풍 산 자 필 · 수 · 유 · 형

정답과 풀이

미적분 I

I ❯ 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한

001

① $\lim_{x\to2-} f(x)=0$, $\lim_{x\to2+} f(x)=-4$

즉, $\lim_{x\to2-} f(x)\neq\lim_{x\to2+} f(x)$이므로 $\lim_{x\to2} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

② $\lim_{x\to2-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to2+} f(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to2} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x\to2-} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to2+} f(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to2} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

④ $\lim_{x\to2-} f(x)=2$, $\lim_{x\to2+} f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to2} f(x)=2$

⑤ $\lim_{x\to2-} f(x)=0$, $\lim_{x\to2+} f(x)=2$

즉, $\lim_{x\to2-} f(x)\neq\lim_{x\to2+} f(x)$이므로 $\lim_{x\to2} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $\lim_{x\to2} f(x)$의 값이 존재하는 것은 ④이다.

정답_ ④

002

ㄱ. $\lim_{x\to-3-} f(x)=0$, $\lim_{x\to-3+} f(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to-3} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to-1-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to-1+} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to-1} f(x)=-1$

ㄷ. $\lim_{x\to1-} f(x)=1$, $\lim_{x\to1+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=1$

ㄹ. $\lim_{x\to2-} f(x)=-2$, $\lim_{x\to2+} f(x)=-3$

즉, $\lim_{x\to2-} f(x)\neq\lim_{x\to2+} f(x)$이므로 $\lim_{x\to2} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

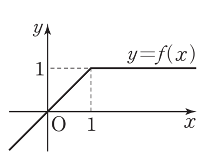
따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ③

003

① 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to1} f(x)=1$

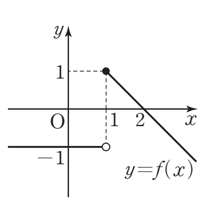


② 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to1+} f(x)=1$

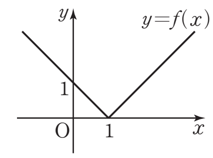
즉, $\lim_{x\to1-} f(x)\neq\lim_{x\to1+} f(x)$이므로

$\lim_{x\to1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.



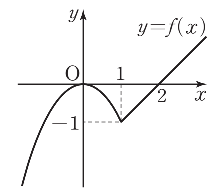
③ $f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x<1)\\ x-1 & (x\geq1)\end{cases}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to1} f(x)=0$



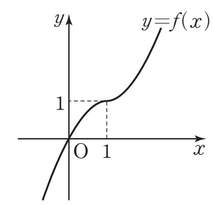
④ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to1} f(x)=-1$



⑤ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to1} f(x)=1$



따라서 $\lim_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하지 않는 것은 ②이다.

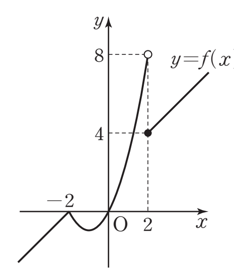
정답_ ②

004

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & (|x|\geq2)\\ x^2+2x & (|x|<2)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x+2 & (x\leq-2\text{ 또는 }x\geq2)\\ x^2+2x & (-2<x<2)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $\lim_{x\to2-} f(x)=8$, $\lim_{x\to2+} f(x)=4$, 즉 $\lim_{x\to2-} f(x)\neq\lim_{x\to2+} f(x)$이므로 $\lim_{x\to2} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값은 2이다.

정답_ 2

005

함수 $f(x)$가 임의의 실수 k에 대하여 $\lim_{x\to k} f(x)$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to-1} f(x)$, $\lim_{x\to1} f(x)$의 값이 존재한다.

(i) $\lim_{x\to-1} f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-}(2x^2-1)=1$

$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}(-x^2+a)=-1+a$

에서

$1=-1+a \qquad \therefore a=2$

(ii) $\lim_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}(-x^2+a)=-1+a$

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+} b=b$

에서

$-1+a=b \qquad \therefore b=1\ (\because a=2)$

(i), (ii)에서 $a=2$, $b=1$이므로

$a+b=2+1=3$

정답_ ⑤

006

$\lim_{x\to0-} f(x)=-2$, $\lim_{x\to1+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0-} f(x)+\lim_{x\to1+} f(x)=-2+1=-1$

정답_ ②

007

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}(-x^2+2x+3)=4$

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}(3x-5)=-2$

$\therefore \lim_{x\to1-} f(x)+\lim_{x\to1+} f(x)=4+(-2)=2$

정답_ ④

008

부등식 $\lim_{x\to a-} f(x)>\lim_{x\to a+} f(x)$를 만족시키는 실수 a의 값은 좌극한이 우극한보다 큰 x의 값을 찾으면 된다.

이때

$\lim_{x\to-2-} f(x)=0$, $\lim_{x\to-2+} f(x)=2$,

$\lim_{x\to0-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to0+} f(x)=-2$,

$\lim_{x\to3-} f(x)=2$, $\lim_{x\to3+} f(x)=3$

이므로 좌극한이 우극한보다 큰 것은 $x=0$일 때이다.

$\therefore a=0$

정답_ 0

009

$x<-1$일 때

$f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{-(x+1)}=\dfrac{(x+1)(2x-1)}{-(x+1)}=-2x+1$

$x>-1$일 때

$f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)(2x-1)}{x+1}=2x-1$

따라서

$\alpha=\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-}(-2x+1)=3$

$\beta=\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}(2x-1)=-3$

이므로

$2\alpha+\beta=2\times3+(-3)=3$

정답_ 3

010

원 $x^2+y^2=5$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

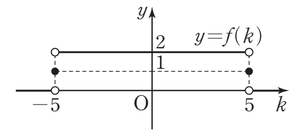
$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$, 즉 $|k|<5$이면 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, 즉 $|k|=5$이면 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}$, 즉 $|k|>5$이면 원과 직선은 만나지 않는다.

즉, $f(k)=\begin{cases} 0 & (k<-5 \text{ 또는 } k>5) \\ 1 & (k=\pm5) \\ 2 & (-5<k<5) \end{cases}$ 이므로

함수 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서

$a=\lim_{k\to-5+} f(k)+\lim_{k\to5-} f(k)$

$=2+2=4$

$b=f(-5)+f(5)=1+1=2$

이므로

$a+b=4+2=6$

정답_ ④

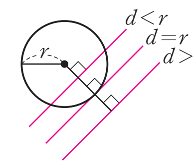
참고 **원과 직선의 위치 관계**

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원과 직선의 위치 관계는

① $d<r$ ⇨ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $d=r$ ⇨ 한 점에서 만난다. (접한다.)

③ $d>r$ ⇨ 만나지 않는다.



011

$x\to1-$이면 x의 값은 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워지는 수를 나타낸다.

$0<x<1$일 때 $2<x+2<3$이므로 $[x+2]=2$

$x\to1+$이면 x의 값은 1보다 크면서 1에 한없이 가까워지는 수를 나타낸다.

$1<x<2$일 때 $-1<x-2<0$이므로 $[x-2]=-1$

$\therefore \lim_{x\to1-}[x+2]+\lim_{x\to1+}[x-2]=2+(-1)=1$

정답_ ④

012

① $x\to-1-$이면 x의 값은 -1보다 작으면서 -1에 한없이 가까워지는 수를 나타낸다.

$-2<x<-1$일 때 $0<x+2<1$이므로 $[x+2]=0$

$\therefore \lim_{x\to-1-}\dfrac{[x+2]}{x+2}=\dfrac{0}{1}=0$

② $x\to-1+$이면 x의 값은 -1보다 크면서 -1에 한없이 가까워지는 수를 나타낸다.

$-1<x<0$일 때 $[x]=-1$이므로

$\lim_{x\to-1+}\dfrac{[x]-1}{[x]}=\dfrac{-1-1}{-1}=2$

③ $x\to0+$이면 x의 값은 0보다 크면서 0에 한없이 가까워지는 수를 나타낸다.

$0<x<1$일 때 $-1<x-1<0$이므로 $[x-1]=-1$

$\therefore \lim_{x\to0+}\dfrac{[x-1]}{x-1}=\dfrac{-1}{-1}=1$

④ $x\to1+$이면 x의 값은 1보다 크면서 1에 한없이 가까워지는 수를 나타낸다.

$1<x<2$일 때 $2<x+1<3$, $-1<x-2<0$이므로

$[x+1]=2$, $[x-2]=-1$

$\therefore \lim_{x\to1+}\dfrac{[x-2]}{[x+1]}=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

⑤ $x\to2-$이면 x의 값은 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워지는 수를 나타낸다.

$1<x<2$일 때 $2<x+1<3$이므로 $[x+1]=2$

$\therefore \lim_{x\to2-}\dfrac{[x+1]}{x+1}=\dfrac{2}{3}$

따라서 값이 가장 큰 것은 ②이다.

정답_ ②

013

$\lim_{x\to2} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to2-} f(x)$, $\lim_{x\to2+} f(x)$의 값이 각각 존재하고 그 값이 같아야 한다.

(i) $x \longrightarrow 2-$이면 x의 값은 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워지는 수를 나타낸다.

$1<x<2$일 때 $[x]=1$이므로 $\lim_{x\to2-}[x]^3=1^3=1$

한편, $x \longrightarrow 2-$이면 $x^3 \longrightarrow 8-$이므로 x^3의 값은 8보다 작으면서 8에 한없이 가까워지는 수를 나타낸다.

$7<x^3<8$일 때 $[x^3]=7$이므로 $\lim_{x\to2-}[x^3]=7$

$\therefore \lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2-}([x]^3+a[x^3]+1)$

$=1+7a+1=7a+2$

(ii) $x \longrightarrow 2+$이면 x의 값은 2보다 크면서 2에 한없이 가까워지는 수를 나타낸다.

$2<x<3$일 때 $[x]=2$이므로 $\lim_{x\to2+}[x]^3=2^3=8$

한편, $x \longrightarrow 2+$이면 $x^3 \longrightarrow 8+$이므로 x^3의 값은 8보다 크면서 8에 한없이 가까워지는 수를 나타낸다.

$8<x^3<9$일 때 $[x^3]=8$이므로 $\lim_{x\to2+}[x^3]=8$

$\therefore \lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2+}([x]^3+a[x^3]+1)$

$=8+8a+1=8a+9$

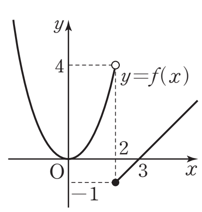
(i), (ii)에서 $7a+2=8a+9$이어야 하므로

$a=-7$

정답_ -7

014

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 2+$일 때 $t \longrightarrow -1+$이므로

$\lim_{x\to2+} f(f(x))=\lim_{t\to-1+} f(t)=(-1)^2=1$

정답_ ②

015

$x-1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow -1+$이므로

$\lim_{x\to0+} f(x-1)=\lim_{t\to-1+} f(t)=-1$

$f(x)=s$로 놓으면 $x \longrightarrow 1+$일 때 $s \longrightarrow -1-$이므로

$\lim_{x\to1+} f(f(x))=\lim_{s\to-1-} f(s)=2$

$\therefore \lim_{x\to0+} f(x-1)+\lim_{x\to1+} f(f(x))=-1+2=1$

정답_ ④

016

ㄱ. $g(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -1$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to-1} f(g(x))=\lim_{t\to0+} f(t)=-1$

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x\to0-} g(f(x))=\lim_{t\to1-} g(t)=0$

$x \longrightarrow 0+$일 때 $t=-1$이므로

$\lim_{x\to0+} g(f(x))=g(-1)=0$

즉, $\lim_{x\to0-} g(f(x))=\lim_{x\to0+} g(f(x))$이므로 $\lim_{x\to0} g(f(x))=0$

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 1-$일 때 $t=-1$이므로

$\lim_{x\to1-} g(f(x))=g(-1)=0$

$x \longrightarrow 1+$일 때 $t \longrightarrow 1+$이므로

$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{t\to1+} g(t)=2$

즉, $\lim_{x\to1-} g(f(x))\neq\lim_{x\to1+} g(f(x))$이므로 $\lim_{x\to1} g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

ㄹ. $g(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 2-$일 때 $t \longrightarrow 1+$이므로

$\lim_{x\to2-} f(g(x))=\lim_{t\to1+} f(t)=1$

$x \longrightarrow 2+$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x\to2+} f(g(x))=\lim_{t\to1-} f(t)=-1$

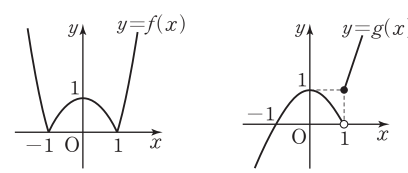
즉, $\lim_{x\to2-} f(g(x))\neq\lim_{x\to2+} f(g(x))$이므로 $\lim_{x\to2} f(g(x))$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ①

017

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$g(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1-$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to1-} f(g(x))=\lim_{t\to0+} f(t)=1$

$f(x)=s$로 놓으면 $x \longrightarrow -1$일 때 $s \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to-1} g(f(x))=\lim_{s\to0+} g(s)=1$

$\therefore \lim_{x\to1-} f(g(x))+\lim_{x\to-1} g(f(x))=1+1=2$

정답_ 2

018

$\lim_{x\to1}(x^2-1)f(x)=\lim_{x\to1}(x+1)(x-1)f(x)$

$=\lim_{x\to1}(x+1)\times\lim_{x\to1}(x-1)f(x)$

$=2\times3=6$

정답_ ②

019

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)+3g(x)}{9-f(x)g(x)}=3$에서

$\dfrac{\lim_{x\to1} f(x)+3\lim_{x\to1} g(x)}{\lim_{x\to1} 9-\lim_{x\to1} f(x)\times\lim_{x\to1} g(x)}=3$

$\dfrac{3+3k}{9-3k}=3$, $3+3k=27-9k$

$12k=24 \qquad \therefore k=2$

정답_ ⑤

020

$\lim_{x\to2}\{3f(x)+g(x)\}=8$ …… ㉠

$\lim_{x\to2}\{f(x)-2g(x)\}=5$ …… ㉡

$2\times$㉠$+$㉡을 하면

$2\lim_{x\to2}\{3f(x)+g(x)\}+\lim_{x\to2}\{f(x)-2g(x)\}=2\times8+5$

$\lim_{x\to2}[\{6f(x)+2g(x)\}+\{f(x)-2g(x)\}]=21$

$\lim_{x\to2}7f(x)=21,\ 7\lim_{x\to2}f(x)=21$

$\therefore \lim_{x\to2}f(x)=3$

이때 ㉠에서 $3\lim_{x\to2}f(x)+\lim_{x\to2}g(x)=8$이므로

$3\times3+\lim_{x\to2}g(x)=8 \qquad \therefore \lim_{x\to2}g(x)=-1$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to2}f(x)g(x)&=\lim_{x\to2}f(x)\times\lim_{x\to2}g(x)\\&=3\times(-1)=-3\end{aligned}$$

정답_ -3

021

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\{f(x)-2x^3\}=1$에서

$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x^3}-2\right\}=1,\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}-2=1 \qquad \therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=3$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+3x^2}{3f(x)-2x+1}&=\lim_{x\to\infty}\frac{4\times\frac{f(x)}{x^3}+3\times\frac{1}{x}}{3\times\frac{f(x)}{x^3}-2\times\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\\&=\frac{4\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}+3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{3\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}-2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}\\&=\frac{4\times3+3\times0}{3\times3-2\times0+0}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

정답_ ⑤

022

$f(x)-x=h(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to0}h(x)=5$이고 $f(x)=h(x)+x$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}f(x)&=\lim_{x\to0}\{h(x)+x\}\\&=\lim_{x\to0}h(x)+\lim_{x\to0}x\\&=5+0=5\end{aligned}$$

$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}=3,\ \lim_{x\to0}f(x)=5$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}g(x)&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\times f(x)\right\}\\&=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}\times\lim_{x\to0}f(x)\\&=3\times5=15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to0}\frac{6g(x)}{(x^2-3)\{f(x)-2\}}&=\frac{6\lim_{x\to0}g(x)}{\lim_{x\to0}(x^2-3)\times\lim_{x\to0}\{f(x)-2\}}\\&=\frac{6\times15}{-3\times(5-2)}=-10\end{aligned}$$

정답_ -10

023

$2f(x)-3g(x)=h(x)$로 놓으면

$\lim_{x\to\infty}h(x)=1,\ f(x)=\frac{h(x)+3g(x)}{2}$

$\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}h(x)=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}&=\lim_{x\to\infty}\frac{4\times\frac{h(x)+3g(x)}{2}+g(x)}{3\times\frac{h(x)+3g(x)}{2}-g(x)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{4h(x)+14g(x)}{3h(x)+7g(x)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{4\times\frac{h(x)}{g(x)}+14}{3\times\frac{h(x)}{g(x)}+7}\\&=\frac{4\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}+\lim_{x\to\infty}14}{3\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}+\lim_{x\to\infty}7}\\&=\frac{4\times0+14}{3\times0+7}=2\end{aligned}$$

정답_ ②

024

ㄱ. $\lim_{x\to a}g(x)$의 값이 존재한다고 가정하고 $\lim_{x\to a}f(x)=m$, $\lim_{x\to a}g(x)=n$이라고 하면

$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=m-n$

즉, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 존재하므로 모순이다.

따라서 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값은 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x<a)\\0 & (x\ge a)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}0 & (x<a)\\1 & (x\ge a)\end{cases}$이면

$\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값은 모두 존재하지 않지만

$f(x)+g(x)=1$이므로

$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=1$

즉, $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값이 모두 존재하지 않아도

$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값은 존재할 수 있다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to a}f(x)=m,\ \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=n$이라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}g(x)&=\lim_{x\to a}\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\times f(x)\right\}\\&=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}\times\lim_{x\to a}f(x)=mn\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값도 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ㄱ, ㄷ

025

(1) $\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+3)}{x}=\lim_{x\to0}(x^2+3)=3$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+1)=2$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}(2x+1)=5$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)=12$

정답_ (1) 3　(2) 2　(3) 5　(4) 12

026

$$\lim_{x\to1}\frac{6(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{6(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2-1)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{6(x^2+1)}{f(x)}$$
$$=\frac{6\times2}{f(1)}=\frac{12}{f(1)}$$

이므로

$\dfrac{12}{f(1)}=3$　　$\therefore f(1)=4$

정답_ ②

027

$$\lim_{x\to-1}\frac{\{f(x)\}^2-3f(x)}{x^2f(x)-f(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{\{f(x)-3\}f(x)}{(x+1)(x-1)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-3}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-3}{x+1}\times\lim_{x\to-1}\frac{1}{x-1}$$
$$=6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$$

정답_ -3

028

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+(k-2)x-2k}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+k)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+k)=k+2$$

이므로

$k+2=9$　　$\therefore k=7$

정답_ ④

029

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x^3+8)(x^3-8)}{x^4-16}+\lim_{x\to2}\frac{(x^3+8)(x^3-8)}{x^4-16}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)(x^2+4)}$$
$$+\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)(x^2+4)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)}{x^2+4}$$
$$+\lim_{x\to2}\frac{(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)}{x^2+4}$$
$$=\frac{12\times4}{8}+\frac{4\times12}{8}=12$$

정답_ ⑤

030

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)=3a^2$$

이므로

$3a^2=3,\ a^2=1$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{x^3-ax^2+a^2x-a^3}{x-a}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+1)=2$$

정답_ ②

다른 풀이

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-ax^2+a^2x-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{ax^2-a^2x}{x-a}$$
$$=3-\lim_{x\to a}ax$$
$$=3-a^2$$
$$=3-1\ (\because a=1)$$
$$=2$$

031

$y=f^{-1}(x)$로 놓으면 $f(y)=x$이므로

$x=9y^3+4y$

$x\longrightarrow0$일 때 $y\longrightarrow f^{-1}(0)$, 즉 $y\longrightarrow0$이므로

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $f(0)=0$　　$\therefore f^{-1}(0)=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{f^{-1}(x)}{2x}=\lim_{y\to0}\frac{y}{2(9y^3+4y)}$$
$$=\lim_{y\to0}\frac{1}{2(9y^2+4)}$$
$$=\frac{1}{2\times4}=\frac{1}{8}$$

따라서 $m=8,\ n=1$이므로

$m+n=8+1=9$

정답_ ③

032

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=2$

(4) $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(\sqrt{x+1}+2)=4$

정답_ (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) 2 (4) 4

033

$\lim_{x\to16}\frac{(x-16)f(x)}{\sqrt{x}-4}=\lim_{x\to16}\frac{(x-16)(\sqrt{x}+4)f(x)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}$

$=\lim_{x\to16}\frac{(x-16)(\sqrt{x}+4)f(x)}{x-16}$

$=\lim_{x\to16}(\sqrt{x}+4)f(x)$

$=\lim_{x\to16}(\sqrt{x}+4)\times\lim_{x\to16}f(x)$

$=8\times\frac{1}{2}=4$

정답_ ④

034

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}$

$=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$

정답_ ③

035

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{9-x}-\sqrt{9+x}}{\sqrt{4+2x}-\sqrt{4-2x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{9-x}-\sqrt{9+x})(\sqrt{9-x}+\sqrt{9+x})(\sqrt{4+2x}+\sqrt{4-2x})}{(\sqrt{4+2x}-\sqrt{4-2x})(\sqrt{4+2x}+\sqrt{4-2x})(\sqrt{9-x}+\sqrt{9+x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-2x(\sqrt{4+2x}+\sqrt{4-2x})}{4x(\sqrt{9-x}+\sqrt{9+x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-(\sqrt{4+2x}+\sqrt{4-2x})}{2(\sqrt{9-x}+\sqrt{9+x})}$

$=\frac{-(2+2)}{2\times(3+3)}=-\frac{1}{3}$

정답_ ②

036

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2+2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}$

$=\frac{0-0}{1+0+0}=0$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3+\frac{2}{x}}{1+\frac{5}{x}}=\infty$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+2}{2x^2-4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$

$=\frac{4+0+0}{2-0+0}=2$

정답_ (1) 0 (2) ∞ (3) 2

037

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}}$

$=\frac{1+3}{1+0}=4$

정답_ ④

038

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+3x}{\sqrt{9x^2+1}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}-1}$

$=\frac{1+3}{3-1}=2$

정답_ ⑤

039

$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2\{f(x)\}^2}{2x^2-3f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+2\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{2-\frac{3}{x}\times\frac{f(x)}{x}}$

$=\frac{4+2\times4^2}{2-0\times4}=18$

정답_ ③

040

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$

$=\frac{2}{1+1}=1$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}$

$=\frac{6}{1+1}=3$

정답_ (1) 1 (2) 3

041

$x=-t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\{\sqrt{f(2x)}-\sqrt{f(-2x)}\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\{\sqrt{f(-2t)}-\sqrt{f(2t)}\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{8t^2+8t}-\sqrt{8t^2-8t})$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{8t^2+8t}-\sqrt{8t^2-8t})(\sqrt{8t^2+8t}+\sqrt{8t^2-8t})}{\sqrt{8t^2+8t}+\sqrt{8t^2-8t}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{16t}{\sqrt{8t^2+8t}+\sqrt{8t^2-8t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{16}{\sqrt{8+\frac{8}{t}}+\sqrt{8-\frac{8}{t}}}$$
$$=\frac{16}{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

정답_ ⑤

042

$x=[x]+\alpha\ (0\le\alpha<1)$로 놓으면 $[x]=x-\alpha$이므로

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+[x]}-3x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+x-\alpha}-3x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+x-\alpha}-3x)(\sqrt{9x^2+x-\alpha}+3x)}{\sqrt{9x^2+x-\alpha}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\alpha}{\sqrt{9x^2+x-\alpha}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\alpha}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x}-\frac{\alpha}{x^2}}+3}$$
$$=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

정답_ ②

043

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x^2+5}{x+1}-3\right)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{x^2+5-3(x+1)}{x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}\times\frac{x^2-3x+2}{x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{(x-1)(x-2)}{x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x+1}$$
$$=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

정답_ ①

044

$$\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+9}}-\frac{1}{3}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{x}\times\frac{3-\sqrt{x+9}}{3\sqrt{x+9}}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\times\frac{3-\sqrt{x+9}}{\sqrt{x+9}}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{(3-\sqrt{x+9})(3+\sqrt{x+9})}{\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{-x}{\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{-\frac{1}{\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}\right\}$$
$$=-\frac{1}{3\times(3+3)}=-\frac{1}{18}$$

정답_ $-\frac{1}{18}$

045

$\frac{1}{n}=x$로 놓으면 $n=\frac{1}{x}$

$n \longrightarrow \infty$일 때 $x \longrightarrow 0$이고 $f(2)=14$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left\{f\left(\frac{1}{n}+2\right)-f(2)\right\}^2$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\{f(x+2)-14\}^2$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\{(x+2)^2+4(x+2)+2-14\}^2$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+8x)^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(x+8)^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}(x+8)^2=64$$

정답_ ③

046

$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2+x+p}{x^3+1}=q$에서 $x \longrightarrow -1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}(x^3-x^2+x+p)=0$이므로

$-1-1-1+p=0 \qquad \therefore p=3$

$$\therefore q=\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2+x+p}{x^3+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2+x+3}{x^3+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-2x+3)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2x+3}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{6}{3}=2$$

$\therefore p+q=3+2=5$

정답_ ③

047

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-1}=b$에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(\sqrt{x+a}-2)=0$이므로

$\sqrt{1+a}-2=0,\ \sqrt{1+a}=2$

$1+a=4 \qquad \therefore a=3$

$$\therefore b=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$
$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore a+4b=3+4\times\frac{1}{4}=4$

정답_ ②

048

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{12+x^2}-2x}{ax+b}=-1$에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}(ax+b)=0$이므로

$2a+b=0\qquad\therefore b=-2a$ $\cdots\cdots$ ㉠

따라서

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{12+x^2}-2x}{ax+b}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{12+x^2}-2x}{ax-2a}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{12+x^2}-2x)(\sqrt{12+x^2}+2x)}{a(x-2)(\sqrt{12+x^2}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{12-3x^2}{a(x-2)(\sqrt{12+x^2}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{-3(x+2)(x-2)}{a(x-2)(\sqrt{12+x^2}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{-3(x+2)}{a(\sqrt{12+x^2}+2x)}$$
$$=\frac{-3\times4}{a(4+4)}=-\frac{3}{2a}$$

즉, $-\frac{3}{2a}=-1$이므로 $a=\frac{3}{2}$

$a=\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$b=-2a=-2\times\frac{3}{2}=-3$

$\therefore 2a-b=2\times\frac{3}{2}-(-3)=6$

정답_ ④

049

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=-2$에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}f(x)=0$이므로 $f(3)=0$

$27-9a-3b=0\qquad\therefore b=9-3a$ $\cdots\cdots$ ㉠

따라서 $f(x)=x^3-ax^2-bx=x^3-ax^2-(9-3a)x$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^3-ax^2-(9-3a)x}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)(x+3-a)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}x(x+3-a)=3(6-a)$$

즉, $3(6-a)=-2$이므로 $a=\frac{20}{3}$

$a=\frac{20}{3}$을 ㉠에 대입하면

$b=9-3a=9-3\times\frac{20}{3}=-11$

$\therefore 3a-b=3\times\frac{20}{3}-(-11)=31$

정답_ 31

050

$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=a$이므로 $a=1$

또, $\lim_{x\to1}\frac{x^2+bx+c}{x^2+2x-3}=1$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+bx+c)=0$이므로

$1+b+c=0\qquad\therefore c=-b-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

따라서

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+bx+c}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+bx-b-1}{x^2+2x-3}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+b+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+b+1}{x+3}=\frac{b+2}{4}$$

이므로

$\frac{b+2}{4}=1\qquad\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$c=-2-1=-3$

$\therefore a+b-c=1+2-(-3)=6$

정답_ ⑤

051

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2ax}-\sqrt{x^2-2ax})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2ax}-\sqrt{x^2-2ax})(\sqrt{x^2+2ax}+\sqrt{x^2-2ax})}{\sqrt{x^2+2ax}+\sqrt{x^2-2ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4ax}{\sqrt{x^2+2ax}+\sqrt{x^2-2ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4a}{\sqrt{1+\frac{2a}{x}}+\sqrt{1-\frac{2a}{x}}}$$
$$=\frac{4a}{1+1}=2a$$

즉, $2a=8$이므로 $a=4$

정답_ ④

052

$x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{px^2+qx}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{pt^2-qt}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{pt^2-qt}-t)(\sqrt{pt^2-qt}+t)}{\sqrt{pt^2-qt}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(p-1)t^2-qt}{\sqrt{pt^2-qt}+t}$$

이때 극한값이 존재하려면 분자의 차수가 분모의 차수보다 작거나 같아야 하므로

$p-1=0\qquad\therefore p=1$

따라서

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{px^2+qx}+x)=\lim_{t\to\infty}\frac{(p-1)t^2-qt}{\sqrt{pt^2-qt}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-qt}{\sqrt{t^2-qt}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-q}{\sqrt{1-\frac{q}{t}}+1}$$
$$=\frac{-q}{1+1}=-\frac{q}{2}$$

이므로

$-\dfrac{q}{2}=3 \qquad \therefore q=-6$

$\therefore p+q=1+(-6)=-5$

정답_ ①

053

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+ax+3}-\sqrt{ax^2+3})$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x^2+ax+3}-\sqrt{ax^2+3})(\sqrt{2x^2+ax+3}+\sqrt{ax^2+3})}{\sqrt{2x^2+ax+3}+\sqrt{ax^2+3}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-a)x^2+ax}{\sqrt{2x^2+ax+3}+\sqrt{ax^2+3}}$

이때 극한값이 존재하려면 분자의 차수가 분모의 차수보다 작거나 같아야 하므로

$2-a=0 \qquad \therefore a=2$

$\displaystyle\therefore b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+ax+3}-\sqrt{ax^2+3})$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-a)x^2+ax}{\sqrt{2x^2+ax+3}+\sqrt{ax^2+3}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2+3}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}}$

$\displaystyle=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\displaystyle\therefore ab=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

정답_ $\sqrt{2}$

054

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=5$에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$ — $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=(x-2)(x+k)$ (k는 상수)로 놓으면

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+k)}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}(x+k)=2+k$

이므로

$2+k=5 \qquad \therefore k=3$

즉, $f(x)=(x-2)(x+3)$이므로

$f(-3)=-5\times0=0$

정답_ ⑤

참고 인수 정리

다항식 $f(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지면 $f(a)=0$이다. 또, $f(a)=0$이면 $f(x)$는 $x-a$로 나누어떨어진다.

055

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x}=10$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 10인 이차함수임을 알 수 있다.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=40$에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to3}f(x)=0$이므로 $f(3)=0$

(i), (ii)에서 $f(x)=10(x-3)(x+k)$ (k는 상수)로 놓으면

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{10(x-3)(x+k)}{x-3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}10(x+k)=10(3+k)$

이므로

$10(3+k)=40,\ 3+k=4$

$\therefore k=1$

따라서 $f(x)=10(x-3)(x+1)$이므로

$f(1)=10\times(-2)\times2=-40$

정답_ ①

056

(i) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

(i), (ii)에서 $f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓으면

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}(x-1)(ax+b)=-b$

즉, $-b=1$이므로 $b=-1$ …… ㉠

또,

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}x(ax+b)=a+b$

이므로

$a+b=1 \qquad \therefore a=2$ ($\because$ ㉠)

따라서 $f(x)=x(x-1)(2x-1)$이므로

$f(2)=2\times1\times3=6$

정답_ ②

057

(i) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=4$에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

(i), (ii)에서 $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항함수)로 놓으면

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}(x-2)Q(x)=-Q(1)$

이므로

$-Q(1)=-1 \qquad \therefore Q(1)=1$ …… ㉠

또,

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x-1)Q(x)=Q(2)$$

이므로

$Q(2)=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 다항식 $Q(x)$ 중에서 차수가 가장 낮은 것은 일차식이므로 $Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$a+b=1$, $2a+b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(3x-2)$이므로

$g(3)=2\times1\times7=14$

정답_ 14

058

$\lim_{x\to1}(2x-4)=-2$, $\lim_{x\to1}(x^2-3)=-2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to1}f(x)=-2$

정답_ ①

059

양의 실수 x에 대하여 $2x+1>0$이므로 $2x+1<f(x)<2x+3$의 각 변을 제곱하면

$(2x+1)^2<\{f(x)\}^2<(2x+3)^2$

위의 식의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}<\frac{(2x+3)^2}{x^2+1}$$

$x^2+1>0$이므로 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+1}{x^2+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=4$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+12x+9}{x^2+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=4$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}=4$$

정답_ ③

060

$x^2-2x+5=(x-1)^2+4>0$이므로

$$\frac{|x-2|}{x^2-2x+5}\geq0$$

$mx-3\leq f(x)\leq mx+3$의 각 변에 $\frac{|x-2|}{x^2-2x+5}$를 곱하면

$$\frac{|x-2|(mx-3)}{x^2-2x+5}\leq\frac{|x-2|f(x)}{x^2-2x+5}\leq\frac{|x-2|(mx+3)}{x^2-2x+5}$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|x-2|(mx-3)}{x^2-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)(mx-3)}{x^2-2x+5}$$

$x\longrightarrow\infty$이므로
$x-2>0$
$\therefore |x-2|=x-2$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{mx^2-(2m+3)x+6}{x^2-2x+5}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{m-\frac{2m+3}{x}+\frac{6}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=m$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|x-2|(mx+3)}{x^2-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)(mx+3)}{x^2-2x+5}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{mx^2-(2m-3)x-6}{x^2-2x+5}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{m-\frac{2m-3}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=m$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|x-2|f(x)}{x^2-2x+5}=m \qquad \therefore m=7$$

정답_ 7

061

$\mathrm{A}(1,\ 2+\sqrt{3})$, $\mathrm{B}\left(t,\ \frac{2}{t}+\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{H}\left(1,\ \frac{2}{t}+\sqrt{3}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=2-\frac{2}{t}$, $\overline{\mathrm{BH}}=t-1$

$$\therefore \lim_{t\to1}\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}=\lim_{t\to1}\frac{2-\frac{2}{t}}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{\frac{2(t-1)}{t}}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{2}{t}=2$$

정답_ ⑤

062

$\mathrm{A}(0,\ 4)$, $\mathrm{P}(a,\ b)$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{a^2+(b-4)^2}$ …… ㉠

한편, 중심이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$이고 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 b이고, 두 원이 외접하므로

$\overline{\mathrm{PA}}=1+b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{a^2+(b-4)^2}=1+b$이므로

$a^2+(b-4)^2=(1+b)^2 \qquad \therefore a^2=10b-15$

이때 $\overline{\mathrm{PH}}=a$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}^2=a^2=10b-15$

$a\longrightarrow\infty$일 때 $b\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{PA}}}=\lim_{b\to\infty}\frac{10b-15}{1+b}$$
$$=\lim_{b\to\infty}\frac{10-\frac{15}{b}}{\frac{1}{b}+1}=10$$

정답_ ④

063

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b ($a<b$)라고 하면 a, b는 x에 대한 이차방정식 $x^2-tx-1=tx+t+1$, 즉 $x^2-2tx-t-2=0$의 두 실근이다.

$x^2-2tx-t-2=0$에서 $x=t\pm\sqrt{t^2+t+2}$이므로

$a=t-\sqrt{t^2+t+2}$, $b=t+\sqrt{t^2+t+2}$

$\therefore\ b-a=t+\sqrt{t^2+t+2}-(t-\sqrt{t^2+t+2})$

$=2\sqrt{t^2+t+2}$ …… ㉠

이때 두 점 A, B가 직선 $y=tx+t+1$ 위의 점이므로

$\mathrm{A}(a,\ at+t+1)$, $\mathrm{B}(b,\ bt+t+1)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-a)^2+\{(bt+t+1)-(at+t+1)\}^2}$

$=\sqrt{(b-a)^2+(b-a)^2t^2}$

$=\sqrt{(b-a)^2(1+t^2)}$

$=\sqrt{4(t^2+t+2)(1+t^2)}$ ($\because$ ㉠)

$=2\sqrt{(t^2+t+2)(1+t^2)}$

$\therefore\ \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{t^2}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2\sqrt{(t^2+t+2)(1+t^2)}}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}2\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{t}+\dfrac{2}{t^2}\right)\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)}$

$=2\sqrt{1\times1}=2$

정답_ ④

064

$\lim\limits_{x\to4-}f(x)=\lim\limits_{x\to4-}(x-2a)^2$

$=(4-2a)^2$

$=4a^2-16a+16$ …… ❶

$\lim\limits_{x\to4+}f(x)=\lim\limits_{x\to4+}(ax-9)$

$=4a-9$ …… ❷

이때 $\lim\limits_{x\to4}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x\to4-}f(x)=\lim\limits_{x\to4+}f(x)$이어야 하므로

$4a^2-16a+16=4a-9$, $4a^2-20a+25=0$

$(2a-5)^2=0\qquad\therefore\ a=\dfrac{5}{2}$ …… ❸

정답_ $\dfrac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{x\to4-}f(x)$의 값을 a에 대한 식으로 나타내기	30 %
❷ $\lim\limits_{x\to4+}f(x)$의 값을 a에 대한 식으로 나타내기	30 %
❸ a의 값 구하기	40 %

065

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)\times\lim\limits_{x\to0-}g(x)$

$=0\times1=0$

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)\times\lim\limits_{x\to0+}g(x)$

$=0\times0=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=0$ …… ❶

$\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to1-}g(x)$

$=1+(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to1+}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}g(x)$

$=-1+1=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=0$ …… ❷

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)+\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=0+0=0$ …… ❸

정답_ 0

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)$의 값 구하기	40 %
❷ $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$의 값 구하기	40 %
❸ $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)+\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$의 값 구하기	20 %

066

$x=1$일 때 $x^2+x=1^2+1=2>0$이므로 $x\longrightarrow1$일 때 $|x^2+x|=x^2+x$이다.

$\therefore\ A=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x^2+x|-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}(x+2)=3$ …… ❶

$-x^2+6x-9=-(x-3)^2$이므로 $x\longrightarrow3$일 때 $-x^2+6x-9$는 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워지는 값이다.

즉, $t=-x^2+6x-9$로 놓으면 $x\longrightarrow3$일 때 $t\longrightarrow0-$이므로

$B=\lim\limits_{x\to3}[-x^2+6x-9]$

$=\lim\limits_{t\to0-}[t]=-1$ …… ❷

$\therefore\ A+B=3+(-1)=2$ …… ❸

정답_ 2

채점 기준	비율
❶ A의 값 구하기	40 %
❷ B의 값 구하기	40 %
❸ $A+B$의 값 구하기	20 %

067

$-2<x<2$일 때 $x^2-4<0$이므로 $|x^2-4|=-(x^2-4)$

$\therefore\ a=\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{x^2-2x}{|x^2-4|}$

$=\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{x^2-2x}{-(x^2-4)}$

$=\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{x(x-2)}{-(x+2)(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to2-}\left(-\dfrac{x}{x+2}\right)$

$=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$ …… ❶

$x>0$일 때 $|x|=x$이므로

$b=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{3x+|x|}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{3x+x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0+}4=4$ …… ❷

$\therefore\ ab=-\dfrac{1}{2}\times4=-2$ …… ❸

정답_ -2

채점 기준	비율
❶ a의 값 구하기	40 %
❷ b의 값 구하기	40 %
❸ ab의 값 구하기	20 %

068

조건 ㈎에서 $f(x)-x^2$은 최고차항의 계수가 $2a$인 일차함수이다.
따라서 $f(x)-x^2=2ax+b$ (b는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^2+2ax+b$ ······ ❶

조건 ㈏의 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\frac{1}{4}$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분자)$\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로

$f(1)=1+2a+b=0\qquad\therefore b=-2a-1$ ······ ㉠

······ ❷

$\therefore f(x)=x^2+2ax-2a-1$

따라서

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+2ax-2a-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+2a+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+2a+1}=\frac{1}{2a+2}$$

이므로 $\frac{1}{2a+2}=\frac{1}{4}$, $2a+2=4\qquad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-3$ ······ ❸

즉, $f(x)=x^2+2x-3$이므로

$af(3)=1\times(9+6-3)=12$ ······ ❹

정답_ 12

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 $x^2+2ax+b$로 나타내기	20 %
❷ b를 a에 대한 식으로 나타내기	20 %
❸ a, b의 값 구하기	40 %
❹ $af(3)$의 값 구하기	20 %

069

원점 O와 점 $P\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$에서

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2}=\sqrt{t^2+\frac{1}{4}t^4}$ ······ ❶

한편, $M\left(\frac{1}{2}t, \frac{1}{4}t^2\right)$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{4}t^2$의 두 근이다.

