geq 2\}$,
치역은 $\{y|y \geq 1\}$ 이다.



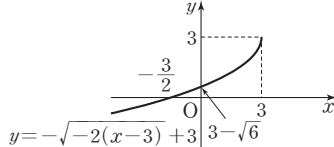
- (2) 함수 $y = \sqrt{-(x-3)}-2$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x \leq 3\}$,
치역은 $\{y|y \geq -2\}$ 이다.



- (3) 함수 $y = -\sqrt{3(x+1)} - 1$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x \geq -1\}$,
치역은 $\{y|y \leq -1\}$ 이다.

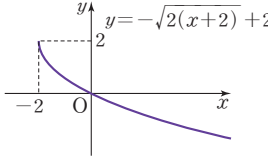


- (4) 함수 $y = -\sqrt{-2(x-3)} + 3$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x \leq 3\}$,
치역은 $\{y|y \leq 3\}$ 이다.



023 답 (1) × (2) × (3) ○ (4) × (5) ○

- (1) 함수 $y = -\sqrt{2(x+2)} + 2$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



- (2) 정의역은 $\{x|x \geq -2\}$ 이다.
(3) 치역은 $\{y|y \leq 2\}$ 이다.
(4) 그래프는 점 $(0, 0)$ 을 지나나.
(5) 그래프는 제1사분면과 제3사분면을 지나지 않는다.

024 답 $-4, -1, -4, 1$

주어진 함수의 그래프는 함수 $y = \sqrt{ax}$ ($a > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 $[-4]$ 만큼, y 축의 방향으로 $[-1]$ 만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식은

$$y = \sqrt{a(x+4)} - 1 \quad \therefore p = [-4], q = -1$$

이 함수의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \sqrt{a(0+4)} - 1, 4 = 4a \quad \therefore a = [1]$$

025 답 (1) $y = \sqrt{2(x-3)} + 2$

$$(2) y = \sqrt{-2(x-1)} + 1$$

$$(3) y = -\sqrt{3(x+1)} - 2$$

$$(4) y = -\sqrt{-(x-5)} - 3$$

$$(1) y = \sqrt{2x-6} + 2 = \sqrt{2(x-3)} + 2$$

$$(2) y = \sqrt{2-2x} + 1 = \sqrt{-2(x-1)} + 1$$

$$(3) y = -\sqrt{3x+3} - 2 = -\sqrt{3(x+1)} - 2$$

$$(4) y = -\sqrt{-x+5} - 3 = -\sqrt{-(x-5)} - 3$$

026 답 (1) 풀이 참조

정의역: $\{x|x \geq -2\}$, 치역: $\{y|y \geq 1\}$

(2) 풀이 참조

정의역: $\{x|x \leq 2\}$, 치역: $\{y|y \geq -2\}$

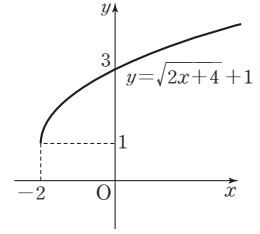
(3) 풀이 참조

정의역: $\{x|x \geq 1\}$, 치역: $\{y|y \leq 1\}$

(4) 풀이 참조

정의역: $\{x|x \leq 2\}$, 치역: $\{y|y \leq 2\}$

- (1) $y = \sqrt{2x+4} + 1 = \sqrt{2(x+2)} + 1$
즉, 함수 $y = \sqrt{2x+4} + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x \geq -2\}$,
치역은 $\{y|y \geq 1\}$ 이다.

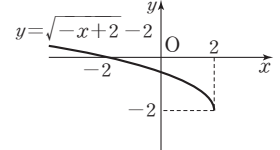


- (2) $y = \sqrt{-x+2} - 2 = \sqrt{-(x-2)} - 2$

즉, 함수 $y = \sqrt{-x+2} - 2$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x \leq 2\}$,

치역은 $\{y|y \geq -2\}$ 이다.

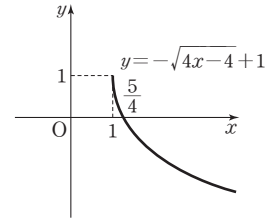


- (3) $y = -\sqrt{4x-4} + 1 = -\sqrt{4(x-1)} + 1$

즉, 함수 $y = -\sqrt{4x-4} + 1$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x \geq 1\}$,

치역은 $\{y|y \leq 1\}$ 이다.

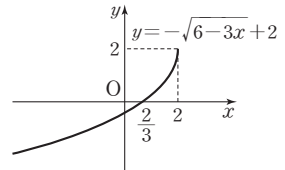


- (4) $y = -\sqrt{6-3x} + 2 = -\sqrt{-3(x-2)} + 2$

즉, 함수 $y = -\sqrt{6-3x} + 2$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x \leq 2\}$,

치역은 $\{y|y \leq 2\}$ 이다.



풍샘 방법 무리함수의 그래프 그리기 (2)

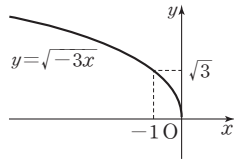
무리함수 $y = \pm\sqrt{ax+b} + c$ ($a \neq 0$)의 그래프는 다음 순서로 그린다.

- 함수의 식을 $y = \pm\sqrt{a(x-p)} + q$ 꼴로 고쳐 그래프가 시작하는 점 (p, q) 를 찾는다.
- a 의 값의 부호에 따라 그래프가 오른쪽, 왼쪽 중 어느 방향으로 그려지는지 정한다.
- 근호 앞의 부호에 따라 그래프가 위쪽, 아래쪽 중 어느 방향으로 그려지는지 정한다.
- 그래프와 x 축, y 축이 만나는 점의 좌표를 찾는다.
- ①의 점에서 시작하여 ②, ③의 방향으로 ④의 점을 지나는 곡선을 그린다.

027 답 ④

- ① 함수 $y = \sqrt{-3x}$ 에서 $-3x \geq 0$, 즉 $x \leq 0$ 이므로 정의역은 $\{x|x \leq 0\}$ 이다.
② $x \leq 0$ 일 때, $y = \sqrt{-3x} \geq 0$ 이므로 이 함수의 치역은 $\{y|y \geq 0\}$ 이다.