$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{4}t^2$에서 $x^2=\frac{1}{2}t^2\qquad\therefore x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}t$

$\therefore \overline{AB}=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}t-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right|=\sqrt{2}t$ ······ ❷

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{\overline{AB}}{\overline{OP}}=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{t^2+\frac{1}{4}t^4}}=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}t^2}}=\sqrt{2}$$ ······ ❸

정답_ $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{OP}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타내기	30 %
❷ $\overline{AB}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타내기	40 %
❸ $\lim_{t\to0+}\frac{\overline{AB}}{\overline{OP}}$의 값 구하기	30 %

070

$f(-1)=f(0)=f(2)=2$이므로

$f(-1)-2=f(0)-2=f(2)-2=0$

따라서 삼차방정식 $f(x)-2=0$은 -1, 0, 2를 세 근으로 가지므로

$f(x)-2=ax(x+1)(x-2)$ (a는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

ㄱ. $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-2}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{ax(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{ax(x+1)}=\frac{1}{6a}$

ㄴ. $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{f(x-2)}=\frac{f(2)-2}{f(0)}=\frac{2-2}{2}=0$

ㄷ. $\frac{f(x-2)}{x-2}$에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고 (분자)$\longrightarrow2$, 즉 $\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\infty$이므로 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ③

071

(ⅰ) $-2<x<2$일 때, $\min(x, 2)=x$이므로

$$f(x)=\min(x, 2)-\frac{x}{x+2}=x-\frac{x}{x+2}=\frac{x(x+2)-x}{x+2}=\frac{x^2+x}{x+2}$$

(ⅱ) $x=2$일 때, $\min(x, 2)=\min(2, 2)=2$이므로

$$f(2)=\min(2, 2)-\frac{2}{2+2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

(ⅲ) $x>2$일 때, $\min(x, 2)=2$이므로

$$f(x)=\min(x, 2)-\frac{x}{x+2}=2-\frac{x}{x+2}=\frac{2(x+2)-x}{x+2}=\frac{x+4}{x+2}$$

(ⅰ)~(ⅲ)에서

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{\frac{x^2+x}{x+2}-\frac{3}{2}}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{2x^2-x-6}{2(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to2-}\frac{(2x+3)(x-2)}{2(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to2-}\frac{2x+3}{2(x+2)}=\frac{7}{2\times4}=\frac{7}{8}$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{\frac{x+4}{x+2}-\frac{3}{2}}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{-x+2}{2(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to2+}\frac{-(x-2)}{2(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to2+}\frac{-1}{2(x+2)}=\frac{-1}{2\times4}=-\frac{1}{8}$$

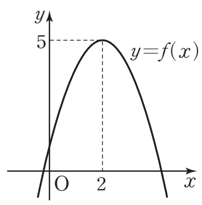
$$\therefore \lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{7}{8}-\left(-\frac{1}{8}\right)=1$$

정답_ ④

072

이차함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$를 만족시키므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

또, 이차함수 $f(x)$의 최댓값이 5이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(2,\ 5)$를 꼭짓점으로 하고 위로 볼록한 포물선이다.



즉, $x\longrightarrow 2-$일 때 $f(x)\longrightarrow 5-$이므로

$\lim_{x\to2-}[f(x)]=4$

$x\longrightarrow 2+$일 때 $f(x)\longrightarrow 5-$이므로

$\lim_{x\to2+}[f(x)]=4$

$\therefore \lim_{x\to2}[f(x)]=4$

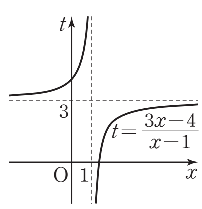
정답_ 4

073

$\dfrac{3x-4}{x-1}=t$로 놓으면

$t=\dfrac{3x-4}{x-1}=3-\dfrac{1}{x-1}$

함수 $t=\dfrac{3x-4}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow 3-$이다.



$\therefore \lim_{x\to\infty}f\left(\dfrac{3x-4}{x-1}\right)=\lim_{t\to3-}f(t)=2$

$g(x)=s$로 놓으면 $x\longrightarrow 3+$일 때

$s\longrightarrow 2+$이므로

$\lim_{x\to3+}f(g(x))=\lim_{s\to2+}f(s)=3$

$\therefore \lim_{x\to\infty}f\left(\dfrac{3x-4}{x-1}\right)+\lim_{x\to3+}f(g(x))=2+3=5$

정답_ 5

074

조건 (가)에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 (분모) $\longrightarrow 4-p$이므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각해 보자.

(i) $p=4$일 때

$$q=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-p}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

이때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+px^2+qx}{x^n}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+4x^2+\frac{1}{4}x}{x^n}\right|$$

이므로 $n=1$이면

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+4x^2+\frac{1}{4}x}{x^n}\right|=\lim_{x\to0}\left|x^2+4x+\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$$

즉, 조건 (나)를 만족시킨다.

한편, $n\geq2$이면

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+4x^2+\frac{1}{4}x}{x^n}\right|=\infty$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $p\neq4$일 때

$$q=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-p}=\frac{2-2}{4-p}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+px^2+qx}{x^n}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+px^2}{x^n}\right| \quad\cdots\cdots\ ㉠$$

ⓐ $p=0$일 때, ㉠은 $\lim_{x\to0}\left|\dfrac{x^3}{x^n}\right|$이고

$n=1$이면

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^n}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x}\right|=\lim_{x\to0}|x^2|=0$$

$n=2$이면

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^n}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^2}\right|=\lim_{x\to0}|x|=0$$

$n=3$이면

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^n}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^3}\right|=\lim_{x\to0}|1|=1$$

$n\geq4$이면

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^n}\right|=\infty$$

따라서 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ⓑ $p\neq0$일 때, ㉠은

$n=1$이면

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+px^2}{x^n}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+px^2}{x}\right|=\lim_{x\to0}|x^2+px|=0$$

$n=2$이면

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+px^2}{x^n}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+px^2}{x^2}\right|=\lim_{x\to0}|x+p|=|p|$$

$n\geq3$이면

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+px^2}{x^n}\right|=\infty$$

따라서 조건 (나)를 만족시키는 경우는 $n=2$이고 $|p|=\dfrac{1}{4}$일 때이다.

(i), (ii)에서 $p=4$, $q=\dfrac{1}{4}$ 또는 $p=\pm\dfrac{1}{4}$, $q=0$일 때 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 값이 존재한다.

따라서 구하는 순서쌍은 $\left(4,\ \dfrac{1}{4}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{4},\ 0\right)$, $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$의 3개이다.

정답_ 3

075

조건 (나)에서 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$이고, 조건 (가)에서 $f(x)g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이므로

$f(x)g(x)=x(2x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

따라서 조건 (나)의 식은

$$\lim_{x\to0}\frac{x(2x^2+ax+b)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2+ax+b}{x}=-4$$

위의 식에서 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(2x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

따라서 $f(x)g(x)=x^2(2x+a)$이고 조건 ㈏에서

$\lim_{x\to0}\frac{x^2(2x+a)}{x^2}=\lim_{x\to0}(2x+a)=a$이므로 $a=-4$

$\therefore\ f(x)g(x)=2x^2(x-2)$

이때 $f(2)$가 최대가 되는 $f(x)$는 $f(x)=2x^2$이므로 구하는 최댓값은 $f(2)=8$이다.

정답_ ③

076

0이 아닌 상수 k에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=k$라고 하면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}(x-a)}{\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}(x-a)}=\frac{k-(a-a)}{k+(a-a)}=1\neq\frac{2}{3}$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이어야 하므로 $f(a)=0$이다.

즉, 최고차항의 계수가 1인 이차방정식 $f(x)=0$의 한 실근이 a이므로 $\alpha=a$라고 하면

$f(x)=(x-a)(x-\beta)$

$$\therefore\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-\beta)-(x-a)}{(x-a)(x-\beta)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-\beta-1)}{(x-a)(x-\beta+1)}=\lim_{x\to a}\frac{x-\beta-1}{x-\beta+1}=\frac{a-\beta-1}{a-\beta+1}$$

즉, $\frac{a-\beta-1}{a-\beta+1}=\frac{2}{3}$이므로

$3a-3\beta-3=2a-2\beta+2\qquad\therefore\ a-\beta=5$

$\therefore\ |\alpha-\beta|=5$

정답_ 5

077

조건 ㈎의 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x+1)}{x+1}$에서 $x\longrightarrow-1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x+1)=0$이므로 $f(0)=0$ …… ㉠

또, 조건 ㈎의 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}$에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 함수 $f(x)$는 x, $x-2$를 인수로 가지므로

$f(x)=x(x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)

로 놓을 수 있다.

함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\neq0$, n은 자연수)이라고 하면 조건 ㈏에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-5x^2}{f(x)+x^3}$의 값이 존재하고, 그 값이 0이 아니므로 $n\geq3$이다.

(i) $n=3$일 때

$\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-5x^2}{f(x)+x^3}=\frac{2a}{a+1}$

이므로

$\frac{2a}{a+1}=1$, $2a=a+1$

$\therefore\ a=1$

(ii) $n>3$일 때

$\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-5x^2}{f(x)+x^3}=\frac{2a}{a}=2$

이므로 조건 ㈏를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x-2)(x+k)$ (k는 상수)

의 꼴이다.

따라서 $f(x)$로 가능한 것은 ②이다.

정답_ ②

078

조건 ㈎에서 $2x^2-5x\leq f(x)\leq2x^2+2$이므로 각 변을 x^2으로 나누면

$\frac{2x^2-5x}{x^2}\leq\frac{f(x)}{x^2}\leq\frac{2x^2+2}{x^2}$

$x^2>0$ ($\because$ x는 양의 실수)이므로 x^2으로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

이때

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{5}{x}\right)=2$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{2}{x^2}\right)=2$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$

따라서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. …… ㉠

조건 ㈏에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(x)=2(x-1)(x+k)$ (k는 상수)

로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x+k)}{(x+3)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2(x+k)}{x+3}=\frac{2(1+k)}{4}=\frac{1+k}{2}$$

이므로

$\frac{1+k}{2}=\frac{1}{4}$, $1+k=\frac{1}{2}$

$\therefore\ k=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-1)(2x-1)$이므로

$f(3)=2\times5=10$

정답_ 10

079

함수 $y=-ax^2+a$의 그래프와 정사각형이 제1사분면에서 만나는 점을 $(t,\ -at^2+a)$ ($t>0$)라고 하면 정사각형의 가로의 길이는 $2t$, 세로의 길이는 $-at^2+a$이다.

이때 정사각형의 가로, 세로의 길이는 같으므로

$2t=-at^2+a$, $at^2+2t-a=0$

$\therefore t=\dfrac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}$ $(\because t>0)$

즉,

$$S(a)=(2t)^2=\left(2\times\dfrac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right)^2$$
$$=4\times\dfrac{1-2\sqrt{1+a^2}+1+a^2}{a^2}$$
$$=\dfrac{4a^2+8-8\sqrt{1+a^2}}{a^2}$$

이므로

$$\lim_{a\to\infty}S(a)=\lim_{a\to\infty}\dfrac{4a^2+8-8\sqrt{1+a^2}}{a^2}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\left(4+\dfrac{8}{a^2}-8\sqrt{\dfrac{1}{a^4}+\dfrac{1}{a^2}}\right)=4$$

정답_ ⑤

02 함수의 연속

080

① $f(2)$가 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다. └(분모)$=0$인 x에서 정의되지 않는다.

② $f(2)=2$, $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x^2-x)=2$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

③ $f(2)=3$, $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}|x-2|=0$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

④ $f(2)=-1$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)=12$$

$\therefore \lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

⑤ $f(2)=1$

$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}1=1$$
$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to2+}\dfrac{x-2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}1=1$$

$\therefore \lim_{x\to2}f(x)=1$

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

따라서 $x=2$에서 연속인 함수는 ②, ⑤이다.

정답_ ②, ⑤

참고 여러 가지 함수의 연속성

① 다항함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

② 유리함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)\neq0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

③ 무리함수 $y=\sqrt{f(x)}$는 $f(x)\geq0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

④ 함수 $y=[x]$는 $x\neq n$ (n은 정수)인 모든 실수 x에서 연속이다.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

081

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $x^2+3\neq0$이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

이때

$g(0)=0$

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}x=0$, $\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}x^2=0$

에서 $\lim_{x\to0}g(x)=0$이므로

$\lim_{x\to0}g(x)=g(0)$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-2$에서 연속이어야 한다.

이때

$h(-2)=-1$

$$\lim_{x\to-2} h(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}(x-2)=-4$$

이므로

$\lim_{x\to-2} h(x)\neq h(-2)$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ②

082

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이므로 $\lim_{x\to1} f(x)=4-f(1)$에서

$f(1)=4-f(1)$, $2f(1)=4$

$\therefore f(1)=2$

정답_ ②

083

함수 $f(x)$는 $x^2-3x-10=0$인 x에서 정의되지 않는다.

$x^2-3x-10=0$에서 $(x+2)(x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=5$

따라서 $a=-2$, $b=5$ 또는 $a=5$, $b=-2$이므로

$a+b=-2+5=3$

정답_ 3

084

$$f(x)=1-\cfrac{1}{x-\cfrac{6}{x+1}}=1-\cfrac{1}{\cfrac{x(x+1)-6}{x+1}}$$
$$=1-\cfrac{1}{\cfrac{x^2+x-6}{x+1}}=1-\frac{x+1}{x^2+x-6}$$
$$=\frac{x^2+x-6-(x+1)}{x^2+x-6}=\frac{x^2-7}{x^2+x-6}$$

함수 $f(x)$는 $x+1=0$, $x^2+x-6=0$인 x에서 정의되지 않으므로

$x+1=0$에서 $x=-1$

$x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=-1$, $x=2$에서 불연속이므로 구하는 곱은

$-3\times(-1)\times2=6$

정답_ ⑤

085

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 끊어져 있으므로 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 불연속이다.

또, $\lim_{x\to1-} f(x)=0$, $\lim_{x\to1+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)\neq\lim_{x\to1+} f(x)$

즉, $\lim_{x\to1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 -1, 0, 1의 3개이고, $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 1의 1개이므로 $a=3$, $b=1$

$\therefore ab=3\times1=3$

정답_ ③

086

ㄱ. $\lim_{x\to3} f(x)=0$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to1-} f(x)=1$, $\lim_{x\to1+} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)\neq\lim_{x\to1+} f(x)$

즉, $\lim_{x\to1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서 끊어져 있으므로 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 3개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

087

조건 (가), (나)에서 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하고

$\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$이므로 $a=2$

$\therefore b=f(a-3)=f(2-3)$
$=f(-1)=2$

$\therefore a+b=2+2=4$

정답_ ②

088

ㄱ. $\lim_{x\to-2-} f(x)g(x)=\lim_{x\to-2-} f(x)\times\lim_{x\to-2-} g(x)$
$=0\times(-1)=0$

$\lim_{x\to-2+} f(x)g(x)=\lim_{x\to-2+} f(x)\times\lim_{x\to-2+} g(x)$
$=1\times0=0$

$\therefore \lim_{x\to-2} f(x)g(x)=0$ (거짓)

ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=1$에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $f(2)g(2)=1\times0=0$이고

$\lim_{x\to2} f(x)g(x)=\lim_{x\to2} f(x)\times\lim_{x\to2} g(x)$
$=2\times0=0$

이므로

$\lim_{x\to2} f(x)g(x)=f(2)g(2)$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 연속이다. (참)

ㄹ. 닫힌구간 $[-3, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=-1$, $x=2$에서 불연속이고, 함수 $g(x)$는 $x=-2$, $x=0$에서 불연속이므로 $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=2$에서 함수 $f(x)g(x)$가 연속인지 확인하면 된다.

(i) $f(-2)g(-2)=1\times(-1)=-1$이고 ㄱ에서

$\lim_{x\to-2} f(x)g(x)=0$이므로

$\lim_{x\to-2} f(x)g(x)\neq f(-2)g(-2)$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x\to-1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)\times\lim_{x\to-1-} g(x)$
$=2\times1=2$

$\lim_{x\to-1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)\times\lim_{x\to-1+} g(x)$
$=0\times1=0$

$\therefore \lim_{x\to-1-} f(x)g(x)\neq\lim_{x\to-1+} f(x)g(x)$

즉, $\lim_{x\to-1} f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(iii) $\lim_{x\to0-} f(x)g(x)=\lim_{x\to0-} f(x)\times\lim_{x\to0-} g(x)$
$=1\times2=2$

$\lim_{x\to0+} f(x)g(x)=\lim_{x\to0+} f(x)\times\lim_{x\to0+} g(x)$
$=1\times0=0$

$\therefore \lim_{x\to0-} f(x)g(x)\neq\lim_{x\to0+} f(x)g(x)$

즉, $\lim_{x\to0} f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iv) ㄷ에서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

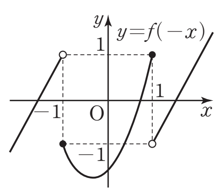
(i)~(iv)에서 닫힌구간 $[-3,\ 2]$에서 함수 $f(x)g(x)$가 불연속인 x의 값은 $-2,\ -1,\ 0$의 3개이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ③

089

함수 $y=f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{x\to1-} g(x)=\lim_{x\to1-}\{f(x)+f(-x)\}$
$=\lim_{x\to1-} f(x)+\lim_{x\to1-} f(-x)$
$=-1+1=0$

$\lim_{x\to1+} g(x)=\lim_{x\to1+}\{f(x)+f(-x)\}$
$=\lim_{x\to1+} f(x)+\lim_{x\to1+} f(-x)$
$=1+(-1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1} g(x)=0$ (참)

ㄴ. $h(-1)=f(-1)f(1)=1\times(-1)=-1$이고

$\lim_{x\to-1-} h(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)f(-x)$
$=\lim_{x\to-1-} f(x)\times\lim_{x\to-1-} f(-x)$
$=-1\times1=-1$

$\lim_{x\to-1+} h(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)f(-x)$
$=\lim_{x\to-1+} f(x)\times\lim_{x\to-1+} f(-x)$
$=1\times(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to-1} h(x)=-1$

즉, $\lim_{x\to-1} h(x)=h(-1)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=-1,\ x=1$에서 불연속이므로 함수 $g(x)+h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1,\ x=1$에서 연속이어야 한다.

(i) $g(-1)+h(-1)$
$=\{f(-1)+f(1)\}+f(-1)f(1)$
$=\{1+(-1)\}+1\times(-1)$
$=0+(-1)=-1$

$\lim_{x\to-1-}\{g(x)+h(x)\}$
$=\lim_{x\to-1-} g(x)+\lim_{x\to-1-} h(x)$
$=\lim_{x\to-1-}\{f(x)+f(-x)\}+\lim_{x\to-1-} f(x)f(-x)$
$=\{(-1)+1\}+(-1)\times1$
$=0+(-1)=-1$

$\lim_{x\to-1+}\{g(x)+h(x)\}$
$=\lim_{x\to-1+} g(x)+\lim_{x\to-1+} h(x)$
$=\lim_{x\to-1+}\{f(x)+f(-x)\}+\lim_{x\to-1+} f(x)f(-x)$
$=\{1+(-1)\}+1\times(-1)$
$=0+(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to-1}\{g(x)+h(x)\}=-1$

즉, $\lim_{x\to-1}\{g(x)+h(x)\}=g(-1)+h(-1)$이므로 함수 $g(x)+h(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $g(1)+h(1)$
$=\{f(1)+f(-1)\}+f(1)f(-1)$
$=\{(-1)+1\}+(-1)\times1$
$=0+(-1)=-1$

$\lim_{x\to1-}\{g(x)+h(x)\}$
$=\lim_{x\to1-} g(x)+\lim_{x\to1-} h(x)$
$=\lim_{x\to1-}\{f(x)+f(-x)\}+\lim_{x\to1-} f(x)f(-x)$
$=\{(-1)+1\}+(-1)\times1$
$=0+(-1)=-1$

$\lim_{x\to1+}\{g(x)+h(x)\}$
$=\lim_{x\to1+} g(x)+\lim_{x\to1+} h(x)$
$=\lim_{x\to1+}\{f(x)+f(-x)\}+\lim_{x\to1+} f(x)f(-x)$
$=\{1+(-1)\}+1\times(-1)$
$=0+(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1}\{g(x)+h(x)\}=-1$

즉, $\lim_{x\to1}\{g(x)+h(x)\}=g(1)+h(1)$이므로 함수 $g(x)+h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)+h(x)$는 $x=-1,\ x=1$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ㄱ, ㄷ

090

함수 $f(x)$가 $x=1,\ x=3$에서 불연속이므로 함수 $f(f(x))$의 불연속인 점은 $x=1,\ x=3$에서 확인하면 된다.

(i) $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1-$일 때 $t\longrightarrow0-$, $x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow3-$이므로

$\lim_{x\to1-} f(f(x))=\lim_{t\to0-} f(t)=-1$

$\lim_{x\to1+} f(f(x))=\lim_{t\to3-} f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to1-} f(f(x))\neq\lim_{x\to1+} f(f(x))$

즉, $\lim_{x\to1} f(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ii) $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow3-$일 때 $t\longrightarrow1+$, $x\longrightarrow3+$일 때 $t\longrightarrow1-$이므로

$\lim_{x\to3-} f(f(x))=\lim_{t\to1+} f(t)=3$

$\lim_{x\to3+} f(f(x))=\lim_{t\to1-} f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to3-} f(f(x))\neq\lim_{x\to3+} f(f(x))$

즉, $\lim_{x\to3} f(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $f(f(x))$가 불연속인 x의 값은 1, 3의 2개이다.

정답_ 2

091

ㄱ. $f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 1-$, $x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow 1+$이므로

$\lim_{x \to 0-} g(f(x))=\lim_{t \to 1-} g(t)=1$

$\lim_{x \to 0+} g(f(x))=\lim_{t \to 1+} g(t)=-1$

$\therefore \lim_{x \to 0-} g(f(x)) \neq \lim_{x \to 0+} g(f(x))$

즉, $\lim_{x \to 0} g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x \to -1} g(f(x))=\lim_{t \to 0} g(t)=0$ (참)

ㄷ. ㄱ에 의하여 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

한편, $g(f(-1))=g(0)=0$이므로 ㄴ에 의하여

$\lim_{x \to -1} g(f(x))=g(f(-1))=0$

즉, 함수 $g(f(x))$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ㄴ, ㄷ

092

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=4$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 4-} f(x)=\lim_{x \to 4+} f(x)=f(4)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x \to 4-} f(x)=\lim_{x \to 4-} (x-a)^2=(4-a)^2=a^2-8a+16$

$\lim_{x \to 4+} f(x)=\lim_{x \to 4+} (2x-4)=4$

$f(4)=4$

이므로

$a^2-8a+16=4 \qquad \therefore a^2-8a+12=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 a의 값의 곱은 12이다.

정답_ ③

참고 **이차방정식의 근과 계수의 관계**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

093

함수 $f(x)$가 $x \neq -1$인 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $g(x)$도 $x \neq -1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \to -1-} g(x)=\lim_{x \to -1+} g(x)=g(-1)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x \to -1-} g(x)=\lim_{x \to -1-} f(x)=2$

$\lim_{x \to -1+} g(x)=\lim_{x \to -1+} \{f(x)+k\}=\lim_{x \to -1+} f(x)+k=1+k$

$g(-1)=f(-1)+k=1+k$

이므로

$2=1+k \qquad \therefore k=1$

정답_ 1

094

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to a-} f(x)=\lim_{x \to a+} f(x)=f(a)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x \to a-} f(x)=\lim_{x \to a-} (x^2-5)=a^2-5$

$\lim_{x \to a+} f(x)=\lim_{x \to a+} (2x-k)=2a-k$

$f(a)=2a-k$

이므로

$a^2-5=2a-k \qquad \therefore a^2-2a+k-5=0$

이때 실수 a의 값이 존재하려면 이차방정식 $a^2-2a+k-5=0$의 실근이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k-5) \geq 0$

$-k+6 \geq 0 \qquad \therefore k \leq 6$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

정답_ ④

참고 **이차방정식의 근의 판별**

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 하면 다음이 성립한다.

① $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

③ $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

095

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to -1-} f(x)=\lim_{x \to -1+} f(x)=f(-1)$,

$\lim_{x \to 2-} f(x)=\lim_{x \to 2+} f(x)=f(2)$이어야 한다.

$\lim_{x \to -1-} f(x)=\lim_{x \to -1-} (ax+1)=-a+1$

$\lim_{x \to -1+} f(x)=\lim_{x \to -1+} (x^2-3x+b)=b+4$

$f(-1)=-a+1$

이므로

$-a+1=b+4 \qquad \therefore a+b=-3$ ...... ㉠

$\lim_{x \to 2-} f(x)=\lim_{x \to 2-} (x^2-3x+b)=b-2$

$\lim_{x \to 2+} f(x)=\lim_{x \to 2+} (ax+1)=2a+1$

$f(2)=2a+1$

이므로

$b-2=2a+1 \qquad \therefore 2a-b=-3$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-1$

$\therefore ab=-2 \times (-1)=2$

정답_ 2

096

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-2$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to -2-} f(x)=\lim_{x \to -2+} f(x)=f(-2)$,

$\lim_{x \to 1-} f(x)=\lim_{x \to 1+} f(x)=f(1)$이어야 한다.

(i) $\lim_{x \to -2-} f(x)=\lim_{x \to -2-} (x^2-3)=1$

$\lim_{x \to -2+} f(x)=\lim_{x \to -2+} ax=-2a$

$f(-2)=-2a$

이므로

$1=-2a \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

(ii) $\lim\limits_{x\to1-} f(x)=\lim\limits_{x\to1-} ax=a$

$\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1+} (x+b)=b+1$

$f(1)=b+1$

이므로

$a=b+1 \qquad \therefore b=-\dfrac{3}{2}$ ($\because$ ㉠)

(i), (ii)에서 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$이므로

$a+b=-\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-2$

정답_ ①

097

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $(g\circ f)(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1-}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to1+}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$이어야 한다.

$f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1-$일 때 $t\longrightarrow-2-$, $x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow1-$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{t\to-2-} g(t)=2a+14$

$\lim\limits_{x\to1+}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{t\to1-} g(t)=-a+5$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(-2)=2a+14$

에서

$2a+14=-a+5$, $3a=-9$

$\therefore a=-3$

정답_ -3

다른 풀이

$(g\circ f)(x)=\begin{cases} 3x^4-(a+18)x^2+3a+29 & (x\le1) \\ 3x^2+(a-12)x-2a+14 & (x>1) \end{cases}$

함수 $(g\circ f)(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1-}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to1+}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$이어야 한다.

이때

$\lim\limits_{x\to1-}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to1-}\{3x^4-(a+18)x^2+3a+29\}=2a+14$

$\lim\limits_{x\to1+}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to1+}\{3x^2+(a-12)x-2a+14\}=-a+5$

$(g\circ f)(1)=3-(a+18)+3a+29=2a+14$

이므로

$2a+14=-a+5$, $3a=-9$

$\therefore a=-3$

098

함수 $\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$이어야 한다.

이때

$\lim\limits_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to0-}\{f(2x+1)\}^2=\{f(1)\}^2$

$=(a-2)^2=a^2-4a+4$

$\lim\limits_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to0+}\{f(2x-1)\}^2=\{f(-1)\}^2$

$=(a+4)^2=a^2+8a+16$

$\{g(0)\}^2=\{f(-1)\}^2=a^2+8a+16$

이므로

$a^2-4a+4=a^2+8a+16$

$12a=-12 \qquad \therefore a=-1$

정답_ ②

참고 함수 $f(x)=x^2-3x+a$는 모든 실수 x에서 연속이고

$\lim\limits_{x\to0-} g(x)=\lim\limits_{x\to0-} f(2x+1)=f(1)=a-2$

$\lim\limits_{x\to0+} g(x)=\lim\limits_{x\to0+} f(2x-1)=f(-1)=a+4$

에서 $\lim\limits_{x\to0-} g(x)\ne\lim\limits_{x\to0+} g(x)$, 즉 $\lim\limits_{x\to0} g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

099

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=a-1$, $x=a$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to(a-1)-} f(x)=\lim\limits_{x\to(a-1)+} f(x)=f(a-1)$,

$\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a)$이어야 한다.

(i) $\lim\limits_{x\to(a-1)-} f(x)=\lim\limits_{x\to(a-1)-}(kx-3)=k(a-1)-3$

$\lim\limits_{x\to(a-1)+} f(x)=\lim\limits_{x\to(a-1)+}(x^2-x+k)=(a-1)^2-(a-1)+k$

$f(a-1)=(a-1)^2-(a-1)+k$

이므로

$k(a-1)-3=(a-1)^2-(a-1)+k$

(ii) $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\lim\limits_{x\to a-}(x^2-x+k)=a^2-a+k$

$\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\lim\limits_{x\to a+}(kx-3)=ak-3$

$f(a)=a^2-a+k$

이므로

$a^2-a+k=ak-3$

(i), (ii)에서 x에 대한 이차방정식 $x^2-x+k=kx-3$, 즉 $x^2-(k+1)x+k+3=0$의 두 근이 $a-1$, a임을 알 수 있다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-1)+a=k+1$, $a(a-1)=k+3$

$(a-1)+a=k+1$에서 $a=\dfrac{k+2}{2}$

$a=\dfrac{k+2}{2}$를 $a(a-1)=k+3$에 대입하면

$\dfrac{k+2}{2}\left(\dfrac{k+2}{2}-1\right)=k+3$, $\dfrac{k+2}{2}\times\dfrac{k}{2}=k+3$

$k^2+2k=4k+12 \qquad \therefore k^2-2k-12=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 k의 값의 합은 2이다.

정답_ 2

100

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$이어야 한다.

이때

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$

이고 $f(1)=a$이므로 $a=2$

정답_ 2

101

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(2)=f(2)$이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}\frac{x^2+3x+a}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(-x^2+b)=b-4$$

$f(2)=b-4$

이므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x^2+3x+a}{x-2}=b-4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\longrightarrow 2-$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2-}(x^2+3x+a)=0$이므로

$4+6+a=0 \qquad \therefore a=-10$

㉠에 $a=-10$을 대입하면

$$b-4=\lim_{x\to 2-}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(x+5)(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-}(x+5)=7$$

따라서 $b=11$이므로

$a+b=-10+11=1$

정답_ ①

102

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{a\sqrt{x+6}-b}{x-3}=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\longrightarrow 3$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 3}(a\sqrt{x+6}-b)=0$이므로

$3a-b=0 \qquad \therefore b=3a \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{a\sqrt{x+6}-3a}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{a(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{a\{(x+6)-9\}}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{a}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{a}{6}$$

즉, $\frac{a}{6}=2$이므로 $a=12$

$a=12$를 ㉡에 대입하면 $b=36$

$\therefore a+b=12+36=48$

정답_ 48

103

ㄱ. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서도 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=a$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $\lim_{x\to 1} f(x)=a$이므로 $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}=a$

$x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to 1} g(x)=0$ (거짓)

ㄷ. $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x+1}\times\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}$$

$$=\frac{a}{2}\times a=\frac{a^2}{2}\ (\because ㄱ, ㄴ)\ (거짓)$$

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

정답_ ①

104

조건 ㈎에서 함수 $\frac{x}{f(x)}$가 $x=1$, $x=2$에서 불연속이므로 $f(x)$는 $x-1$, $x-2$를 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=a(x-1)(x-2)$ (a는 0이 아닌 상수)로 놓을 수 있다.

조건 ㈏에서 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=4$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-1)(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}a(x-1)=a$$

$\therefore a=4$

즉, $f(x)=4(x-1)(x-2)$이므로

$f(4)=4\times 3\times 2=24$

정답_ 24

105

함수 $f(x)$가 $x=n$에서 연속이려면

$\lim_{x\to n-} f(x)=\lim_{x\to n+} f(x)=f(n)$이어야 한다.

$n-1\le x<n$일 때, $[x]=n-1$이므로

$\lim_{x\to n-} f(x)=\lim_{x\to n-}([x]^2+[x])=(n-1)^2+(n-1)=n^2-n$

$n\le x<n+1$일 때, $[x]=n$이므로

$\lim_{x\to n+} f(x)=\lim_{x\to n+}([x]^2+[x])=n^2+n$

$f(n)=[n]^2+[n]=n^2+n$

이므로

$n^2-n=n^2+n \qquad \therefore n=0$

정답_ ③

106

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}[f(x)]=\lim_{x\to 1}[3(x-1)^2+5]$

이고 $x\longrightarrow 1$일 때 $3(x-1)^2+5\longrightarrow 5+$이므로

$x\longrightarrow 1$일 때 $3(x-1)^2+5$의 값은 5보다 크면서 5에 한없이 가까워진다.

$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}[3(x-1)^2+5]=5$

$\therefore a=g(1)=\lim_{x\to 1} g(x)=5$

정답_ ③

107

ㄱ. $0\le x<1$일 때, $-1\le x-1<0$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} x[x-1]=1\times(-1)=-1$

$1\le x<2$일 때, $0\le x-1<1$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} x[x-1]=1\times 0=0$

즉, $\lim_{x\to 1-} f(x)\ne\lim_{x\to 1+} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1-} (x-1)[x]=0\times 0=0$

$\lim_{x\to 1+} g(x)=\lim_{x\to 1+} (x-1)[x]=0\times 1=0$

$\therefore \lim_{x\to 1} g(x)=0$

한편, $g(1)=(1-1)\times[1]=0\times 1=0$이므로

$\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $x\longrightarrow 1-$일 때 $(x^2-1)\longrightarrow 0-$이므로

$\lim_{x\to 1-} h(x)=\lim_{x\to 1-} [x^2-1]=-1$

$x\longrightarrow 1+$일 때 $(x^2-1)\longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to 1+} h(x)=\lim_{x\to 1+} [x^2-1]=0$

즉, $\lim_{x\to 1-} h(x)\ne\lim_{x\to 1+} h(x)$이므로 $\lim_{x\to 1} h(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 것은 ㄴ이다.

정답_ ②

108

$x\ne 1$일 때

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$\therefore f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1$

정답_ ②

109

$x\ne 0$일 때

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

$$\begin{aligned}\therefore f(0)&=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}\\&=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

정답_ $\frac{1}{4}$

110

$x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$이므로 $x\ne -3$, $x\ne 5$일 때

$$f(x)=\frac{x^3+ax+b}{x^2-2x-15}=\frac{x^3+ax+b}{(x+3)(x-5)}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-3$, $x=5$에서도 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -3} f(x)=f(-3)$

$\therefore \lim_{x\to -3}\frac{x^3+ax+b}{(x+3)(x-5)}=f(-3)$

$x\longrightarrow -3$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to -3}(x^3+ax+b)=0$이므로

$-27-3a+b=0 \qquad \therefore 3a-b=-27$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=5$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 5} f(x)=f(5)$

$\therefore \lim_{x\to 5}\frac{x^3+ax+b}{(x+3)(x-5)}=f(5)$

$x\longrightarrow 5$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 5}(x^3+ax+b)=0$이므로

$125+5a+b=0 \qquad \therefore 5a+b=-125$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-19$, $b=-30$

따라서 $x\ne -3$, $x\ne 5$일 때

$$f(x)=\frac{x^3-19x-30}{(x+3)(x-5)}=\frac{(x+2)(x+3)(x-5)}{(x+3)(x-5)}=x+2$$

이므로

$f(3)=3+2=5$

정답_ 5

111

$x\ne 0$일 때 —$x=0$이면 $\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}=0$

$$f(x)=\frac{x^2-x+a}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-2, 2)$에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x+a}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=f(0)$$

$x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(x^2-x+a)=0$이므로 $a=0$

$$\begin{aligned}\therefore f(a)&=f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2}\\&=\frac{-1\times(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2}=-\sqrt{2}\end{aligned}$$

정답_ ②

112

$(x-1)g(x)=|f(x)|$ …… ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$|f(1)|=0 \qquad \therefore f(1)=0$ …… ㉡

㉠에 $x=3$을 대입하면

$|f(3)|=2g(3)=0\ (\because g(3)=0) \qquad \therefore f(3)=0$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $f(x)$는 $x-1$, $x-3$을 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=(x-1)(x-3)(x-k)$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.

$\therefore g(x)=\dfrac{|(x-1)(x-3)(x-k)|}{x-1}$ (단, $x\neq1$)

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}g(x)=\lim\limits_{x\to1+}g(x)=g(1)$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}g(x)&=\lim_{x\to1-}\frac{|(x-1)(x-3)(x-k)|}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x-3)|x-k|}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}(x-3)|x-k|=-2|1-k|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}g(x)&=\lim_{x\to1+}\frac{|(x-1)(x-3)(x-k)|}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{-(x-1)(x-3)|x-k|}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\{-(x-3)|x-k|\}=2|1-k|\end{aligned}$$

이므로

$-2|1-k|=2|1-k|$, $4|1-k|=0$

$\therefore k=1$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-3)$이므로

$f(4)=9\times1=9$

정답_ ①

참고 $\lim\limits_{x\to1-}g(x)=\lim\limits_{x\to1+}g(x)=0$이므로 $g(1)=0$

113

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

① $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\}^2=\{f(a)\}^2$이므로 $\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

② $f(a)\neq0$이므로 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{f(a)}$이다.

따라서 $\dfrac{1}{f(x)}$은 $x=a$에서 연속이다.

③ [반례] $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$이라고 하면 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이지만 $f(f(x))=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x+1}+1}=\dfrac{x+1}{x+2}$은 $x=-2$에서 연속이 아니다.

④ $\lim\limits_{x\to a}\{x^2+f(x)\}=a^2+f(a)$이므로 $x^2+f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

⑤ $\lim\limits_{x\to a}5f(x)=5f(a)$이므로 $5f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

따라서 $x=a$에서 반드시 연속이라고 할 수 없는 것은 ③이다.

정답_ ③

114

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$은 $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이고, 함수 $g(x)=2x^2+3$은 모든 실수 x에서 연속이다.

① $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x-1}-2x^2-3$

즉, 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

② $f(x)g(x)=\dfrac{2x^2+3}{x-1}$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

③ $f(g(x))=f(2x^2+3)=\dfrac{1}{(2x^2+3)-1}=\dfrac{1}{2x^2+2}$

$2x^2+2>0$이므로 함수 $f(g(x))$는 모든 실수 x에서 연속이다.

④ $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{2x^2+3}=\dfrac{1}{(x-1)(2x^2+3)}$

즉, 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

⑤ $g(f(x))=g\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=2\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2+3=\dfrac{3x^2-6x+5}{(x-1)^2}$

즉, 함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ③이다.

정답_ ③

115

두 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이려면 두 이차방정식 $2x^2-kx+2k=0$, $3x^2+2kx+3=0$이 모두 실근을 갖지 않아야 한다.

이차방정식 $2x^2-kx+2k=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=(-k)^2-4\times2\times2k<0$

$k^2-16k<0$, $k(k-16)<0$

$\therefore 0<k<16$ …… ㉠

이차방정식 $3x^2+2kx+3=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\dfrac{D_2}{4}=k^2-3\times3<0$

$k^2-9<0$, $(k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0<k<3$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$1+2=3$

정답_ 3

116

ㄱ. $f(x)$와 $g(x)$가 연속함수이므로 연속함수의 성질에 의하여 $\{f(x)\}^2$, $\{g(x)\}^2$도 연속함수이고 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$도 연속함수이다. (참)

ㄴ. $f(x)+g(x)=h(x)$라고 하면 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 연속함수의 성질에 의하여 $g(x)=h(x)-f(x)$도 연속함수이다. (참)

ㄷ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ 2 & (x\geq0)\end{cases}$라고 하면 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$이므로 $f(x)$와 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ④

117

ㄱ. $f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0-$일 때 $t=-1$, $x \longrightarrow 0+$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)=g(-1)=1$

$\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)=g(1)=1$

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(1)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$

즉, 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. [반례] ㄱ에서 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$이라고 하자.

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow -\infty$, $x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$\lim_{x\to 0-}f(f(x))=\lim_{t\to -\infty}f(t)=0$

$\lim_{x\to 0+}f(f(x))=\lim_{t\to \infty}f(t)=0$

$f(f(0))=f(0)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0-}f(f(x))=\lim_{x\to 0+}f(f(x))=f(f(0))$

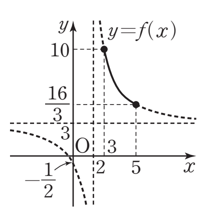
즉, 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

정답_ ①

118

$f(x)=\frac{3x+1}{x-2}=\frac{3(x-2)+7}{x-2}=3+\frac{7}{x-2}$



오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[3, 5]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 연속이므로 함수 $f(x)$는 최대 · 최소 정리에 의하여 닫힌구간 $[3, 5]$에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $f(3)=10$, $x=5$일 때 최솟값 $f(5)=\frac{16}{3}$을 가지므로

$M=10$, $m=\frac{16}{3}$

$\therefore M-m=10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}$

정답_ $\frac{14}{3}$

119

ㄱ. 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 주어진 그래프는 $x=-1$, $x=2$에서 끊어져 있으므로 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 -1, 2의 2개이다. (참)

ㄴ. 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이므로 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $f(1)=1$을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ④

120

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$

이때

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(x^2-2x-8)=-9$

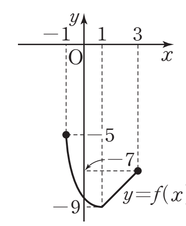
$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x-k)=1-k$

$f(1)=-9$

이므로

$-9=1-k \qquad \therefore k=10$

$\therefore f(x)=\begin{cases} x^2-2x-8 & (x\le 1) \\ x-10 & (x>1) \end{cases}$



오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 연속이므로 $f(x)$는 최대 · 최소 정리에 의하여 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $f(-1)=-5$, $x=1$일 때 최솟값 $f(1)=-9$를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$-5+(-9)=-14$

정답_ -14

121

ㄱ. $f(x)g(x)=\frac{3x+2}{x+3}$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x\neq -3$인 모든 실수 x에서 연속이다.