- ③ 함수 $y=\sqrt{-3x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면에 그려지고 제4사분면을 지나지 않는다.



- ④ 함수 $y=\pm\sqrt{ax}$ 의 그래프는 $|a|$ 의 값이 커질수록 x 축으로부터 멀어지므로 함수 $y=\sqrt{-3x}$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-4x}$ 의 그래프보다 x 축에 가깝다.
- ⑤ 두 함수 $y=\sqrt{-3x}$, $y=-\sqrt{-3x}$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.
- 따라서 옳은 것은 ④이다.

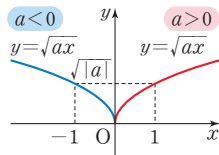
028 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $y=\sqrt{ax}$ 에서 $ax\geq 0$

이때 $a<0$ 이면 $x\leq 0$

즉, 정의역은 $\{x|x\leq 0\}$ 이다.

ㄴ. $a>0$ 이면 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1사분면에 그려지고 제2사분면을 지나지 않는다.



ㄷ. 두 함수 $y=\sqrt{ax}$, $y=\sqrt{-ax}$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

029 답 ④

① 주어진 함수 $y=a\sqrt{bx}$ 의 그래프에서 치역이

$\{y|y\geq 0\}$ 이므로 $a>0$

② 주어진 함수 $y=a\sqrt{bx}$ 의 그래프에서 정의역이

$\{x|x\leq 0\}$ 이므로 $b<0$

③ $a>0$, $b<0$ 으로부터 $a+b$ 의 부호는 알 수 없다.

④ $a>0$, $b<0$ 이므로 $a-b>0$

⑤ $a>0$, $b<0$ 이므로 $b-a<0$

따라서 옳은 것은 ④이다.

030 답 ①

함수 $y=-\sqrt{3-x}+2$ 에서

$3-x\geq 0 \quad \therefore x\leq 3$

따라서 정의역은 $\{x|x\leq 3\}$ 이다.

또, $x\leq 3$ 에서 $\sqrt{3-x}\geq 0$ 이므로

$-\sqrt{3-x}\leq 0 \quad \therefore -\sqrt{3-x}+2\leq 2$

따라서 치역은 $\{y|y\leq 2\}$ 이다.

031 답 $\{y|y\geq 2\}$

함수 $y=\sqrt{x-a}+3a-4$ 의 그래프가 점 (a, a) 를 지나므로

$a=\sqrt{a-a}+3a-4$

$2a=4 \quad \therefore a=2$

즉, 주어진 함수는 $y=\sqrt{x-2}+2$ 이므로

$\sqrt{x-2}\geq 0 \quad \therefore \sqrt{x-2}+2\geq 2$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\geq 2\}$ 이다.

032 답 -4

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 에서 $\sqrt{ax+b}\geq 0$, 즉

$\sqrt{ax+b}+c\geq c$

이때 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\geq 4\}$ 이므로 $c=4$

또, $ax+b\geq 0$ 에서 $ax\geq -b$ ㉠

이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\leq -3\}$ 이므로 $a<0$ 이고 ㉠에서

$x\leq -\frac{b}{a}=-3 \quad \therefore b=3a$ ㉡

즉, 함수 $y=\sqrt{ax+3a}+4$ 의 그래프가 점 $(-5, 6)$ 을 지나므로

$6=\sqrt{-5a+3a}+4, \sqrt{-2a}=2, -2a=4$

$\therefore a=-2, b=-6 (\because \text{㉡})$

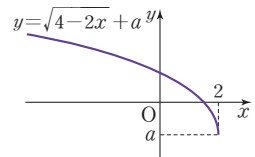
$\therefore a+b+c=-2+(-6)+4=-4$

033 답 $a>-2$

$y=\sqrt{4-2x}+a=\sqrt{-2(x-2)}+a$

즉, 함수 $y=\sqrt{4-2x}+a$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

이때 이 그래프가 제1사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $x=0$ 일 때 y 의 값이 0보다 커야 하므로

$y=\sqrt{4-2\times 0}+a=2+a>0$

$\therefore a>-2$

034 답 ③

① $y=-\sqrt{3-3x}+2$ 에서 $3-3x\geq 0$ 이므로 $x\leq 1$

즉, 정의역은 $\{x|x\leq 1\}$ 이다.

② $y=-\sqrt{3-3x}+2$ 에서 $-\sqrt{3-3x}\leq 0$ 이므로

$-\sqrt{3-3x}+2\leq 2 \quad \therefore y\leq 2$

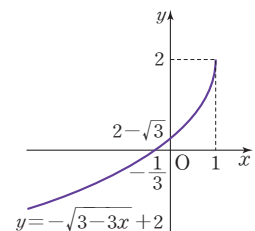
즉, 치역은 $\{y|y\leq 2\}$ 이다.

③ $y=-\sqrt{3-3x}+2=-\sqrt{-3(x-1)}+2$

즉, 함수 $y=-\sqrt{3-3x}+2$ 의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

④ 함수 $y=-\sqrt{3-3x}+2$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



⑤ 함수 $y=-\sqrt{3-3x}+2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 그래프의 식은

$-y=-\sqrt{3-3x}+2 \quad \therefore y=\sqrt{3-3x}-2$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

035 답 ㄷ

ㄱ. 함수 $y=-\sqrt{x+a}+b$ 의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y = -\sqrt{x+a}+b$ 에서 $-\sqrt{x+a} \leq 0$ 이므로

$$-\sqrt{x+a}+b \leq b \quad \therefore y \leq b$$

즉, a 의 값에 관계없이 함수 $y = -\sqrt{x+a}+b$ 의 치역은 $\{y | y \leq b\}$ 이다.

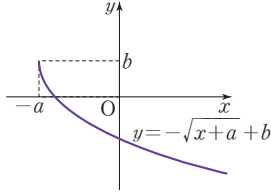
ㄷ. $a > 0, b > 0$ 이면

$y = -\sqrt{x+a}+b$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로 제4

사분면을 반드시 지난다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.