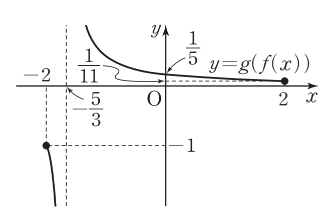
따라서 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)g(x)$는 연속이므로 최대 · 최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄴ. $f(g(x))=f\left(\frac{1}{x+3}\right)=\frac{3}{x+3}+2$이므로 함수 $f(g(x))$는 $x\neq -3$인 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(g(x))$는 연속이므로 최대 · 최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄷ. $g(f(x))=g(3x+2)=\frac{1}{3x+5}$이므로 함수 $g(f(x))$는 $x\neq -\frac{5}{3}$인 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $y=g(f(x))$의 그래프는 다음 그림과 같이 $x=-\frac{5}{3}$에서 불연속이고 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.



따라서 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ③

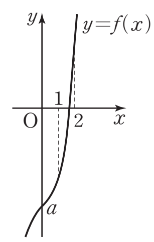
122

다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $f(-3)f(2)<0$이면 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-3, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
즉, $(k-5)(3k-1)<0$에서 $\frac{1}{3}<k<5$
따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

정답_ 4

123

$f(x)=3x^3+2x+a$로 놓으면 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로
$f(1)f(2)<0$에서 $(a+5)(a+28)<0$
$\therefore\ -28<a<-5$



정답_ $-28<a<-5$

124

$f(x)=x^3+4x-7$로 놓으면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고
$f(-2)=-23<0,\ f(-1)=-12<0,\ f(0)=-7<0,$
$f(1)=-2<0,\ f(2)=9>0,\ f(3)=32>0$
따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
이때 방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지므로 실근이 존재하는 구간은 $(1, 2)$이다.

정답_ ④

125

$f(x)=0$, 즉 $x(x-m)(x-n)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=m$ 또는 $x=n$
$f(1)f(3)<0,\ f(3)f(5)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 3)$과 열린구간 $(3, 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
이때 m, n이 자연수이므로
$m=2,\ n=4$ 또는 $m=4,\ n=2$
즉, $f(x)=x(x-2)(x-4)$이므로
$f(6)=6\times4\times2=48$

정답_ ④

126

ㄱ. $f(x)=x^2+x-2$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고
$f(-1)=-2<0,\ f(2)=4>0$
이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄴ. $f(x)=|2x-3|-3$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고
$f(-1)=2>0,\ f(2)=-2<0$
이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄷ. $x^3-x=1$에서 $x^3-x-1=0$
$f(x)=x^3-x-1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고
$f(-1)=-1<0,\ f(2)=5>0$
이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 열린구간 $(-1, 2)$에서 실근을 갖는 방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

127

$f(-2)f(-1)<0,\ f(-1)f(0)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-3, 1)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

정답_ 2개

128

$g(x)=f(x)-2x$로 놓으면 $g(x)$는 연속함수이고
$g(-2)=f(-2)+4=-3+4=1>0$
$g(-1)=f(-1)+2=-4+2=-2<0$
$g(0)=f(0)-0=1-0=1>0$
$g(1)=f(1)-2=-7-2=-9<0$
$g(2)=f(2)-4=-2-4=-6<0$
$g(3)=f(3)-6=4-6=-2<0$
따라서 $g(-2)g(-1)<0,\ g(-1)g(0)<0,\ g(0)g(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=2x$는 열린구간 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
즉, 방정식 $f(x)=2x$는 열린구간 $(-2, 3)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.
$\therefore\ n=3$

정답_ ③

129

조건 (나)에서 $f(-1)f(0)<0,\ f(-3)f(-2)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1, 0)$, $(-3, -2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. …… ㉠
이때 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로
$f(0)f(1)=f(0)f(-1)<0$
$f(2)f(3)=f(-2)f(-3)<0$
따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. …… ㉡
㉠, ㉡에서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 4개의 실근을 가지므로 실근의 개수의 최솟값은 4이다.

정답_ ③

130

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=2$에서 $x\longrightarrow-2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to -2} f(x)=0$이고 $f(x)$가 다항함수이므로

$f(-2)=0$ …… ㉠

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=2$에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 1} f(x)=0$이고 $f(x)$가 다항함수이므로

$f(1)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)$는 $x+2$, $x-1$을 인수로 가지므로

$f(x)=(x+2)(x-1)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항함수)로 놓을 수 있다.

$\lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x+2}=2$에서

$$\lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-1)Q(x)}{x+2}$$
$$=\lim_{x \to -2}(x-1)Q(x)=-3Q(-2)$$

이므로

$-3Q(-2)=2 \quad \therefore Q(-2)=-\frac{2}{3}$ …… ㉢

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=2$에서

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)Q(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1}(x+2)Q(x)=3Q(1)$$

이므로

$3Q(1)=2 \quad \therefore Q(1)=\frac{2}{3}$ …… ㉣

이때 $Q(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이고 ㉢, ㉣에 의하여 $Q(-2)Q(1)<0$이므로 방정식 $Q(x)=0$은 사잇값 정리에 의하여 열린구간 $(-2, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

정답_ 3개

131

$f(x)=(x-a)(x+a)^2+x^2$ $(a>0)$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$\lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$, $f(-a)=a^2>0$, $f(0)=-a^3<0$,

$f(a)=a^2>0$, $\lim_{x \to \infty} f(x)=\infty$

이므로 방정식 $f(x)=0$은 사잇값 정리에 의하여 열린구간 $(-\infty, -a)$, $(-a, 0)$, $(0, a)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 삼차방정식 $(x-a)(x+a)^2+x^2=0$은 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 갖는다.

정답_ ⑤

132

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 ㈎에서

$$f(4)=\lim_{x \to 4-} f(x)=\lim_{x \to 4-}(ax^2+bx-24)$$
$$=16a+4b-24$$

조건 ㈏에서 $f(0)=f(4)$이고 조건 ㈎에서 $f(0)=-24$이므로

$16a+4b-24=-24 \quad \therefore b=-4a$ …… ㉠

$$\therefore f(x)=ax^2+bx-24=ax^2-4ax-24$$
$$=a(x-2)^2-4a-24$$

따라서 $0 \le x<4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로 $1<x<10$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이려면 $1<x<2$에서 방정식 $f(x)=0$이 1개의 실근을 가져야 한다.

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 열린구간 $(1, 2)$에서 실근을 가지려면 $f(1)f(2)<0$이어야 한다.

즉, $f(1)f(2)=(-3a-24)(-4a-24)<0$에서

$(a+8)(a+6)<0 \quad \therefore -8<a<-6$

이때 a는 정수이므로 $a=-7$

$a=-7$을 ㉠에 대입하면 $b=28$

$\therefore a+b=-7+28=21$

정답_ ④

참고 $1<x<10$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이므로 조건 ㈏에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 $1<x<4$에서 2개, $4 \le x<8$에서 2개, $8 \le x<10$에서 1개의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 $1<x<2$에서 1개의 실근을 가져야 한다.

133

시곗바늘이 나타내는 시각은 연속함수이므로 벽시계가 정시를 나타내는 순간은 사잇값 정리에 의하여 3월 1일과 4월 1일 사이에, 4월 1일과 5월 1일 사이에, 5월 1일과 6월 1일 사이에 각각 적어도 한 번씩 있다.

따라서 벽시계가 정시를 바르게 나타내는 순간은 3개월 동안 적어도 3번 나타난다.

정답_ 3번

134

고속버스가 A 버스터미널에서 출발한 지 x시간 후의 속력을 시속 $f(x)$ km라고 하면 $f(x)$는 연속함수이다.

A 버스터미널에서 출발한 지 a시간, b시간 후에 각각 휴게소, B 버스터미널에 도착했다고 하면

$f(0)=0$, $f(a)=0$, $f(b)=0$

이때 $0<\alpha<a<\beta<b$이고 $f(\alpha)=f(\beta)=90$인 α, β가 존재하므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=70$인 c가 열린구간 $(0, \alpha)$, (α, a), (a, β), (β, b)에 각각 적어도 하나씩 존재한다.

따라서 고속버스의 속력이 시속 70 km인 순간은 적어도 4번이다.

정답_ ④

135

기온은 연속적으로 변하므로 기온이 3 °C인 순간은 사잇값 정리에 의하여 오전 9시와 오전 11시 사이에, 오후 5시와 오후 7시 사이에 각각 적어도 한 번씩 있다.

따라서 오전 9시부터 오후 7시까지 기온이 3 °C인 순간은 적어도 2번 있다.

즉, n의 최솟값은 2이다.

정답_ 2

136

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서도 연속이어야 하므로 $\lim_{x \to a-} f(x)=\lim_{x \to a+} f(x)=f(a)$이어야 한다. …… ❶

이때

$\lim_{x \to a-} f(x)=\lim_{x \to a-}(ax-8)=a^2-8$

$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} (-3x+a) = -2a$

$f(a) = -3a + a = -2a$ ❷

이므로

$a^2 - 8 = -2a$, $a^2 + 2a - 8 = 0$

$(a+4)(a-2) = 0$ $\quad \therefore a = -4$ 또는 $a = 2$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$-4 + 2 = -2$ ❸

정답_ -2

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 조건 구하기	30 %
❷ $\lim_{x \to a-} f(x)$, $\lim_{x \to a+} f(x)$, $f(a)$의 값을 a에 대한 식으로 나타내기	40 %
❸ 모든 상수 a의 값의 합 구하기	30 %

137

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = f(2)$이므로 조건 (가)에서

$\frac{1}{2} \times 2 = 2a + b$ $\quad \therefore 2a + b = 1$ ...... ㉠

❶

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x-1) = f(x+3)$이므로 양변에 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x) = f(x+4)$

즉, $f(0) = f(4)$이므로 조건 (가)에서

$\frac{1}{2} \times 0 = 4a + b$ $\quad \therefore 4a + b = 0$ ...... ㉡

❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$

따라서 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & (0 \le x < 2) \\ -\frac{1}{2}x + 2 & (2 \le x \le 4) \end{cases}$ 이고 모든 실수 x에 대하여

$f(x) = f(x+4)$이므로

$f(2027) = f(4 \times 506 + 3) = f(3)$

$= -\frac{1}{2} \times 3 + 2 = \frac{1}{2}$ ❸

정답_ $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $x=2$에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
❷ 조건 (가), (나)를 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
❸ $f(2027)$의 값 구하기	40 %

138

함수 $f(x) = \frac{kx+3}{(k+2)x^2 - 4kx + 8}$의 그래프에서 불연속인 점이 1개이려면 방정식

$(k+2)x^2 - 4kx + 8 = 0$ ...... ㉠

의 실근이 1개이어야 한다. ❶

(i) $k+2=0$일 때

$k=-2$이므로 방정식 ㉠은

$8x + 8 = 0$ $\quad \therefore x = -1$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. ❷

(ii) $k+2 \ne 0$일 때

이차방정식 ㉠이 1개의 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4} = (-2k)^2 - (k+2) \times 8 = 0$

$4k^2 - 8k - 16 = 0$, $k^2 - 2k - 4 = 0$

$\therefore k = 1 \pm \sqrt{5}$ ❸

(i), (ii)에서 함수 $f(x) = \frac{kx+3}{(k+2)x^2 - 4kx + 8}$의 그래프에서 불연속인 점이 1개가 되도록 하는 상수 k는 -2, $1-\sqrt{5}$, $1+\sqrt{5}$의 3개이다. ❹

정답_ 3

채점 기준	비율
❶ 불연속인 점이 1개일 조건 구하기	20 %
❷ $k+2=0$일 때 불연속인 점이 1개임을 확인하기	30 %
❸ $k+2 \ne 0$일 때 불연속인 점이 1개인 k의 값 구하기	30 %
❹ k의 개수 구하기	20 %

139

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \to 1} g(x) = g(1)$이므로

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - x^3}{(x-1)^2} = k$

$x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 1} \{f(x) - x^3\} = 0$이므로 $f(x) - x^3$은 $x-1$을 인수로 가져야 한다.

$f(x) - x^3 = (x-1)h(x)$ ($h(x)$는 다항식)라고 하면

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)h(x)}{(x-1)^2}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{h(x)}{x-1} = k$

$x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 1} h(x) = 0$이므로 $h(x)$는 $x-1$을 인수로 갖고, $f(x) - x^3$은 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다. ❶

또, $\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - x^3}{(x-1)^2} = 4$이므로 $f(x) - x^3$은 최고차항의 계수가 4인 이차함수이다. ❷

따라서 $f(x) - x^3 = 4(x-1)^2$이므로

$k = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - x^3}{(x-1)^2}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{4(x-1)^2}{(x-1)^2} = 4$ ❸

정답_ 4

채점 기준	비율
❶ $f(x) - x^3$이 $(x-1)^2$을 인수로 가짐을 알기	30 %
❷ $f(x) - x^3$이 최고차항의 계수가 4인 이차함수임을 알기	40 %
❸ k의 값 구하기	30 %

140

$g(x)=t$로 놓으면

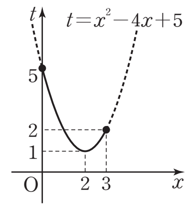
$t=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

이므로 $0\le x\le 3$에서 $1\le t\le 5$ ········· ❶

한편,

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)$

$\qquad =-t^2+2t+5=-(t-1)^2+6$



에서 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 5]$에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $(f\circ g)(x)$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이다.

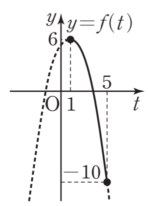
따라서 최대 · 최소 정리에 의하여 함수 $(f\circ g)(x)$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 최댓값과 최솟값을 갖는다. ········· ❷

$1\le t\le 5$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $(f\circ g)(x)=f(t)$는

$t=1$, 즉 $x=2$일 때 최댓값 6,

$t=5$, 즉 $x=0$일 때 최솟값 -10

을 갖는다. ········· ❸



정답_ **최댓값**: 6, **최솟값**: -10

채점 기준	비율
❶ $g(x)=t$로 놓고 t의 값의 범위 구하기	30 %
❷ 최대 · 최소 정리를 이용하여 최댓값과 최솟값을 가짐을 알기	40 %
❸ 최댓값과 최솟값 구하기	30 %

141

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^4+3x+k-(-x^3-4kx^2+20)$

$\qquad =x^4+x^3+4kx^2+3x+k-20$ ········· ❶

함수 $h(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $h(-1)h(2)<0$이면 사잇값 정리에 의하여 열린구간 $(-1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$h(-1)h(2)<0$에서

$(5k-23)(17k+10)<0 \qquad \therefore -\frac{10}{17}<k<\frac{23}{5}$ ········· ❷

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

········· ❸

정답_ 5

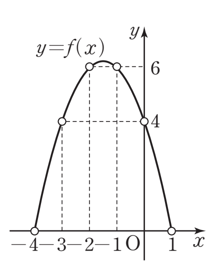
채점 기준	비율
❶ $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 $h(x)$ 구하기	30 %
❷ k의 값의 범위 구하기	50 %
❸ 정수 k의 개수 구하기	20 %

142

x가 정수가 아닐 때

$f(x)=-x^2-3x+4=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$

이므로 열린구간 $(-4, 1)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=-3$, $x=-2$, $x=-1$, $x=0$에서 불연속이므로 불연속인 점은 4개이다.



따라서 열린구간 $(-4, 1)$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 점의 개수가 2이려면 직선 $y=ax+b$가 4개의 점 $(-3, 4)$, $(-2, 6)$, $(-1, 6)$, $(0, 4)$ 중에서 서로 다른 두 점을 지나야 한다.

(i) 두 점 $(-3, 4)$, $(-2, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{6-4}{-2-(-3)}\{x-(-3)\} \qquad \therefore y=2x+10$

즉, $a=2$, $b=10$이므로

$a+b=2+10=12$

(ii) 두 점 $(-3, 4)$, $(-1, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{6-4}{-1-(-3)}\{x-(-3)\} \qquad \therefore y=x+7$

즉, $a=1$, $b=7$이므로

$a+b=1+7=8$

(iii) 두 점 $(-3, 4)$, $(0, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=4$

즉, $a=0$, $b=4$이므로

$a+b=0+4=4$

(iv) 두 점 $(-2, 6)$, $(-1, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=6$

즉, $a=0$, $b=6$이므로

$a+b=0+6=6$

(v) 두 점 $(-2, 6)$, $(0, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{4-6}{0-(-2)}x \qquad \therefore y=-x+4$

즉, $a=-1$, $b=4$이므로

$a+b=-1+4=3$

(vi) 두 점 $(-1, 6)$, $(0, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{4-6}{0-(-1)}x \qquad \therefore y=-2x+4$

즉, $a=-2$, $b=4$이므로

$a+b=-2+4=2$

(i)~(vi)에서 $a+b$의 최솟값은 2이다.

정답_ ①

143

$x-2=t$, $x+2=s$로 놓으면

$x\to 2-$일 때 $t\to 0-$, $s\to 4-$

$x\to 2+$일 때 $t\to 0+$, $s\to 4+$

ㄱ. $\lim_{x\to 2-} f(x-2)f(x+2)=\lim_{t\to 0-} f(t)\times\lim_{s\to 4-} f(s)$

$\qquad =2\times 2=4$

$\lim_{x\to 2+} f(x-2)f(x+2)=\lim_{t\to 0+} f(t)\times\lim_{s\to 4+} f(s)$

$\qquad =2\times 2=4$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x-2)f(x+2)=4$

한편, $f(2-2)f(2+2)=f(0)f(4)=2\times 2=4$이므로

$\lim_{x\to 2} f(x-2)f(x+2)=f(2-2)f(2+2)$

즉, 함수 $f(x-2)f(x+2)$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 2-} f(x-2)f(x+2)=\lim_{t\to 0-} f(t)\times\lim_{s\to 4-} f(s)$

$\qquad =2\times(-2)=-4$

$\lim_{x\to 2+} f(x-2)f(x+2)=\lim_{t\to 0+} f(t)\times\lim_{s\to 4+} f(s)$

$\qquad =2\times(-2)=-4$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x-2)f(x+2)=-4$

한편, $f(2-2)f(2+2)=f(0)f(4)=2\times(-2)=-4$이므로

$\lim_{x \to 2} f(x-2)f(x+2) = f(2-2)f(2+2)$

즉, 함수 $f(x-2)f(x+2)$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x \to 2-} f(x-2)f(x+2) = \lim_{t \to 0-} f(t) \times \lim_{s \to 4-} f(s)$

$= 2 \times 0 = 0$

$\lim_{x \to 2+} f(x-2)f(x+2) = \lim_{t \to 0+} f(t) \times \lim_{s \to 4+} f(s)$

$= 2 \times 0 = 0$

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x-2)f(x+2) = 0$

한편, $f(2-2)f(2+2) = f(0)f(4) = -2 \times 0 = 0$이므로

$\lim_{x \to 2} f(x-2)f(x+2) = f(2-2)f(2+2)$

즉, 함수 $f(x-2)f(x+2)$는 $x=2$에서 연속이다.

따라서 $x=2$에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

144

$x^2-1=(x+1)(x-1)$에서 함수 $f(x)$는 $x \neq \pm 1$인 실수 x에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로

$a \neq \pm 1$ ...... ㉠

한편, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{\{g(x)\}^3+2g(x)+1}{\{g(x)\}^2-1}$이므로 함수 $(f \circ g)(x)$는 $\{g(x)\}^2-1=0$인 실수 x에서 불연속이다.

$\{g(x)\}^2-1=0$에서

$(x-2)^2=1$, $x-2=\pm 1$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$

정답_ ②

145

$x^3+(6-a)x^2+(a^2-6a)x-a^3=0$ ...... ㉠

㉠에서 $(x-a)(x^2+6x+a^2)=0$

$\therefore x=a$ 또는 $x^2+6x+a^2=0$

이차방정식 $x^2+6x+a^2=0$의 판별식을 D라고 하자.

(i) 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가질 때

이차방정식 $x^2+6x+a^2=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$\dfrac{D}{4}=3^2-a^2>0$

$a^2-9<0$, $(a+3)(a-3)<0$

$\therefore -3<a<3$

한편, $x=a$는 $x^2+6x+a^2=0$의 근이 아니어야 하므로

$a^2+6a+a^2 \neq 0$, $2a^2+6a \neq 0$

$2a(a+3) \neq 0$ $\quad \therefore a \neq 0$, $a \neq -3$

따라서 $-3<a<0$ 또는 $0<a<3$이면

$f(a)=3$

(ii) 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가질 때

이차방정식 $x^2+6x+a^2=0$이 a가 아닌 중근을 갖거나 a와 a가 아닌 근을 가져야 한다.

ⓐ 이차방정식 $x^2+6x+a^2=0$이 a가 아닌 중근을 가질 때

$\dfrac{D}{4}=3^2-a^2=0$

$a^2-9=0$, $(a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=3$

이때 $a=-3$이면 $x^2+6x+a^2=0$, 즉 $x^2+6x+9=0$은 $x=-3$인 중근을 가지므로 $a=3$

ⓑ 이차방정식 $x^2+6x+a^2=0$이 a와 a가 아닌 근을 가질 때

$x=a$가 근이므로

$a^2+6a+a^2=0$, $2a^2+6a=0$

$2a(a+3)=0$ $\quad \therefore a=0$ ($\because a \neq -3$)

ⓐ, ⓑ에서 $a=0$ 또는 $a=3$이면

$f(a)=2$

(iii) 삼차방정식 ㉠이 하나의 실근을 가질 때

이차방정식 $x^2+6x+a^2=0$이 서로 다른 두 허근을 갖거나 a를 중근으로 가져야 한다.

ⓒ 이차방정식 $x^2+6x+a^2=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 때

$\dfrac{D}{4}=3^2-a^2<0$

$a^2-9>0$, $(a+3)(a-3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>3$

ⓓ 이차방정식 $x^2+6x+a^2=0$이 a를 중근으로 가질 때

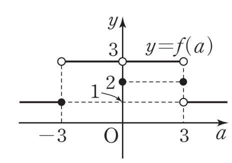
(ii)의 ⓐ에 의하여 $a=-3$

ⓒ, ⓓ에서 $a \leq -3$ 또는 $a>3$이면

$f(a)=1$

(i)~(iii)에서

$f(a)=\begin{cases} 1 & (a \leq -3 \text{ 또는 } a>3) \\ 2 & (a=0 \text{ 또는 } a=3) \\ 3 & (-3<a<0 \text{ 또는 } 0<a<3) \end{cases}$



이므로 $y=f(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=-3$, $x=0$, $x=3$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면

$g(-3)=g(0)=g(3)=0$이어야 한다.

즉, $g(x)$는 $x+3$, x, $x-3$을 인수로 갖고, 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이므로

$g(x)=2x(x+3)(x-3)$

$\therefore f(1)g(1)=3 \times (-16)=-48$

정답_ -48

146

함수 $f(x)$가 역함수를 가지므로 $f(x)$는 일대일대응이다.

따라서 함수 $f(x)$는 계속 증가하거나 계속 감소해야 하므로

$a>0$, $c>0$ 또는 $a<0$, $c<0$

(i) $a>0$, $c>0$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

이때 세 교점의 x좌표가 각각 -4, 2, 4이므로

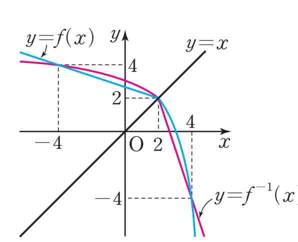
$f(-4)=-4$, $f(2)=2$, $f(4)=4$

$f(2)=2$에서 $4c+6=2$이므로 $c=-1$

그런데 이것은 $c>0$이라는 조건에 맞지 않는다.

(ii) $a<0$, $c<0$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$ 위에 하나 존재하고 나머지 두 교점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



이때 세 교점의 x좌표가 각각 -4, 2, 4이므로

$f(-4)=4$, $f(2)=2$, $f(4)=-4$

$f(2)=2$에서 $4c+6=2$이므로 $c=-1$

$f(-4)=4$에서 $-4a+b=4$ …… ㉠

한편, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \to 2-} f(x)=\lim_{x \to 2+} f(x)=f(2)$이므로

$2a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{8}{3}$

(i), (ii)에서 $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{8}{3}$, $c=-1$이므로

$a-b+c=-\frac{1}{3}-\frac{8}{3}+(-1)=-4$

정답_ -4

147

(i) $f(3) \neq 0$일 때

$g(x)=\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$에서 $f(x)$는 다항함수이므로

$f(x)$, $f(x+3)$, $f(x)+1$은 모두 연속함수이다.

따라서 함수 $g(x)$는 $f(x) \neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

이때 $f(3) \neq 0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

$\therefore \lim_{x \to 3} g(x)=g(3)$

그런데 이것은 $\lim_{x \to 3} g(x)=g(3)-1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(3)=0$일 때

$g(3)=3$이고, $\lim_{x \to 3} g(x)=g(3)-1$이므로

$\lim_{x \to 3} g(x)=3-1=2$

$\therefore \lim_{x \to 3} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=2$ …… ㉠

$x \longrightarrow 3$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 3} f(x+3)\{f(x)+1\}=0$이므로

$\lim_{x \to 3} f(x+3) \times \lim_{x \to 3} \{f(x)+1\}=0$

$f(6)\{f(3)+1\}=0$ $\quad \therefore f(6)=0$ ($\because$ $f(3)=0$)

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $f(3)=0$, $f(6)=0$이므로 $f(x)=(x-3)(x-6)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

따라서

$\lim_{x \to 3} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$

$=\lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)(x+3+a)\{(x-3)(x-6)(x+a)+1\}}{(x-3)(x-6)(x+a)}$

$=\lim_{x \to 3} \frac{x(x+3+a)\{(x-3)(x-6)(x+a)+1\}}{(x-6)(x+a)}$

$=\frac{3(6+a)(0+1)}{-3(3+a)}=-\frac{a+6}{a+3}$

이므로

$-\frac{a+6}{a+3}=2$ ($\because$ ㉠)

$-a-6=2a+6$, $3a=-12$

$\therefore a=-4$

$\therefore f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$

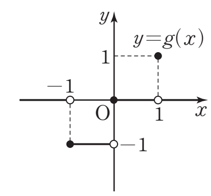
(i), (ii)에서 $f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$이고 $f(5) \neq 0$이므로

$g(5)=\frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}=\frac{40(-2+1)}{-2}=20$

정답_ ④

148

조건 (가)에서 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3+x-1}=5$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 5인 삼차함수이다.



다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고 함수 $g(x)$는 오른쪽 그림과 같이 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 불연속이다.

$h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면 조건 (나)에 의하여 모든 실수 x에서 함수 $h(x)$가 연속이므로 $h(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

(i) $x=-1$에서 함수 $h(x)$가 연속이어야 하므로

$\lim_{x \to -1-} h(x)=\lim_{x \to -1+} h(x)=h(-1)$

이때

$\lim_{x \to -1-} h(x)=\lim_{x \to -1-} f(x)g(x)$

$=\lim_{x \to -1-} f(x) \times \lim_{x \to -1-} g(x)$

$=f(-1) \times 0=0$

$\lim_{x \to -1+} h(x)=\lim_{x \to -1+} f(x)g(x)$

$=\lim_{x \to -1+} f(x) \times \lim_{x \to -1+} g(x)$

$=f(-1) \times (-1)=-f(-1)$

$h(-1)=f(-1)g(-1)=f(-1) \times (-1)=-f(-1)$

이므로

$-f(-1)=0$ $\quad \therefore f(-1)=0$

(ii) $x=0$에서 함수 $h(x)$가 연속이어야 하므로

$\lim_{x \to 0-} h(x)=\lim_{x \to 0+} h(x)=h(0)$

이때

$\lim_{x \to 0-} h(x)=\lim_{x \to 0-} f(x)g(x)$

$=\lim_{x \to 0-} f(x) \times \lim_{x \to 0-} g(x)$

$=f(0) \times (-1)=-f(0)$

$\lim_{x \to 0+} h(x)=\lim_{x \to 0+} f(x)g(x)$

$=\lim_{x \to 0+} f(x) \times \lim_{x \to 0+} g(x)$

$=f(0) \times 0=0$

$h(0)=f(0)g(0)=f(0) \times 0=0$

이므로

$-f(0)=0$ $\quad \therefore f(0)=0$

(iii) $x=1$에서 함수 $h(x)$가 연속이어야 하므로

$\lim_{x \to 1-} h(x)=\lim_{x \to 1+} h(x)=h(1)$

이때

$\lim_{x \to 1-} h(x)=\lim_{x \to 1-} f(x)g(x)$

$=\lim_{x \to 1-} f(x) \times \lim_{x \to 1-} g(x)$

$=f(1) \times 0=0$

$\lim_{x \to 1+} h(x)=\lim_{x \to 1+} f(x)g(x)$

$=\lim_{x \to 1+} f(x) \times \lim_{x \to 1+} g(x)$

$=f(1) \times 0=0$

$h(1)=f(1)g(1)=f(1) \times 1=f(1)$

이므로

$f(1)=0$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $f(-1)=f(0)=f(1)=0$

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 5인 삼차함수이므로

$f(x)=5x(x-1)(x+1)$

$\therefore f(2)=5\times2\times1\times3=30$

정답_ ⑤

149

$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$에서

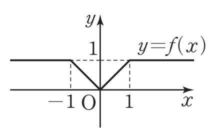
$\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}\{f(x)-1\}=0$

$\therefore f(x)=-x$ 또는 $f(x)=x$ 또는 $f(x)=1$

따라서 구간에 따라 함수 $f(x)$는

$f(x)=-x$ 또는 $f(x)=x$ 또는 $f(x)=1$

이고 함수 $f(x)$의 최댓값이 1, 최솟값이 0이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

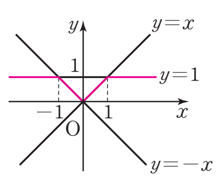


$$\therefore f(x)=\begin{cases}1 & (x<-1 \text{ 또는 } x\geq1)\\ -x & (-1\leq x<0)\\ x & (0\leq x<1)\end{cases}$$

$$\therefore f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

정답_ ③

참고 오른쪽 그림과 같이 세 직선 $y=-x$, $y=x$, $y=1$을 그려 놓고 생각하면 $f(x)$를 구하기 쉽다. 세 직선에서 최댓값이 1, 최솟값이 0이 되도록 구간별로 $f(x)$의 식을 찾아본다.



150

닫힌구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$일 때 최댓값 $f(\alpha)=1$, $x=\beta$일 때 최솟값 $f(\beta)=0$을 갖는다고 하면

$0\leq\alpha\leq1$, $0\leq\beta\leq1$

ㄱ. $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$로 놓으면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$g(\alpha)=f(\alpha)-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$g(\beta)=f(\beta)-\frac{1}{2}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

이므로

$g(\alpha)g(\beta)<0$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

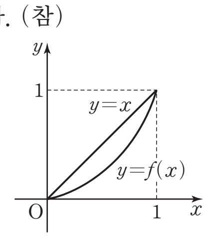
ㄴ. [반례] $f(x)=x^2$일 때, 방정식

$f(x)=x$에서 $x^2=x$

$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

즉, 열린구간 $(0, 1)$에서 방정식 $f(x)=x$의 실근이 존재하지 않는다.



(거짓)

ㄷ. $h(x)=f(x)-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$로 놓으면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$h(\alpha)=f(\alpha)-\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{3}$

$=\frac{2-\alpha}{3}>0$ ($\because$ $0\leq\alpha\leq1$)

$h(\beta)=f(\beta)-\frac{1}{3}\beta-\frac{1}{3}=0-\frac{1}{3}\beta-\frac{1}{3}$

$=-\frac{\beta+1}{3}<0$ ($\because$ $0\leq\beta\leq1$)

이므로

$h(\alpha)h(\beta)<0$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ㄱ, ㄷ

151

곡선 $y=f(x)$가 세 점 $(-4, 3)$, $(0, -4)$, $(3, 3)$을 지나므로

$f(-4)=3$, $f(0)=-4$, $f(3)=3$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고

$f(-4)f(0)<0$, $f(0)f(3)<0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-4, 0)$, $(0, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 $f(\alpha)=f(\beta)=0$ $(-4<\alpha<0<\beta<3)$이라 하고, $g(x)=(f\circ f)(x)-2=f(f(x))-2$로 놓으면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$g(-4)=f(f(-4))-2=f(3)-2=3-2=1>0$

$g(\alpha)=f(f(\alpha))-2=f(0)-2=-4-2=-6<0$

$g(0)=f(f(0))-2=f(-4)-2=3-2=1>0$

$g(\beta)=f(f(\beta))-2=f(0)-2=-4-2=-6<0$

$g(3)=f(f(3))-2=f(3)-2=3-2=1>0$

이므로

$g(-4)g(\alpha)<0$, $g(\alpha)g(0)<0$, $g(0)g(\beta)<0$, $g(\beta)g(3)<0$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $(f\circ f)(x)=2$는 열린구간 $(-4, \alpha)$, $(\alpha, 0)$, $(0, \beta)$, $(\beta, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가지므로 실수 전체의 집합에서 적어도 4개의 실근을 갖는다.

$\therefore n=4$

정답_ 4

II ≫ 미분

03 미분계수와 도함수

152

x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=\{(a+1)^2+2(a+1)\}-(a^2+2a)=2a+3$$

따라서 $2a+3=7$이므로 $a=2$

정답_ ⑤

153

x의 값이 -1에서 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{(a+3)-(-a+3)}{2}=\frac{2a}{2}=a$$

$\therefore a=-4$

정답_ ①

154

x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 a^2-3a이므로

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{f(a)}{a}=a^2-3a$$

따라서 $f(a)=a^3-3a^2$이므로

$f(1)=1-3=-2$

정답_ -2

155

x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(a)-f(1)}{a-1}&=\frac{(a^3-4a^2+a)-(-2)}{a-1}\\&=\frac{a^3-4a^2+a+2}{a-1}\\&=\frac{(a-1)(a^2-3a-2)}{a-1}=a^2-3a-2\end{aligned}$$

따라서 $a^2-3a-2=2$이므로

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

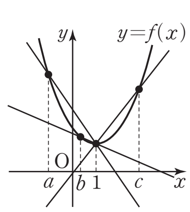
$\therefore a=4$ ($\because a>1$)

정답_ 4

156

x의 값이 1에서 t까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은 두 점 $(1, f(1))$, $(t, f(t))$를 지나는 직선의 기울기와 같으므로 오른쪽 그림에서

$g(a)<g(b)<g(c)$



정답_ ①

157

직선 AB의 기울기가 1이므로

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=1 \qquad \therefore f(4)-f(1)=3$$

$f(0)=f(4)$이므로 x의 값이 0에서 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f(1)-f(4)}{1-0}=-\{f(4)-f(1)\}=-3$$

정답_ -3

158

x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=\frac{(a^2-2a)-3}{a+1}=\frac{(a+1)(a-3)}{a+1}=a-3$$

또, 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{(2+h)^2-2(2+h)\}-(4-4)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^2+2h}{h}\\&=\lim_{h\to0}(h+2)=2\end{aligned}$$

따라서 $a-3=2$이므로 $a=5$

정답_ ⑤

참고 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는 미분법을 배운 후 함수 $f(x)$의 도함수를 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

$f'(x)=2x-2$이므로 $f'(2)=4-2=2$

159

x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{20-6}{2}=7$$

또, 함수 $f(x)$의 $x=c$에서의 순간변화율은

$x=c$에서의 미분계수 $f'(c)$

$$\begin{aligned}f'(c)&=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{(c+h)^2+3(c+h)+2\}-(c^2+3c+2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^2+2ch+3h}{h}\\&=\lim_{h\to0}(h+2c+3)=2c+3\end{aligned}$$

따라서 $2c+3=7$이므로 $c=2$

정답_ ④

160

x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 h^2+2h+3이므로

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=h^2+2h+3$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}(h^2+2h+3)=3\end{aligned}$$

정답_ ⑤

161

x의 값이 -1에서 k까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 k

이므로

$\frac{f(k)-f(-1)}{k-(-1)}=k$

$f(k)-f(-1)=k(k+1)$

이때 $f(-1)=2$이므로

$f(k)=k^2+k+2$

따라서 $f(x)=x^2+x+2$이므로 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(1+h)^2+(1+h)+2\}-4}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2+3h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h+3)=3$$

정답_ 3

162

x의 값이 $2a$에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(2a)}{a-2a}=\frac{(a^3-3a)-(4a^3-6a)}{-a}=\frac{-3a^3+3a}{-a}=3a^2-3$$

또, 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 미분계수는

$$f'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{a(-1+h)^2-3(-1+h)\}-(a+3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{ah^2-2ah-3h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(ah-2a-3)=-2a-3$$

즉, $3a^2-3=-2a-3$이므로

$3a^2+2a=0$, $a(3a+2)=0$

$\therefore a=-\frac{2}{3}$ ($\because a<0$)

정답_ ④

163

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3$$
$$=3f'(1)$$
$$=3\times2=6$$

정답_ ②

164

$f(1)=g(1)$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-g(1-h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+2h)-f(1)\}-\{g(1-h)-g(1)\}}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times\frac{2}{3}+\lim_{h\to0}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2}{3}f'(1)+\frac{1}{3}g'(1)$$
$$=\frac{2}{3}\times9+\frac{1}{3}\times12=10$$

정답_ ⑤

참고 $-h=t$로 놓으면 $h\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}=\lim_{t\to0}\frac{g(1+t)-g(1)}{t}=g'(1)$$

165

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(a+2h)-f(a)\}-\{f(a-h)-f(a)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2+\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$
$$=2f'(a)+f'(a)=3f'(a)$$

따라서 $3f'(a)=9$이므로 $f'(a)=3$

정답_ ②

166

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\times(-3)+\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\times h\right\}$$
$$=-3f'(a)+0$$
$$=-3\times\frac{2}{3}=-2$$

정답_ ①

167

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4$에서 $f'(1)=4$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times\frac{3}{2}$$
$$=f'(1)\times\frac{3}{2}$$
$$=4\times\frac{3}{2}=6$$

정답_ ③

168

$f(1)=2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{1}{4}f'(1)$$
$$=\frac{1}{4}\times4=1$$

정답_ 1

169

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$

따라서 $2f'(1)=6$이므로 $f'(1)=3$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times(x^2+x+1)\right\}$$
$$=f'(1)\times3$$
$$=3\times3=9$$

정답_ ①

170

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\{x^2f(a)-a^2f(a)\}-\{a^2f(x)-a^2f(a)\}}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times a^2$$
$$=\lim_{x\to a}(x+a)f(a)-f'(a)\times a^2$$
$$=2af(a)-a^2f'(a)$$

정답_ ③

참고 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 꼴이 나오도록 식을 변형한다.

171

$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-2}{\sqrt{x}-1}=5$에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{\sqrt{f(x)}-2\}=0$이므로

$\sqrt{f(1)}=2 \qquad \therefore f(1)=4$ ...... ㉠

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-2}{\sqrt{x}-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(1)}}{\sqrt{x}-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(1)}\}\{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}\}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}\}}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{\sqrt{f(1)}}=\frac{f'(1)}{2}$$

따라서 $\frac{f'(1)}{2}=5$이므로 $f'(1)=10$

$\therefore f(1)+f'(1)=4+10=14$

정답_ 14

172

$f(x+y)=f(x)+f(y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

미분계수의 정의에 의하여

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3)+f(h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ (\because f(0)=0)$$
$$=f'(0)=5$$

정답_ ⑤

173

$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

미분계수의 정의에 의하여

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)+3h-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+3$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+3\ (\because f(0)=0)$$
$$=f'(0)+3$$
$$=1+3=4$$

정답_ ⑤

174

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xyf(x+y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

미분계수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+xhf(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}+xf(x+h)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to 0}xf(x+h)\ (\because f(0)=0)$$
$$=f'(0)+xf(x)=a+xf(x)$$

정답_ ④

175

$f(x+y)=3f(x)f(y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=3\{f(0)\}^2 \qquad \therefore f(0)=\frac{1}{3}\ (\because f(0)>0)$

미분계수의 정의에 의하여

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3f(3)f(h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-\frac{1}{3}}{h}\times 3f(3)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\times 3f(3)\ \left(\because f(0)=\frac{1}{3}\right)$$
$$=3f(3)f'(0)$$

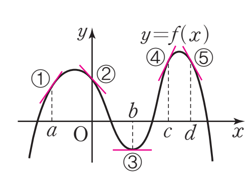
이때 $\frac{f'(3)}{f(3)}=6$이므로

$$f'(0)=\frac{f'(3)}{3f(3)}=\frac{1}{3}\times 6=2$$

정답_ 2

176

①~⑤의 값은 오른쪽 그림에서 각 접선의 기울기와 같다.