036 답 14

$$y = \sqrt{2x-6}+4 = \sqrt{2(x-3)}+4$$

즉, 함수 $y = \sqrt{2x-6}+4$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$$a=2, p=3, q=4$$

$$\therefore a+pq=2+3 \times 4=14$$

037 답 5

함수 $y = -\sqrt{1-x}+a$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\sqrt{1-(x-b)}+a+2 \quad \therefore y = -\sqrt{-x+b+1}+a+2$$

이 함수의 그래프가 함수 $y = -\sqrt{-x+3}+5$ 의 그래프와 일치하므로

$$b+1=3, a+2=5 \quad \therefore a=3, b=2$$

$$\therefore a+b=3+2=5$$

038 답 ④

$$\neg. y = \sqrt{2x-4}+1 = \sqrt{2(x-2)}+1$$

이 함수의 그래프는 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄴ. } y = \sqrt{1-2x}-3 = \sqrt{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-3$$

이 함수의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y = -\sqrt{2(x-3)}+1$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y = \sqrt{-2x}+3$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 그 그래프를 서로 겹칠 수 있는 함수는 ㄴ, ㄹ이다.

039 답 ②

함수 $y = \sqrt{3x-2}+1$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \sqrt{-3x-2}+1 \quad \therefore y = -\sqrt{-3x-2}-1$$

이 함수의 그래프가 점 $(a, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = -\sqrt{-3a-2}-1$$

$$\sqrt{-3a-2}=1, -3a-2=1, 3a=-3$$

$$\therefore a=-1$$

040 답 13

함수 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\sqrt{-3(x+3)}+1$$

이 함수의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = -\sqrt{-3(-x+3)}+1$$

$$\therefore y = -\sqrt{3x-9}+1$$

이 함수의 그래프가 함수 $y = -\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프와 일치하므로

$$a=3, b=-9, c=1$$

$$\therefore a-b+c=3-(-9)+1=13$$

주의 함수의 그래프를 평행이동과 대칭이동을 모두 하는 경우 이동의 순서에 주의해야 한다. 이동의 순서가 바뀌면 완전히 다른 그래프로 이동되기 때문이다.

041 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. 함수 $y = \sqrt{-5x}$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{5x}$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. 함수 $y = \sqrt{5x}+1$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{5x}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 다음, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄷ. } y = -\sqrt{5-x}+5 = -\sqrt{-(x-5)}+5$$

이 함수의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 다음, x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄹ. } y = -\sqrt{5x-10}+2 = -\sqrt{5(x-2)}+2$$

이 함수의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{5x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프가 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수

$y = -\sqrt{5x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

참고 ㄴ. 함수 $y = -\sqrt{5x}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = -\sqrt{5x} \quad \therefore y = \sqrt{5x}$$

이 함수의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{5x}+1$$

ㄷ. 함수 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = -\sqrt{-x}$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\sqrt{-(x-5)}+5 \quad \therefore y = -\sqrt{5-x}+5$$

042 답 5

주어진 함수의 그래프는 함수 $y = \sqrt{ax}$ ($a > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식은

$$y = \sqrt{a(x+1)}+1 \quad \therefore p=-1, q=1$$

이 함수의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \sqrt{a(0+1)}+1$$

$$\sqrt{a}=2 \quad \therefore a=4$$

$$\therefore a-pq=4-(-1) \times 1=5$$

043 답 27

주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$ ($a<0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식은

$$y=\sqrt{a(x-3)}-1$$

이 함수의 그래프가 점 (0, 2)를 지나므로

$$2=\sqrt{a(0-3)}-1$$

$$\sqrt{-3a}=3, -3a=9 \quad \therefore a=-3$$

따라서 함수의 식은

$$y=\sqrt{-3(x-3)}-1=\sqrt{-3x+9}-1$$

이므로 $b=9, c=-1$

$$\therefore abc=-3 \times 9 \times (-1)=27$$

044 답 ④

$$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

즉, 함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프는

함수 $y=-\sqrt{ax}$ ($a<0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼,

y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다.

이때 점 $\left(-\frac{b}{a}, c\right)$ 가 제1사분면 위의 점이므로

$$-\frac{b}{a}>0, c>0$$

또, $-\frac{b}{a}>0$ 에서 $ab<0$ 이고 $a<0$ 이므로 $b>0$

즉, $a<0, b>0, c>0$ 에서 $abc<0$

한편, 그래프와 y 축의 교점의 y 좌표가 음수이므로

$$y=-\sqrt{b}+c<0 \quad \therefore c<\sqrt{b}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

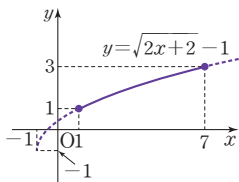
- 045 답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: 1 (2) 최댓값: 5, 최솟값: 2
(3) 최댓값: 2, 최솟값: 1 (4) 최댓값: 2, 최솟값: 1
(5) 최댓값: 1, 최솟값: -3 (6) 최댓값: -1, 최솟값: -3

$$(1) y=\sqrt{2x+2}-1=\sqrt{2(x+1)}-1$$

즉, $1 \leq x \leq 7$ 인 범위에서 함수

$y=\sqrt{2x+2}-1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=7$ 일 때 최댓값은 3,
 $x=1$ 일 때 최솟값은 1이다.

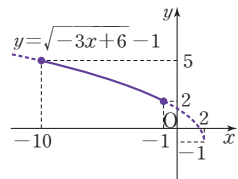


$$(2) y=\sqrt{-3x+6}-1=\sqrt{-3(x-2)}-1$$

즉, $-10 \leq x \leq -1$ 인 범위에서 함수

$y=\sqrt{-3x+6}-1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

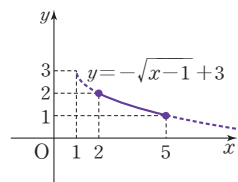
따라서 $x=-10$ 일 때 최댓값은 5,
 $x=-1$ 일 때 최솟값은 2이다.



$$(3) 2 \leq x \leq 5 \text{인 범위에서 함수}$$

$y=-\sqrt{x-1}+3$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=2$ 일 때 최댓값은 2,
 $x=5$ 일 때 최솟값은 1이다.