접선의 기울기가 작은 것부터 차례대로 나열하면 ⑤, ②, ③, ①, ④이므로 그 값이 가장 작은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

177

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)$과 같고, 이 접선은 두 점 $(0,\ 5)$, $(1,\ 3)$을 지나므로

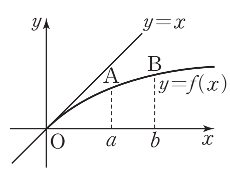
$f'(1)=\frac{3-5}{1-0}=-2$

즉, $f(1)=3$, $f'(1)=-2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\{x^2f(1)-f(1)\}-\{f(x^2)-f(1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)f(1)-f'(1)\times2$$
$$=2f(1)-2f'(1)$$
$$=2\times3-2\times(-2)=10$$

정답_ 10

178



오른쪽 그림과 같이 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$라고 하자.

ㄱ. $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로

$f'(a)>f'(b)$ (참)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

직선 $y=x$의 기울기

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

이때 $b-a>0$이므로

$f(b)-f(a)<b-a$ (거짓)

ㄷ. $\frac{f(a)}{a}$는 원점과 점 A를 지나는 직선의 기울기이고,

$\frac{f(b)}{b}$는 원점과 점 B를 지나는 직선의 기울기이므로

$\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

정답_ ㄱ

179

$f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$, $f'(d)$는 각각 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$, $(c,\ f(c))$, $(d,\ f(d))$에서의 접선의 기울기이므로

$f'(a)>0$, $f'(b)<0$, $f'(c)=0$, $f'(d)>0$

ㄱ. $f'(a)+f'(d)>0$ (참)

ㄴ. $f'(a)f'(b)f'(d)<0$ (거짓)

ㄷ. $\frac{f(b)}{b}$는 원점과 점 $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기이고,

$\frac{f(d)}{d}$는 원점과 점 $(d,\ f(d))$를 지나는 직선의 기울기이므로

$\frac{f(b)}{b}>\frac{f(d)}{d}$ (참)

ㄹ. 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기는

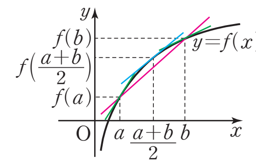
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$이고 $f'(c)=0$이므로

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ㄱ, ㄷ

180



ㄱ. $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $x=b$인 점에서의 접선의 기울기보다 크므로

$f'(a)>f'(b)$ (참)

ㄴ. $a\le x\le b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$ (거짓)

ㄷ. $x=b$인 점에서의 접선의 기울기는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기보다 작으므로

$f'(b)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

참고 $a<b$일 때

(1) 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하면

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$, $f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(b)$

(2) 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하면

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}$, $f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$

181

①, ⑤ $x=a$에서 꺾여 있으므로 미분가능하지 않다.

②, ④ $x=a$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

정답_ ③

참고 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 연결되어 있지 않은 점은 불연속인 점이고, 연결되어 있지만 접선을 그을 수 없는 점, 즉 뾰족한 점(또는 꺾인 점)은 연속이지만 미분가능하지 않은 점이다.

182

① $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-1}{h}=0$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

② $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h|h-1|}{h}$

$=\lim_{h\to0}|h-1|=1$

즉, $f'(0)$의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

③ $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=3$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{(h^2+4h+3)-3}{h}$

$=\lim_{h\to0-}(h+4)=4$

$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(h^2-4h+3)-3}{h}$

$=\lim_{h\to0+}(h-4)=-4$

즉, $f'(0)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

④ $f(0)=0$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+} \frac{x}{x}=1$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

⑤ $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-} \frac{(-5h+2)-2}{h}=-5$$

$$\lim_{h\to0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+} \frac{(3h^4-5h+2)-2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+} (3h^3-5)=-5$$

즉, $f'(0)$의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ③이다.

정답_ ③

183

① $x=0$에서의 접선의 기울기는 음수이므로 $f'(0)<0$이다.

② $x=-1$일 때 $f'(x)=0$이므로 $f'(x)=0$인 x의 값이 존재한다.

③ $\lim_{x\to-2} f(x)=-1$

④ 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=1$에서 불연속이므로 불연속인 점의 개수는 2이다.

⑤ 함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=-2$, $x=1$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 점의 개수는 4이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

184

ㄱ. $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $xf(x)=g(x)$라고 하면

$$g(x)=\begin{cases} -x(x-1) & (x<1) \\ x(x-1) & (x\ge1) \end{cases}$$

이므로

$$\lim_{h\to0-} \frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0-} \frac{-(1+h)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-} \{-(1+h)\}=-1$$

$$\lim_{h\to0+} \frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0+} \frac{(1+h)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+} (1+h)=1$$

즉, $g'(1)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $xf(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. (참)

ㄷ. $x(x-1)f(x)=k(x)$라고 하면

$$k(x)=\begin{cases} -x(x-1)^2 & (x<1) \\ x(x-1)^2 & (x\ge1) \end{cases}$$

$\lim_{x\to1} k(x)=k(1)=0$이므로 함수 $x(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0-} \frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to0-} \frac{-(1+h)h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-} \{-(1+h)h\}=0$$

$$\lim_{h\to0+} \frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to0+} \frac{(1+h)h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+} (1+h)h=0$$

즉, $k'(1)$의 값이 존재하므로 함수 $x(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ②

185

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$에서

$2-a=4+2b+a \qquad \therefore\ b=-a-1$ …… ㉠

또, $f'(2)$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-} \frac{(x-a)-(2-a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-} \frac{x-2}{x-2}=1$$

$$\lim_{x\to2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+} \frac{(x^2+bx+a)-(2-a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+} \frac{x^2-(a+1)x+2(a-1)}{x-2}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to2+} \frac{(x-2)(x-a+1)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+} (x-a+1)=3-a$$

$1=3-a$에서 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x-2 & (x\le2) \\ x^2-3x+2 & (x>2) \end{cases}$이므로

$f(2)=2-2=0$

정답_ ③

186

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=-1$에서 미분가능하고 연속이다.

즉, $\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$에서

$-1=4a+b \qquad \therefore\ b=-4a-1$ …… ㉠

또, $f'(-1)$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to-1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-} \frac{x^3-(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-} \frac{x^3+1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-} (x^2-x+1)=3$$

$$\lim_{x\to-1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+} \frac{\{a(x+3)^2+b\}-(4a+b)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+} \frac{ax^2+6ax+5a}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+} \frac{a(x+1)(x+5)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+} a(x+5)=4a$$

$3=4a$에서 $a=\frac{3}{4}$

$a=\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^3 & (x<-1) \\ \frac{3}{4}(x+3)^2-4 & (x\ge-1) \end{cases}$이므로

$f(1)=12-4=8$

정답_ ⑤

187

함수 $f(x)=\begin{cases} -(x-1)(x-3a) & (x<1) \\ (x-1)(x-3a) & (x\geq 1) \end{cases}$에 대하여 $f'(1)$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{-(x-1)(x-3a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\{-(x-3a)\}=-1+3a$$
$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x-3a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}(x-3a)=1-3a$$

$-1+3a=1-3a$에서 $6a=2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

정답_ ②

188

$\frac{1}{2}\leq x<1$일 때 $1\leq 2x<2$이므로 $[2x]=1$

$1\leq x<\frac{3}{2}$일 때 $2\leq 2x<3$이므로 $[2x]=2$

따라서 $\frac{1}{2}\leq x<\frac{3}{2}$에서 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \left(\frac{1}{2}\leq x<1\right) \\ 2(x^2+ax+b) & \left(1\leq x<\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$에서

$1+a+b=2(1+a+b)$, $1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $f'(1)$의 값이 존재하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\{(1+h)^2+a(1+h)+b\}-2(1+a+b)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{h^2+(a+2)h}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{h\to 0-}(h+a+2)=a+2$$
$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{2\{(1+h)^2+a(1+h)+b\}-2(1+a+b)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{2\{h^2+(a+2)h\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}2(h+a+2)=2(a+2)$$

$a+2=2(a+2)$에서 $a+2=0$ $\quad\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

따라서 $f(x)=[2x](x^2-2x+1)$이므로

$f(2)=4\times(4-4+1)=4$

정답_ 4

189

함수 $f(x)=x^2+5x+7$에서 $f'(x)=2x+5$

$\therefore f'(0)=5$

정답_ ③

190

$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{99}$이므로

$f'(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{100개}=100$

정답_ ⑤

191

함수 $f(x)=x^3-ax^2+2x-1$에서 $f'(x)=3x^2-2ax+2$

이때 $f'(1)=3$이므로

$3-2a+2=3$ $\quad\therefore a=1$

정답_ 1

192

$f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=2ax+b$이므로

$f(2)=4a+2b+c=6$, $f'(0)=b=2$, $f'(1)=2a+b=4$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$, $c=-2$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1+4+4=9$

정답_ ⑤

193

함수 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면 x의 값이 0에서 6까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 0이므로

$$\frac{f(6)-f(0)}{6-0}=\frac{(36+6a+b)-b}{6}=6+a$$

따라서 $6+a=0$이므로 $a=-6$

즉, $f(x)=x^2-6x+b$이므로 $f'(x)=2x-6$

$\therefore f'(4)=8-6=2$

정답_ ①

다른 풀이

x의 값이 0에서 6까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 0이므로 $\frac{f(6)-f(0)}{6-0}=0$에서

$f(6)-f(0)=0$ $\quad\therefore f(0)=f(6)$

즉, $f(0)=f(6)=k$ (k는 상수)라고 하면 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x(x-6)+k$

로 놓을 수 있다.

따라서 $f(x)=x^2-6x+k$에서 $f'(x)=2x-6$이므로

$f'(4)=8-6=2$

194

$$f'(x)=(2x-1)'(x+1)(x^2+1)+(2x-1)(x+1)'(x^2+1)$$
$$+(2x-1)(x+1)(x^2+1)'$$
$$=2(x+1)(x^2+1)+(2x-1)(x^2+1)$$
$$+(2x-1)(x+1)\times 2x$$

$\therefore f'(1)=2\times2\times2+1\times2+1\times2\times2=14$

정답_ 14

195

$$f'(x)=\{(x^2+x-3)^3\}'$$
$$=3(x^2+x-3)^2(x^2+x-3)'$$
$$=3(x^2+x-3)^2(2x+1)$$

$\therefore\ f'(-2)=3\times1\times(-3)=-9$

정답_ ①

196

$f'(x)=(2x^2-k)'(x^2+x-2)+(2x^2-k)(x^2+x-2)'$
$\quad=4x(x^2+x-2)+(2x^2-k)(2x+1)$

이므로

$f'(2)=8\times(4+2-2)+(8-k)(4+1)$
$\quad=32+(40-5k)=72-5k$

따라서 $72-5k=67$이므로 $k=1$

정답_ ①

197

$f'(x)=2(x+1)g(x)+(x+1)^2g'(x)$이므로

$f'(2)=2\times3\times g(2)+9\times g'(2)$
$\quad=2\times3\times(-3)+9\times5=27$

정답_ ②

198

$(x+1)f(x)+(1-x)g(x)=x^3+9x+1$ …… ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f(0)+g(0)=1$

이때 $f(0)=4$이므로 $g(0)=-3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x+1)f'(x)-g(x)+(1-x)g'(x)=3x^2+9$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+f'(0)-g(0)+g'(0)=9$

이므로

$f'(0)+g'(0)=9-f(0)+g(0)$
$\quad=9-4+(-3)=2$

정답_ ②

199

$f(x)=(x-1)(x-a)(x-3)$에서

$f'(x)=(x-a)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-a)$

이므로

$f'(a)=(a-1)(a-3)=a^2-4a+3$

$f'(1)=(1-a)(1-3)=2a-2$

$f'(3)=(3-1)(3-a)=-2a+6$

이때 $f'(a)=f'(1)+f'(3)$이므로

$a^2-4a+3=(2a-2)+(-2a+6)$

$\therefore\ a^2-4a-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 -1이다.

정답_ ③

참고 이차방정식 $a^2-4a-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2+1=5>0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 -1이다.

200

$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{4h}=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\times\frac{1}{4}=\frac{f'(3)}{4}$

이때 $f(x)=x^3-4x^2+5x$에서 $f'(x)=3x^2-8x+5$이므로

$f'(3)=27-24+5=8$

따라서 구하는 값은

$\frac{f'(3)}{4}=8\times\frac{1}{4}=2$

정답_ ②

201

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-2h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times2$

$=f'(1)+2f'(1)=3f'(1)$

이때 $f(x)=x^4-2x^3+5x-1$에서 $f'(x)=4x^3-6x^2+5$이므로

$f'(1)=4-6+5=3$

따라서 구하는 값은

$3f'(1)=3\times3=9$

정답_ ③

202

$\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow0$이므로

$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

이때 $f(x)=x^4+x^2+2$에서 $f'(x)=4x^3+2x$이므로

$f'(1)=4+2=6$

따라서 구하는 값은

$2f'(1)=2\times6=12$

정답_ 12

203

$\lim_{x\to2}\frac{(x^2+2)f(x)-6f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{\{(x^2+2)f(x)-6f(x)\}+\{6f(x)-6f(2)\}}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x-2}+\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times6$

$=\lim_{x\to2}(x+2)f(x)+6f'(2)$

$=4f(2)+6f'(2)$

이때 $f(x)=x^3-2x^2+1$에서 $f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f(2)=8-8+1=1,\ f'(2)=12-8=4$

따라서 구하는 값은

$4f(2)+6f'(2)=4\times1+6\times4=28$

정답_ ④

다른 풀이

$g(x)=(x^2+2)f(x)$라고 하면 $g(2)=6f(2)$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{(x^2+2)f(x)-6f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$$

이때 $g'(x)=2xf(x)+(x^2+2)f'(x)$이고 $f(2)=1$, $f'(2)=4$이므로 구하는 값은

$g'(2)=4f(2)+6f'(2)$

$=4\times1+6\times4=28$

204

$x^4-x^2+x\le f(x)\le 2x^4+3x^2+x$의 각 변에 $x=0$을 대입하면

$0\le f(0)\le 0 \quad \therefore f(0)=0$

(i) $x<0$일 때, $x^4-x^2+x\le f(x)\le 2x^4+3x^2+x$에서

$$2x^3+3x+1\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le x^3-x+1$$

$$\lim_{x\to0-}(2x^3+3x+1)\le\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\lim_{x\to0-}(x^3-x+1)$$

$$1\le\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le1 \qquad \therefore \lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$$

(ii) $x>0$일 때, $x^4-x^2+x\le f(x)\le 2x^4+3x^2+x$에서

$$x^3-x+1\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le 2x^3+3x+1$$

$$\lim_{x\to0+}(x^3-x+1)\le\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\lim_{x\to0+}(2x^3+3x+1)$$

$$1\le\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le1 \qquad \therefore \lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$이므로

$f'(0)=1$

한편, $g(x)=(x+2)f(x)+x^2+3x$에서 $g(0)=2f(0)=0$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{g(0+h)-g(0)\}-\{g(0-h)-g(0)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(0-h)-g(0)}{-h}$$

$=g'(0)+g'(0)=2g'(0)$

이때 $g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)+2x+3$이므로 구하는 값은

$2g'(0)=2\{f(0)+2f'(0)+3\}$

$=2\times(0+2\times1+3)=10$

정답_ ⑤

205

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+3h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$=3f'(1)+f'(1)=4f'(1)$

따라서 $4f'(1)=12$이므로 $f'(1)=3$

이때 $f(x)=2x^3+ax^2-5x+3$에서 $f'(x)=6x^2+2ax-5$이므로

$f'(1)=3$에서 $6+2a-5=3$

$2a=2 \qquad \therefore a=1$

정답_ ④

206

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=9$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=9$$

이때 $f(x)=x^4+ax+b$에서 $f'(x)=4x^3+a$이므로

$f(1)=1+a+b=0$에서 $b=-a-1$ ······ ㉠

$f'(1)=4+a=9$에서 $a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $b=-6$

$\therefore ab=5\times(-6)=-30$

정답_ ①

207

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}=2f'(1)$$

따라서 $2f'(1)=4$이므로 $f'(1)=2$ ······ ㉠

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{f(x)-f(3)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}}=\frac{1}{f'(3)}$$

이므로

$\frac{1}{f'(3)}=\frac{1}{10} \qquad \therefore f'(3)=10$ ······ ㉡

이때 $f(x)=2ax^2-bx+2$에서 $f'(x)=4ax-b$이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$f'(1)=4a-b=2$, $f'(3)=12a-b=10$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

정답_ 3

208

분모, 분자의 차수가 같고
최고차항의 계수의 비는 2이다.

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{-x^2+4x+3}=2$이므로

$f(x)-x^3=-2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=x^3-2x^2+ax+b$

$f'(x)=3x^2-4x+a$

조건 (나)에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}\{f(x)-9\}=0$이므로 $f(3)=9$

$27-18+3a+b=9 \qquad \therefore 3a+b=0$ ······ ㉠

또,

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=16$$

이므로

$27-12+a=16 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$3+b=0 \qquad \therefore b=-3$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x-3$이므로

$f(1)=1-2+1-3=-3$

정답_ -3

참고 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)

⇨ $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같고 최고차항의 계수의 비가 α이다.

209

$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$에서 $x \longrightarrow 3$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 3}\{f(x)-g(x)\}=0$이고 $f(x)$, $g(x)$가 모두 다항함수이므로

$f(3)-g(3)=0 \qquad \therefore g(3)=f(3)=2$

$$\therefore \lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3}=\lim_{x \to 3} \frac{\{f(x)-f(3)\}-\{g(x)-g(3)\}}{x-3}$$
$$=\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\lim_{x \to 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$
$$=f'(3)-g'(3)=1$$

이때 $f'(3)=1$이므로

$1-g'(3)=1 \qquad \therefore g'(3)=0$

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$g'(x)=2x+a$

$g(3)=9+3a+b=2$에서 $b=-3a-7$ …… ㉠

$g'(3)=6+a=0$에서 $a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면 $b=11$

따라서 $g(x)=x^2-6x+11$이므로

$g(1)=1-6+11=6$

정답_ ④

210

$f(x)=x^8-2x-3$으로 놓으면 $f(-1)=0$이므로

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^8-2x-3}{x+1}=\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$$

이때 $f'(x)=8x^7-2$이므로

$f'(-1)=-8-2=-10$

정답_ ⑤

211

$f(x)=x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6$으로 놓으면 $f(1)=1$이므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-1}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=10x^9-9x^8+8x^7-7x^6+6x^5$이므로

$f'(1)=10-9+8-7+6=8$

정답_ 8

212

$f(x)=x^n+x^2+x-3$으로 놓으면 $f(1)=0$이므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n+x^2+x-3}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}+2x+1$이므로

$f'(1)=n+2+1=n+3$

따라서 $n+3=15$이므로 $n=12$

정답_ ③

213

$\lim_{x \to 2} \frac{x^n-x^3-4x}{x-2}=a$에서 $x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 2}(x^n-x^3-4x)=0$이므로

$2^n-8-8=0$, $2^n=2^4$

$\therefore n=4$

$f(x)=x^4-x^3-4x$로 놓으면 $f(2)=0$이므로

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4-x^3-4x}{x-2}=\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

이때 $f'(x)=4x^3-3x^2-4$이므로

$f'(2)=32-12-4=16 \qquad \therefore a=16$

$\therefore \frac{a}{n}=\frac{16}{4}=4$

정답_ ③

214

$f(x)=x^3+3x-2$에서 $f'(x)=3x^2+3$

이 곡선 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기가 15이므로

$f'(a)=15$에서 $3a^2+3=15$ $x=a$에서의 미분계수와 같다.

$3a^2=12$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

정답_ ②

215

$f(x)=x^3+ax+b$라고 하면 $f'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 3)$을 지나므로 $f(2)=3$에서

$8+2a+b=3 \qquad \therefore b=-2a-5$ …… ㉠

또, 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기가 6이므로 $f'(2)=6$에서

$12+a=6 \qquad \therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면 $b=7$

$\therefore a+b=-6+7=1$

정답_ ④

216

$f(x)=ax^2+bx+c$라고 하면 $f'(x)=2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-1, 12)$, $(1, 6)$을 지나므로 $f(-1)=12$, $f(1)=6$에서

$a-b+c=12$ …… ㉠

$a+b+c=6$ …… ㉡

또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 6)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(1)=1$에서

$2a+b=1$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$, $c=7$

$\therefore a+b-c=2+(-3)-7=-8$

정답_ -8

217

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$라고 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $(3, 6)$을 지나므로 $f(3)=6$에서

$(3-a)(3-b)(3-c)=6$ …… ㉠

$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$이고,

점 $(3, 6)$에서의 접선의 기울기가 12이므로 $f'(3)=12$에서

$(3-b)(3-c)+(3-a)(3-c)+(3-a)(3-b)=12$ …… ㉡

$\therefore \dfrac{1}{3-a}+\dfrac{1}{3-b}+\dfrac{1}{3-c}$

$=\dfrac{(3-b)(3-c)+(3-a)(3-c)+(3-a)(3-b)}{(3-a)(3-b)(3-c)}$

$=\dfrac{12}{6}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=2$

정답_ ①

218

$f(x)=(x-k)^2$에서 $f'(x)=2(x-k)$

$h(x)=f(x)g(x)$라고 하면

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

곡선 $y=f(x)g(x)$에서 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기가 12이므로 $h'(2)=12$에서

$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=12$

$2(2-k)\times(-2)+(2-k)^2\times 1=12$

$k^2-4=12$, $k^2=16$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$)

정답_ 4

219

$f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)

라고 하면

$f'(x)=2ax+b$

이때 $f(x)=xf'(x)-x^2$에서

$ax^2+bx+c=x(2ax+b)-x^2$

$(1-a)x^2+c=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$1-a=0$, $c=0$ $\qquad\therefore a=1$, $c=0$

이때 $f'(1)=3$이므로

$2a+b=3$, $2+b=3$

$\therefore b=1$

따라서 $f(x)=x^2+x$이므로

$f(2)=4+2=6$

정답_ ③

220

$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)=x^3+3x-2$

$f(x)=g'(x)$이므로

$f'(x)+f(x)=x^3+3x-2$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

즉, $f(x)$는 삼차함수이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq 0$)

라고 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

이때 ㉠에서

$(3ax^2+2bx+c)+(ax^3+bx^2+cx+d)=x^3+3x-2$

$ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+c+d=x^3+3x-2$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=1$, $3a+b=0$, $2b+c=3$, $c+d=-2$

$\therefore a=1$, $b=-3$, $c=9$, $d=-11$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+9x-11$이므로

$f(1)=1-3+9-11=-4$

정답_ -4

221

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq 0$)라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=-f(-x)$

$ax^3+bx^2+cx+d=-\{a(-x)^3+b(-x)^2+c(-x)+d\}$

$2bx^2+2d=0$, $bx^2+d=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$b=0$, $d=0$

즉, $f(x)=ax^3+cx$이므로 $f'(x)=3ax^2+c$

이때 $xf'(x)-2f(x)=x^3-6x$에서

$x(3ax^2+c)-2(ax^3+cx)=x^3-6x$

$ax^3-cx=x^3-6x$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=1$, $c=6$

따라서 $f(x)=x^3+6x$이므로

$f(1)=1+6=7$

정답_ 7

222

$f(x)$를 n차 함수라고 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 함수이므로 주어진 등식의 좌변의 차수는

$n+(n-1)=2n-1$

이고, 우변의 차수는 1이므로 $2n-1=1$에서

$2n=2$ $\qquad\therefore n=1$

따라서 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라고 하면 $f'(x)=a$

이때 $f(x)f'(x)=4x+6$에서

$(ax+b)\times a=4x+6$

$(a^2-4)x+(ab-6)=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a^2-4=0$, $ab-6=0$

$\therefore a=2$, $b=3$ 또는 $a=-2$, $b=-3$

(i) $a=2$, $b=3$일 때, $f(x)=2x+3$이므로

$f(1)f(2)=5\times 7=35$

(ii) $a=-2$, $b=-3$일 때, $f(x)=-2x-3$이므로

$f(1)f(2)=-5\times(-7)=35$

(i), (ii)에서 $f(1)f(2)=35$

정답_ ④

223

다항식 x^3+ax+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^3+ax+b=(x+1)^2Q(x)$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-a+b=0$ $\qquad\therefore b=a+1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+a=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$

위의 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$3+a=0$ $\qquad\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $b=-2$

$\therefore a+b=-3+(-2)=-5$

정답_ ①

224

다항식 $x^5-20x+a$를 $(x-b)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^5-20x+a=(x-b)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=b$를 대입하면

$b^5-20b+a=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4-20=2(x-b)Q(x)+(x-b)^2Q'(x)$

위의 등식의 양변에 $x=b$를 대입하면

$5b^4-20=0,\ b^4=4$

$\therefore b=\pm\sqrt{2}$

(ⅰ) $b=\sqrt{2}$일 때, 이것을 ㉡에 대입하면

$4\sqrt{2}-20\sqrt{2}+a=0 \qquad \therefore a=16\sqrt{2}$

$\therefore ab=\sqrt{2}\times 16\sqrt{2}=32$

(ⅱ) $b=-\sqrt{2}$일 때, 이것을 ㉡에 대입하면

$-4\sqrt{2}+20\sqrt{2}+a=0 \qquad \therefore a=-16\sqrt{2}$

$\therefore ab=-16\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=32$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $ab=32$

정답_ ⑤

225

다항식 $x^{10}-2x^3+1$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$x^{10}-2x^3+1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1+2+1=-a+b \qquad \therefore b=a+4$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9-6x^2=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

위의 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-10-6=a \qquad \therefore a=-16$

$a=-16$을 ㉡에 대입하면 $b=-12$

따라서 $R(x)=-16x-12$이므로

$R(-2)=32-12=20$

정답_ ⑤

참고 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 나머지를 R라고 하면 R의 차수는 B의 차수보다 낮다.

226

$2x^4+ax^2+bx+6$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$2x^4+ax^2+bx+6=(x-1)^2Q(x)+5x-4$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2+a+b+6=5-4 \qquad \therefore a+b=-7$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$8x^3+2ax+b=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+5$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$8+2a+b=5 \qquad \therefore 2a+b=-3$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-11$

$f(x)=6x^5+2ax+b$로 놓으면 $f(x)=6x^5+8x-11$

이때 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여

$f(1)=6+8-11=3$

정답_ 3

참고 **나머지 정리**

다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라고 하면 $R=f(a)$이다.

227

x의 값이 n에서 $n+1$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 $n+1$이므로

$\dfrac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=n+1$ ❶

$\therefore f(n+1)-f(n)=n+1$

따라서 x의 값이 1에서 10까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(10)-f(1)}{10-1}$

$=\dfrac{\{f(10)-f(9)\}+\{f(9)-f(8)\}+\cdots+\{f(2)-f(1)\}}{9}$

$=\dfrac{10+9+\cdots+2}{9}$

$=\dfrac{54}{9}=6$ ❷

정답_ 6

채점 기준	비율
❶ $f(n+1)-f(n)$을 n에 대한 식으로 나타내기	40 %
❷ $f(x)$의 평균변화율 구하기	60 %

228

주어진 조건 (가), (나)에서

$f(x)=(x-1)^2+a$, $g(x)=-(x-b)^2+1$ 이므로

$h(x)=\begin{cases}(x-1)^2+a & (x<2)\\ -(x-b)^2+1 & (x\ge 2)\end{cases}$ ❶

함수 $h(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2}h(x)=h(2)$에서

$1+a=-(2-b)^2+1 \qquad \therefore a=-(2-b)^2$ …… ㉠

또, $h'(2)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to 2-}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}\dfrac{(x-1)^2+a+(2-b)^2-1}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}\dfrac{(x-1)^2-(2-b)^2+(2-b)^2-1}{x-2}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{x\to 2-}\dfrac{x^2-2x}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}x=2$

$\lim_{x\to 2+}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}\dfrac{-(x-b)^2+1+(2-b)^2-1}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}\dfrac{-\{(x-b)^2-(2-b)^2\}}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}\dfrac{-(x-2b+2)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}\{-(x-2b+2)\}=2b-4$

$2=2b-4$에서

$2b=6$ $\therefore b=3$ ❷

$b=3$을 ㉠에 대입하면 $a=-1$ ❸

$\therefore a+b=-1+3=2$ ❹

정답_ 2

채점 기준	비율
❶ $h(x)$ 구하기	30 %
❷ b의 값 구하기	40 %
❸ a의 값 구하기	20 %
❹ $a+b$의 값 구하기	10 %

229

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f(2)=3$, $f'(2)=4$ ❶

$g(x)=(x+3)f(x)$에서

$g'(x)=f(x)+(x+3)f'(x)$ ❷

$\therefore g'(2)=f(2)+5f'(2)$

$=3+5\times4=23$ ❸

정답_ 23

채점 기준	비율
❶ $f(2)$, $f'(2)$의 값 구하기	40 %
❷ $g'(x)$를 $f(x)$, $f'(x)$를 이용하여 나타내기	40 %
❸ $g'(2)$의 값 구하기	20 %

230

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-9}{x^2-9}=3$에서 $x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}\{f(x)-9\}=0$이므로 $f(3)=9$

$\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x)-9}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\frac{1}{x+3}\right\}=\frac{1}{6}f'(3)$

이때 $\frac{1}{6}f'(3)=\frac{1}{3}$이므로 $f'(3)=2$ ❶

또, $\lim_{x\to3}\frac{g(x)+1}{x-3}=\frac{1}{3}$에서 $x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}\{g(x)+1\}=0$이므로 $g(3)=-1$

$\therefore \lim_{x\to3}\frac{g(x)+1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$=g'(3)=\frac{1}{3}$ ❷

이때 $h(x)=f(x)g(x)$이므로

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\therefore h'(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)$

$=2\times(-1)+9\times\frac{1}{3}=1$ ❸

정답_ 1

채점 기준	비율
❶ $f(3)$, $f'(3)$의 값 구하기	40 %
❷ $g(3)$, $g'(3)$의 값 구하기	40 %
❸ $h'(3)$의 값 구하기	20 %

231

조건 (가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이므로

$f(x)=4x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면 조건 (나)에서

$\lim_{x\to0}\frac{4x^2+ax+b+2}{x}=3$ ⋯⋯ ㉠

㉠에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(4x^2+ax+b+2)=0$이므로

$b+2=0$ $\therefore b=-2$

따라서 ㉠에서

$\lim_{x\to0}\frac{4x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(4x+a)=a=3$

$\therefore f(x)=4x^2+3x-2$ ❶

즉,

$\lim_{x\to-1}\frac{x^{10}+f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^{10}+4x^2+3x-2}{x+1}$

이고, $g(x)=x^{10}+4x^2+3x$라고 하면 $g(-1)=2$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{x^{10}+f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=g'(-1)$

이때 $g'(x)=10x^9+8x+3$이므로 구하는 값은

$g'(-1)=-10-8+3=-15$ ❷

정답_ -15

채점 기준	비율
❶ $f(x)$ 구하기	60 %
❷ $\lim_{x\to-1}\frac{x^{10}+f(x)}{x+1}$의 값 구하기	40 %

232

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-a}{x-2}=4$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-a\}=0$이므로 $a=f(2)$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-a}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=f'(2)=4$ ❶

다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $bx+3$이므로

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+bx+3$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=2b+3$ $\therefore a=2b+3$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+b$

위의 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=b$ $\therefore b=4$

$b=4$를 ㉡에 대입하면 $a=11$ ❷

$\therefore a+b=11+4=15$ ❸

정답_ 15

채점 기준	비율
❶ $f'(2)$의 값 구하기	30 %
❷ a, b의 값 구하기	60 %
❸ $a+b$의 값 구하기	10 %

233

$$\lim_{x\to1}\frac{x^6f(1)-f(x^3)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(1)(x^6-1)-\{f(x^3)-f(1)\}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^6-1}{x^2-1}\times f(1)-\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\frac{x^3-1}{x^2-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}(x^4+x^2+1)f(1)-\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\frac{x^2+x+1}{x+1}\right\}$$

$$=3f(1)-\frac{3}{2}f'(1)$$

$$=3\times1-\frac{3}{2}\times2=0$$

정답_ ③

234

ㄱ. $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}\times(-1)$

$=-f'(-x)$ (참)

ㄴ. $g'(x)=\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{-g(-x-h)+g(-x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{g(-x-h)-g(-x)}{-h}$

$=g'(-x)$ (거짓)

ㄷ. $r(-ax)=-ar(x)$에서 $r(x)=-\frac{1}{a}r(-ax)$

$\therefore r'(x)=\lim_{h\to0}\frac{r(x+h)-r(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{-\frac{1}{a}r(-ax-ah)+\frac{1}{a}r(-ax)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{r(-ax-ah)-r(-ax)}{-ah}$

$=r'(-ax)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

235

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$ $\quad\therefore f(0)=1$

미분계수의 정의에 의하여

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$

이므로

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$

$=2x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$

$=2x+f'(0)$ …… ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=14$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-f'(x)\}=0$이므로 $f(1)=f'(1)$

㉠에서 $f'(1)=2+f'(0)$이므로

$f'(0)=f'(1)-2=f(1)-2$ …… ㉡

한편,

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2x-f'(0)}{x^2-1}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2x-f(1)+2}{x^2-1}$ ($\because$ ㉡)

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}-\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}-\lim_{x\to1}\frac{2}{x+1}$

$=\frac{1}{2}f'(1)-1=14$

이므로 $f'(1)=30$

이것을 ㉡에 대입하면

$f'(0)=30-2=28$

정답_ 28

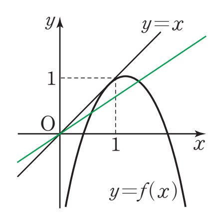
236

ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 점 $(1,\ 1)$에서 접하므로

$f'(1)=1$

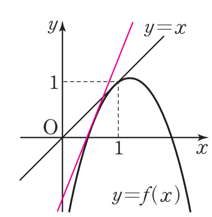
$a>0$일 때, 두 점 $(0,\ 0)$, $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기는 1보다 작거나 같으므로

$\frac{f(a)}{a}\le1$ (참)



ㄴ. $0<a<1$일 때, 오른쪽 그림에서 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기보다 크므로

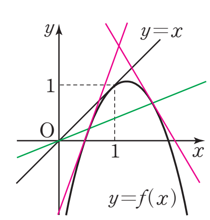
$f'(a)>1$ (거짓)



ㄷ. $f(a)<af'(a)$에서 $\frac{f(a)}{a}<f'(a)$ ($\because a>0$)

오른쪽 그림에서 원점과 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기 $\frac{f(a)}{a}$가 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기 $f'(a)$보다 작은 a의 값의 범위는

$0<a<1$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ㄱ, ㄷ

237

$$g(x)=\begin{cases}(x^2-3x)(8-4x) & (x\le3)\\ (ax+b)(2x+a) & (x>3)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로 $x=3$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to3-}g(x)=\lim_{x\to3+}g(x)=g(3)$에서

$0=(3a+b)(6+a)$ $\quad\therefore b=-3a$ 또는 $a=-6$

(i) $b=-3a$일 때

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{(x^2-3x)(8-4x)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{x(x-3)(8-4x)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}x(8-4x)=-12$$
$$\lim_{x\to3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{(ax+b)(2x+a)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{(ax-3a)(2x+a)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{a(x-3)(2x+a)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}a(2x+a)=a(a+6)$$

$-12=a(a+6)$에서

$a^2+6a+12=0$ $\quad\therefore a=-3\pm\sqrt{3}\,i$

이것은 a가 정수라는 조건에 모순이다.

(ii) $a=-6$일 때

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{(x^2-3x)(8-4x)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{x(x-3)(8-4x)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}x(8-4x)=-12$$
$$\lim_{x\to3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{(ax+b)(2x+a)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{(-6x+b)(2x-6)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{2(-6x+b)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}2(-6x+b)=2(b-18)$$

$-12=2(b-18)$에서

$-6=b-18$ $\quad\therefore b=12$

(i), (ii)에서 $a=-6$, $b=12$

$\therefore a+b=-6+12=6$

정답_ ③

238

ㄱ. $\dfrac{g(2)}{f(2)}=\dfrac{0}{2}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{1}=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(2)}{f(2)}$

즉, 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1)=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to1-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to1-}g(f(x))=g(0)=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to1+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to1+}g(f(x))=g(1)=-1$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to1}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$

즉, 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (거짓)

ㄷ. $3\le x<4$일 때, $f(x)=1$, $g(x)=x-4$

$4\le x<5$일 때, $f(x)=x-3$, $g(x)=x-4$

이므로

$3\le x<5$에서

$$f(x)g(x)=\begin{cases} x-4 & (3\le x<4) \\ (x-3)(x-4) & (4\le x<5)\end{cases}$$
$$\lim_{x\to4-}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=\lim_{x\to4-}\frac{x-4}{x-4}=1$$
$$\lim_{x\to4+}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=\lim_{x\to4+}\frac{(x-3)(x-4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4+}(x-3)=1$$

즉, $\{f(x)g(x)\}'(4)$의 값이 존재하므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

239

$g(x)=xf(x)$에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$

ㄱ. $f(a)>0$이고 $a<0$, $f'(a)<0$이므로

$g'(a)=f(a)+af'(a)>0$

$\therefore f(a)+g'(a)>0$ (거짓)

ㄴ. $b<0$, $f(b)<0$, $f'(b)>0$이므로

$g(b)=bf(b)>0$

$g'(b)=f(b)+bf'(b)<0$

$\therefore g(b)g'(b)<0$ (참)

ㄷ. $f(c)>0$이고 $c>0$, $f'(c)>0$이므로

$g'(c)=f(c)+cf'(c)>0$

$\therefore f(c)+g'(c)>0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

240

$g(x)=(x^2-2x+2)f(x)$에서

$g(2)=2f(2)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x+2)f'(x)$에서

$g'(2)=2f(2)+2f'(2)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=-2$에서 $f(2)\ne\dfrac{1}{2}$이라고 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=\frac{g(2)-1}{2f(2)-1}=\frac{2f(2)-1}{2f(2)-1}=1\ne-2$$

이므로 $f(2)=\dfrac{1}{2}$

㉠에서 $g(2)=2f(2)=1$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{2\{f(x)-f(2)\}}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}}{\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\times2}$$
$$=\frac{g'(2)}{2f'(2)}$$

이때 $f'(2)=0$이라고 하면 ㉡에서 $g'(2)=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}$의 값이 존재하지 않는다.

즉, $f'(2)\ne0$이고 $2f'(2)=g'(2)-1$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=\frac{g'(2)}{2f'(2)}=\frac{g'(2)}{g'(2)-1}$$

즉, $\dfrac{g'(2)}{g'(2)-1}=-2$이므로

$g'(2)=-2g'(2)+2$, $3g'(2)=2$

$\therefore g'(2)=\frac{2}{3}$

정답_ ②

241

$xf'(x)-3f(x)=4x^2-6x$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=0$

다항함수 $f(x)$의 차수를 n이라고 하자.

(i) $n\le 1$일 때

주어진 등식의 좌변의 차수는 1 이하이고, 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하지 않는다.

(ii) $n=2$일 때

주어진 등식의 좌변의 이차항의 계수는 -1이고, 우변의 이차항의 계수는 4이므로 등식이 성립하지 않는다.

(iii) $n\ge 3$일 때

주어진 등식의 좌변의 n차항의 계수가 $n-3$이고, 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하기 위해서는 $n=3$이어야 한다.