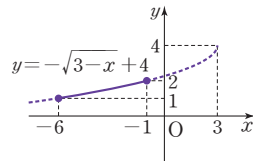


$$(4) y=-\sqrt{3-x}+4=-\sqrt{-(x-3)}+4$$

즉, $-6 \leq x \leq -1$ 인 범위에서 함수

$y=-\sqrt{3-x}+4$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=-1$ 일 때 최댓값은 2,
 $x=-6$ 일 때 최솟값은 1이다.

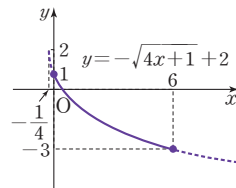


$$(5) y=-\sqrt{4x+1}+2=-\sqrt{4\left(x+\frac{1}{4}\right)}+2$$

즉, $0 \leq x \leq 6$ 인 범위에서 함수

$y=-\sqrt{4x+1}+2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=0$ 일 때 최댓값은 1,
 $x=6$ 일 때 최솟값은 -3이다.

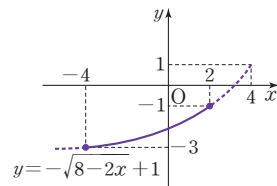


$$(6) y=-\sqrt{8-2x}+1=-\sqrt{-2(x-4)}+1$$

즉, $-4 \leq x \leq 2$ 인 범위에서 함수

$y=-\sqrt{8-2x}+1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=2$ 일 때 최댓값은 -1,
 $x=-4$ 일 때 최솟값은 -3이다.



$$046 \text{ 답 } (1) y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2} \quad (x \geq 0)$$

$$(2) y=x^2+6x+8 \quad (x \geq -3)$$

$$(3) y=x^2-6x+10 \quad (x \leq 3)$$

$$(4) y=-\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{3}{2} \quad (x \leq -2)$$

(1) 함수 $y=\sqrt{3-2x}$ 의 치역이 $\{y|y \geq 0\}$ 이므로 이 함수의 역함수의 정의역은 $\{x|x \geq 0\}$ 이다.

$y=\sqrt{3-2x}$ 의 양변을 제곱하여 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$y^2=3-2x, 2x=-y^2+3 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 구하는 역함수는 } y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2} \quad (x \geq 0)$$

(2) 함수 $y=\sqrt{x+1}-3$ 의 치역이 $\{y|y \geq -3\}$ 이므로 이 함수의 역함수의 정의역은 $\{x|x \geq -3\}$ 이다.

$y=\sqrt{x+1}-3$ 에서 $y+3=\sqrt{x+1}$ 이므로 양변을 제곱하여 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$(y+3)^2=x+1, y^2+6y+9=x+1$$

$$\therefore x=y^2+6y+8$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y=x^2+6x+8$$

$$\text{따라서 구하는 역함수는 } y=x^2+6x+8 \quad (x \geq -3)$$

(3) 함수 $y=-\sqrt{x-1}+3$ 의 치역이 $\{y|y \leq 3\}$ 이므로 이 함수의 역함수의 정의역은 $\{x|x \leq 3\}$ 이다.

$y=-\sqrt{x-1}+3$ 에서 $y-3=-\sqrt{x-1}$ 이므로 양변을 제곱하여 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$(y-3)^2=x-1, y^2-6y+9=x-1$$

$$\therefore x=y^2-6y+10$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y=x^2-6x+10$$

$$\text{따라서 구하는 역함수는 } y=x^2-6x+10 \quad (x \leq 3)$$

- (4) 함수 $y = -\sqrt{-2x+1}-2$ 의 치역이 $\{y|y \leq -2\}$ 이므로 이 함수의 역함수의 정의역은 $\{x|x \leq -2\}$ 이다.

$y = -\sqrt{-2x+1}-2$ 에서 $y+2 = -\sqrt{-2x+1}$ 이므로 양변을 제곱하여 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$(y+2)^2 = -2x+1, y^2+4y+4 = -2x+1$$

$$2x = -y^2-4y-3 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}y^2-2y-\frac{3}{2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y = -\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{3}{2}$$

따라서 구하는 역함수는 $y = -\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{3}{2} \ (x \leq -2)$

047 답 (1) $a = -2, b = 3, c = 1$

(2) $a = 2, b = 5, c = 1$

(3) $a = 1, b = -\frac{9}{2}, c = -1$

- (1) 함수 $f(x) = \sqrt{x-2}+1$ 의 치역이 $\{y|y \geq 1\}$ 이므로 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x|x \geq 1\}$ 이다.

$y = \sqrt{x-2}+1$ 이라 하면 $y-1 = \sqrt{x-2}$ 이므로 양변을 제곱하여 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$(y-1)^2 = x-2, y^2-2y+1 = x-2$$

$$\therefore x = y^2-2y+3$$

x 와 y 를 서로 바꾸어 쓰면 $y = x^2-2x+3$

따라서 $f^{-1}(x) = x^2-2x+3 \ (x \geq 1)$ 이므로

$$a = -2, b = 3, c = 1$$

- (2) 함수 $f(x) = -\sqrt{x-4}+1$ 의 치역이 $\{y|y \leq 1\}$ 이므로 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x|x \leq 1\}$ 이다.

$y = -\sqrt{x-4}+1$ 이라 하면 $y-1 = -\sqrt{x-4}$ 이므로 양변을 제곱하여 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$(y-1)^2 = x-4, y^2-2y+1 = x-4$$

$$\therefore x = y^2-2y+5$$

x 와 y 를 서로 바꾸어 쓰면 $y = x^2-2x+5$

따라서 $f^{-1}(x) = x^2-2x+5 \ (x \leq 1)$ 이므로

$$a = 2, b = 5, c = 1$$

- (3) 함수 $f(x) = -\sqrt{10-2x}-1$ 의 치역이 $\{y|y \leq -1\}$ 이므로 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x|x \leq -1\}$ 이다.

$y = -\sqrt{10-2x}-1$ 이라 하면 $y+1 = -\sqrt{10-2x}$ 이므로 양변을 제곱하여 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$(y+1)^2 = 10-2x, y^2+2y+1 = 10-2x$$

$$2x = -y^2-2y+9 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}y^2-y+\frac{9}{2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸어 쓰면 } y = -\frac{1}{2}x^2-x+\frac{9}{2}$$

따라서 $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2-x+\frac{9}{2} \ (x \leq -1)$ 이므로

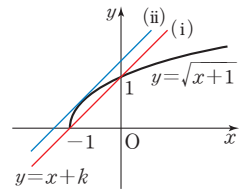
$$a = 1, b = -\frac{9}{2}, c = -1$$

048 답 (1) $1 \leq k < \frac{5}{4}$

(2) $k < 1$ 또는 $k = \frac{5}{4}$

(3) $k > \frac{5}{4}$

무리함수 $y = \sqrt{x+1}$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y = x+k$ 는 기울기가 1 이고 y 절편이 k 인 직선이다.



이때 두 그래프의 교점의 개수가 변하는 경우는 다음 두 가지이다.

- (i) 직선 $y = x+k$ 가 점 $(-1, 0)$ 을 지날 때

$$0 = -1+k \quad \therefore k = 1$$

- (ii) 직선 $y = x+k$ 가 무리함수의 그래프에 접할 때

접점의 x 좌표는 방정식 $\sqrt{x+1} = x+k$ 의 실근이다.

양변을 제곱하면 $x+1 = x^2+2kx+k^2$

$$\therefore x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D = (2k-1)^2 - 4(k^2-1) = 0$$

$$-4k+5=0 \quad \therefore k = \frac{5}{4}$$

- (2) 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때는 직선이 (i) 또는 (i)과 (ii)의 사이에 있을 때이므로

$$1 \leq k < \frac{5}{4}$$

- (2) 두 그래프가 한 점에서 만날 때는 직선이 (i)보다 아래 또는 (ii)일 때이므로

$$k < 1 \text{ 또는 } k = \frac{5}{4}$$

- (3) 두 그래프가 만나지 않을 때는 직선이 (ii)보다 위에 있을 때이므로

$$k > \frac{5}{4}$$

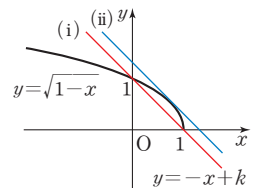
049 답 (1) $1 \leq k < \frac{5}{4}$

(2) $k < 1$ 또는 $k = \frac{5}{4}$

(3) $k > \frac{5}{4}$

$$y = \sqrt{1-x} = \sqrt{-(x-1)}$$

즉, 무리함수 $y = \sqrt{1-x}$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y = -x+k$ 는 기울기가 -1 이고 y 절편이 k 인 직선이다.



이때 두 그래프의 교점의 개수가 변하는 경우는 다음 두 가지이다.

- (i) 직선 $y = -x+k$ 가 점 $(1, 0)$ 을 지날 때

$$0 = -1+k \quad \therefore k = 1$$

- (ii) 직선 $y = -x+k$ 가 무리함수의 그래프에 접할 때

접점의 x 좌표는 방정식 $\sqrt{1-x} = -x+k$ 의 실근이다.

양변을 제곱하면 $1-x = x^2-2kx+k^2$

$$\therefore x^2 - (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D = \{-(2k-1)\}^2 - 4(k^2-1) = 0$$

$$-4k+5=0 \quad \therefore k = \frac{5}{4}$$

- (1) 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때는 직선이 (i) 또는 (i)과 (ii)의 사이에 있을 때이므로

$$1 \leq k < \frac{5}{4}$$

- (2) 두 그래프가 한 점에서 만날 때는 직선이 (i)보다 아래 또는 (ii)일 때이므로

$$k < 1 \text{ 또는 } k = \frac{5}{4}$$

- (3) 두 그래프가 만나지 않을 때는 직선이 (ii)보다 위에 있을 때이므로

$$k > \frac{5}{4}$$

050 답 (1) $1 \leq k < 2$

(2) $k < 1$ 또는 $k = 2$

(3) $k > 2$

$$y = \sqrt{2x+4} = \sqrt{2(x+2)}$$

즉, 무리함수 $y = \sqrt{2x+4}$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이

고, 직선 $y = \frac{1}{2}x + k$ 는 기울기가 $\frac{1}{2}$

이고 y 절편이 k 인 직선이다.

이때 두 그래프의 교점의 개수가 변하는 경우는 다음 두 가지이다.

- (i) 직선 $y = \frac{1}{2}x + k$ 가 점 $(-2, 0)$ 을 지날 때

$$0 = \frac{1}{2} \times (-2) + k \quad \therefore k = 1$$

- (ii) 직선 $y = \frac{1}{2}x + k$ 가 무리함수의 그래프에 접할 때

접점의 x 좌표는 방정식 $\sqrt{2x+4} = \frac{1}{2}x + k$ 의 실근이다.

$$2\sqrt{2x+4} = x + 2k \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$4(2x+4) = x^2 + 4kx + 4k^2$$

$$\therefore x^2 + 2(2k-4)x + 4k^2 - 16 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2k-4)^2 - (4k^2 - 16) = 0$$

$$-16k + 32 = 0 \quad \therefore k = 2$$

- (1) 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때는 직선이 (i) 또는 (i)과 (ii)의 사이에 있을 때이므로

$$1 \leq k < 2$$

- (2) 두 그래프가 한 점에서 만날 때는 직선이 (i)보다 아래 또는 (ii)일 때이므로

$$k < 1 \text{ 또는 } k = 2$$

- (3) 두 그래프가 만나지 않을 때는 직선이 (ii)보다 위에 있을 때이므로

$$k > 2$$

051 답 12

$$y = \sqrt{3x+1} + 3 = \sqrt{3\left(x + \frac{1}{3}\right)} + 3$$

즉, $1 \leq x \leq 5$ 인 범위에서 함수 $y = \sqrt{3x+1} + 3$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

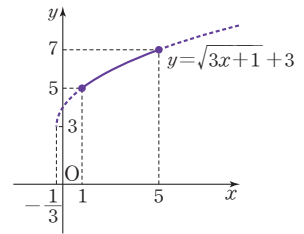
따라서 $x=5$ 일 때 최댓값은

$$M=7$$

$x=1$ 일 때 최솟값은

$$m=5$$

$$\therefore M+m=7+5=12$$



052 답 ③

$$y = -\sqrt{6-2x} + a = -\sqrt{-2(x-3)} + a$$

즉, 함수 $y = -\sqrt{6-2x} + a$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 클수록 y 의 값도 크다.