(i)~(iii)에서 $f(x)$는 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)

라고 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$xf'(x)-3f(x)=x(3x^2+2ax+b)-3(x^3+ax^2+bx)$

$\qquad\qquad\qquad=-ax^2-2bx=4x^2-6x$

주어진 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$-a=4$, $-2b=-6$

$\therefore a=-4$, $b=3$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+3x$이므로

$f(-1)=-1-4-3=-8$

정답_ -8

242

$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라고 하면 조건 (가)에서

$f(x)=(x-1)^2Q_1(x)+2x+1$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q_1(x)+(x-1)^2Q_1'(x)+2$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f'(1)=2$

$xf(x)+g(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라고 하면 조건 (나)에서

$xf(x)+g(x)=(x-1)^3Q_2(x)$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)+g(1)=0$

이때 $f(1)=3$이므로 $g(1)=-3$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)+g'(x)=3(x-1)^2Q_2(x)+(x-1)^3Q_2'(x)$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+f'(1)+g'(1)=0$

이때 $f(1)=3$, $f'(1)=2$이므로 $g'(1)=-5$

$g(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$, 나머지를 $h(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$g(x)=(x-1)^2Q_3(x)+ax+b$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=a+b=-3 \qquad \therefore b=-a-3$ …… ㉣

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2(x-1)Q_3(x)+(x-1)^2Q_3'(x)+a$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(1)=a=-5$

$a=-5$를 ㉣에 대입하면 $b=2$

따라서 $h(x)=-5x+2$이므로

$h(3)=-15+2=-13$

정답_ ④

04 도함수의 활용 (1)

243

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+1$이라고 하면 $f'(x)=x^2-ax$

$x=-1$, $x=3$인 점에서의 접선의 기울기는 각각

$f'(-1)=1+a$, $f'(3)=9-3a$

이때 두 접선이 평행하므로

$1+a=9-3a$, $4a=8$

$\therefore a=2$

정답_ ②

244

$f(x)=x^4-4x^3+ax^2+b$라고 하면 $f'(x)=4x^3-12x^2+2ax$

점 $(1, 7)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=7$

즉, $1-4+a+b=7$에서 $b=10-a$ …… ㉠

점 $(1, 7)$에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(1)=4$

즉, $4-12+2a=4$에서 $2a=12$ $\therefore a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore a-b=6-4=2$

정답_ ⑤

245

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

점 $(-2, -3)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-2)=-3$

즉, $-8+4a-2b+c=-3$에서 $4a-2b+c=5$ …… ㉠

점 $(-2, -3)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로 $f'(-2)=-3$

즉, $12-4a+b=-3$에서 $4a-b=15$ …… ㉡

$x=-1$인 점에서의 접선의 기울기가 0이므로 $f'(-1)=0$

즉, $3-2a+b=0$에서 $2a-b=3$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=9$

이것을 ㉠에 대입하여 풀면 $c=-1$

$\therefore a+bc=6+9\times(-1)=-3$

정답_ ①

246

x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{52-(-2)}{3}=18$

$f(x)=x^3-3x$에서 $f'(x)=3x^2-3$이므로 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 기울기는

$f'(k)=3k^2-3$

따라서 $3k^2-3=18$이므로

$3k^2=21$, $k^2=7$

$\therefore k=\sqrt{7}$ ($\because k>0$)

정답_ ⑤

247

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기가 a^2-a+7이므로 $f'(a)=a^2-a+7$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$

$=f'(1)\times2$

$=(1-1+7)\times2=14$

정답_ 14

248

$f(x)=-x^3+9x^2-20x+1$이라고 하면

$f'(x)=-3x^2+18x-20=-3(x-3)^2+7$

이므로 $f'(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 7을 갖는다.

이때 $f(3)=-27+81-60+1=-5$이므로 접점의 좌표는 $(3, -5)$이다.

따라서 $a=3$, $b=-5$, $M=7$이므로

$a+b+M=3+(-5)+7=5$

정답_ ⑤

249

$f(x)=x^3-3x$라고 하면 $f'(x)=3x^2-3$

점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=12-3=9$이므로 접선의 방정식은

$y-2=9(x-2)$ $\therefore y=9x-16$

따라서 $a=9$, $b=-16$이므로

$a-b=9-(-16)=25$

정답_ ③

250

$f(x)=x^3+ax^2-2x+3$이라고 하면 $f'(x)=3x^2+2ax-2$

점 $(1, 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=1$

즉, $1+a-2+3=1$에서 $a=-1$

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-2-2=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$ $\therefore y=-x+2$

따라서 $b=-1$, $c=2$이므로

$a+b+c=-1+(-1)+2=0$

정답_ ②

251

$f(x)=x^3-2$라고 하면 $f'(x)=3x^2$

점 $(a, 6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(a)=6$

즉, $a^3-2=6$에서 $a^3-8=0$

$(a-2)(a^2+2a+4)=0$ $\therefore a=2$ ($\because a$는 실수)

점 $(2, 6)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=12$이므로 접선의 방정식은

$y-6=12(x-2)$ $\therefore y=12x-18$

따라서 $m=12$, $n=-18$이므로

$a+m+n=2+12+(-18)=-4$

정답_ ①

252

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=3$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(1)=1$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$

따라서 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 3이므로 접선의 방정식은

$y-1=3(x-1)\qquad \therefore y=3x-2$

따라서 $g(x)=3x-2$이므로

$g(-1)=-3-2=-5$

정답_ -5

253

$f(x)=x^2+3x-2$라고 하면 $f'(x)=2x+3$

점 $(t,\ t^2+3t-2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+3t-2)=(2t+3)(x-t)\qquad \therefore y=(2t+3)x-t^2-2$

따라서 $g(t)=-t^2-2$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t-1)-g(t)}{2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\{-(t-1)^2-2\}-(-t^2-2)}{2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t-1}{2t}=1$$

정답_ ④

254

$f(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2+ax+2$에서 $f'(x)=3x^2-5x+a$

점 $\mathrm{A}(0, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=a$이므로 직선 l의 방정식은

$y-2=ax\qquad \therefore y=ax+2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=8-10+2a+2=2a$이고, 점 $\mathrm{B}(2, 2a)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=12-10+a=a+2$이므로 직선 m의 방정식은

$y-2a=(a+2)(x-2)\qquad \therefore y=(a+2)x-4$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=3a+2$

즉, 두 직선 l, m이 만나는 점의 좌표는 $(3, 3a+2)$이고, 이 점이 x축 위에 있으므로 $3a+2=0$에서 $a=-\frac{2}{3}$

따라서 $f(2)=2a=2\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}$이므로

$60\times|f(2)|=60\times\left|-\frac{4}{3}\right|=80$

정답_ 80

255

주어진 그래프에서 $f(-2)=1,\ f'(-2)=0$

또, $g(x)=x^2f(x)$에서 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이고

$g(-2)=4f(-2)=4\times1=4$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-2, 4)$에서의 접선의 기울기는

$$g'(-2)=-4f(-2)+4f'(-2)=-4\times1+4\times0=-4$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-4=-4\{x-(-2)\}\qquad \therefore y=-4x-4$

정답_ ①

256

$f(x)=x^3-2x^2+3x+2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-4x+3$

점 $(0, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=3$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(0, 2)$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{3}x\qquad \therefore y=-\frac{1}{3}x+2$

따라서 구하는 x절편은 6이다.

정답_ ④

257

$f(x)=x^3-ax+b$라고 하면 $f'(x)=3x^2-a$

점 $(1, 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=1$

즉, $1-a+b=1$에서 $a=b$ $\cdots\cdots$ ㉠

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-a$이고, 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$(3-a)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$에서

$3-a=2\qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a+b=1+1=2$

정답_ 2

258

$f(x)=x^3-2x^2+k$라고 하면 $f'(x)=3x^2-4x$

$x=1$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-4=-1$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 1이다.

이때 $f(1)=1-2+k=k-1$이므로 점 $(1, k-1)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-(k-1)=x-1\qquad \therefore y=x+k-2$

이 직선의 y절편이 1이므로

$k-2=1\qquad \therefore k=3$

정답_ 3

259

$f(x)=x^3-2x^2+2,\ g(x)=ax^2+bx-1$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-4x,\ g'(x)=2ax+b$

점 $(1, 1)$이 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로 $g(1)=1$

즉, $a+b-1=1$에서 $a+b=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

점 $(1, 1)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(1)g'(1)=-1$에서

$(3-4)\times(2a+b)=-1\qquad \therefore 2a+b=1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=3$

$\therefore ab=-1\times3=-3$

정답_ ②

260

$y=x^3+2ax^2+4ax-1$에서

$x^3-y-1+2ax(x+2)=0$

위의 등식이 a에 대한 항등식이므로

$x^3-y-1=0,\ 2x(x+2)=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=-9$ 또는 $x=0$, $y=-1$
즉, 곡선 $y=x^3+2ax^2+4ax-1$은 a의 값에 관계없이 항상 두 점 $(-2, -9)$, $(0, -1)$을 지난다.
$f(x)=x^3+2ax^2+4ax-1$이라고 하면 $f'(x)=3x^2+4ax+4a$
두 점 $(-2, -9)$, $(0, -1)$에서의 접선의 기울기는 각각
$f'(-2)=12-8a+4a=12-4a$, $f'(0)=4a$
이고 두 점에서의 접선이 서로 수직이므로
$(12-4a)\times 4a=-1 \qquad \therefore 16a^2-48a-1=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 3이다.

정답_ 3

참고 항등식의 성질
(1) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식
$\iff a=0, b=0, c=0$
(2) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식
$\iff a=a', b=b', c=c'$

261

$f(x)=x^3-3x-4$라고 하면 $f'(x)=3x^2-3$
점 $(-1, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3-3=0$이므로 접선의 방정식은
$y-(-2)=0\times\{x-(-1)\} \qquad \therefore y=-2$
곡선 $y=x^3-3x-4$와 직선 $y=-2$가 만나는 점의 x좌표는
$x^3-3x-4=-2$에서
$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
따라서 점 P의 좌표는 $(2, -2)$이다.
이때 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=12-3=9$이므로 접선의 방정식은
$y-(-2)=9(x-2) \qquad \therefore y=9x-20$

정답_ ④

262

$f(x)=x^3-2x+3$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-2$
점 $A(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-2=1$이므로 접선의 방정식은
$y-2=x-1 \qquad \therefore y=x+1$
곡선 $y=x^3-2x+3$과 직선 $y=x+1$이 만나는 점의 x좌표는
$x^3-2x+3=x+1$에서
$x^3-3x+2=0$, $(x+2)(x-1)^2=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
따라서 점 B의 좌표는 $(-2, -1)$이므로
$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{2}$

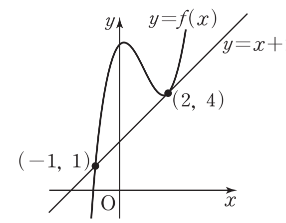
정답_ ②

263

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
두 점 $(-1, 1)$, $(2, 4)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-1)=1$, $f(2)=4$
즉,
$f(-1)=-1+a-b+c=1$에서 $a-b+c=2$ …… ㉠
$f(2)=8+4a+2b+c=4$에서 $4a+2b+c=-4$ …… ㉡
또, 두 점 $(-1, 1)$, $(2, 4)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-1=\dfrac{4-1}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$, 즉 $y=x+2$이므로
$f'(2)=12+4a+b=1$에서 $4a+b=-11$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=1$, $c=6$
따라서 $f'(x)=3x^2-6x+1$이므로
$f'(3)=27-18+1=10$

정답_ ①

다른 풀이
두 점 $(-1, 1)$, $(2, 4)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-1=\dfrac{4-1}{2-(-1)}\{x-(-1)\} \qquad \therefore y=x+2$
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+2$가 점 $(2, 4)$에서 접하고 점 $(-1, 1)$에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(x)-(x+2)=(x-2)^2(x+1)$
에서
$f(x)=x^3-3x^2+x+6$
따라서 $f'(x)=3x^2-6x+1$이므로
$f'(3)=27-18+1=10$

264

$f(x)=x^3-3x^2+4x+1$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-6x+4$
접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+4t+1)이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로
$f'(t)=3t^2-6t+4=1$
$t^2-2t+1=0$, $(t-1)^2=0$
$\therefore t=1$
즉, 접점의 좌표가 $(1, 3)$이므로 접선의 방정식은
$y-3=x-1 \qquad \therefore y=x+2$
따라서 구하는 x절편은 -2이다.

정답_ ②

참고 직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면
⇨ $m=\tan\theta$

265

$f(x)=2x^2-x+3$이라고 하면 $f'(x)=4x-1$
접점의 좌표를 $(t, 2t^2-t+3)$이라고 하면 직선 $x+3y+3=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{3}x-1$에 수직인 접선의 기울기는 3이므로
$f'(t)=4t-1=3 \qquad \therefore t=1$
즉, 접점의 좌표가 $(1, 4)$이므로 접선의 방정식은
$y-4=3(x-1) \qquad \therefore y=3x+1$
따라서 $a=3$, $b=1$이므로
$ab=3\times 1=3$

정답_ 3

266

$f(x)=x^3-4x-5$라고 하면 $f'(x)=3x^2-4$
접점의 좌표를 (t, t^3-4t-5)라고 하면 직선 $y=-x-7$에 평행한 접선의 기울기는 -1이므로

$f'(t)=3t^2-4=-1$

$t^2=1 \qquad \therefore t=\pm1$

즉, 접점의 좌표가 $(-1,\ -2)$, $(1,\ -8)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-2)=-\{x-(-1)\}$, $y-(-8)=-(x-1)$

$\therefore y=-x-3$, $y=-x-7$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-x-3$, 즉 $x+y=-3$이므로 $a=1$, $b=-3$

$\therefore a-b=1-(-3)=4$

정답_ ④

267

$f(x)=2x^4-4x+k$라고 하면 $f'(x)=8x^3-4$

접점의 좌표를 $(t,\ 2t^4-4t+k)$라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=8t^3-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t^4-4t+k)=(8t^3-4)(x-t)$

$\therefore y=(8t^3-4)x-6t^4+k$

이 직선이 직선 $y=4x+5$와 일치해야 하므로

$8t^3-4=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$-6t^4+k=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $t^3-1=0$

$(t-1)(t^2+t+1)=0 \qquad \therefore t=1$ ($\because$ t는 실수)

$t=1$을 ㉡에 대입하면

$-6+k=5 \qquad \therefore k=11$

정답_ 11

268

$f(x)=-x^3+ax^2-5$라고 하면 $f'(x)=-3x^2+2ax$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+b$가 점 $(1,\ c)$에서 접하므로

$f(1)=c$에서 $-1+a-5=c \qquad \therefore c=a-6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=3$에서 $-3+2a=3 \qquad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $c=-3$

따라서 점 $(1,\ -3)$이 직선 $y=3x+b$ 위의 점이므로

$-3=3+b \qquad \therefore b=-6$

$\therefore a+b+c=3+(-6)+(-3)=-6$

정답_ ①

269

$f(x)=x^3+ax^2+ax+1$이라고 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+a$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+at^2+at+1)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2at+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2+at+1)=(3t^2+2at+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2at+a)x-2t^3-at^2+1$

이 직선이 직선 $y=x+1$과 일치해야 하므로

$3t^2+2at+a=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$-2t^3-at^2+1=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $t^2(2t+a)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=-\dfrac{a}{2}$

(ⅰ) $t=0$일 때, ㉠에서 $a=1$

(ⅱ) $t=-\dfrac{a}{2}$일 때, ㉠에서

$\dfrac{3}{4}a^2-a^2+a=1$, $a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0 \qquad \therefore a=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 상수 a의 값의 합은

$1+2=3$

정답_ ③

270

$f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-1$이라고 하면 $f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{1}{4}t^3-1\right)$이라고 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=\dfrac{3}{4}t^2=3$

$t^2=4 \qquad \therefore t=\pm2$

즉, 접점의 좌표가 $(-2,\ -3)$, $(2,\ 1)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-3)=3\{x-(-2)\}$, $y-1=3(x-2)$

$\therefore 3x-y+3=0$, $3x-y-5=0$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-y+3=0$ 위의 점 $(-1,\ 0)$과 직선 $3x-y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|-3-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{10}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

정답_ ④

참고 **점과 직선 사이의 거리**

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

271

$f(x)=x^3-3x^2-5x+2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-6x-5$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2-5t+2)$라고 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=3t^2-6t-5=4$

$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉, 접점 A, B의 좌표가 $(-1,\ 3)$, $(3,\ -13)$이므로 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+3}{2},\ \dfrac{3+(-13)}{2}\right) \qquad \therefore (1,\ -5)$

따라서 $a=1$, $b=-5$이므로

$a+b=1+(-5)=-4$

정답_ -4

272

$f(x)=x^3+3x^2-2x+5$라고 하면 $f'(x)=3x^2+6x-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+3t^2-2t+5)$라고 하면 직선 $x-2y+1=0$, 즉 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$에 수직인 접선의 기울기는 -2이므로

$f'(t)=3t^2+6t-2=-2$

$t^2+2t=0$, $t(t+2)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=0$

즉, 접점의 좌표가 $(-2,\ 13)$, $(0,\ 5)$이므로 접선의 방정식은

$y-13=-2\{x-(-2)\}$, $y-5=-2x$

$\therefore 2x+y-9=0$, $2x+y-5=0$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+y-9=0$ 위의 점 $(0,\ 9)$와 직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|9-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

정답_ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

273

$f(x)=x^3+1\ (x>0)$이라고 하면 $f'(x)=3x^2$

곡선 $y=f(x)\ (x>0)$와 직선 $3x-y-10=0$, 즉 $y=3x-10$ 사이의 거리가 최소가 될 때는 곡선 $y=f(x)$의 직선 $y=3x-10$과 평행한 접선의 접점이 점 P일 때이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(a)=3a^2=3$

$a^2=1 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$

즉, 구하는 점 P의 좌표는 $(1, 2)$이므로 $a=1$, $b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

정답_ ②

274

$f(x)=2x^2-1$이라고 하면 $f'(x)=4x$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=4x-5$와 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t, 2t^2-1)$이라고 하면 구하는 거리의 최솟값은 이 점과 직선 $y=4x-5$ 사이의 거리이다.

따라서 $f'(t)=4t=4$이므로 $t=1$

즉, 접점의 좌표가 $(1, 1)$이므로 이 점과 직선 $y=4x-5$, 즉 $4x-y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4-1-5|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{17}}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$$

정답_ $\frac{2\sqrt{17}}{17}$

275

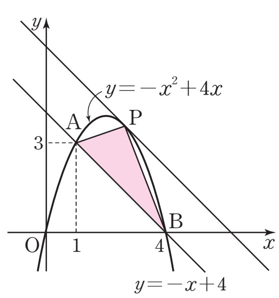
곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=-x+4$의 두 교점의 x좌표는

$-x^2+4x=-x+4$에서

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 $\mathrm{A}(1, 3)$, $\mathrm{B}(4, 0)$이라고 하면 삼각형 ABP의 넓이는 오른쪽 그림과 같이 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때, 즉 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때 최댓값을 갖는다.



$f(x)=-x^2+4x$라고 하면

$f'(x)=-2x+4$

점 P의 좌표를 $(t, -t^2+4t)$라고 하면 접선의 기울기가 -1이어야 하므로

직선 AB, 즉 $y=-x+4$의 기울기

$f'(t)=-2t+4=-1 \qquad \therefore t=\frac{5}{2}$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right)$이므로 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{15}{4}$

$\therefore a+2b=\frac{5}{2}+2\times\frac{15}{4}=10$

정답_ ②

276

$f(x)=x^2$이라고 하면 $f'(x)=2x$

주어진 조건에 의하여 곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=2tx-1$과 평행한 접선의 접점이 점 P이다.

따라서 점 P의 좌표를 (s, s^2)이라고 하면

$f'(s)=2s=2t \qquad \therefore s=t$

즉, 점 P의 좌표는 (t, t^2)이므로 직선 OP의 방정식은

$y=tx$

$tx=2tx-1$에서 $x=\frac{1}{t}$이므로 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{1}{t}, 1\right)$

$$\therefore \lim_{t\to1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}=\lim_{t\to1-}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}$$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t}$$

$$=\lim_{t\to1-}(1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}=2\sqrt{2}$$

정답_ ③

277

$f(x)=x^3-2x^2+x+8$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-4x+1$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t^2+t+8)이라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-4t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t^2+t+8)=(3t^2-4t+1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-4t+1)x-2t^3+2t^2+8 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=-2t^3+2t^2+8$, $t^3-t^2-4=0$

$(t-2)(t^2+t+2)=0 \qquad \therefore t=2\ (\because t$는 실수$)$

$t=2$를 ㉠에 대입하면 $y=5x$

정답_ $y=5x$

278

$f(x)=x^3-3x+1$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-3$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t+1)이라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t+1)=(3t^2-3)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-3)x-2t^3+1$

이 직선이 점 $(4, -1)$을 지나므로

$-1=4(3t^2-3)-2t^3+1$, $t^3-6t^2+5=0$

$\therefore (t-1)(t^2-5t-5)=0$

판별식을 D라고 하면

$D=(-5)^2-4\times1\times(-5)=45>0$

위의 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근이 세 접점의 x좌표이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 세 접점의 x좌표의 합은 6이다.

정답_ 6

참고 **삼차방정식의 근과 계수의 관계**

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

279

$f(x)=3x^3$이라고 하면 $f'(x)=9x^2$

점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 $\mathrm{A}(t, 3t^3)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=9t^2$

또, 점 $(0, a)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 $\mathrm{B}(s, 3s^3)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(s)=9s^2$

이 두 접선이 서로 평행하므로

$9t^2=9s^2$, $t^2-s^2=0$

$(t+s)(t-s)=0 \qquad \therefore s=-t \ (\because t \neq s)$

점 $\mathrm{A}(t, 3t^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3t^3=9t^2(x-t) \qquad \therefore y=9t^2x-6t^3$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로 $0=9t^2a-6t^3$ …… ㉠

점 $\mathrm{B}(s, 3s^3)$, 즉 점 $\mathrm{B}(-t, -3t^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-3t^3)=9t^2\{x-(-t)\} \qquad \therefore y=9t^2x+6t^3$

이 직선이 점 $(0, a)$를 지나므로 $a=6t^3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$9t^2\times 6t^3-6t^3=0$, $t^3(9t^2-1)=0$

$t^3(3t+1)(3t-1)=0$

$\therefore t=-\frac{1}{3}$ 또는 $t=0$ 또는 $t=\frac{1}{3}$

(i) $t=-\frac{1}{3}$일 때, $a=6\times\left(-\frac{1}{27}\right)=-\frac{2}{9}$

(ii) $t=0$일 때, $a=0$

(iii) $t=\frac{1}{3}$일 때, $a=6\times\frac{1}{27}=\frac{2}{9}$

(i)~(iii)에서 $t=\frac{1}{3}$, $a=\frac{2}{9}$ $(\because a>0)$

$\therefore 90a=90\times\frac{2}{9}=20$

정답_ 20

280

$f(x)=x^2+2$라고 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (t, t^2+2)라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+2)=2t(x-t) \qquad \therefore y=2tx-t^2+2$

이 직선이 점 $(1, -1)$을 지나므로

$-1=2t-t^2+2$, $t^2-2t-3=0$

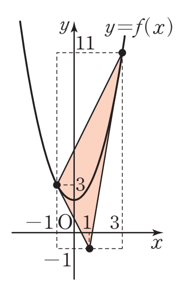
$(t+1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 3)$, $(3, 11)$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 삼각형의 넓이는

4×12

$-\left(\frac{1}{2}\times 2\times 4+\frac{1}{2}\times 2\times 12+\frac{1}{2}\times 4\times 8\right)$

$=16$



정답_ ③

다른 풀이

두 점 $(-1, 3)$, $(3, 11)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{11-3}{3-(-1)}\{x-(-1)\} \qquad \therefore 2x-y+5=0$

이때 직선 $2x-y+5=0$과 점 $(1, -1)$ 사이의 거리는

$\frac{|2-(-1)+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

두 점 $(-1, 3)$, $(3, 11)$ 사이의 거리는

$\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(11-3)^2}=4\sqrt{5}$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times\frac{8\sqrt{5}}{5}=16$

281

$f(x)=-x^2+3x+a$라고 하면 $f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t+a)$라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+3$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+3t+a)=(-2t+3)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+3)x+t^2+a$

이 직선이 점 $(-3, 1)$을 지나므로

$1=-3(-2t+3)+t^2+a$

$\therefore t^2+6t+a-10=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라고 하면 α, β는 두 접점의 x좌표이므로 접선의 기울기는 각각

$f'(\alpha)=-2\alpha+3$, $f'(\beta)=-2\beta+3$

이때 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(\alpha)f'(\beta)=-1$에서

$(-2\alpha+3)(-2\beta+3)=-1$

$4\alpha\beta-6(\alpha+\beta)+10=0$

이때 ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=a-10$이므로

$4(a-10)-6\times(-6)+10=0$

$4a+6=0 \qquad \therefore a=-\frac{3}{2}$

정답_ $-\frac{3}{2}$

282

$f(x)=x^3-4x^2+2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-8x$

접점의 좌표를 (t, t^3-4t^2+2)라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-8t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-4t^2+2)=(3t^2-8t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-8t)x-2t^3+4t^2+2$

이 직선이 점 $(a, 2)$를 지나므로

$2=(3t^2-8t)a-2t^3+4t^2+2$

$t\{2t^2-(3a+4)t+8a\}=0$

$\therefore t=0$ 또는 $2t^2-(3a+4)t+8a=0$

이때 접선이 오직 한 개 존재하려면 이차방정식

$2t^2-(3a+4)t+8a=0$ …… ㉠

이 $t=0$을 중근으로 갖거나 실근을 갖지 않아야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠이 $t=0$을 중근으로 갖는 경우

$3a+4=0$, $8a=0$

그런데 이것을 동시에 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

(ii) 이차방정식 ㉠이 실근을 갖지 않는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=\{-(3a+4)\}^2-4\times 2\times 8a<0$

$9a^2-40a+16<0$, $(9a-4)(a-4)<0$

$\therefore \frac{4}{9}<a<4$

(i), (ii)에서 $\frac{4}{9}<a<4$

정답_ ④

283

$f(x)=x^3-x+3$, $g(x)=x^2+2$라고 하면

$f'(x)=3x^2-1$, $g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

(i) $f(t)=g(t)$에서 $t^3-t+3=t^2+2$

$t^3-t^2-t+1=0$, $(t+1)(t-1)^2=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

(ii) $f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2-1=2t$

$3t^2-2t-1=0$, $(3t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=-\frac{1}{3}$ 또는 $t=1$

(i), (ii)에서 $t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1, 3)$이고 접선의 기울기는 2이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=2(x-1)$ $\quad \therefore y=2x+1$

정답_ $y=2x+1$

284

$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=-x^3+c$라고 하면

$f'(x)=2x+a$, $g'(x)=-3x^2$

두 곡선이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$f(1)=1+a+b=2$ $\quad \therefore b=-a+1$ …… ㉠

$g(1)=-1+c=2$ $\quad \therefore c=3$

두 곡선의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서

$2+a=-3$ $\quad \therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면 $b=6$

$\therefore a-b+c=-5-6+3=-8$

정답_ -8

285

$f(x)=x^3$, $g(x)=-x^2+5x+m$이라고 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=-2x+5$

두 곡선이 $x=t$ $(t>0)$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^3=-t^2+5t+m$

$m=t^3+t^2-5t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2=-2t+5$

$3t^2+2t-5=0$, $(3t+5)(t-1)=0$

$\therefore t=1$ $(\because t>0)$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $m=-3$

즉, 점 P의 좌표는 $(1, 1)$이고 접선의 기울기는 3이므로 접선의 방정식은

$y-1=3(x-1)$ $\quad \therefore y=3x-2$

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로

$m+a+b=-3+3+(-2)=-2$

정답_ ②

286

$f(x)=x^3-4x+5$라고 하면 $f'(x)=3x^2-4$

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-4=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-2=-(x-1)$ $\quad \therefore y=-x+3$

$g(x)=x^4+3x+a$라고 하면 $g'(x)=4x^3+3$

직선 $y=-x+3$이 곡선 $y=g(x)$에 접하므로 접점의 좌표를 $(t, -t+3)$이라고 하면 $g'(t)=-1$에서

$4t^3+3=-1$, $t^3+1=0$

$(t+1)(t^2-t+1)=0$ $\quad \therefore t=-1$ ($\because t$는 실수)

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 4)$이고 이 점은 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$1-3+a=4$ $\quad \therefore a=6$

정답_ ①

287

$f(x)=x^3-1$, $g(x)=x^3+3$이라고 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=3x^2$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=h(x)$의 접점의 x좌표를 각각 t, s라고 하면

(i) 곡선 $y=f(x)$의 $x=t$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-1)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3-1$

(ii) 곡선 $y=g(x)$의 $x=s$에서의 접선의 방정식은

$y-(s^3+3)=3s^2(x-s)$

$\therefore y=3s^2x-2s^3+3$ …… ㉠

(i), (ii)에서 두 직선이 일치해야 하므로

$3t^2=3s^2$에서 $t^2-s^2=0$

$(t+s)(t-s)=0$ $\quad \therefore t=-s$ 또는 $t=s$

$-2t^3-1=-2s^3+3$에서 $2t^3-2s^3+4=0$ …… ㉡

$t=s$이면 ㉡이 성립하지 않으므로 $t=-s$

$t=-s$를 ㉡에 대입하면 $-2s^3-2s^3+4=0$

$s^3-1=0$, $(s-1)(s^2+s+1)=0$

$\therefore s=1$ ($\because s$는 실수)

$s=1$을 ㉠에 대입하면 $y=3x+1$

따라서 $h(x)=3x+1$이므로

$h(3)=9+1=10$

정답_ ①

288

$f(x)=-x^2+4x+3$이라고 하면 $f'(x)=-2x+4$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+4t+3)$이라고 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(t)=-2t+4=-2$ $\quad \therefore t=3$

즉, 접점의 좌표는 $(3, 6)$이므로 접선의 방정식은

$y-6=-2(x-3)$ $\quad \therefore y=-2x+12$

따라서 이 접선의 x절편은 6, y절편은 12이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6\times 12=36$

정답_ ⑤

289

$f(x)=x^3-4x^2+3x+3$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-8x+3$

점 $P(0, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=3$이므로 접선 l의 방정식은

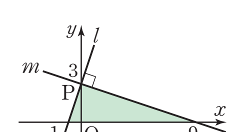
$y-3=3x$ $\quad \therefore y=3x+3$

직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 직선 m의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{3}x$ $\quad \therefore y=-\frac{1}{3}x+3$

따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 10\times 3=15$



정답_ ②

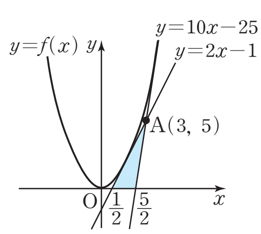
290

사각형 ABCD가 정사각형이고 대각선의 교점이 원점이므로
$\overline{OA}=\overline{OB}$
삼각형 OAB가 직각이등변삼각형이므로 직선 AB의 기울기는 1이다.
$f(x)=x^3-5x$라고 하면 $f'(x)=3x^2-5$
직선 AB와 곡선 $y=f(x)$의 접점을 $P(t,\ t^3-5t)$라고 하면
$f'(t)=1$이므로
$3t^2-5=1,\ t^2=2$
$\therefore\ t=\pm\sqrt{2}$
이때 점 P가 제2사분면 위의 점이므로 $t=-\sqrt{2}$
따라서 점 P의 좌표는 $(-\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$이고 직선 AB의 방정식은
$y-3\sqrt{2}=x-(-\sqrt{2})\qquad \therefore\ y=x+4\sqrt{2}$
직선 AB의 y절편이 $4\sqrt{2}$이므로 점 A의 좌표는 $(0,\ 4\sqrt{2})$이다.
삼각형 OAB가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AB}=8$
따라서 정사각형 ABCD의 둘레의 길이는
$4\times8=32$

정답_ 32

291

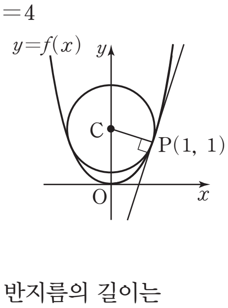
$f(x)=x^2$이라고 하면 $f'(x)=2x$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은
$y-t^2=2t(x-t)\qquad \therefore\ y=2tx-t^2$ …… ㉠
직선 ㉠이 점 A(3, 5)를 지나므로
$5=6t-t^2,\ t^2-6t+5=0$
$(t-1)(t-5)=0\qquad \therefore\ t=1$ 또는 $t=5$
$t=1,\ t=5$를 ㉠에 각각 대입하면
$y=2x-1,\ y=10x-25$
따라서 두 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right),\ \left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이므로 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times2\times5=5$



정답_ ③

292

$f(x)=x^4$이라고 하면 $f'(x)=4x^3$
점 P(1, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$
원의 중심을 $C(0,\ a)$라고 하면 직선 CP의 기울기는
$\frac{1-a}{1-0}=1-a$
이때 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로
$4(1-a)=-1\qquad \therefore\ a=\frac{5}{4}$

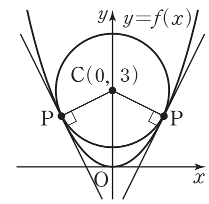


따라서 원의 중심은 $C\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$이므로 원의 반지름의 길이는
$\overline{CP}=\sqrt{(1-0)^2+\left(1-\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$

정답_ $\frac{\sqrt{17}}{4}$

293

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$이라고 하면 $f'(x)=x$
접점을 $P\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=t$이고, 직선 CP의 기울기는
$\dfrac{\frac{1}{2}t^2-3}{t-0}=\dfrac{t^2-6}{2t}$

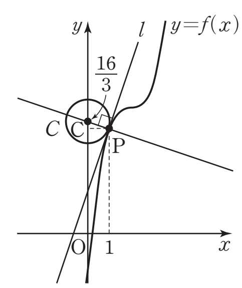


이때 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로
$t\times\frac{t^2-6}{2t}=-1,\ t^2=4$
$\therefore\ t=\pm2$
따라서 접점 P의 좌표는 (2, 2), (−2, 2)이므로 원의 반지름의 길이는
$\overline{CP}=\sqrt{(2-0)^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$

정답_ $\sqrt{5}$

294

$f(x)=x^3-6x^2+12x-2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-12x+12$
점 P(1, 5)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-12+12=3$이므로
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선 l의 방정식은
$y-5=3(x-1)\qquad \therefore\ y=3x+2$
이때 원 C의 중심을 C라고 하면 접선 l과 직선 CP는 서로 수직이므로 직선 CP의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.
따라서 직선 CP의 방정식은
$y-5=-\frac{1}{3}(x-1)\qquad \therefore\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{16}{3}$
점 C는 직선 CP가 y축과 만나는 점과 같으므로 $C\left(0,\ \frac{16}{3}\right)$



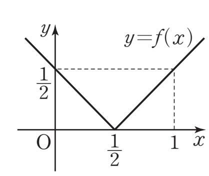
따라서 원 C의 반지름의 길이는
$\overline{CP}=\sqrt{(1-0)^2+\left(5-\frac{16}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}$
이므로 원 C의 넓이는
$\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2\pi=\frac{10}{9}\pi$

정답_ $\frac{10}{9}\pi$

295

ㄱ. $f(x)=x^3(1-x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 [0, 1]에서 연속이고 열린구간 (0, 1)에서 미분가능하며 $f(0)=f(1)=0$이므로 롤의 정리가 성립한다.

ㄴ. 함수 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 닫힌구간 [0, 1]에서 연속이고 $f(0)=f(1)=\frac{1}{2}$



이지만 $x=\frac{1}{2}$에서 미분가능하지 않다.
따라서 롤의 정리가 성립하지 않는다.

ㄷ. $0\le x\le1$에서 $x+3>0$이므로
$f(x)=\frac{|x+3|}{x+3}=\frac{x+3}{x+3}=1$
따라서 $f(x)$는 닫힌구간 [0, 1]에서 연속이고 열린구간

$(0,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(1)=1$이므로 롤의 정리가 성립한다.
그러므로 롤의 정리가 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

296

함수 $f(x)=-x^2+4x+3$은 닫힌구간 $[-1,\ 5]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 5)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(5)=-2$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-2x+4$이므로 $f'(c)=0$에서
$-2c+4=0 \qquad \therefore c=2$

정답_ ③

297

함수 $f(x)=(x+3)(x-2)^2$은 닫힌구간 $[-3,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-3,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(-3)=f(2)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=(x-2)^2+(x+3)\times2(x-2)=(3x+4)(x-2)$이므로 $f'(c)=0$에서
$(3c+4)(c-2)=0 \qquad \therefore c=-\frac{4}{3}\ (\because\ -3<c<2)$

정답_ ②

298

함수 $f(x)=-2x^2+kx$는 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 미분가능하다.
이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-2)=f(1)$이어야 하므로
$-8-2k=-2+k \qquad \therefore k=-2$
따라서 $f(x)=-2x^2-2x$이고 $f'(x)=-4x-2$이므로
$f'(c)=0$에서
$-4c-2=0 \qquad \therefore c=-\frac{1}{2}$
$\therefore kc=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

정답_ ⑤

299

함수 $f(x)=(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $f(a)=f(b)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=2x-(a+b)$이므로 $f'(c)=0$에서
$2c-(a+b)=0 \qquad \therefore c=\frac{a+b}{2}$

정답_ ④

300

함수 $f(x)=x^3+2x^2-4x-3$은 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(-a,\ a)$에서 미분가능하다.
이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$이어야 하므로
$-a^3+2a^2+4a-3=a^3+2a^2-4a-3$
$a^3-4a=0,\ a(a+2)(a-2)=0$
$\therefore a=2\ (\because\ a>0)$
$f'(x)=3x^2+4x-4$이므로 $f'(c)=0$에서
$3c^2+4c-4=0,\ (c+2)(3c-2)=0$
$\therefore c=\frac{2}{3}\ (\because\ -2<c<2)$

정답_ $\frac{2}{3}$

301

함수 $f(x)=x^3+2x$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$
인 c가 열린구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2+2$이므로
$\frac{33-0}{3-0}=3c^2+2,\ c^2=3$
$\therefore c=\sqrt{3}\ (\because\ 0<c<3)$

정답_ ⑤

302

함수 $f(x)=-x^2+4x$에 대하여 닫힌구간 $[a,\ 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값이 0이므로
$\frac{f(2)-f(a)}{2-a}=f'(0)$
이때 $f'(x)=-2x+4$이므로
$\frac{4-(-a^2+4a)}{2-a}=4,\ a^2-4a+4=8-4a$
$a^2=4 \qquad \therefore a=-2\ (\because\ a<0)$

정답_ ④

303

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 5)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$
인 c가 열린구간 $(1,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.
조건 (가)에서 $f(1)=3$이므로
$\frac{f(5)-3}{4}=f'(c)$
이때 조건 (나)에서 $1<c<5$인 c에 대하여 $f'(c)\ge5$이므로
$\frac{f(5)-3}{4}\ge5 \qquad \therefore f(5)\ge23$
따라서 $f(5)$의 최솟값은 23이다.

정답_ ③

304

$f(x)=2x^2$에서 $f'(x)=4x$
$f(a+h)-f(a)=hf'(a+kh)$에서
$2(a+h)^2-2a^2=h\times4(a+kh)$
$4ah+2h^2=4ah+4kh^2 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}\ (\because\ h\neq0)$

정답_ ④

305

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[x-2,\ x+3]$에서 연속이고 열린구간

$(x-2,\ x+3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+3)-f(x-2)}{(x+3)-(x-2)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(x-2,\ x+3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x \longrightarrow \infty$이면 $c \longrightarrow \infty$이므로

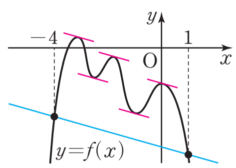
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\{f(x+3)-f(x-2)\}&=5\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+3)-f(x-2)}{(x+3)-(x-2)}\\&=5\lim_{c\to\infty}f'(c)\\&=5\times(-1)=-5\end{aligned}$$

정답_ ②

306

닫힌구간 $[-4,\ 1]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-4,\ f(-4))$, $(1,\ f(1))$을 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-4,\ f(-4))$, $(1,\ f(1))$을 잇는 직선과 평행한 접선을 5개 그을 수 있으므로 구하는 상수 c의 개수는 5이다.



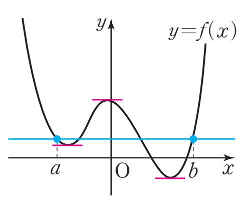
정답_ 5

307

$f(a)=f(b)$이므로 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수는 미분계수가 0인 점의 x좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 접선의 기울기가 0인 접선을 3개 그을 수 있으므로

$p=3$

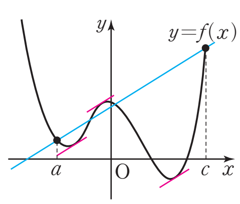


닫힌구간 $[a,\ c]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(c,\ f(c))$를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 접선의 기울기가 두 점 $(a,\ f(a))$, $(c,\ f(c))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 3개 그을 수 있으므로

$q=3$

$\therefore\ p+q=3+3=6$

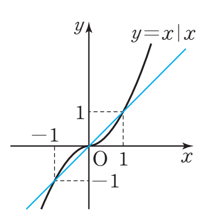


정답_ 6

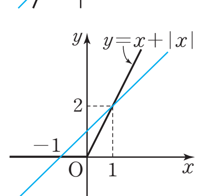
308

$\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=f'(c)$에서 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$ ...... ㉠

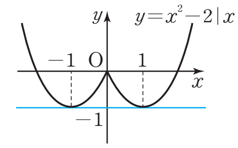
ㄱ. 함수 $y=x|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 평균값 정리에 의하여 ㉠을 만족시키는 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.



ㄴ. 함수 $y=x+|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ㉠을 만족시키는 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 존재하지 않는다.



ㄷ. 함수 $y=x^2-2|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ㉠을 만족시키는 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 존재하지 않는다.



따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄱ이다.

정답_ ①

309

$f(x)=x^4$이라고 하면 $f'(x)=4x^3$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$이므로 접선의 방정식은

$y-1=4(x-1)$ $\quad\therefore\ y=4x-3$

따라서 $g(x)=4x-3$이므로

$R(t,\ 4t-3)$ ······ ❶

이때 $Q(t,\ t^4)$, $H(t,\ 1)$이므로

$\overline{QR}=t^4-(4t-3)=t^4-4t+3$

$\overline{RH}=(4t-3)-1=4t-4$ ······ ❷

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{t\to1}\frac{\overline{QR}}{\overline{RH}}&=\lim_{t\to1}\frac{t^4-4t+3}{4t-4}\\&=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)^2(t^2+2t+3)}{4(t-1)}\\&=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t^2+2t+3)}{4}=0\end{aligned}$$ ······ ❸

정답_ 0

채점 기준	비율
❶ 점 R의 좌표 구하기	40 %
❷ $\overline{QR}$, $\overline{RH}$의 길이 구하기	30 %
❸ $\lim_{t\to1}\frac{\overline{QR}}{\overline{RH}}$의 값 구하기	30 %

310

$f(x)=x^3+ax^2+x-2$라고 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+at^2+t-2)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+2at+1$ ······ ❶

주어진 조건에서 $f'(t)=-2$인 t의 값이 존재하지 않아야 하므로

$f'(t)=-2$에서

$3t^2+2at+1=-2$

$\therefore\ 3t^2+2at+3=0$ ...... ㉠

즉, 이차방정식 ㉠의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-9<0$ ······ ❷

$(a+3)(a-3)<0$ $\quad\therefore\ -3<a<3$ ······ ❸

따라서 정수 a는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다. ······ ❹

정답_ 5

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=x^3+ax^2+x-2$ 위의 $x=t$인 점에서의 접선의 기울기 구하기	30 %
❷ 주어진 조건을 만족시키는 식 세우기	30 %
❸ a의 값의 범위 구하기	30 %
❹ 정수 a의 개수 구하기	10 %

311

$f(x)=x^2+\frac{1}{2}$, $g(x)=-2x^2+ax$라고 하면

$f'(x)=2x$, $g'(x)=-4x+a$

두 곡선의 교점의 x좌표를 t라고 하면 $f(t)=g(t)$에서

$t^2+\frac{1}{2}=-2t^2+at \qquad \therefore at=3t^2+\frac{1}{2}$ …… ㉠

$f'(t)g'(t)=-1$에서 $2t(-4t+a)=-1$

$\therefore 8t^2-2at-1=0$ …… ㉡

❶

㉠을 ㉡에 대입하면

$8t^2-2\left(3t^2+\frac{1}{2}\right)-1=0$, $2t^2-2=0$

$t^2=1 \qquad \therefore t=\pm1$ ❷

(i) $t=-1$일 때

㉠에서 $-a=3+\frac{1}{2} \qquad \therefore a=-\frac{7}{2}$

(ii) $t=1$일 때

㉠에서 $a=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{7}{2}$ ($\because a>0$) ❸

정답_ $\frac{7}{2}$

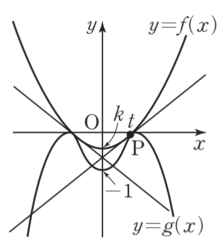
채점 기준	비율
❶ 두 곡선의 교점의 x좌표를 t로 놓고 $f(t)=g(t)$, $f'(t)g'(t)=-1$임을 이용하여 t에 대한 식 세우기	60 %
❷ t의 값 구하기	20 %
❸ 양수 a의 값 구하기	20 %

312

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+k$, $g(x)=-x^4+2x^2-1$이라고 하면

$f'(x)=x$, $g'(x)=-4x^3+4x$

두 접점 중 제4사분면 위의 점을 P라 하고, 점 P의 x좌표를 t $(t>0)$라고 하면 $f(t)=g(t)$에서



$\frac{1}{2}t^2+k=-t^4+2t^2-1$ ❶

$\therefore k=-t^4+\frac{3}{2}t^2-1$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $t=-4t^3+4t$ ❷

$4t^3-3t=0$, $t(2t+\sqrt{3})(2t-\sqrt{3})=0$

$\therefore t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because t>0$) ❸

$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 ㉠에 대입하면 $k=-\frac{7}{16}$ ❹

정답_ $-\frac{7}{16}$

채점 기준	비율
❶ 두 곡선의 교점의 x좌표를 t로 놓고 $f(t)=g(t)$임을 이용하여 식 세우기	30 %
❷ $f'(t)=g'(t)$임을 이용하여 식 세우기	30 %
❸ t의 값 구하기	20 %
❹ k의 값 구하기	20 %

313

$f(x)=x(x+1)(x-3)$이라고 하면

$f'(x)=(x+1)(x-3)+x(x-3)+x(x+1)$

점 A$(-1, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=4$이므로 접선의 방정식은

$y=4\{x-(-1)\} \qquad \therefore y=4x+4$ …… ㉠

❶

점 O$(0, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-3$이므로 접선의 방정식은

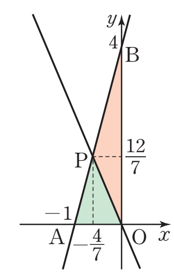
$y=-3x$ …… ㉡

❷

직선 ㉠의 y절편은 4이므로 B$(0, 4)$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\frac{4}{7}$, $y=\frac{12}{7}$

$\therefore$ P$\left(-\frac{4}{7}, \frac{12}{7}\right)$ ❸



따라서 삼각형 PAO, OBP의 넓이는 각각

$S=\frac{1}{2}\times1\times\frac{12}{7}=\frac{6}{7}$

$T=\frac{1}{2}\times4\times\frac{4}{7}=\frac{8}{7}$

$\therefore 49ST=49\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}=48$ ❹

정답_ 48

채점 기준	비율
❶ 점 A$(-1, 0)$에서의 접선의 방정식 구하기	25 %
❷ 점 O$(0, 0)$에서의 접선의 방정식 구하기	25 %
❸ 두 점 B, P의 좌표 구하기	25 %
❹ $49ST$의 값 구하기	25 %

314

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(-1, 3)$에 적어도 하나 존재한다. ❶

조건 ㈏에서 $|f'(c)|\le3$이므로

$\left|\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}\right|\le3$

이때 $f(-1)=k$이고 조건 ㈎에서 $f(3)=2$이므로

$\left|\frac{2-k}{4}\right|\le3$ ❷

$\frac{|k-2|}{4}\le3$, $|k-2|\le12$

$-12\le k-2\le12 \qquad \therefore -10\le k\le14$ ❸

정답_ $-10\le k\le14$

채점 기준	비율
❶ 평균값 정리를 이용하여 $\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1, 3)$에 적어도 하나 존재함을 파악하기	40 %
❷ k에 대한 부등식 세우기	40 %
❸ k의 값의 범위 구하기	20 %

315

조건 (나)의 $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$

이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로

$f(2)-g(2)=0 \quad \therefore f(2)=g(2)$

조건 (가)에서 $g(x)=x^3f(x)-7$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=8f(2)-7$, $7f(2)=7$

$\therefore f(2)=1$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=f'(2)-g'(2)=2$$

$\therefore g'(2)=f'(2)-2$ …… ㉠

또, $g(x)=x^3f(x)-7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

위의 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)$

$f'(2)-2=12\times 1+8f'(2)$ ($\because$ ㉠)

$7f'(2)=-14 \quad \therefore f'(2)=-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$g'(2)=-2-2=-4$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$, 즉 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기가 $g'(2)=-4$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-4(x-2) \quad \therefore y=-4x+9$

따라서 $a=-4$, $b=9$이므로

$a^2+b^2=16+81=97$

정답_ 97

316

조건 (가)에서 네 점 $(-2, f(-2))$, $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$, $(1, f(1))$이 한 직선 위에 있으므로 이 직선의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n은 상수)이라고 하면 이 직선과 곡선 $y=f(x)$는 네 점 $(-2, f(-2))$, $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$, $(1, f(1))$에서 만난다.

이때 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)-(mx+n)=x(x+2)(x+1)(x-1)$에서

$f(x)=x(x+2)(x+1)(x-1)+mx+n$

$f'(x)=(x+2)(x+1)(x-1)+x(x+1)(x-1)$
$\quad +x(x+2)(x-1)+x(x+2)(x+1)+m$

조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 점 $(1, f(1))$에서의 접선이 점 $(a, 0)$에서 만나므로 두 접선은 점 $(a, 0)$을 지난다.

$f(-1)=-m+n$, $f'(-1)=2+m$이므로 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$y-(-m+n)=(2+m)\{x-(-1)\}$

$\therefore y=(2+m)x+2+n$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$(2+m)a+2+n=0$ …… ㉠

$f(1)=m+n$, $f'(1)=6+m$이므로 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y-(m+n)=(6+m)(x-1) \quad \therefore y=(6+m)x-6+n$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$(6+m)a-6+n=0$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$-4a+8=0 \quad \therefore a=2$

㉠$+$㉡을 하면

$2(8+2m)-4+2n=0$ ($\because a=2$)

$\therefore 2m+n=-6$ …… ㉢

주어진 조건에서 $f\left(\frac{3}{2}a\right)=100$, 즉 $f(3)=100$이므로

$3\times 5\times 4\times 2+3m+n=100$

$\therefore 3m+n=-20$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $m=-14$, $n=22$

따라서 $f(x)=x(x+2)(x+1)(x-1)-14x+22$

$f(2a)=f(4)=4\times 6\times 5\times 3-14\times 4+22=326$

정답_ 326

317

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+k$라고 하면 $f'(x)=x$

수직인 두 접선의 접점의 좌표를 각각 $\left(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2+k\right)$, $\left(\beta, \frac{1}{2}\beta^2+k\right)$라고 하면 두 접선의 기울기는 각각

$f'(\alpha)=\alpha$, $f'(\beta)=\beta$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$\alpha\beta=-1$ …… ㉠

점 $\left(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2+k\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{2}\alpha^2+k\right)=\alpha(x-\alpha) \quad \therefore y=\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2+k$

점 $\left(\beta, \frac{1}{2}\beta^2+k\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{2}\beta^2+k\right)=\beta(x-\beta) \quad \therefore y=\beta x-\frac{1}{2}\beta^2+k$

두 접선의 교점의 x좌표는

$\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2+k=\beta x-\frac{1}{2}\beta^2+k$에서

$(\alpha-\beta)x=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2) \quad \therefore x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

따라서 두 접선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha\beta}{2}+k\right)$이고 이 점이 항상 x축 위에 있어야 하므로

$\frac{\alpha\beta}{2}+k=0$, $-\frac{1}{2}+k=0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore k=\frac{1}{2}$

정답_ ④

318

$f(x)=x^3+3x^2+2x$에서 $f'(x)=3x^2+6x+2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하므로

$f'(a)=f'(b)$

즉, $3a^2+6a+2=3b^2+6b+2$

$3(a^2-b^2)+6(a-b)=0$

$3(a+b)(a-b)+6(a-b)=0$

$3(a-b)(a+b+2)=0$

이때 $a\neq b$이므로 $a+b+2=0$

$\therefore a+b=-2$ …… ㉠

선분 AB의 중점 M의 좌표는

$\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{f(a)+f(b)}{2}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{M}\left(-1, \dfrac{f(a)+f(b)}{2}\right)$

$$\begin{aligned}f(a)+f(b)&=(a^3+3a^2+2a)+(b^3+3b^2+2b)\\&=a^3+b^3+3(a^2+b^2)+2(a+b)\\&=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3(a^2+b^2)+2(a+b)\\&=-2(a^2-ab+b^2)+3(a^2+b^2)-4\ (\because ㉠)\\&=a^2+2ab+b^2-4\\&=(a+b)^2-4\\&=(-2)^2-4\ (\because ㉠)\\&=0\end{aligned}$$

이므로 점 M의 좌표는 $(-1, 0)$이다.

이때 $f(-1)=0$이므로 점 $\mathrm{M}(-1, 0)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고, $f'(-1)=-1$이므로 점 M에서의 접선의 기울기는 -1이다.

또, 점 M에서의 접선이 직선 l과 수직이고, 두 직선 l, m은 서로 평행하므로 두 직선 l, m의 기울기는 1이다.

따라서 두 실수 a, b는 방정식 $f'(x)=1$에서 $3x^2+6x+2=1$, 즉 $3x^2+6x+1=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$ab=\dfrac{1}{3}$

정답_ $\dfrac{1}{3}$

319

$f(x)=-x^3+ax^2+2x$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax+2$

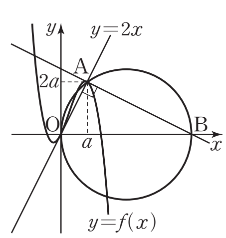
점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선의 기울기가 $f'(0)=2$이므로 접선의 방정식은

$y=2x$

이 직선과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표는 $2x=-x^3+ax^2+2x$에서

$x^3-ax^2=0$, $x^2(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$ $\qquad\therefore \mathrm{A}(a, 2a)$



점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 $\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$

즉, 두 직선 OA, AB는 서로 수직이다.

이때 직선 AB의 기울기는

$f'(a)=-3a^2+2a^2+2=-a^2+2$

이므로 $2\times(-a^2+2)=-1$에서

$a^2=\dfrac{5}{2}$ $\qquad\therefore a=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ $(\because a>\sqrt{2})$

$\therefore \mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, \sqrt{10}\right)$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y-\sqrt{10}=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$ $\qquad\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5\sqrt{10}}{4}$

이 직선의 x절편은 $\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$이므로 점 B의 좌표는 $\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{2}, 0\right)$

따라서

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(\sqrt{10})^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$,

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{2}-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(0-\sqrt{10})^2}=5\sqrt{2}$

이므로

$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\times5\sqrt{2}=25$

정답_ 25

320

$f(x)=x^3+4x^2+3x$라고 하면 $f'(x)=3x^2+8x+3$

접점의 좌표를 (t, t^3+4t^2+3t)라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+8t+3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+4t^2+3t)=(3t^2+8t+3)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+8t+3)x-2t^3-4t^2$

이 직선과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표는

$x^3+4x^2+3x=(3t^2+8t+3)x-2t^3-4t^2$에서

$x^3+4x^2-(3t^2+8t)x+2t^3+4t^2=0$

$$\begin{array}{c|cccc}t & 1 & 4 & -3t^2-8t & 2t^3+4t^2\\ & & t & t^2+4t & -2t^3-4t^2\\\hline t & 1 & t+4 & -2t^2-4t & 0\\ & & t & 2t^2+4t & \\\hline & 1 & 2t+4 & 0 & \end{array}$$

$(x-t)^2(x+2t+4)=0$ $\qquad\therefore x=t$ 또는 $x=-2t-4$

이때 접선과 곡선이 접점 이외의 점에서 만나지 않아야 하므로

$t=-2t-4$ $\qquad\therefore t=-\dfrac{4}{3}$

즉, 접점의 좌표는 $\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{20}{27}\right)$이고 접선의 기울기는

$f'\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{7}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{20}{27}=-\dfrac{7}{3}\left\{x-\left(-\dfrac{4}{3}\right)\right\}$ $\qquad\therefore y=-\dfrac{7}{3}x-\dfrac{64}{27}$

따라서 $m=-\dfrac{7}{3}$, $n=-\dfrac{64}{27}$이므로

$\dfrac{64m}{n}=\dfrac{64\times\left(-\dfrac{7}{3}\right)}{-\dfrac{64}{27}}=63$

정답_ 63

321

$\displaystyle\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-2}{x-a}=4$에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)-2\}=0$이므로

$f(a)-2=0$ $\qquad\therefore f(a)=2$

또,

$\displaystyle\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-2}{x-a}=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=4$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-2=4(x-a)$ $\qquad\therefore y=4x-4a+2$

이 접선의 y절편이 6이므로

$-4a+2=6$ $\qquad\therefore a=-1$

따라서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$이므로 $f(x)=x^3+px^2+qx$ (p, q는 상수)로 놓으면

$f(-1)=2$에서 $-1+p-q=2$

$\therefore p-q=3$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2+2px+q$이므로

$f'(-1)=4$에서 $3-2p+q=4$

$\therefore 2p-q=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-4$, $q=-7$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2-7x$이므로

$f(1)=1-4-7=-10$

정답_ ①

322

$f(x)=x^2+k$라고 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+k)$라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+k)=2t(x-t)$ $\quad\therefore y=2tx-t^2+k$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 지나므로

$2=2t-t^2+k$ $\quad\therefore t^2-2t-k+2=0$ …… ㉠

t에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-k+2$ …… ㉡

이때 α, β는 두 접점 B, C의 x좌표이므로 $\mathrm{B}(\alpha,\ \alpha^2+k)$, $\mathrm{C}(\beta,\ \beta^2+k)$라고 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{\alpha+\beta+1}{3},\ \dfrac{\alpha^2+k+\beta^2+k+2}{3}\right)$

이 점이 점 $(1,\ 6)$과 같으므로

$\dfrac{\alpha^2+k+\beta^2+k+2}{3}=6$에서

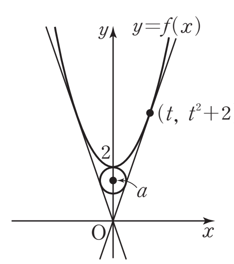
$\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2k+2}{3}=6$

$2^2-2(-k+2)+2k+2=18$ ($\because$ ㉡)

$4k=16$ $\quad\therefore k=4$

정답_ ③

323



$f(x)=x^2+2$라고 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2)$라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+2)=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2+2$

이 직선이 원점을 지나므로

$-t^2+2=0$ $\quad\therefore t=\pm\sqrt{2}$

따라서 접선의 방정식은

$y=\pm2\sqrt{2}x$

원의 중심을 $(0,\ a)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 점 $(0,\ a)$와 직선 $y=2\sqrt{2}x$, 즉 $2\sqrt{2}x-y=0$ 사이의 거리가 r이므로

$\dfrac{|-a|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(-1)^2}}=r$ $\quad\therefore a=3r$ ($\because a>0$) …… ㉠

또, 원이 곡선 $y=x^2+2$와 점 $(0,\ 2)$에서 접하므로

$a+r=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{3}{2}$, $r=\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\pi=\dfrac{\pi}{4}$

정답_ ①

324

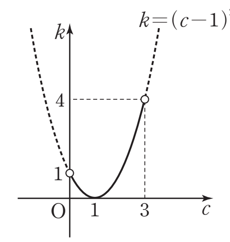
함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=x^2-2x+1$이므로

$k=c^2-2c+1=(c-1)^2$



또, a, b $(a<b)$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에 속하는 임의의 두 실수이므로

$0<c<3$

따라서 $k=(c-1)^2$ $(0<c<3)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$0\le k<4$

정답_ $0\le k<4$

325

ㄱ. 다항함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c_1)=0$인 c_1이 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(-x)=-f(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=-f(0)$, 즉 $f(0)=0$이다.
한편, 다항함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c_2)$, 즉 $f'(c_2)=-1$ ($\because f(2)=-2$)인 c_2가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $f'(x)=-1$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $f(0)=f(c_1)=0$ $(1<c_1<2)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c_3)=0$인 c_3이 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
한편, 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $f'(-c_3)=0$이다. $f(-x)=-f(x)$
따라서 방정식 $f'(x)=0$은 적어도 2개의 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

326

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하고 조건 ㈎에서 $x\ge2$일 때 $f(x)=ax^2+bx$이므로

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2+}\frac{ax^2+bx-4a-2b}{x-2}\\&=\lim_{x\to2+}\frac{a(x^2-4)+b(x-2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2+}\frac{a(x+2)(x-2)+b(x-2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2+}\{a(x+2)+b\}=4a+b\end{aligned}$$

또, 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$를 만족시키는 c가 열린구간 (x_1, x_2)에 적어도 하나 존재하므로 조건 (나)에서

$f'(c)\le 10$

이때 x_1, x_2가 $2\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수이므로 $x\ge 2$에서 $f'(x)\le 10$이다.

즉, $4a+b\le 10$이므로 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$의 8개이다.

정답_ ③

05 도함수의 활용 (2)

327

(1) $f(x)=-2x^3-6x^2+18x+4$에서

$f'(x)=-6x^2-12x+18=-6(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-50	↗	14	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -3]$, $[1, \infty)$에서 감소하고, 구간 $[-3, 1]$에서 증가한다.

(2) $f(x)=x^3+3x^2+3x+4$에서

$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

(3) $f(x)=-3x^4+4x^3-1$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

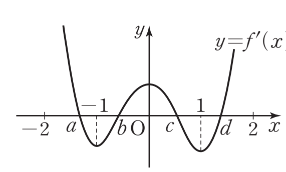
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↗	0	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1]$에서 증가하고, 구간 $[1, \infty)$에서 감소한다.

정답_ **풀이 참조**

328



오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 a, b, c, d라고 하면

$f(x)$가 증가하는 구간은 $f'(x)\ge 0$이므로

$(-\infty, a]$, $[b, c]$, $[d, \infty)$

$f(x)$가 감소하는 구간은 $f'(x)\le 0$이므로

$[a, b]$, $[c, d]$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

329

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+1$에서

$f'(x)=x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$

이때 함수 $f(x)$는 $f'(x)\le 0$인 구간에서 감소하므로
$(x+1)(x-5)\le 0 \qquad \therefore -1\le x\le 5$
따라서 $-1\le a<b\le 5$이므로 $b-a$의 최댓값은
$5-(-1)=6$

정답_ ①

330

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+bx+2$에서
$f'(x)=x^2-ax+b$
함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 $(-\infty, 2]$, $[3, \infty)$이므로
$f'(x)\ge 0$의 해는 $x\le 2$ 또는 $x\ge 3$이다.
따라서 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근은 2, 3이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$2+3=a$, $2\times 3=b$
즉, $a=5$, $b=6$이므로
$ab=5\times 6=30$

정답_ 30

331

$f(x)=-2x^3+3x^2+px-5$에서
$f'(x)=-6x^2+6x+p$
함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위가 $-1\le x\le q$이므로
$f'(x)\ge 0$의 해는 $-1\le x\le q$이다.
따라서 이차방정식 $-6x^2+6x+p=0$의 두 근은 -1, q이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-1+q=1$, $-1\times q=\frac{p}{-6}$
즉, $p=12$, $q=2$이므로
$p+q=12+2=14$

정답_ ③

다른 풀이
함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위, 즉 $f'(x)\ge 0$의 해가
$-1\le x\le q$이므로
$f'(x)=-6(x+1)(x-q)$
$\quad=-6x^2+6(q-1)x+6q$
따라서 $6=6(q-1)$, $p=6q$이므로
$p=12$, $q=2$
$\therefore p+q=12+2=14$

332

$y=\{f(x)\}^2$에서
$y'=2f(x)f'(x)$
ㄱ. 구간 $(-\infty, a)$에서 $f(x)>0$, $f'(x)<0$이므로
$2f(x)f'(x)<0$
따라서 구간 $(-\infty, a)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.
ㄴ. 구간 (a, b)에서 $f(x)<0$, $f'(x)<0$이므로
$2f(x)f'(x)>0$
따라서 구간 (a, b)에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.
ㄷ. 구간 $(0, c)$에서 $f(x)>0$, $f'(x)>0$이므로
$2f(x)f'(x)>0$
따라서 구간 $(0, c)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.
ㄹ. 구간 (c, d)에서 $f(x)>0$, $f'(x)<0$이므로
$2f(x)f'(x)<0$
따라서 구간 (c, d)에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.
따라서 감소하는 구간인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

정답_ ②

333

$f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서
$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=a^2+3(a^2-8a)\le 0$
$a^2-6a\le 0$, $a(a-6)\le 0$
$\therefore 0\le a\le 6$
따라서 실수 a의 최댓값은 6이다.

정답_ 6

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 할 때
(1) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$이 성립하려면
$a>0$, $D\le 0$
(2) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$이 성립하려면
$a<0$, $D\le 0$

334

$f(x)=-3x^3+ax^2-9x+7$에서
$f'(x)=-9x^2+2ax-9$
함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=a^2-81\le 0$
$(a+9)(a-9)\le 0 \qquad \therefore -9\le a\le 9$
따라서 $M=9$, $m=-9$이므로
$M+m=9+(-9)=0$

정답_ ③

335

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2-(a-6)x-2$에서
$f'(x)=x^2-2ax-(a-6)$
$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=a^2+a-6\le 0$
$(a+3)(a-2)\le 0 \qquad \therefore -3\le a\le 2$
따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0, 1, 2의 6개이다.

정답_ 6

336

주어진 명제에서 함수 $f(x)$가 일대일함수이고 최고차항의 계수

가 양수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+(a-1)x+1$에서

$f'(x)=3x^2+2(a-1)x+a-1$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-3(a-1)\leq 0$

$a^2-5a+4\leq 0$, $(a-1)(a-4)\leq 0$

$\therefore 1\leq a\leq 4$

따라서 실수 a의 최댓값은 4, 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$4+1=5$

정답_ ⑤

참고 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

(1) $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$일 때, 함수 f를 일대일함수라고 한다.

(2) 일대일함수이고 치역과 공역이 같은 함수 f를 일대일대응이라고 한다.

이때 일대일함수인 일차함수는 일대일대응이다.

337

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$f(x)=-x^3+ax^2+ax+1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2+3a\leq 0$

$a(a+3)\leq 0$ $\quad\therefore -3\leq a\leq 0$

정답_ ①

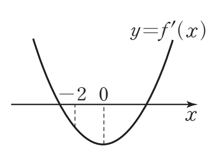
참고 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

338

$f(x)=x^3+ax+4$에서

$f'(x)=3x^2+a$

함수 $f(x)$가 구간 $[-2, 0]$에서 감소하려면 $-2\leq x\leq 0$에서 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(-2)=12+a\leq 0$ $\quad\therefore a\leq -12$

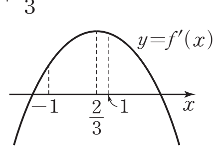
정답_ $a\leq -12$

339

$f(x)=-x^3+2x^2+ax-2$에서

$f'(x)=-3x^2+4x+a=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+a+\frac{4}{3}$

함수 $f(x)$가 구간 $[-1, 1]$에서 증가하려면 $-1\leq x\leq 1$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(-1)=-3-4+a\geq 0$ $\quad\therefore a\geq 7$

따라서 실수 a의 최솟값은 7이다.

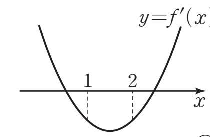
정답_ ⑤

340

$f(x)=x^3+ax^2+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 구간 $[1, 2]$에서 감소하려면 $1\leq x\leq 2$에서 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(1)=3+2a\leq 0$ $\quad\therefore a\leq -\frac{3}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)=12+4a\leq 0$ $\quad\therefore a\leq -3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\leq -3$이므로 구하는 최댓값은 -3이다.

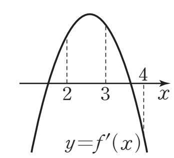
정답_ -3

341

$f(x)=-\frac{1}{6}x^3+ax^2-2x+3$에서

$f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+2ax-2$

함수 $f(x)$가 $2\leq x\leq 3$에서 증가하고, $x\geq 4$에서 감소하려면 $2\leq x\leq 3$에서 $f'(x)\geq 0$이고, $x\geq 4$에서 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(2)=-2+4a-2\geq 0$ $\quad\therefore a\geq 1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(3)=-\frac{9}{2}+6a-2\geq 0$ $\quad\therefore a\geq \frac{13}{12}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$f'(4)=-8+8a-2\leq 0$ $\quad\therefore a\leq \frac{5}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\frac{13}{12}\leq a\leq \frac{5}{4}$이므로 $M=\frac{5}{4}$, $m=\frac{13}{12}$

$\therefore M+m=\frac{5}{4}+\frac{13}{12}=\frac{7}{3}$

정답_ ②

342

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$에서

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	21	↘	-6	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 21, $x=1$에서 극솟값 -6을 가지므로 $M=21$, $m=-6$

$\therefore M+m=21+(-6)=15$

정답_ ③

343

$f(x)=-3x^4-4x^3+12x^2-5$에서

$f'(x)=-12x^3-12x^2+24x=-12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$와 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 구하는 곱은

$-2\times1=-2$

정답_ -2

344

$f(x)=2x^3-9x^2+12x+2$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	6	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 7, $x=2$에서 극솟값 6을 가지므로 두 점 $(1, 7)$, $(2, 6)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(2-1)^2+(6-7)^2}=\sqrt{2}$

정답_ ②

345

$g(x)=(x^3+2)f(x)$에서

$g'(x)=(x^3+2)'f(x)+(x^3+2)f'(x)$

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 36을 가지므로

$g(1)=36$, $g'(1)=0$

$g(1)=36$에서 $3f(1)=36$ $\quad\therefore f(1)=12$

$g'(1)=0$에서 $3f(1)+3f'(1)=0$

$\therefore f'(1)=-f(1)=-12$

$\therefore f(1)-f'(1)=12-(-12)=24$

정답_ 24

346

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라고 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

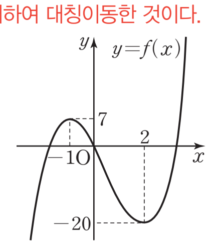
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

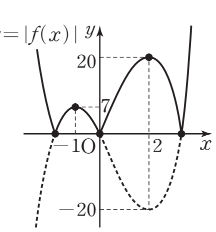
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-20	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같으므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같다.

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(x)<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 함수 $y=|2x^3-3x^2-12x|$의 그래프에서 극대 또는 극소가 되는 점은 5개이다.

정답_ ④

347

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+4$	↘	a	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 a를 갖고, 주어진 조건에서 극솟값이 3이므로 $a=3$

정답_ ④

348

$f(x)=x^3+ax^2+bx-2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극댓값 25를 가지므로

$f(-3)=25$, $f'(-3)=0$

$f(-3)=25$에서 $-27+9a-3b-2=25$

$\therefore 3a-b=18$ …… ㉠

$f'(-3)=0$에서 $27-6a+b=0$

$\therefore 6a-b=27$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-9$

$f(x)=x^3+3x^2-9x-2$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	25	↘	-7	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -7을 갖는다.

정답_ ②

349

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값, $x=3$에서 극댓값을 가지므로

$f'(1)=f'(3)=0$

$f'(1)=0$에서 $-3+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=3$ …… ㉠

$f'(3)=0$에서 $-27+6a+b=0$

$\therefore 6a+b=27$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=-9$

$\therefore f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -3, $x=3$에서 극댓값 1을 가지므로 구하는 합은

$1+(-3)=-2$

정답_ -2

다른 풀이

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이고, $x=3$에서 극대이므로

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$에서
$-3x^2+2ax+b=-3(x-1)(x-3)=-3x^2+12x-9$
$\therefore a=6,\ b=-9$

350

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-9a^2x$에서
$f'(x)=x^2-9a^2=(x+3a)(x-3a)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3a$ 또는 $x=3a$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-3a$	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$18a^3$	↘	$-18a^3$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3a$에서 극댓값 $18a^3$, $x=3a$에서 극솟값 $-18a^3$을 갖는다.
이때 극댓값과 극솟값의 차가 36이므로
$18a^3-(-18a^3)=36,\ a^3-1=0$
$(a-1)(a^2+a+1)=0 \qquad \therefore a=1$ ($\because a$는 실수)

정답_ ⑤

351

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq 0$)라고 하면
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극솟값 2를 가지므로
$f(0)=2,\ f'(0)=0$
$\therefore c=0,\ d=2$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 6)$에서의 접선의 기울기가 -6이므로
$f(-1)=6,\ f'(-1)=-6$
$f(-1)=6$에서 $-a+b-c+d=6$
$\therefore a-b=-4$ ...... ㉠
$f'(-1)=-6$에서 $3a-2b+c=-6$
$\therefore 3a-2b=-6$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=6$
따라서 $f(x)=2x^3+6x^2+2$이므로
$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	10	↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 10을 갖는다.

정답_ ⑤

352

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
조건 ㈎의 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-9$에서 $x \to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $f(0)=c=0$
$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-9$이므로 $f'(0)=b=-9$ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$
또, 조건 ㈏에서 $f'(-1)=0$이므로
$3-2a+b=0 \qquad \therefore a=-3$
따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x$이므로
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 -27을 갖는다.

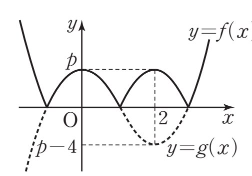
정답_ -27

353

$g(x)=x^3-3x^2+p$라고 하면 $f(x)=|g(x)|$
$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	p	↘	$p-4$	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 p, $x=2$에서 극솟값 $p-4$를 가지므로 함수 $f(x)=|g(x)|$가 극대가 되는 x의 값이 2개이고 그 극댓값이 같으려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$g(0)=p>0,\ g(2)=p-4<0$
$\therefore 0<p<4$
이때 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 극댓값을 갖고
$f(0)=|p|=p,\ f(2)=|p-4|=4-p$이므로
$f(0)=f(2)$에서 $p=4-p$
$2p=4 \qquad \therefore p=2$

정답_ ②

354

함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서
$x \to \infty$일 때 $f(x) \to -\infty$이므로 $a<0$
또, 그래프가 y축의 음의 부분에서 만나므로 $d<0$
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고, 그 값이 모두 양수이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0,\ \alpha\beta=\frac{c}{3a}>0$
이때 $a<0$이므로 $b>0,\ c<0$
따라서 옳은 것은 ②이다.

정답_ ②

355

함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$의 그래프에서

$x \longrightarrow \infty$일 때 $f(x) \longrightarrow \infty$이므로 $a>0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β라고 하면 α, β는 모두 양수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{3a}>0$

이때 $a>0$이므로 $b<0$, $c>0$

따라서 함수 $g(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는

(i) $a>0$이므로 아래로 볼록하다.

(ii) 대칭축이 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$이므로 대칭축은 y축의 오른쪽에 있다.

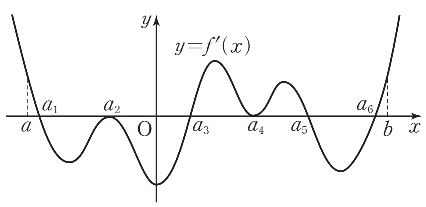
(iii) $g(0)=c>0$이므로 y축의 양의 부분에서 만난다.

(i)~(iii)에서 함수 $g(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

정답_ ④

356

다음 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6이라고 하자.



(i) $x=a_1$, $x=a_5$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_1$, $x=a_5$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore m=2$

(ii) $x=a_3$, $x=a_6$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_3$, $x=a_6$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore n=2$

(i), (ii)에서 $m+n=2+2=4$

정답_ 4

주의 $x=a_2$, $x=a_4$의 좌우에서는 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.
이와 같이 $f'(a)=0$이어도 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖지 않음에 주의한다.

357

$h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$ $f'(x)-g'(x)=0$에서 $f'(x)=g'(x)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 두 함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 $x=a$ 또는 $x=d$ 또는 $x=e$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=d$에서 극대이다.

정답_ ④

358

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(-2)=f'(1)=0$

$f'(-2)=0$에서 $12-4a+b=0$

$\therefore 4a-b=12$ ⋯⋯ ㉠

$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=-3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{3}{2}$, $b=-6$

즉, $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2}x^2-6x+c$이고, 함수 $f(x)$의 극솟값이 $\dfrac{9}{2}$이므로

$f(1)=c-\dfrac{7}{2}=\dfrac{9}{2}$ $\quad\therefore c=8$

따라서 $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2}x^2-6x+8$이므로 구하는 극댓값은

$f(-2)=-8+6+12+8=18$

정답_ 18

359

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 1이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라고 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=f'(1)=0$이므로

$f'(0)=0$에서 $c=0$

$f'(1)=0$에서 $3a+2b+c=0$

$\therefore 3a+2b=0$ ⋯⋯ ㉠

또, $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 -1, $x=1$에서 극댓값 1을 가지므로

$f(0)=-1$에서 $d=-1$

$f(1)=1$에서 $a+b+c+d=1$

$\therefore a+b=2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=6$

따라서 $f(x)=-4x^3+6x^2-1$이므로

$f(-1)=4+6-1=9$

정답_ ③

360

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -4, -1이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라고 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 2이므로

$f'(0)=2$에서 $c=2$

$f'(-4)=f'(-1)=0$이므로

$f'(-4)=0$에서 $48a-8b+c=0$

$\therefore 24a-4b=-1$ …… ㉠

$f'(-1)=0$에서 $3a-2b+c=0$

$\therefore 3a-2b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{5}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{4}x^2+2x+d$이므로 $f(x)$의 극댓값과 극솟값은 각각

$\alpha=f(-4)=-\frac{32}{3}+20-8+d=d+\frac{4}{3}$

$\beta=f(-1)=-\frac{1}{6}+\frac{5}{4}-2+d=d-\frac{11}{12}$

$\therefore \alpha-\beta=\left(d+\frac{4}{3}\right)-\left(d-\frac{11}{12}\right)=\frac{9}{4}$

정답_ $\frac{9}{4}$

361

① $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이다. (거짓)

② $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

③ $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 1개의 극값을 갖는다. (거짓)

④ $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖고 $f(1)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $x=1$에서 x축에 접한다. (참)

⑤ 구간 $(1, 3)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가하고 $f(1)=0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 $x=3$에서 근을 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ④이다.

정답_ ④

362

ㄱ. 구간 $(0, 2)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다. (거짓)

ㄴ. $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다. 즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

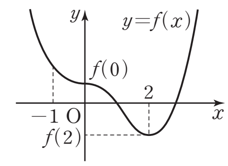
정답_ ③

363

ㄱ. 구간 $(-\infty, 0)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소하고 $f(0)>0$이므로 $f(-1)>0$ (참)

ㄴ. $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 구간 $(-\infty, 2)$에서 $f'(x)\le 0$이므로 $f(x)$는 감소하고, 구간 $(2, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
이때 $f(2)<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

364

ㄱ. $x=x_2$, $x=x_5$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=x_2$, $x=x_5$에서 극대이고 $f(x_2)\ne f(x_5)$이므로 구간 (x_1, x_6)에서 $f(x)$는 2개의 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)$는 $x=x_2$에서 극대이지만 극댓값이 0인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. 구간 (x_3, x_4)에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소하고, 구간 (x_4, x_5)에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다. (거짓)

ㄹ. $f'(x_3)$의 값이 존재하므로 $f(x)$는 $x=x_3$에서 미분가능하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

정답_ ③

365

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 0이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	…	-1	…	0	…
$f'(x)$	+	0	+	0	−
$f(x)$	↗		↗	0	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서는 극값을 갖지 않고, $x=0$에서 극댓값 0을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다.

정답_ ②

366

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, b, c이므로

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

x	…	a	…	b	…	c	…
$f'(x)$	−	0	+	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, $x=b$에서는 극값을 갖지 않고, $x=c$에서 극대이므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

정답_ ④

367

$f(x)=x^3+ax^2+(a^2-4a)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a^2-4a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-4a)>0$

$a^2-6a<0$, $a(a-6)<0$

$\therefore\ 0<a<6$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

정답_ ①

참고 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 갖는다.

368

$f(x)=x^3+3ax^2+(6-3a)x+7$에서

$f'(x)=3x^2+6ax+6-3a$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(3a)^2-3(6-3a)>0$

$a^2+a-2>0$, $(a+2)(a-1)>0$

$\therefore\ a<-2$ 또는 $a>1$

따라서 실수 a의 값이 아닌 것은 ②이다.

정답_ ②

369

$f(x)=2kx^3-6x^2+3kx-1$에서

$f'(x)=6kx^2-12x+3k$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=36-18k^2>0$

$k^2<2\qquad\therefore\ -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

이때 $f(x)$가 삼차함수이므로 $k\neq0$

따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$-\sqrt{2}<k<0$ 또는 $0<k<\sqrt{2}$

정답_ $-\sqrt{2}<k<0$ 또는 $0<k<\sqrt{2}$

370

$f(x)=x^3+ax^2+3ax-6$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9a\leq0$

$a(a-9)\leq0\qquad\therefore\ 0\leq a\leq9$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, ⋯, 9의 10개이다.

정답_ ④

371

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2-(2a+3)x+2$에서

$f'(x)=-x^2+2ax-(2a+3)$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(2a+3)\leq0$

$a^2-2a-3\leq0$, $(a+1)(a-3)\leq0$

$\therefore\ -1\leq a\leq3$

따라서 실수 a의 최댓값은 3, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$3+(-1)=2$

정답_ ②

372

함수 $f(x)=-x^3-ax^2+(a-6)x+k$의 그래프가 k의 값에 관계없이 x축과 한 번만 만나므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

$f(x)=-x^3-ax^2+(a-6)x+k$에서

$f'(x)=-3x^2-2ax+a-6$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2+3(a-6)\leq0$

$a^2+3a-18\leq0$, $(a+6)(a-3)\leq0$

$\therefore\ -6\leq a\leq3$

정답_ $-6\leq a\leq3$

참고 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)의 그래프가 d의 값에 관계없이 x축과 한 번만 만난다.
$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.