따라서 $-5 \leq x \leq 1$ 에서 주어진 함수는 $x=-5$ 일 때 최소이고 $x=1$ 일 때 최대이다.

$$\therefore b = -5$$

또, $x=-5$ 일 때 최솟값이 -3 이므로

$$-3 = -\sqrt{6-2 \times (-5)} + a$$

$$-3 = -4 + a \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a+b=1+(-5)=-4$$

053 답 7

$$y = -\sqrt{2x+a} + 5 = -\sqrt{2\left(x + \frac{a}{2}\right)} + 5$$

즉, 함수 $y = -\sqrt{2x+a} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 클수록 y 의 값은 작다.

따라서 $0 \leq x \leq 6$ 에서 주어진 함수는 $x=6$ 일 때 최소이고 $x=0$ 일 때 최대이다.

이때 주어진 함수의 최솟값이 1이므로

$$1 = -\sqrt{2 \times 6 + a} + 5$$

$$\sqrt{a+12} = 4, a+12=16 \quad \therefore a=4$$

즉, 주어진 함수는 $y = -\sqrt{2x+4} + 5$ 이므로 최댓값은

$$b = -\sqrt{4} + 5 = 3$$

$$\therefore a+b=4+3=7$$

054 답 13

함수 $y = -\sqrt{2x-4} + 3$ 의 치역이 $\{y|y \leq 3\}$ 이므로 이 함수의 역함수의 정의역은 $\{x|x \leq 3\}$ 이다.

$y = -\sqrt{2x-4} + 3$ 에서 $y-3 = -\sqrt{2x-4}$ 이므로 양변을 제곱하여 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$(y-3)^2 = 2x-4, y^2 - 6y + 9 = 2x-4$$

$$2x = y^2 - 6y + 13 \quad \therefore x = \frac{1}{2}y^2 - 3y + \frac{13}{2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{13}{2}$$

따라서 구하는 역함수는 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{13}{2}$ ($x \leq 3$)이므로

$$a = -3, b = 13, c = 3$$

$$\therefore a+b+c = -3+13+3=13$$

055 답 ①

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 이 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$f(x)=\sqrt{x-3}+2$ 의 치역이 $\{y|y\geq 2\}$ 이므로 그 역함수

$g(x)$ 의 정의역은 $\{x|x\geq 2\}$ 이다.

$y=\sqrt{x-3}+2$ 라 하고 $y-2=\sqrt{x-3}$ 의 양변을 제곱하여 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$(y-2)^2=x-3, y^2-4y+4=x-3$$

$$\therefore x=y^2-4y+7$$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y=x^2-4x+7$

즉, $g(x)=x^2-4x+7$ ($x\geq 2$)이므로

$$a=-4, b=7$$

$$\therefore g(a+b)=g(-4+7)=g(3)$$

$$=3^2-4\times 3+7=4$$

056 답 1

함수 $f(x)=\sqrt{6-2x}-3$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 에 대하여

$f^{-1}(-1)=a$ 라 하면 역함수의 성질에 의하여

$$f(a)=-1$$

즉, $-1=\sqrt{6-2a}-3$ 에서

$$\sqrt{6-2a}=2, 6-2a=4, 2a=2 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore f^{-1}(-1)=1$$

다른 풀이

$f(x)=\sqrt{6-2x}-3$ 의 치역이 $\{y|y\geq -3\}$ 이므로 그 역함수

$f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x|x\geq -3\}$ 이다.

$y=\sqrt{6-2x}-3$ 이라 하면 $y+3=\sqrt{6-2x}$ 이므로 양변을 제곱하여 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$(y+3)^2=6-2x, y^2+6y+9=6-2x$$

$$2x=-y^2-6y-3 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}y^2-3y-\frac{3}{2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{3}{2}$$

따라서 $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{3}{2}$ ($x\geq -3$)이므로

$$f^{-1}(-1)=-\frac{1}{2}\times(-1)^2-3\times(-1)-\frac{3}{2}=1$$

057 답 3

함수 $y=-\sqrt{ax+b}+5$ 의 그래프가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$2=-\sqrt{-a+b}+5$$

$$\sqrt{-a+b}=3 \quad \therefore -a+b=9 \quad \dots\dots ㉠$$

또, 역함수의 그래프가 점 $(-1, -10)$ 을 지나면 함수

$y=-\sqrt{ax+b}+5$ 의 그래프는 점 $(-10, -1)$ 을 지나므로

$$-1=-\sqrt{-10a+b}+5$$

$$\sqrt{-10a+b}=6 \quad \therefore -10a+b=36 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3, b=6$

$$\therefore a+b=-3+6=3$$

중단원 점검 문제

III-3 | 무리함수

199~200쪽

01 답 -4

$\frac{\sqrt{2x+6}+\sqrt{2-x}}{x-1}$ 의 값이 실수가 되려면

$$2x+6\geq 0, 2-x\geq 0, x-1\neq 0$$

즉, $x\geq -3, x\leq 2, x\neq 1$ 에서

$$-3\leq x<1 \text{ 또는 } 1<x\leq 2$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 의 값은 $-3, -2, -1, 0, 2$ 이므로 구하는 합은