373

$f(x)=\frac{2}{3}x^3+(a-1)x^2+2x-7$에서

$f'(x)=2x^2+2(a-1)x+2$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=(a-1)^2-4\leq0$

$a^2-2a-3\leq0$, $(a+1)(a-3)\leq0$

$\therefore\ -1\leq a\leq3$ ...... ㉠

$g(x)=x^3+ax^2+(a^2-4a)x+5$에서

$g'(x)=3x^2+2ax+a^2-4a$

삼차함수 $g(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $g'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2-3(a^2-4a)>0$

$a^2-6a<0$, $a(a-6)<0$

$\therefore\ 0<a<6$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $0<a\leq3$

따라서 정수 a는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$

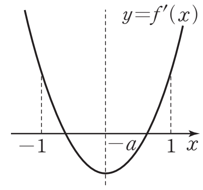
정답_ 6

374

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+3ax+5$에서

$f'(x)=x^2+2ax+3a$

삼차함수 $f(x)$가 $-1<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$

$a(a-3)>0$ $\quad\therefore a<0$ 또는 $a>3$

(ii) $f'(-1)=1-2a+3a>0$에서 $a>-1$

(iii) $f'(1)=1+2a+3a>0$에서 $a>-\frac{1}{5}$

(iv) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-a$이므로 $-1<-a<1$에서 $-1<a<1$

(i)~(iv)에서 $-\frac{1}{5}<a<0$

정답_ ③

참고 최고차항의 계수가 양수인 이차방정식 $f'(x)=0$이 구간 (a, b)에서 서로 다른 두 실근을 가지려면

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D>0$

(ii) $f'(a)>0$, $f'(b)>0$

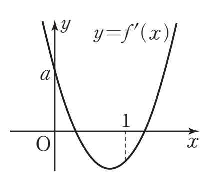
(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=m$이면 $a<m<b$

375

$f(x)=x^3-a^2x^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2-2a^2x+a$

삼차함수 $f(x)$가 $0<x<1$에서 극댓값을 갖고, $x>1$에서 극솟값을 가지려면 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) $f'(0)=a>0$

(ii) $f'(1)=3-2a^2+a<0$에서

$2a^2-a-3>0$, $(a+1)(2a-3)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $a>\frac{3}{2}$

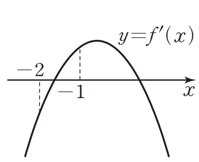
정답_ ⑤

376

$f(x)=-x^3+3ax^2-3ax+2$에서

$f'(x)=-3x^2+6ax-3a$

삼차함수 $f(x)$가 구간 $(-2, -1)$에서 극솟값을 갖고 극댓값은 갖지 않으려면 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) $f'(-2)=-12-12a-3a<0$에서

$a>-\frac{4}{5}$

(ii) $f'(-1)=-3-6a-3a>0$에서

$a<-\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $-\frac{4}{5}<a<-\frac{1}{3}$

정답_ $-\frac{4}{5}<a<-\frac{1}{3}$

377

$f(x)=-x^4+2x^3-ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+6x^2-2ax=-2x(2x^2-3x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식

$2x^2-3x+a=0$ …… ㉠

이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x=0$이 이차방정식 ㉠의 근이 아니어야 하므로

$a\neq0$

(ii) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$D=9-8a>0$ $\quad\therefore a<\frac{9}{8}$

(i), (ii)에서 $a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$

정답_ $a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$

참고 (1) 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때, $f(x)$는 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우에만 극댓값을 갖는다.

(2) 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때, $f(x)$는 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우에만 극솟값을 갖는다.

378

$f(x)=x^4-4ax^3+6ax^2-3$에서

$f'(x)=4x^3-12ax^2+12ax=4x(x^2-3ax+3a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식

$x^2-3ax+3a=0$ …… ㉠

이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x=0$이 이차방정식 ㉠의 근이 아니어야 하므로

$a\neq0$

(ii) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$D=9a^2-12a>0$

$a(3a-4)>0$ $\quad\therefore a<0$ 또는 $a>\frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 $a<0$ 또는 $a>\frac{4}{3}$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=\frac{4}{3}$이므로

$\alpha+\beta=0+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

정답_ ⑤

379

$f(x)=x^4-4(a-1)x^3+2(a^2-1)x^2$에서

$f'(x)=4x^3-12(a-1)x^2+4(a^2-1)x$

$=4x\{x^2-3(a-1)x+a^2-1\}$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 두 개 이하이어야 하므로 이차방정식

$x^2-3(a-1)x+a^2-1=0$ …… ㉠

이 $x=0$을 근으로 갖거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠이 $x=0$을 근으로 갖는 경우

$a^2-1=0$, $a^2=1$

$\therefore a=\pm 1$

(ii) 이차방정식 ㉠이 중근 또는 허근을 갖는 경우

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$D=9(a-1)^2-4(a^2-1)\le 0$

$5a^2-18a+13\le 0$, $(a-1)(5a-13)\le 0$

$\therefore 1\le a\le \frac{13}{5}$

(i), (ii)에서 $a=-1$ 또는 $1\le a\le \frac{13}{5}$

따라서 실수 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

정답_ ①

참고 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

380

$f(x)=-2x^4+8x^3-4(a+2)x^2+8ax-3$에서

$f'(x)=-8x^3+24x^2-8(a+2)x+8a$

$=-8(x-1)(x^2-2x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 두 개 이하이어야 하므로 이차방정식

$x^2-2x+a=0$ …… ㉠

이 $x=1$을 근으로 갖거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1-2+a=0$ $\therefore a=1$

(ii) 이차방정식 ㉠이 중근 또는 허근을 갖는 경우

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=1-a\le 0$ $\therefore a\ge 1$

(i), (ii)에서 $a\ge 1$

정답_ ⑤

381

$f(x)=2x^4-4x^3-(a-5)x^2+1$에서

$f'(x)=8x^3-12x^2-2(a-5)x=2x(4x^2-6x-a+5)$

사차함수 $f(x)$가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 두 개 이하이어야 하므로 이차방정식

$4x^2-6x-a+5=0$ …… ㉠

이 $x=0$을 근으로 갖거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠이 $x=0$을 근으로 갖는 경우

$-a+5=0$ $\therefore a=5$

(ii) 이차방정식 ㉠이 중근 또는 허근을 갖는 경우

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=9-4(-a+5)\le 0$ $\therefore a\le \frac{11}{4}$

(i), (ii)에서 $a\le \frac{11}{4}$ 또는 $a=5$

따라서 자연수 a는 1, 2, 5이므로 구하는 합은

$1+2+5=8$

정답_ 8

382

주어진 그래프에서 $f'(x)=0$인 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최소이다.

정답_ 0

383

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-2$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	3	↘	2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 3을 가지므로

$a=1$, $b=3$

$\therefore a-b=1-3=-2$

정답_ ①

384

$f(x)=x^3-3x^2+8$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6	↘	4	↗	24

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 24, $x=2$에서 최솟값 4를 가지므로

$M=24$, $m=4$

$\therefore M+m=24+4=28$

정답_ ①

385

$f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2-2$에서

$f'(x)=x^3+3x^2+2x=x(x+1)(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	$-\frac{7}{4}$	↘	-2	↗	$\frac{1}{4}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $\frac{1}{4}$, $x=-2$ 또는 $x=0$에서 최솟값 -2를 가지므로 구하는 곱은

$\frac{1}{4}\times(-2)=-\frac{1}{2}$

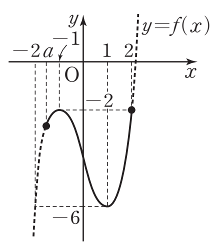
정답_ ③

386

$f(x)=x^3-3x-4$에서
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
구간 $[a, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(a)$	↗	-2	↘	-6	↗	-2

이때 $f(x)=-6$에서
$x^3-3x-4=-6$, $x^3-3x+2=0$
$(x+2)(x-1)^2=0$ $\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=1$
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구간 $[a, 2]$에서 $f(x)$가 최솟값 -6을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위는
$-2\le a<-1$
따라서 실수 a의 최솟값은 -2이다.



정답_ ④

387

$x^2-4x+2=t$로 놓으면
$t=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$
구간 $[0, 4]$에서 $-2\le t\le 2$
$g(t)=-t^3+12t-1$이라고 하면
$g'(t)=-3t^2+12=-3(t+2)(t-2)$
$g'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=2$
구간 $[-2, 2]$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	$\cdots$	2
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	-17	↗	15

따라서 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 최댓값 15, $t=-2$에서 최솟값 -17을 가지므로 구하는 합은
$15+(-17)=-2$

정답_ ①

388

$f(x)=-x^3+3x+2$에서
$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 4, $x=-1$ 또는 $x=2$에서 최솟값 0을 갖는다.
$f(x)=t$로 놓으면 $0\le t\le 4$
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(t)=-t^3+3t+2$
$f'(t)=-3t^2+3=-3(t+1)(t-1)$
$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because$ $0\le t\le 4$)
구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	2	↗	4	↘	-50

따라서 함수 $f(t)$는 $t=4$에서 최솟값 -50을 갖는다.

정답_ ③

389

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	a	↗	$a+4$	↘	a

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $a+4$를 가지므로
$a+4=12$ $\therefore$ $a=8$

정답_ ④

390

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because$ $1\le x\le 4$)
구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-2$	↘	$a-4$	↗	$a+16$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 $a+16$, $x=2$에서 최솟값 $a-4$를 갖는다.
이때 최댓값과 최솟값의 합이 22이므로
$(a+16)+(a-4)=22$
$2a=10$ $\therefore$ $a=5$

정답_ 5

391

$f(x)=2ax^3-3ax^2+b$에서

$f'(x)=6ax^2-6ax=6ax(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$
구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	$\searrow$	$-a+b$	$\nearrow$	$27a+b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $27a+b$, $x=1$에서 최솟값 $-a+b$를 갖는다.
이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 35, 최솟값이 7이므로
$27a+b=35$, $-a+b=7$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=8$
$\therefore a+b=1+8=9$

정답_ ④

392

$f(x)=x^3+ax^2+b$에서
$f'(x)=3x^2+2ax$
$f'(1)=9$에서 $3+2a=9$ $\quad\therefore a=3$
즉, $f(x)=x^3+3x^2+b$이고
$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -1\le x\le 2$)
구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b+2$	$\searrow$	b	$\nearrow$	$b+20$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $b+20$, $x=0$에서 최솟값 b를 갖는다.
이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 22이므로
$b+20=22$ $\quad\therefore b=2$
따라서 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 2이다.

정답_ 2

393

$f(x)=2x^3-3ax^2+a^2$에서
$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$
구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a^2	$\searrow$	$-a^3+a^2$	$\nearrow$	$a^2-12a+16$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $-a^3+a^2$을 가지므로
$g(a)=-a^3+a^2$에서
$g'(a)=-3a^2+2a=-a(3a-2)$
$g'(a)=0$에서 $a=\frac{2}{3}$ ($\because 0<a<2$)
$0<a<2$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$		$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	

따라서 함수 $g(a)$는 $a=\frac{2}{3}$에서 최댓값 $\frac{4}{27}$를 갖는다.

정답_ ①

394

점 P의 좌표를 (t, t^2)이라고 하면 점 P와 점 $(-5, -1)$ 사이의 거리는
$\sqrt{\{t-(-5)\}^2+\{t^2-(-1)\}^2}=\sqrt{t^4+3t^2+10t+26}$
$f(t)=t^4+3t^2+10t+26$이라고 하면
$f'(t)=4t^3+6t+10=2(t+1)(2t^2-2t+5)$
$f'(t)=0$에서 $t=-1$ ($\because 2t^2-2t+5>0$)
함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	20	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=-1$에서 최솟값 20을 가지므로 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이다.

정답_ $2\sqrt{5}$

395

점 P의 좌표를 (t, t^2-1)이라고 하면
$\overline{AP}^2=(t-1)^2+\{(t^2-1)-(-2)\}^2=t^4+3t^2-2t+2$
$\overline{BP}^2=(t-3)^2+\{(t^2-1)-1\}^2=t^4-3t^2-6t+13$
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=f(t)$라고 하면
$f(t)=2t^4-8t+15$에서
$f'(t)=8t^3-8=8(t-1)(t^2+t+1)$
$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because t^2+t+1>0$)
함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

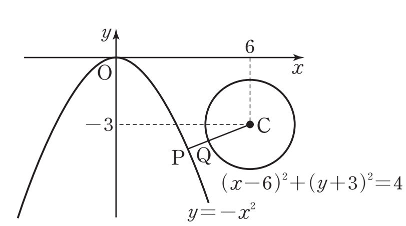
t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	9	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값 9를 가지므로 구하는 최솟값은 9이다.

정답_ ②

396

점 P의 좌표를 $(t, -t^2)$, 원의 중심을 $C(6, -3)$이라고 하면 원의 반지름의 길이가 2이므로
($\overline{PQ}$의 최솟값)$=$($\overline{PC}$의 최솟값)-2



$\overline{PC}=\sqrt{(t-6)^2+\{-t^2-(-3)\}^2}=\sqrt{t^4-5t^2-12t+45}$

$f(t)=t^4-5t^2-12t+45$라고 하면

$f'(t)=4t^3-10t-12=2(t-2)(2t^2+4t+3)$

$f'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because 2t^2+4t+3>0$)

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	17	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 최솟값 17을 가지므로 선분 PC의 길이의 최솟값은 $\sqrt{17}$이다.

즉, 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{17}-2$이다.

정답_ $\sqrt{17}-2$

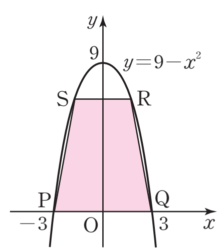
397

곡선 $y=9-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $9-x^2=0$에서

$(3+x)(3-x)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=3$

$\therefore$ P$(-3, 0)$, Q$(3, 0)$

오른쪽 그림에서 점 R의 좌표를 $(t, 9-t^2)$ $(0<t<3)$, 사다리꼴 PQRS의 넓이를 $S(t)$라고 하면



$S(t)=\frac{1}{2}(2t+6)(9-t^2)$

$\quad=-t^3-3t^2+9t+27$

$S'(t)=-3t^2-6t+9$

$\quad=-3(t+3)(t-1)$

$S'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because 0<t<3$)

$0<t<3$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	32	$\searrow$	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=1$에서 최댓값 32를 가지므로 사다리꼴의 넓이의 최댓값은 32이다.

정답_ ④

398

$f(x)=-2x^3-6x^2+2$에서

$f'(x)=-6x^2-12x$

점 A$(0, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=0$이므로 접선 l의 방정식은

$y=2$

곡선 $y=-2x^3-6x^2+2$와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는

$-2x^3-6x^2+2=2$에서

$2x^2(x+3)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=0$

$\therefore$ B$(-3, 2)$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P의 x좌표를 a $(-3<a<0)$라고 하면

P$(a, -2a^3-6a^2+2)$, H$(a, 2)$

삼각형 AHP의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\times(-a)\times\{2-(-2a^3-6a^2+2)\}=-a^4-3a^3$

$S'(a)=-4a^3-9a^2=-a^2(4a+9)$

$S'(a)=0$에서 $a=-\frac{9}{4}$ ($\because -3<a<0$)

$-3<a<0$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(-3)	$\cdots$	$-\frac{9}{4}$	$\cdots$	(0)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=-\frac{9}{4}$에서 최댓값을 가지므로 삼각형 AHP의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P의 x좌표는 $-\frac{9}{4}$이다.

정답_ ②

399

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+6$ $(x>0)$이라고 하면

$f'(x)=x^3-3x^2$

$g(x)=x^3-3x^2$ $(x>0)$이라고 하면

$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 최솟값 -4를 가지므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서 그은 접선 중 기울기가 최소인 것은 $x=2$일 때 -4이다.

이때 $f(2)=2$, $f'(2)=-4$이므로 점 $(2, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=-4(x-2)$, 즉 $y=-4x+10$

이 접선의 x절편은 $\frac{5}{2}$, y절편은 10이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times10=\frac{25}{2}$

정답_ $\frac{25}{2}$

400

점 Q의 좌표를 $(a, 1)$이라고 하면 $\overline{OQ}=\overline{PQ}$에서

$a^2+1=(a-1)^2+(1-t)^2 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}(t-1)^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

삼각형 OPQ의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$S(t)=1\times1-\left\{\frac{1}{2}\times a\times1+\frac{1}{2}\times1\times t+\frac{1}{2}(1-a)(1-t)\right\}$

$\quad=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}at$

$\quad=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\times\frac{1}{2}(t-1)^2$ ($\because$ ㉠)

$\quad=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(t^3-2t^2+t)$

$S'(t)=-\frac{1}{4}(3t^2-4t+1)=-\frac{1}{4}(3t-1)(t-1)$

$S'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=1$

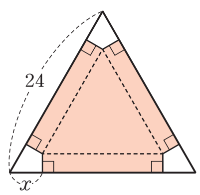
$0 \le t \le 1$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{25}{54}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\frac{1}{3}$에서 최솟값 $\frac{25}{54}$를 가지므로 삼각형 OPQ의 넓이의 최솟값은 $\frac{25}{54}$이다.

정답_ $\frac{25}{54}$

401



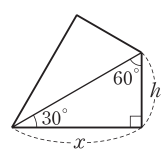
오른쪽 그림과 같이 잘라 낼 사각형에서 가장 긴 변의 길이를 x라고 하면 만든 삼각기둥의 밑면은 한 변의 길이가 $24-2x$인 정삼각형이므로 그 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}(24-2x)^2$

이때 잘라 낸 사각형의 변의 길이와 밑면의 한 변의 길이는 양수이어야 하므로

$x>0,\ 24-2x>0 \qquad \therefore 0<x<12$

또, 상자의 높이를 h라고 하면



$h=x\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

따라서 상자의 부피를 $V(x)$라고 하면

$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(24-2x)^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}x=x^3-24x^2+144x$

$V'(x)=3x^2-48x+144=3(x-4)(x-12)$

$V'(x)=0$에서 $x=4$ ($\because 0<x<12$)

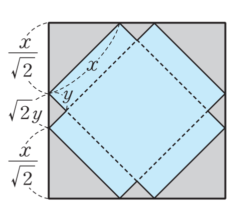
$0<x<12$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(12)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	256	$\searrow$	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=4$에서 최댓값 256을 가지므로 상자의 부피의 최댓값은 256이다.

정답_ ③

402



직육면체의 높이를 y라고 하면 오른쪽 그림에서

$2\times\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}y=9\sqrt{2}$

$x+y=9 \qquad \therefore y=9-x$

직육면체의 부피를 $V(x)$라고 하면 직육면체의 각 모서리의 길이는 양수이어야 하므로

$x>0,\ 9-x>0 \qquad \therefore 0<x<9$

$V(x)=x^2y=x^2(9-x)=9x^2-x^3$

$V'(x)=18x-3x^2=3x(6-x)$

$V'(x)=0$에서 $x=6$ ($\because 0<x<9$)

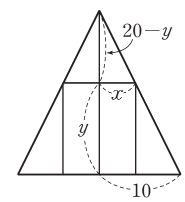
$0<x<9$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	6	$\cdots$	(9)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=6$에서 최댓값을 가지므로 상자의 부피가 최대가 되도록 하는 밑면의 한 변의 길이는 6이다.

정답_ ④

403



오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라고 하면

$10:20=x:(20-y)$

$20x=10(20-y) \qquad \therefore y=20-2x$

이때 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이는 양수이어야 하므로

$x>0,\ 20-2x>0 \qquad \therefore 0<x<10$

원기둥의 부피를 $V(x)$라고 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(20-2x)=2\pi(10x^2-x^3)$

$V'(x)=2\pi(20x-3x^2)=2\pi x(20-3x)$

$V'(x)=0$에서 $x=\frac{20}{3}$ ($\because 0<x<10$)

$0<x<10$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{20}{3}$	$\cdots$	(10)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=\frac{20}{3}$에서 최댓값을 가지므로 원기둥의 부피가 최대가 되도록 하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $\frac{20}{3}$ cm이다.

정답_ ③

404

$f(t)=-\frac{2}{3}t^3+3t^2+20t$에서

$f'(t)=-2t^2+6t+20$

약효 $f(t)$가 증가하는 구간은 $f'(t)\ge 0$이므로 ❶

$-2t^2+6t+20\ge 0,\ t^2-3t-10\le 0$

$(t+2)(t-5)\le 0 \qquad \therefore -2\le t\le 5$ ❷

그런데 $0\le t\le 8$이므로 $0\le t\le 5$

따라서 약효가 증가하는 것은 약을 먹은 후 5시간 동안이다. ❸

정답_ 5시간

채점 기준	비율
❶ $f(t)$가 증가하는 구간은 $f'(t)\ge 0$임을 알기	40 %
❷ 부등식 $f'(t)\ge 0$ 풀기	30 %
❸ 약효가 증가하는 시간 구하기	30 %

405

$f(x)=ax^3-2ax^2+4x+3$에서

$f'(x)=3ax^2-4ax+4$ ❶
삼차함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 $a>0$ …… ㉠
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=4a^2-12a\leq 0$
$a(a-3)\leq 0$ $\quad\therefore 0\leq a\leq 3$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $0<a\leq 3$ ❷
따라서 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다. ❸

정답_ 3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$의 식 구하기	20 %
❷ a의 값의 범위 구하기	60 %
❸ 정수 a의 개수 구하기	20 %

406

조건 ㈎에서 $f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$의 양변에 $x=y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)-f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$ ❶
조건 ㈏에서 $f'(0)=8$이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)-f(h)+xh(x-h)\}-f(x)}{-h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}-x(x-h)\right\}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-x^2\\&=f'(0)-x^2=8-x^2\\&=-(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})\end{aligned}$$ ❷

$f'(x)=0$에서 $x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2\sqrt{2}$에서 극댓값, $x=-2\sqrt{2}$에서 극솟값을 가지므로 $a=2\sqrt{2}$, $b=-2\sqrt{2}$
$\therefore a^2+b^2=8+8=16$ ❸

정답_ 16

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값 구하기	20 %
❷ $f'(x)$의 식 구하기	40 %
❸ a^2+b^2의 값 구하기	40 %

407

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-(a-3)x^2+9x$에서
$f'(x)=x^2-2(a-3)x+9$
함수 $y=f(x)$의 그래프에서 극대인 점과 극소인 점이 모두 두 직선 $x=1$, $x=4$ 사이에 존재하려면 함수 $f(x)$가 구간 $(1, 4)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$이 $1<x<4$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ❶
(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(a-3)^2-9>0$
$a^2-6a>0$, $a(a-6)>0$
$\therefore a<0$ 또는 $a>6$
(ii) $f'(1)=1-2(a-3)+9>0$에서 $a<8$
(iii) $f'(4)=16-8(a-3)+9>0$에서 $a<\frac{49}{8}$
(iv) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=a-3$이므로
$1<a-3<4$에서 $4<a<7$ ❷
(i)~(iv)에서 $6<a<\frac{49}{8}$ ❸

정답_ $6<a<\frac{49}{8}$

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $f'(x)=0$이 $1<x<4$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 알기	20 %
❷ 이차방정식 $f'(x)=0$이 $1<x<4$에서 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 조건 구하기	60 %
❸ a의 값의 범위 구하기	20 %

408

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
조건 ㈎에서 함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=3$에서 극값을 가지므로
$f'(1)=f'(3)=0$
$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$
$\therefore 2a+b=-3$ …… ㉠
$f'(3)=0$에서 $27+6a+b=0$
$\therefore 6a+b=-27$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=9$ ❶
즉, $f(x)=x^3-6x^2+9x+c$이고
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
구간 $[0, 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	c	↗	$c+4$	↘	c	↗	$c+20$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값 $c+20$, $x=0$ 또는 $x=3$에서 최솟값 c를 갖는다.
이때 조건 ㈏에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 2이므로
$c+20=2$ $\quad\therefore c=-18$ ❷
따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -18이다. ❸

정답_ -18

채점 기준	비율
❶ a, b의 값 구하기	40 %
❷ c의 값 구하기	40 %
❸ 함수 $f(x)$의 최솟값 구하기	20 %

409

곡선 $y=-x^2+6x$가 x축과 만나는 교점의 x좌표는

$-x^2+6x=0$에서 $x(x-6)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

점 A의 좌표를 $(a,\ -a^2+6a)$ $(0<a<3)$라고 하면

$D(6-a,\ -a^2+6a)$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$S(a)=(6-2a)(-a^2+6a)=2a^3-18a^2+36a$

$S'(a)=6a^2-36a+36=6(a^2-6a+6)$

$S'(a)=0$에서 $a=3-\sqrt{3}$ ($\because 0<a<3$) ❶

$0<a<3$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=3-\sqrt{3}$에서 최댓값을 가지므로 직사각형 ABCD의 넓이가 최대일 때 점 A의 x좌표는 $3-\sqrt{3}$이다. ❷

즉, $p=3$, $q=3$이므로

$p+q=3+3=6$ ❸

정답_ 6

채점 기준	비율
❶ 직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라고 할 때, $S'(a)=0$을 만족시키는 a의 값 구하기	50 %
❷ 직사각형 ABCD의 넓이가 최대일 때 점 A의 x좌표 구하기	30 %
❸ $p+q$의 값 구하기	20 %

410

$f(x)=x^3+6x^2+15|x-2a|+3$

(i) $x<2a$일 때

$f(x)=x^3+6x^2-15x+30a+3$에서

$f'(x)=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1)$

$f'(x)\ge 0$에서 $3(x+5)(x-1)\ge 0$

$\therefore x\le -5$ 또는 $x\ge 1$

이때 함수 $f(x)$가 $x<2a$에서 증가해야 하므로

$2a\le -5 \qquad \therefore a\le -\frac{5}{2}$

(ii) $x\ge 2a$일 때

$f(x)=x^3+6x^2+15x-30a+3$에서

$f'(x)=3x^2+12x+15=3(x+2)^2+3>0$

즉, 함수 $f(x)$는 $x\ge 2a$에서 a의 값에 관계없이 증가한다.

(i), (ii)에서 $a\le -\frac{5}{2}$이므로 실수 a의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$이다.

정답_ $-\frac{5}{2}$

411

$(f\circ g)(x)=x$를 만족시키는 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $g(x)$가 존재하려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2+(b^2-1)x+1$에서

$f'(x)=-x^2+2ax+b^2-1$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2+b^2-1\le 0 \qquad \therefore a^2+b^2\le 1$

따라서 a^2+b^2의 최댓값은 1이다.

정답_ ①

412

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 조건 ㈎에서 $f(0)=1$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ (a, b는 상수)

이라고 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 ㈏에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge f'(-2)$이므로 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-2$이다.

$f'(x)=3x^2+2ax+b=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}+b$이므로

$-\frac{a}{3}=-2 \qquad \therefore a=6$

즉, $f(x)=x^3+6x^2+bx+1$이고

$f'(x)=3x^2+12x+b$

한편, 조건 ㈐에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

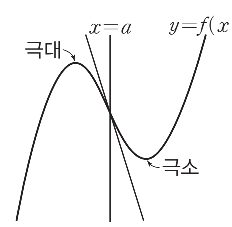
$\frac{D}{4}=36-3b\le 0 \qquad \therefore b\ge 12$

따라서 $f(1)=b+8\ge 20$이므로 $f(1)$의 최솟값은 20이다.

정답_ 20

413

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 직선 $x=a$가 극대가 되는 점과 극소가 되는 점 사이를 지나면 $x=a$에서의 접선의 기울기가 $f'(a)$이므로 오른쪽 그림과 같이 $f'(a)<0$이어야 한다.



$f(x)=x^3-ax^2-100x+10$에서

$f'(x)=3x^2-2ax-100$

즉, $f'(a)=3a^2-2a^2-100<0$이므로

$a^2-100<0$, $(a+10)(a-10)<0$

$\therefore -10<a<10$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 -9, -8, -7, $\cdots$, 9의 19개이다.

정답_ ③

414

$h(x)=g(x)-f(x)$라고 하면

조건 ㈎에서 $f(-3)=g(-3)$, $f(3)=g(3)$이므로

$h(-3)=h(3)=0$

이때 함수 $f(x)$의 삼차항의 계수는 1이고, 함수 $g(x)$의 삼차항의 계수는 -1이므로

$h(x)=-2(x+3)(x-3)(x-k)$ (k는 상수)

로 놓으면

$h'(x)=-2\{(x-3)(x-k)+(x+3)(x-k)+(x+3)(x-3)\}$

조건 (나)에서 $f'(3)=g'(3)$이므로 $h'(3)=0$

$-2\times6\times(3-k)=0 \qquad \therefore k=3$

따라서 $h(x)=-2(x+3)(x-3)^2$이므로

$$\begin{aligned} h'(x)&=-2(x-3)^2-4(x+3)(x-3) \\ &=-2(x-3)\{(x-3)+2(x+3)\} \\ &=-2(x-3)(3x+3) \\ &=-6(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	-64	↗	0	↘

따라서 함수 $h(x)=g(x)-f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -64를 갖는다.

정답_ ④

415

$h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

주어진 그래프에서

$f(a)=0,\ f(0)<0,\ f(b)=0,\ f(c)>0,\ f(d)=0,$

$g(a)<0,\ g(0)<0,\ g(b)=0,\ g(c)>0,\ g(d)>0,$

$f'(a)<0,\ f'(0)=0,\ f'(b)>0,\ f'(c)=0,\ f'(d)<0$

모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$이므로

$h'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)>0,$

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)<0,$

$h'(b)=f'(b)g(b)+f(b)g'(b)=0,$

$h'(c)=f'(c)g(c)+f(c)g'(c)>0,$

$h'(d)=f'(d)g(d)+f(d)g'(d)<0$

ㄱ. $h'(a)h'(0)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $h'(x)=0$을 만족시키는 x가 구간 $(a,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $h'(a)>0,\ h'(0)<0$이므로 함수 $h(x)$는 이 구간에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. $x=b$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. $h'(c)h'(d)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $h'(x)=0$을 만족시키는 x가 구간 $(c,\ d)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $h'(c)>0,\ h'(d)<0$이므로 함수 $h(x)$는 이 구간에서 극댓값을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ④

참고 사잇값 정리의 활용

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

416

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고 $g(a)=0$이므로

$$\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{-(x-a)|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)|f(x)|}{x-a}$$

$-|f(a)|=|f(a)| \qquad \therefore f(a)=0$

따라서 $f(x)=(x-a)(x-k)$ (k는 상수)라고 하면 함수 $g(x)=|(x-a)^2(x-k)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 $k=3$

$\therefore g(x)=|(x-a)^2(x-3)|$

$h(x)=(x-a)^2(x-3)$이라고 하면 $a<3$이고 함수 $g(x)$의 극댓값이 32이므로 함수 $h(x)$의 극솟값은 -32이다.

$h'(x)=2(x-a)(x-3)+(x-a)^2=(x-a)(3x-a-6)$

$h'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=\frac{a+6}{3}$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{a+6}{3}$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	0	↘	-32	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=\frac{a+6}{3}$에서 극솟값 -32를 가지므로

$$\left(\frac{a+6}{3}-a\right)^2\left(\frac{a+6}{3}-3\right)=-32$$

$$4\left(\frac{a}{3}-1\right)^3=-32,\ \left(\frac{a}{3}-1\right)^3=-8$$

$\frac{a}{3}-1=-2 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-3)$이므로

$f(4)=7\times1=7$

정답_ ①

417

$g(x)=x^3-12x+k$라고 하면 $f(x)=|g(x)|$

$g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

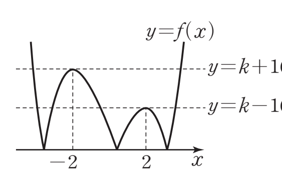
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$k+16$	↘	$k-16$	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $k+16$, $x=2$에서 극솟값 $k-16$을 가지므로 k의 값에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

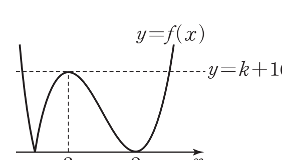
(i) $0<k<16$인 경우

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a의 값이 3개 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.



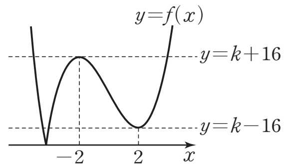
(ii) $k=16$인 경우

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a의 값이 오직 하나이다.



(iii) $k>16$인 경우

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a의 값이 3개 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.



(i)~(iii)에서 $k=16$

정답_ ⑤

418

삼차함수 $f(x)$가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(x)=-f(-x)$가 성립한다. $-f(x)$는 차수가 홀수인 항으로만 이루어진다.

$f(x)=ax^3+bx$ (a, b는 상수, $a>0$)라고 하면

$f'(x)=3ax^2+b$

이때 극소인 점 D의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서

$\frac{3}{4}a+b=0 \qquad \therefore b=-\frac{3}{4}a$

즉, $f(x)=ax^2-\frac{3}{4}ax=ax\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $f(x)=0$에서

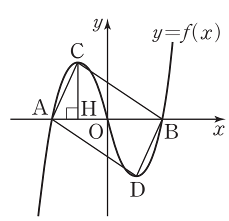
$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$

따라서 선분 AB의 길이는

$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 선분 CH의 길이가 함수 $f(x)$의 극댓값이고, 삼각형 ABC와 삼각형 BAD는 원점에 대하여 대칭이므로



$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{BAD}$

이때 사각형 ADBC의 넓이가 $\sqrt{3}$이므로

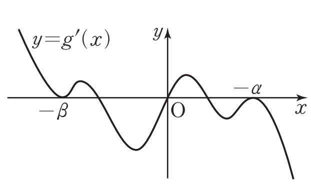
$\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{CH}}\right)\times 2=\sqrt{3} \qquad \therefore \overline{\mathrm{CH}}=1$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 1이다.

정답_ 1

419

함수 $y=g'(x)$, 즉 $y=-f(-x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 다음 그림과 같다.



ㄱ. $x=-\alpha$의 좌우에서 $g'(x)$는 증가하다가 감소하므로 함수 $g'(x)$는 $x=-\alpha$에서 극대이다. (참)

ㄴ. $x=-\beta$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=-\beta$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. $x=0$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

정답_ ①

420

$f(x)=x^3+(a^2+1)x^2-(a^2-3a+2)x+2a$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$g(x)=-f(-x)=x^3-(a^2+1)x^2-(a^2-3a+2)x-2a$

$h(x)=f(x)+g(x)$라고 하면

$h(x)=2x^3-2(a^2-3a+2)x$

$h'(x)=6x^2-2(a^2-3a+2)$

삼차함수 $h(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $h'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $h'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=12(a^2-3a+2)\le 0$

$(a-1)(a-2)\le 0 \qquad \therefore 1\le a\le 2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2, 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$2+1=3$

정답_ 3

421

$f(x)=x^2+4x+k=(x+2)^2+k-4$

이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\ge k-4$

함수 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서 $f(x)=t$라고 하면 $t\ge k-4$이므로 함수 $g(t)$는 구간 $[k-4,\ \infty)$에서 정의된 함수이다.

$g(x)=2x^3-9x^2+12x-3$에서

$g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

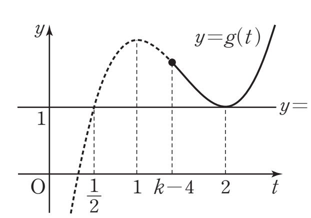
함수 $g(t)$의 최솟값이 1이므로 $g(t)=1$에서

$2t^3-9t^2+12t-3=1$, $2t^3-9t^2+12t-4=0$

$(t-2)(2t^2-5t+2)=0$, $(2t-1)(t-2)^2=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

즉, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=1$은 다음 그림과 같다.



이때 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값이 1이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$\frac{1}{2}\le k-4\le 2 \qquad \therefore \frac{9}{2}\le k\le 6$

따라서 $\alpha=\frac{9}{2}$, $\beta=6$이므로

$\alpha\beta=\frac{9}{2}\times6=27$

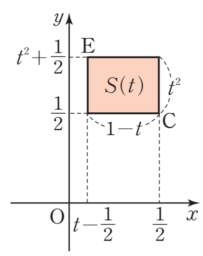
정답_ 27

422

정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 $\mathrm{I}(t, t^2)$이라고 할 때, 두 정사각형의 내부의 공통부분이 존재하려면 $-1<t<0$ 또는 $0<t<1$이어야 한다.

이때 곡선 $y=x^2$과 정사각형 ABCD가 y축에 대하여 대칭이므로 $0<t<1$인 경우에 대해서만 생각해도 된다.

$0<t<1$일 때, 오른쪽 그림과 같이 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라고 하면



$S(t)=t^2(1-t)=-t^3+t^2$

$S'(t)=-3t^2+2t=-t(3t-2)$

$S'(t)=0$에서 $t=\frac{2}{3}$ ($\because$ $0<t<1$)

$0<t<1$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

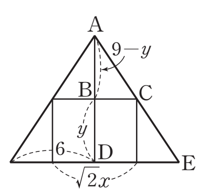
t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 최댓값 $\frac{4}{27}$를 가지므로 구하는 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{27}$이다.

정답_ ①

423

원뿔에 내접하는 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x, 높이를 y라고 할 때, 직육면체의 밑면의 대각선을 포함하고 원뿔의 밑면에 수직인 단면을 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.



이때 $\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{ADE}$ (AA 닮음)이므로

$(9-y):9=\frac{\sqrt{2}}{2}x:6$, $6(9-y)=\frac{9\sqrt{2}}{2}x$

$\therefore$ $y=9-\frac{3\sqrt{2}}{4}x$

이때 직육면체의 각 모서리의 길이는 양수이어야 하므로

$0<x<12$, $9-\frac{3\sqrt{2}}{4}x>0$ $\quad\therefore$ $0<x<6\sqrt{2}$

직육면체의 부피를 $V(x)$라고 하면

$V(x)=x^2y=x^2\left(9-\frac{3\sqrt{2}}{4}x\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{4}x^3+9x^2$

$V'(x)=-\frac{9\sqrt{2}}{4}x^2+18x=-\frac{9\sqrt{2}}{4}x(x-4\sqrt{2})$

$V'(x)=0$에서 $x=4\sqrt{2}$ ($\because$ $0<x<6\sqrt{2}$)

$0<x<6\sqrt{2}$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$4\sqrt{2}$	$\cdots$	$(6\sqrt{2})$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	96	$\searrow$	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=4\sqrt{2}$에서 최댓값 96을 가지므로 직육면체의 부피의 최댓값은 96이다.

정답_ 96

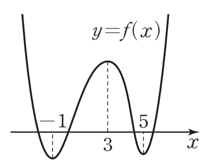
06 도함수의 활용 (3)

424

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 3, 5이므로 $f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 x축이 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\therefore$ $f(-1)<0$, $f(3)>0$, $f(5)<0$

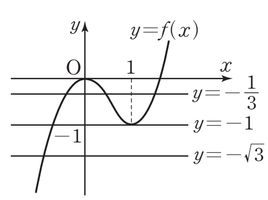
정답_ ②

425

$2x^3-3x^2+a=0$에서 $2x^3-3x^2=-a$
$f(x)=2x^3-3x^2$이라고 하면
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $a=\frac{1}{3}$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{1}{3}$이 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)
ㄴ. $a=1$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)
ㄷ. $a=\sqrt{3}$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\sqrt{3}$이 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 하나의 실근을 갖는다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

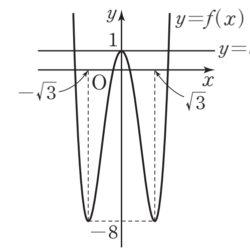
정답_ ⑤

426

$x^4-6x^2+1-a=0$에서 $x^4-6x^2+1=a$
주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=x^4-6x^2+1$과 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
$f(x)=x^4-6x^2+1$이라고 하면
$f'(x)=4x^3-12x=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-8	↗	1	↘	-8	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로
$a=1$



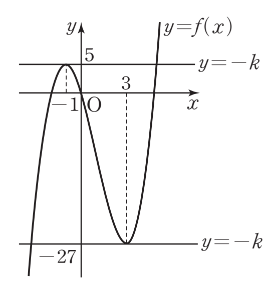
정답_ 1

427

$x^3-3x^2-9x+k=0$에서 $x^3-3x^2-9x=-k$
주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
$f(x)=x^3-3x^2-9x$라고 하면
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면
$-k=-27$ 또는 $-k=5$, 즉 $k=27$ 또는 $k=-5$이어야 하므로 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은
$27+(-5)=22$



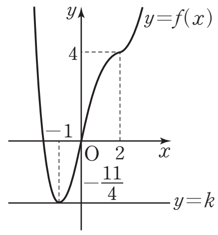
정답_ ④

428

$\frac{1}{4}x^4+x^3=2x^3-4x+k$에서 $\frac{1}{4}x^4-x^3+4x=k$
주어진 방정식이 한 중근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=\frac{1}{4}x^4-x^3+4x$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나고 그 점에서 접해야 한다.
$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+4x$라고 하면
$f'(x)=x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{11}{4}$	↗	4	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나고 그 점에서 접해야 하므로
$k=-\dfrac{11}{4}$



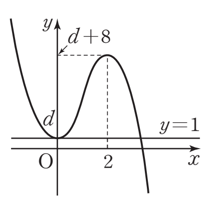
정답_ ⑤

429

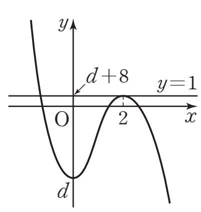
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라고 하면
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
주어진 그래프에서 $f'(0)=0$, $f'(1)=6$, $f'(2)=0$이므로
$c=0$, $3a+2b+c=6$, $12a+4b+c=0$
$\therefore$ $3a+2b=6$, $3a+b=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=6$
즉, $f(x)=-2x^3+6x^2+d$이므로
$f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	d	↗	$d+8$	↘

방정식 $f(x)=1$이 서로 다른 2개의 실근을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 2가지 경우로 나타낼 수 있다.