$$-3+(-2)+(-1)+0+2=-4$$

02 답 ③

$\sqrt{n+x}+\sqrt{2n-x}$ 의 값이 실수가 되려면

$$n+x\geq 0, 2n-x\geq 0$$

$$\therefore -n\leq x\leq 2n$$

이때 n 이 자연수이므로 조건을 만족시키는 정수 x 의 개수는

$$f(n)=2n-(-n)+1=3n+1$$

$$\therefore f(10)-f(3)=(3\times 10+1)-(3\times 3+1)=21$$

03 답 ④

$\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}=-\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ 이 성립하므로

$$x+3\geq 0, x-2<0$$

즉, $-3\leq x<2$ 이므로 $x+4>0, x-2<0$

$$\therefore \sqrt{x^2+8x+16}-\sqrt{x^2-4x+4}$$

$$=\sqrt{(x+4)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$$

$$=x+4-\{-(x-2)\}$$

$$=2x+2$$

04 답 2

$f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+1}}{(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1})(\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+1})}$$

$$=\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+1}}{(2x-1)-(2x+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\dots+\frac{1}{f(12)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\dots+\frac{\sqrt{25}-\sqrt{23}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{1}}{2}=\frac{5-1}{2}=2$$

05 답 2

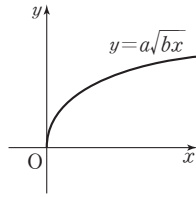
$x=2\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}-\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}=\frac{(x+2)-(x-2)}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}=\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4}}=\frac{4}{\sqrt{4}}=2$$

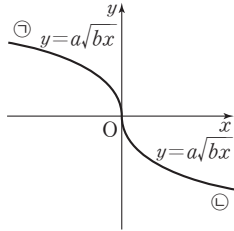
06 답 ⑤

- ① a 의 값에 관계없이 $b > 0$ 일 때 정의역은 $\{x | x \geq 0\}$ 이다.
 ② b 의 값에 관계없이 $a < 0$ 일 때 치역은 $\{y | y \leq 0\}$ 이다.
 ③ 그래프는 함수 $y = a\sqrt{-bx}$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.
 ④ $a > 0, b > 0$ 이면 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지난다.



- ⑤ $ab < 0$ 일 때, $a > 0, b < 0$ 또는 $a < 0, b > 0$

$a > 0, b < 0$ 이면 그래프는 오른쪽 그림의 ㉠과 같고, $a < 0, b > 0$ 이면 그래프는 오른쪽 그림의 ㉡과 같으므로 $ab < 0$ 이면 그래프는 제2사분면 또는 제4사분면을 지난다.

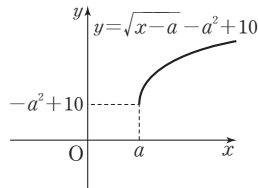


따라서 옳은 것은 ⑤이다.

07 답 3

정의역이 $\{x | x \geq a\}$ 인 함수 $y = \sqrt{x-a} - a^2 + 10$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $-a^2 + 10$ 만큼 평행이동한 것이다.

이 그래프가 오직 하나의 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$$\begin{aligned} a \geq 0, -a^2 + 10 \geq 0 \\ -a^2 + 10 \geq 0 \text{에서 } a^2 \leq 10 \\ \therefore -\sqrt{10} \leq a \leq \sqrt{10} \\ \therefore 0 \leq a \leq \sqrt{10} \end{aligned}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 3이다.

08 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

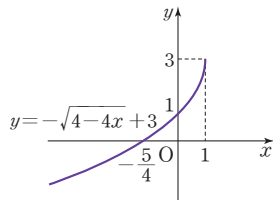
ㄱ. 함수 $y = -\sqrt{4-4x} + 3$ 에 대하여

$$\begin{aligned} 4-4x \geq 0 \quad \therefore x \leq 1 \\ \sqrt{4-4x} \geq 0 \text{에서 } -\sqrt{4-4x} \leq 0 \\ \therefore y = -\sqrt{4-4x} + 3 \leq 3 \end{aligned}$$

즉, 주어진 함수의 정의역은 $\{x | x \leq 1\}$ 이고 치역은 $\{y | y \leq 3\}$ 이다.

ㄴ. $y = -\sqrt{4-4x} + 3 = -\sqrt{-4(x-1)} + 3$

즉, 이 함수의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{-4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고 제4사분면을 지나지 않는다.



ㄷ. $x = -3$ 일 때, $y = -\sqrt{4-4 \times (-3)} + 3 = -1$

즉, 그래프는 점 $(-3, -1)$ 을 지난다.

ㄹ. 함수 $y = -\sqrt{4-4x} + 3$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = -\sqrt{4+4x} + 3 \quad \therefore y = \sqrt{4x+4} - 3$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{4(x-1)} + 4 - 3 + 3 \quad \therefore y = \sqrt{4x}$$

즉, 함수 $y = -\sqrt{4-4x} + 3$ 의 그래프는 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y = \sqrt{4x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

09 답 9

함수 $y = \sqrt{a(3-x)} + 2$, 즉 $y = \sqrt{-a(x-3)} + 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-a(x-p-3)} + 2 + q$$

이 함수의 그래프가 함수 $y = \sqrt{-3x} - 1$ 의 그래프와 일치하므로

$$-a = -3, -p-3 = 0, 2+q = -1$$

따라서 $a = 3, p = -3, q = -3$ 이므로

$$a-p-q = 3 - (-3) - (-3) = 9$$

10 답 24

함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y = \sqrt{-ax}$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-a(x-b)} + 4 \quad \therefore y = \sqrt{-ax+ab} + 4$$

이 함수의 그래프가 함수 $y = \sqrt{-2x+6} + c$ 의 그래프와 일치하므로

$$-a = -2, ab = 6, 4 = c$$

따라서 $a = 2, b = 3, c = 4$ 이므로

$$abc = 2 \times 3 \times 4 = 24$$

11 답 ③

① 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

$$② y = -\sqrt{2x+4} = -\sqrt{2(x+2)}$$

이 함수의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

$$③ y = -\sqrt{2-x} + 1 = -\sqrt{-(x-2)} + 1$$

이 함수의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$④ y = \sqrt{2x-6} + 2 = \sqrt{2(x-3)} + 2$$

이 함수의 그래프는 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$$⑤ y = \sqrt{2-2x} - 3 = \sqrt{-2(x-1)} - 3$$

이 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프가 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수

$$y = -\sqrt{2x}$$

의 그래프와 겹쳐지지 않는 것은 ③이다.

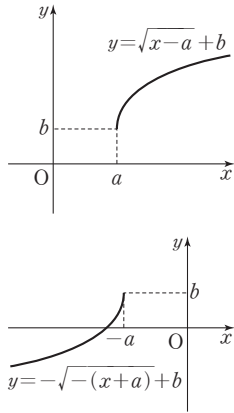
12 답 ④

$y = \sqrt{x-a} + b$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore a > 0, b > 0$$

이때 함수 $y = -\sqrt{-(x+a)} + b$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 제1, 4사분면을 지나지 않는다.



13 답 ②

$$y = \sqrt{ax+b} + c = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$$

이 함수의 그래프는 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

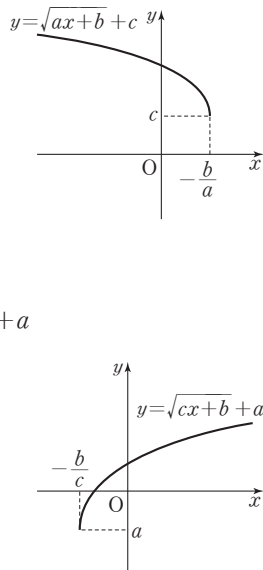
$$\text{즉, } a < 0, -\frac{b}{a} > 0, c > 0 \text{이므로}$$

$$a < 0, b > 0, c > 0$$

$$\text{한편, } y = \sqrt{cx+b} + a = \sqrt{c\left(x + \frac{b}{c}\right)} + a$$

이 함수의 그래프는 함수 $y = \sqrt{cx}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{c}$ 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다.



14 답 3

$$f(x) = \sqrt{-ax+1} = \sqrt{-a\left(x - \frac{1}{a}\right)}$$

즉, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-ax}$ ($a > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{a}$ 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 커질수록 y 의 값은 작아진다.

따라서 $-5 \leq x \leq -1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = -5$ 일 때 최댓값이 4이므로

$$f(-5) = 4 \text{에서 } \sqrt{5a+1} = 4$$

$$5a+1=16, 5a=15$$

$$\therefore a=3$$

15 답 102

$(f \circ g)(x) = x$ 이므로 두 함수 $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{2} + 1$, $g(x)$ 는 서로 역함수 관계이다.

이때 $g(2) = k$ 라 하면 $f(k) = 2$ 이므로

$$f(k) = \frac{\sqrt{k-2}}{2} + 1 = 2$$

$$\frac{\sqrt{k-2}}{2} = 1, \sqrt{k-2} = 2, k-2=4 \quad \therefore k=6$$

즉, $g(2) = 6$ 이므로

$$(g \circ g)(2) = g(g(2)) = g(6)$$

..... ㉠

$g(6) = l$ 이라 하면 $f(l) = 6$ 이므로

$$f(l) = \frac{\sqrt{l-2}}{2} + 1 = 6$$

$$\frac{\sqrt{l-2}}{2} = 5, \sqrt{l-2} = 10, l-2=100 \quad \therefore l=102$$

따라서 $g(6) = 102$ 이므로 ㉠에서

$$(g \circ g)(2) = g(g(2)) = g(6) = 102$$

다른 풀이

$(f \circ g)(x) = x$ 이므로 두 함수 $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{2} + 1$, $g(x)$ 는 서로 역함수 관계이다.

$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{2} + 1$ 의 치역이 $\{y | y \geq 1\}$ 이므로 그 역함수 $g(x)$ 의 정의역은 $\{x | x \geq 1\}$ 이다.

$y = \frac{\sqrt{x-2}}{2} + 1$ 이라 하면 $2y-2 = \sqrt{x-2}$ 이므로 양변을 제곱하여 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$(2y-2)^2 = x-2, 4y^2-8y+4 = x-2$$

$$\therefore x = 4y^2 - 8y + 6$$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = 4x^2 - 8x + 6$

$$\therefore g(x) = 4x^2 - 8x + 6 \quad (x \geq 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore (g \circ g)(2) &= g(g(2)) = g(4 \times 2^2 - 8 \times 2 + 6) \\ &= g(6) = 4 \times 6^2 - 8 \times 6 + 6 = 102 \end{aligned}$$

16 답 3

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 점 $(1, 2)$ 에서 만나므로

$$f(1) = 2, g(1) = 2$$

$$\therefore f(1) = 2, f(2) = 1$$

$$f(x) = \sqrt{ax+2} + b \text{에서}$$

$$f(1) = 2 \text{이므로 } \sqrt{a+2} + b = 2$$

$$\sqrt{a+2} = 2-b, a+2 = (2-b)^2$$

$$\therefore a = (2-b)^2 - 2$$

..... ㉠

$$f(2) = 1 \text{이므로 } \sqrt{2a+2} + b = 1$$

$$\sqrt{2a+2} = 1-b, 2a+2 = (1-b)^2$$

$$\therefore a = \frac{(1-b)^2 - 2}{2}$$

..... ㉡

$$\text{㉠, ㉡에서 } (2-b)^2 - 2 = \frac{(1-b)^2 - 2}{2}$$

$$2(b^2 - 4b + 2) = b^2 - 2b - 1$$

$$b^2 - 6b + 5 = 0, (b-1)(b-5) = 0$$

$$\therefore b = 1 \quad (\because b < 5), a = -1 \quad (\because \text{㉠})$$

따라서 $f(x) = \sqrt{-x+2} + 1$ 이므로

$$f(-2) = \sqrt{-(-2)+2} + 1 = 2+1=3$$