[$f(0)=1$인 경우]



[$f(2)=1$인 경우]

(i) $f(0)=1$인 경우
$d=1$
(ii) $f(2)=1$인 경우
$d+8=1$ $\quad\therefore$ $d=-7$
(i), (ii)에서 $d=-7$ 또는 $d=1$
따라서 $f(0)=d$이므로 모든 $f(0)$의 값은 -7, 1이다.

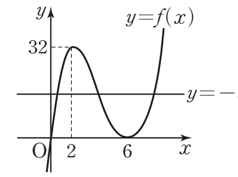
정답_ -7, 1

430

$x^3-12x^2+36x+a=0$에서 $x^3-12x^2+36x=-a$
$f(x)=x^3-12x^2+36x$라고 하면
$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$
$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=6$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$의 교점의 x좌표가 세 개의 양수이려면
$0<-a<32$ $\quad\therefore$ $-32<a<0$
따라서 정수 a는 -31, -30, -29, $\cdots$, -1의 31개이다.
서로 다른 세 양의 근



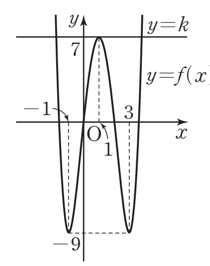
정답_ ①

431

$4x^3-12x=x^4-2x^2-k$에서 $x^4-4x^3-2x^2+12x=k$
$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$라고 하면
$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수, 두 개는 양수이려면
음의 근 한 개, 양의 근 두 개
$k=7$



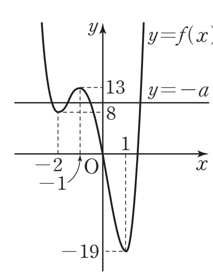
정답_ 7

432

$3x^4+8x^3-6x^2-24x+a=0$에서 $3x^4+8x^3-6x^2-24x=-a$
$f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x$라고 하면
$f'(x)=12x^3+24x^2-12x-24=12(x+2)(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	8	↗	13	↘	-19	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$의 교점의 x좌표가 세 개는 음수, 한 개는 양수이려면
$8<-a<13$ $\quad\therefore$ $-13<a<-8$
따라서 정수 a는 -12, -11, -10, -9의 4개이다.



정답_ ①

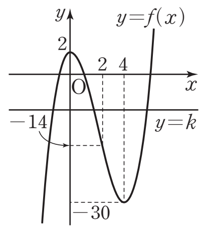
433

$x^3-6x^2+2-k=0$에서 $x^3-6x^2+2=k$
$f(x)=x^3-6x^2+2$라고 하면
$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-30	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $f(2)=8-24+2=-14$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 2보다 작고, 한 개는 2보다 크려면

$-14<k<2$

정답_ $-14<k<2$

434

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$라고 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-1)f(2)<0$이어야 하므로 (극댓값)×(극솟값)<0

$(k+7)(k-20)<0$ $\qquad\therefore -7<k<20$

따라서 정수 k는 -6, -5, -4, $\cdots$, 19의 26개이다.

정답_ ③

다른 풀이

$2x^3-3x^2-12x+k=0$에서 $2x^3-3x^2-12x=-k$

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=2x^3-3x^2-12x$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라고 하면

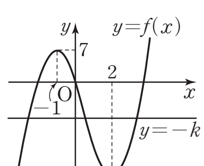
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-20	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-20<-k<7$ $\qquad\therefore -7<k<20$

따라서 정수 k는 -6, -5, -4, $\cdots$, 19의 26개이다.

435

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+k$라고 하면

$f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(-2)f(1)=0$이어야 하므로

$\left(k+\frac{10}{3}\right)\left(k-\frac{7}{6}\right)=0$ $\qquad\therefore k=-\frac{10}{3}$ 또는 $k=\frac{7}{6}$

따라서 구하는 실수 k의 값의 합은

$-\frac{10}{3}+\frac{7}{6}=-\frac{13}{6}$

정답_ ③

436

$f(x)=2x^3+6x^2-18x+a-3$이라고 하면

$f'(x)=6x^2+12x-18=6(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

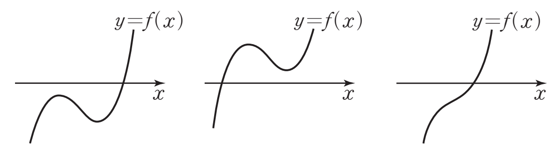
$f(-3)f(1)>0$이어야 하므로

$(a+51)(a-13)>0$ $\qquad\therefore a<-51$ 또는 $a>13$

따라서 자연수 a의 최솟값은 14이다.

정답_ ④

참고 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a>0$)에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가질 때, $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



[극값을 갖는 경우] [극값을 갖지 않는 경우]

437

$g(x)=2x^3-6x-2+k$에서

$g'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $g(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$g(-1)g(1)=0$이어야 하므로

$(k+2)(k-6)=0$ $\qquad\therefore k=-2$ ($\because k<0$)

정답_ ⑤

438

$f(x)=2x^3-6a^2x+4a$에서

$f'(x)=6x^2-6a^2=6(x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$a\neq 0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또, 삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면

$f(-a)f(a)>0$이어야 하므로

$(4a^3+4a)(-4a^3+4a)>0$

$a^2(a^2+1)(a+1)(a-1)<0$

이때 $a\neq 0$이므로 $a^2>0$에서

$(a+1)(a-1)<0$ $\qquad\therefore -1<a<1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-1<a<0$ 또는 $0<a<1$

정답_ $-1<a<0$ 또는 $0<a<1$

439

주어진 두 곡선이 만나는 점의 개수가 2가 되려면 방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉 $x^3-3x^2+k+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+k+1$이라고 하면

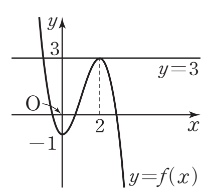
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면
$f(0)f(2)=0$이어야 하므로
$(k+1)(k-3)=0 \qquad \therefore k=3\ (\because k>0)$

정답_ ③

다른 풀이
주어진 두 곡선이 만나는 점의 개수가 2가 되려면 방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉 $-x^3+3x^2-1=k$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=-x^3+3x^2-1$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
$f(x)=-x^3+3x^2-1$이라고 하면
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	3	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양수 k의 값은 3이다.

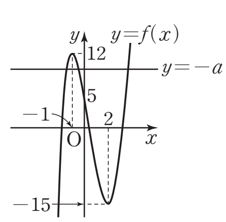


440

주어진 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $-x^3+3x^2+8x-5=x^3-4x+a$, 즉 $2x^3-3x^2-12x+5=-a$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$라고 하면
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	12	↘	-15	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 $f(0)=5$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$의 교점의 x좌표가 두 개는 음수, 한 개는 양수이려면
$5<-a<12 \qquad \therefore -12<a<-5$
따라서 정수 a는 $-11, -10, -9, \cdots, -6$의 6개이다.



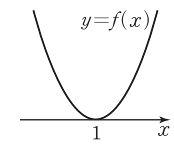
정답_ ①

441

주어진 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^4-4x+a=-x^2+2x-a$, 즉 $x^4+x^2-6x+2a=0$이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^4+x^2-6x+2a$라고 하면
$f'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 2x^2+2x+3>0$) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$2a-4$	↗

방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $f(1)=0$에서
$2a-4=0 \qquad \therefore a=2$



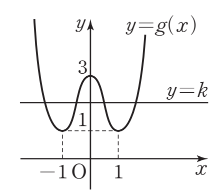
정답_ ②

442

$x^4+2x^3-x^2+3=-x^4+2x^3+3x^2+k$에서 $2x^4-4x^2+3=k$
$g(x)=2x^4-4x^2+3$이라고 하면
$g'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$
$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	1	↗	3	↘	1	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 $f(0)=0$, $f(1)=2$, $f(2)=4$,
$f(3)=3$, $f(4)=\cdots=f(10)=2$이므로
$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(10)$
$=0+2+4+3+\underbrace{2\times7}_{f(4)+f(5)+f(6)+\cdots+f(10)}=23$



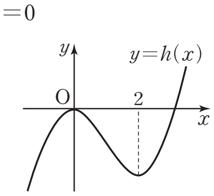
정답_ ⑤

443

$h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$
주어진 그래프에서 $h'(x)=0$, 즉 $f'(x)=g'(x)$인 x의 값은
$x=0$ 또는 $x=2$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $0<x<2$에서 $h'(x)<0$이므로 함수 $h(x)$는 감소한다. (참)
ㄴ. 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. (참)
ㄷ. $f(0)=g(0)$이므로 $h(0)=f(0)-g(0)=0$
즉, 함수 $h(x)$의 극댓값은 0이므로 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
곡선 $y=h(x)$가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ③

444

$f(x)=x^3+3ax-2$라고 하면

$f'(x)=3x^2+3a$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+3at-2)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+3a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+3at-2)=(3t^2+3a)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2+3a)x-2t^3-2$

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=2(3t^2+3a)-2t^3-2$

$\therefore\ 2t^3-6t^2-6a+2=0$ …… ㉠

점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 오직 한 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3-6t^2-6a+2$라고 하면

$g'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

삼차방정식 $g(t)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면

$g(0)g(2)>0$이어야 하므로

$(-6a+2)(-6a-6)>0,\ (3a-1)(a+1)>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>\frac{1}{3}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다.

정답_ ①

445

$f(x)=x^3-x+2$라고 하면

$f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t+2)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-1)x-2t^3+2$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=(3t^2-1)-2t^3+2$

$\therefore\ 2t^3-3t^2+a-1=0$ …… ㉠

점 $(1,\ a)$에서 곡선 $y=f(x)$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3-3t^2+a-1$이라고 하면

$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

삼차방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$g(0)g(1)=0$이어야 하므로

$(a-1)(a-2)=0\qquad\therefore\ a=1$ 또는 $a=2$

이때 $a=2$이면 점 $(1,\ 2)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 구하는 실수 a의 값은 1이다.

정답_ ①

446

$f(x)=x^3-2x-5$라고 하면

$f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t-5)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t-5)=(3t^2-2)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-2)x-2t^3-5$

이 직선이 점 $(2,\ k)$를 지나므로

$k=2(3t^2-2)-2t^3-5$

$\therefore\ 2t^3-6t^2+k+9=0$ …… ㉠

점 $(2,\ k)$에서 곡선 $y=f(x)$에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 a에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3-6t^2+k+9$라고 하면

$g'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

삼차방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$g(0)g(2)<0$이어야 하므로

$(k+9)(k+1)<0\qquad\therefore\ -9<k<-1$

따라서 정수 k는 $-8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ -2$의 7개이다.

정답_ 7

447

$f(x)=x^4-4x^3+16x+a$라고 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2+16=4(x+1)(x-2)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a-11$	$\nearrow$	$a+16$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $a-11$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$a-11\geq 0\qquad\therefore\ a\geq 11$

따라서 실수 a의 최솟값은 11이다.

정답_ ④

448

$f(x)=x^4-4p^3x+12$라고 하면

$f'(x)=4x^3-4p^3=4(x-p)(x^2+px+p^2)$

$f'(x)=0$에서 $x=p$ $(\because\ x^2+px+p^2>0)$

$x^2+px+p^2=\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2+\frac{3}{4}p^2>0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-3p^4+12$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=p$에서 최솟값 $-3p^4+12$를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 성립하려면

$-3p^4+12>0,\ p^4-4<0$

$(p^2+2)(p+\sqrt{2})(p-\sqrt{2})<0$

이때 $p^2+2>0$이므로

$(p+\sqrt{2})(p-\sqrt{2})<0\qquad\therefore\ -\sqrt{2}<p<\sqrt{2}$

따라서 자연수 p는 1의 1개이다.

정답_ 1

449

$f(x)\le g(x)$에서 $f(x)-g(x)\le 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$h(x)=-x^4-x^3+2x^2-\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+a\right)$

$\quad=-x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2-a$

$h'(x)=-4x^3-4x^2+8x=-4x(x+2)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	$-a+\frac{32}{3}$	↘	$-a$	↗	$-a+\frac{5}{3}$	↘

따라서 함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $-a+\frac{32}{3}$를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\le 0$이 성립하려면

$-a+\frac{32}{3}\le 0 \qquad \therefore a\ge\frac{32}{3}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{32}{3}$이다.

정답_ ⑤

450

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이 성립해야 한다.

$f(x)>g(x)$에서 $f(x)-g(x)>0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$h(x)=x^4-4x-(-x^2+2x-a)=x^4+x^2-6x+a$

$h'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $2x^2+2x+3>0$)

$2x^2+2x+3=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$a-4$	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $a-4$를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이 성립하려면

$a-4>0 \qquad \therefore a>4$

따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다.

정답_ 5

451

$2x^3+k>9x^2$에서 $2x^3-9x^2+k>0$

$f(x)=2x^3-9x^2+k$라고 하면

$f'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$

$x>3$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(3, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>3$에서 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(3)\ge 0$이어야 하므로

$54-81+k\ge 0 \qquad \therefore k\ge 27$

따라서 실수 k의 최솟값은 27이다.

정답_ ④

452

$\frac{1}{3}x^3-3x>-2x+k$에서 $\frac{1}{3}x^3-x-k>0$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x-k$라고 하면

$f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$

$-1<x<1$일 때, $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-1, 1)$에서 감소한다.

따라서 $-1<x<1$에서 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(1)\ge 0$이어야 하므로

$\frac{1}{3}-1-k\ge 0 \qquad \therefore k\le -\frac{2}{3}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다.

정답_ ②

453

$f(x)>g(x)$에서 $f(x)-g(x)>0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$h(x)=x^3+a-3x^2=x^3-3x^2+a$

$h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$x>2$일 때, $h'(x)>0$이므로 함수 $h(x)$는 구간 $(2, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>2$에서 $h(x)>0$이 성립하려면 $h(2)\ge 0$이어야 하므로

$8-12+a\ge 0 \qquad \therefore a\ge 4$

정답_ ⑤

454

$x^{n+1}-(n+1)x>n(n-7)$에서 $x^{n+1}-(n+1)x-n(n-7)>0$

$f(x)=x^{n+1}-(n+1)x-n(n-7)$이라고 하면

$f'(x)=(n+1)x^n-(n+1)=(n+1)(x^n-1)$

$\quad=(n+1)(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$

$x>1$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(1, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>1$에서 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(1)\ge 0$이어야 하므로

$1-(n+1)-n(n-7)\ge 0$, $n^2-6n\le 0$

$n(n-6)\le 0 \qquad \therefore 0\le n\le 6$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3, $\cdots$, 6의 6개이다.

정답_ 6

455

$f(x)=2x^3-5x^2-4x+a$라고 하면

$f'(x)=6x^2-10x-4=2(3x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$

구간 $[0, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	a	↘	$a-12$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $a-12$를 가지므로 $x\ge 0$에서 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$a-12\ge 0 \qquad \therefore a\ge 12$

따라서 실수 a의 최솟값은 12이다.

정답_ ⑤

456

$f(x)=x^3-3x+k+1$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k+3$	↘	$k-1$	↗	$k+3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=2$에서 최댓값 $k+3$을 가지므로 $-1\le x\le 2$에서 $f(x)<0$이 성립하려면

$k+3<0 \qquad \therefore k<-3$

따라서 정수 k의 최댓값은 -4이다.

정답_ ①

457

$f(x)\ge 3g(x)$에서 $f(x)-3g(x)\ge 0$

$h(x)=f(x)-3g(x)$라고 하면

$h(x)=x^3+3x^2-k-3(2x^2+3x-10)=x^3-3x^2-9x+30-k$

$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

구간 $[-1, 4]$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$35-k$	↘	$3-k$	↗	$10-k$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 최솟값 $3-k$를 가지므로 $h(x)\ge 0$이 성립하려면

$3-k\ge 0 \qquad \therefore k\le 3$

따라서 실수 k의 최댓값은 3이다.

정답_ 3

458

$x>0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$보다 항상 위쪽에 있으려면 $f(x)>2$가 성립해야 한다.

$f(x)>2$에서 $f(x)-2>0$

$g(x)=f(x)-2$라고 하면

$g(x)=x^3-3x^2+a-2$

$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $(0, \infty)$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	$a-6$	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $a-6$을 가지므로 $g(x)>0$이 성립하려면

$a-6>0 \qquad \therefore a>6$

정답_ $a>6$

459

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-10t+6$

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-10$

따라서 $t=3$에서 점 P의 가속도는

$18-10=8$

정답_ 8

460

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-2t+6$

점 P의 속도가 0일 때의 시각은 $v=0$에서

$-2t+6=0 \qquad \therefore t=3$

따라서 $t=3$에서 점 P의 위치는

$-9+18=9$

정답_ ③

461

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t+2$

점 P가 원점을 지나는 순간의 시각은 $x=0$에서

$t^3-3t^2+2t=0$, $t(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$ $(\because t>0)$

따라서 점 P는 $t=2$에서 마지막으로 원점을 지나므로 이때의 점 P의 속도는

$12-12+2=2$

정답_ ②

462

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=t^2-4t+k$

$a=\dfrac{dv}{dt}=2t-4$

점 P의 가속도가 2일 때의 시각은 $a=2$에서

$2t-4=2 \qquad \therefore t=3$

따라서 $t=3$에서 점 P의 위치가 10이므로

$9-18+3k+1=10 \qquad \therefore k=6$

정답_ ⑤

463

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-6t^2+12t=-6(t-1)^2+6$

이므로 $t=1$일 때 점 P의 속도가 최대이다.

시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라고 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=-12t+12$

따라서 $t=1$에서 점 P의 가속도는

$-12+12=0$

정답_ 0

464

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=2t^2-8t+6$

점 P의 속도가 0일 때의 시각은 $v=0$에서

$2t^2-8t+6=0$, $2(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore a=1,\ b=3\ (\because a<b)$

ㄱ. $a+b=1+3=4$ (참)

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라고 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=4t-8$

이므로 $t=3$에서 점 P의 가속도는

$12-8=4$ (거짓)

ㄷ. $t=1$에서 점 P의 위치는

$\dfrac{2}{3}-4+6-1=\dfrac{5}{3}$

$t=3$에서 점 P의 위치는

$18-36+18-1=-1$

이므로 $t=1$에서의 점 P의 위치가 $t=3$에서의 점 P의 위치보다 원점에서 더 멀다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

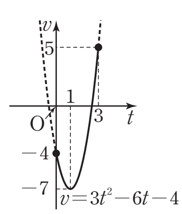
정답_ ③

465

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t-4=3(t-1)^2-7$

$0\le t\le 3$에서 속도의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 점 P의 속도는 $t=3$에서 최댓값 5를 갖는다.



정답_ ③

466

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_{\mathrm{P}}(t)$, $v_{\mathrm{Q}}(t)$라고 하면

$v_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{P}}'(t)=t^2-2$

$v_{\mathrm{Q}}(t)=x_{\mathrm{Q}}'(t)=2t+1$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간의 시각은 $v_{\mathrm{P}}(t)=v_{\mathrm{Q}}(t)$에서

$t^2-2=2t+1$, $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0\qquad \therefore t=3\ (\because t>0)$

따라서 $t=3$에서 두 점 P, Q의 위치는 각각

$x_{\mathrm{P}}(3)=9-6=3$

$x_{\mathrm{Q}}(3)=9+3=12$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는

$12-3=9$

정답_ ⑤

467

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_{\mathrm{P}}(t)$, $v_{\mathrm{Q}}(t)$라고 하면

$v_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{P}}'(t)=3t^2-2$

$v_{\mathrm{Q}}(t)=x_{\mathrm{Q}}'(t)=4t+6$

두 점 P, Q가 출발한 후 다시 만나는 순간의 시각은

$x_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{Q}}(t)$에서

$t^3-2t=2t^2+6t$, $t^3-2t^2-8t=0$

$t(t+2)(t-4)=0\qquad \therefore t=4\ (\because t>0)$

따라서 $t=4$에서 두 점 P, Q의 속도는 각각

$p=v_{\mathrm{P}}(4)=48-2=46$

$q=v_{\mathrm{Q}}(4)=16+6=22$

이므로

$p-q=46-22=24$

정답_ ①

468

두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간의 시각은 $x_1=x_2$에서

$t^2+t-6=-t^3+7t^2$, $t^3-6t^2+t-6=0$

$(t-6)(t^2+1)=0\qquad \therefore t=6\ (\because t>0)$

즉, 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간의 시각은 $t=6$이다.

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_1, v_2라고 하면

$v_1=\dfrac{dx_1}{dt}=2t+1$

$v_2=\dfrac{dx_2}{dt}=-3t^2+14t$

시각 t에서의 두 점 P, Q의 가속도를 각각 a_1, a_2라고 하면

$a_1=\dfrac{dv_1}{dt}=2$

$a_2=\dfrac{dv_2}{dt}=-6t+14$

따라서 시각 $t=6$에서 두 점 P, Q의 가속도는 각각

$p=2$, $q=-36+14=-22$

이므로

$p-q=2-(-22)=24$

정답_ ①

469

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_{\mathrm{P}}(t)$, $v_{\mathrm{Q}}(t)$라고 하면

$v_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{P}}'(t)=4t^3+6t^2+20t$

$v_{\mathrm{Q}}(t)=x_{\mathrm{Q}}'(t)=30t^2-16t+k$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 세 번 있으려면 $v_{\mathrm{P}}(t)=v_{\mathrm{Q}}(t)$를 만족시키는 양수 t의 값이 세 개 존재해야 하므로 방정식 $4t^3+6t^2+20t=30t^2-16t+k$가 서로 다른 세 개의 양의 실근을 가져야 한다.

$4t^3+6t^2+20t=30t^2-16t+k$에서 $4t^3-24t^2+36t=k$

$f(t)=4t^3-24t^2+36t$라고 하면

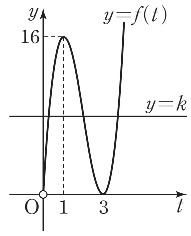
$f'(t)=12t^2-48t+36=12(t-1)(t-3)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$		$\nearrow$	16	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 서로 다른 세 양수이려면

$0<k<16$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, ⋯, 15의 15개이다.

정답_ 15

470

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-2t^2+7t-3$

$a=\dfrac{dv}{dt}=-4t+7$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$-2t^2+7t-3=0$, $(2t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=3$

따라서 점 P는 $t=3$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 이때의 점 P의 가속도는

$-12+7=-5$

정답_ -5

471

점 P는 원점을 출발하므로 $t=0$일 때 $x=0$에서

$b=0$

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=2t+a$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각이 $t=3$이므로 $t=3$일 때 $v=0$에서

$6+a=0 \qquad \therefore a=-6$

따라서 $x=t^2-6t$이므로 점 P가 다시 원점을 지나게 되는 시각은 $x=0$에서

$t^2-6t=0$, $t(t-6)=0$

$\therefore t=6$ ($\because t>0$)

정답_ ④

472

두 점 P, Q의 t분 후의 속도를 각각 $v_{\rm P}(t)$, $v_{\rm Q}(t)$라고 하면

$v_{\rm P}(t)=x_{\rm P}'(t)=6t-18$

$v_{\rm Q}(t)=x_{\rm Q}'(t)=2t-10$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 반대이므로 $v_{\rm P}(t)v_{\rm Q}(t)<0$에서

$(6t-18)(2t-10)<0$, $(t-3)(t-5)<0$

$\therefore 3<t<5$

정답_ $3<t<5$

473

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$

ㄱ. $t=0$일 때 $v=12$ (참)

ㄴ. $v=0$에서 $t=1$ 또는 $t=2$이므로 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다. (거짓)

ㄷ. $x=0$에서 $2t^3-9t^2+12t=0$

$t(2t^2-9t+12)=0 \qquad \therefore t=0$ ($\because 2t^2-9t+12>0$)

$2t^2-9t+12=2\left(t-\dfrac{9}{4}\right)^2+\dfrac{15}{8}>0$

즉, 점 P는 원점을 출발한 후 다시 원점을 지나지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

474

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-10t+a$

점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 $t\ge0$에서 항상 $v\ge0$ 또는 $v\le0$이어야 한다.

$v=3t^2-10t+a=3\left(t-\dfrac{5}{3}\right)^2+a-\dfrac{25}{3}$

이므로

$a-\dfrac{25}{3}\ge0 \qquad \therefore a\ge\dfrac{25}{3}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 9이다.

정답_ ①

475

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=2t^3-6t-k$

점 P의 운동 방향이 두 번 바뀌려면 $v=0$을 만족시키는 양수 t의 값이 두 개 존재해야 하므로 방정식 $2t^3-6t-k=0$이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 한다.

$2t^3-6t-k=0$에서 $2t^3-6t=k$

$f(t)=2t^3-6t$라고 하면

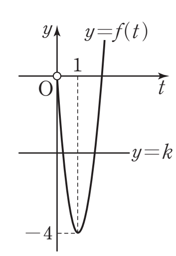
$f'(t)=6t^2-6=6(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because t>0$)

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	⋯	1	⋯
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	-4	↗

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=k$의 교점의 t좌표가 서로 다른 두 양수이려면

$-4<k<0$

따라서 정수 k는 -3, -2, -1의 3개이다.

정답_ 3

476

자동차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=18-6t$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$18-6t=0 \qquad \therefore t=3$

따라서 자동차가 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간은 3초이다.

정답_ ③

477

기차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=30-t$

기차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$30-t=0 \qquad \therefore t=30$

30초 동안 기차가 움직인 거리는

$900-450=450$ (m)

따라서 기차가 목적지에 정확히 정지하려면 목적지로부터 전방 450 m의 지점에서 제동을 걸어야 한다.

정답_ 450 m

478

열차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=20-\frac{1}{5}ct$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$20-\frac{1}{5}ct=0 \qquad \therefore t=\frac{100}{c}$ ($\because c>0$)

$\frac{100}{c}$초 동안 열차가 움직인 거리는

$\frac{2000}{c}-\frac{1000}{c}=\frac{1000}{c}$ (m)

이때 열차가 정지선을 넘지 않고 멈추려면 제동을 건 후 움직인 거리가 200 m 이하이어야 하므로

$\frac{1000}{c}\le 200 \qquad \therefore c\ge 5$

따라서 양수 c의 최솟값은 5이다.

정답_ ⑤

479

물체의 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\frac{dh}{dt}=40-10t$

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$40-10t=0 \qquad \therefore t=4$

따라서 4초 후 물체의 지면으로부터의 높이는

$160-80=80$ (m)

정답_ ④

480

물체의 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\frac{dh}{dt}=20-8t$

물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $h=0$에서

$24+20t-4t^2=0,\ t^2-5t-6=0$

$(t+1)(t-6)=0 \qquad \therefore t=6$ ($\because t>0$)

즉, 6초 후 물체의 속도는

$20-48=-28$ (m/s)

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도는 -28 m/s이다.

정답_ ②

481

물체의 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\frac{dh}{dt}=a-t$

물체가 최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$a-t=0 \qquad \therefore t=a$

즉, a초 후 물체의 지면으로부터의 높이가 최대이므로

$a^2-\frac{1}{2}a^2\ge 50,\ \frac{1}{2}a^2\ge 50$

$a^2-100\ge 0,\ (a+10)(a-10)\ge 0$

$\therefore a\ge 10$ ($\because a>0$)

따라서 양수 a의 최솟값은 10이다.

정답_ 10

482

물체의 t초 후의 속도를 v m/s, 가속도를 a m/s^{2}이라고 하면

$v=\frac{dh}{dt}=100-10t$

$a=\frac{dv}{dt}=-10$

ㄱ. 물체의 가속도는 -10 m/s^{2}으로 항상 일정하다. (참)

ㄴ. 물체가 다시 땅에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $h=0$에서

$100t-5t^2=0,\ t^2-20t=0$

$t(t-20)=0 \qquad \therefore t=20$ ($\because t>0$)

즉, 물체는 쏘아 올린 지 20초 후에 다시 땅에 떨어진다. (참)

ㄷ. 물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$100-10t=0 \qquad \therefore t=10$

10초 후 물체의 지면으로부터의 높이는

$1000-500=500$ (m)

즉, 이 물체는 최고 500 m까지 올라간다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ③

483

① $c<t<d$에서 점 P의 속력 $|v(t)|$는 감소한다. (거짓)

② $t=d$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌지 않으므로 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다. (거짓)

③ $t=b,\ t=e$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $0<t<f$에서 운동 방향을 2번 바꾼다. (거짓)

④ $t=a$일 때와 $t=c$일 때 $v(t)\ne 0$이므로 점 P는 움직이고 있다. (거짓)

⑤ 점 P는 출발할 때 양의 방향으로 움직이고, $b<t<e$에서 음의 방향으로 움직인다. (참)

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

484

ㄱ. $1<t<2$에서 $v(t)=1$이므로 점 P는 일정한 속도로 움직인다. (거짓)

ㄴ. $0<t<1$에서 점 P의 속도는 증가한다. (참)

ㄷ. $4<t<6$에서 점 P의 가속도는 $v'(t)=1$로 일정하다. (거짓)

ㄹ. $t=3$, $t=5$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $0<t<7$에서 운동 방향을 2번 바꾼다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

정답_ ④

485

주어진 그래프에서 점 P가 원점을 지나는 시각은 $t=b$, $t=d$이고, 이 중 두 번째로 원점을 지나는 시각은 $t=d$이므로 구하는 속도는 $x'(d)$의 값과 같다.

정답_ ④

486

① $0<t<8$에서 $t=3$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다. (참)

② $x(5)=x(7)=-2$ (참)

③ 점 P는 $0\le t\le 4$에서 $1\le t\le 2$, $3\le t\le 4$일 때 음의 방향으로 움직인다. (거짓)

④ 점 P는 $t=1$, $t=2$, $t=3$, $t=5$, $t=6$, $t=7$에서 운동 방향을 바꾼다. (참)

⑤ 점 P의 $t=2$일 때의 속도는 $x'(2)=0$, $t=4$일 때의 속도는 $x'(4)<0$이므로 $x'(2)>x'(4)$ (참)

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

정답_ ③

487

ㄱ. 두 점 P, Q는 $t=2$, $t=8$일 때 만나므로 적어도 두 번 만난다. (참)

ㄴ. $t=5$에서 두 점 P, Q의 속도는 각각 $x_P'(5)=0$, $x_Q'(5)=0$이므로 같다. (거짓)

ㄷ. $x_P(10)-x_P(0)=x_Q(10)-x_Q(0)$이므로 두 점 P, Q의 위치의 변화량은 같다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

정답_ ①

488

$l=t^2+2t+3$에서

$\dfrac{dl}{dt}=2t+2$

따라서 $t=2$에서의 고무줄의 길이의 변화율은

$4+2=6$ (cm/s)

정답_ ④

489

t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(6t,\ 0)$, $(0,\ 8t)$이므로 선분 AB의 중점 C의 좌표는 $(3t,\ 4t)$이다.

선분 OC의 길이를 l이라고 하면

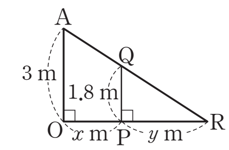
$l=\sqrt{(3t)^2+(4t)^2}=5t$ ($\because t>0$)

따라서 선분 OC의 길이의 변화율은

$\dfrac{dl}{dt}=5$

정답_ 5

490



사람이 t분 동안 움직인 거리를 x m, t분 후의 사람의 그림자의 길이를 y m라고 하면 오른쪽 그림에서 $\triangle AOR \backsim \triangle QPR$ (AA 닮음)이므로

$3:1.8=(x+y):y$

$3y=1.8x+1.8y$ $\qquad \therefore y=\dfrac{3}{2}x$

이때 $x=80t$이므로

$y=\dfrac{3}{2}\times 80t=120t$

따라서 그림자 길이의 변화율은

$\dfrac{dy}{dt}=120$ (m/min)

정답_ ②

491

t초 후의 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 $6t$ cm이므로 원의 넓이를 $S\ \text{cm}^2$라고 하면

$S=\pi(6t)^2=36\pi t^2$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=72\pi t$

따라서 2초 후 가장 바깥쪽 원의 넓이의 변화율은

$72\pi\times 2=144\pi$ (cm^2/s)

정답_ ⑤

492

t초 후의 직사각형의 가로와 세로의 길이는 각각 $(10+3t)$ cm, $(30-2t)$ cm이므로 직사각형의 넓이를 $S\ \text{cm}^2$라고 하면

$S=(10+3t)(30-2t)=300+70t-6t^2$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=70-12t$

직사각형이 정사각형이 되는 순간의 시각 t는

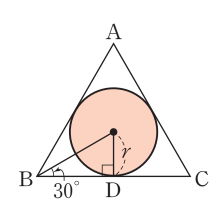
$10+3t=30-2t$ $\qquad \therefore t=4$

따라서 $t=4$에서 직사각형의 넓이의 변화율은

$70-48=22$ (cm^2/s)

정답_ ③

493



오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 세 꼭짓점을 각각 A, B, C라 하고, 내접원의 반지름의 길이를 r, 정삼각형과 원의 한 접점을 D라고 하자.

$r:\overline{BD}=1:\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{3}r=\overline{BD}$ $\qquad \therefore r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\overline{BD}$

이때 $\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$이므로

$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\overline{BC}$

t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(6\sqrt{3}+2\sqrt{3}t)$ cm이므로 정삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times(6\sqrt{3}+2\sqrt{3}t)=3+t$ (cm)

원의 넓이를 $S\ \text{cm}^2$라고 하면

$S=\pi(3+t)^2=\pi(9+6t+t^2)$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=\pi(6+2t)$

정삼각형의 한 변의 길이가 $12\sqrt{3}$ cm가 되는 순간의 시각 t는

$6\sqrt{3}+2\sqrt{3}t=12\sqrt{3}\qquad \therefore t=3$

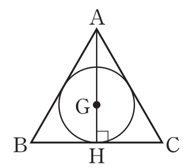
따라서 $t=3$에서 원의 넓이의 변화율은

$\pi\times(6+6)=12\pi\ (\text{cm}^2/\text{s})$

정답_ ④

참고 정삼각형에서 내심은 무게중심과 같다.

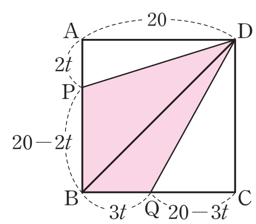
따라서 오른쪽 그림과 같은 정삼각형 ABC에서 중심이 G인 내접원의 반지름의 길이 $\overline{\text{GH}}$는 다음과 같이 구할 수도 있다.



$\overline{\text{GH}}=\dfrac{1}{3}\overline{\text{AH}}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{\text{AB}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\overline{\text{AB}}$

494

오른쪽 그림에서



$\triangle\text{DPB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{PB}}\times\overline{\text{AD}}$

$=\dfrac{1}{2}\times(20-2t)\times20$

$=200-20t$

$\triangle\text{DBQ}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{BQ}}\times\overline{\text{DC}}$

$=\dfrac{1}{2}\times3t\times20=30t$

$\therefore \square\text{DPBQ}=\triangle\text{DBP}+\triangle\text{DBQ}$

$=(200-20t)+30t$

$=200+10t$

사각형 DPBQ의 넓이가 정사각형 ABCD의 넓이의 $\dfrac{11}{20}$이 되는 순간의 시각 t는

$200+10t=20^2\times\dfrac{11}{20}=220\qquad \therefore t=2$

삼각형 PBQ의 넓이를 S라고 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{BQ}}\times\overline{\text{PB}}$

$=\dfrac{1}{2}\times3t\times(20-2t)=30t-3t^2$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=30-6t$

따라서 $t=2$에서 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은

$30-12=18$

정답_ 18

495

t초 후의 풍선의 반지름의 길이는 $(2+t)$ cm이므로 부피를 V cm^{3}라고 하면

$V=\dfrac{4}{3}\pi(2+t)^3=\dfrac{4}{3}\pi(8+12t+6t^2+t^3)$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{4}{3}\pi(12+12t+3t^2)=4\pi(t+2)^2$

풍선의 반지름의 길이가 6 cm가 되는 순간의 시각 t는

$2+t=6\qquad \therefore t=4$

따라서 $t=4$에서 풍선의 부피의 변화율은

$4\pi\times36=144\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$

정답_ ⑤

496

t초 후의 정사각기둥의 밑면의 한 변의 길이와 높이는 각각 $(2+t)$ cm, $(10-t)$ cm이므로 정사각기둥의 부피를 V cm^{3}라고 하면

$V=(2+t)^2(10-t)=40+36t+6t^2-t^3$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=36+12t-3t^2$

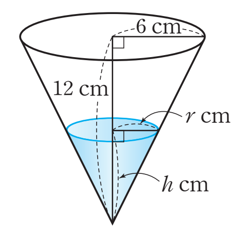
따라서 5초 후의 정사각기둥의 부피의 변화율은

$36+60-75=21\ (\text{cm}^3/\text{s})$

정답_ 21 cm^3/s

497

t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라고 하면 오른쪽 그림에서



$r:h=6:12$

$6h=12r\qquad \therefore r=\dfrac{1}{2}h$

이때 $h=2t$이므로

$r=\dfrac{1}{2}\times2t=t$

t초 후의 물의 부피를 V cm^{3}라고 하면

$V=\dfrac{1}{3}\pi t^2\times2t=\dfrac{2}{3}\pi t^3$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=2\pi t^2$

따라서 4초 후의 물의 부피의 변화율은

$2\pi\times4^2=32\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$

정답_ ②

498

$x^3-3x^2-k=0$에서 $x^3-3x^2=k$

$g(x)=x^3-3x^2$이라고 하면

$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

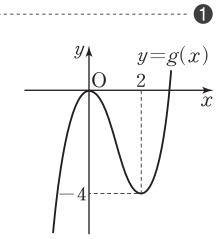
$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	0	↘	−4	↗

❶

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점은

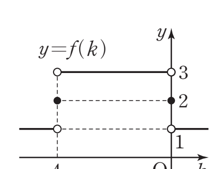


$k<-4$ 또는 $k>0$일 때 1개,

$k=-4$ 또는 $k=0$일 때 2개,

$-4<k<0$일 때 3개

즉, 함수 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(k)$는 $k=-4$, $k=0$에서 불연속이다.



$\therefore a=-4$ 또는 $a=0$ ❷

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

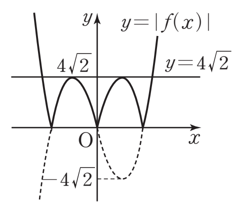
$-4+0=-4$ ❸

정답_ −4

채점 기준	비율
❶ $g(x)=x^3-3x^2$이라 하고, 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내기	50 %
❷ a의 값 구하기	40 %
❸ 모든 실수 a의 값의 합 구하기	10 %

499

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
이때 조건 (나)에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로
함수 $f(x)$는 극댓값 $4\sqrt{2}$, 극솟값 $-4\sqrt{2}$를 갖는다. ❶



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점 중 원점이 아닌 점의 x좌표를 각각 $-a$, a $(a>0)$라고 하면
$f(x)=x(x+a)(x-a)=x^3-a^2x$
$f'(x)=3x^2-a^2=3\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$
$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}a$
즉, 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}a$에서 극댓값 $4\sqrt{2}$를 가지므로
$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^3-a^2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)=4\sqrt{2}$
$\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3=4\sqrt{2}$, $a^3=6\sqrt{6}$
$\therefore a=\sqrt{6}$
따라서 $f(x)=x^3-6x$이므로 ❷
$f(1)=1-6=-5$ ❸

정답_ -5

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$의 극값 구하기	40 %
❷ $f(x)$의 식 구하기	40 %
❸ $f(1)$의 값 구하기	20 %

500

$f(x)=2x^3-3(n-1)x^2-6nx+4$에서
$f'(x)=6x^2-6(n-1)x-6n=6(x+1)(x-n)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=n$
삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
$f(-1)f(n)<0$이어야 하므로
$(3n+5)(-n^3-3n^2+4)<0$, $(3n+5)(n-1)(n+2)^2>0$
이때 $(n+2)^2>0$이므로
$(3n+5)(n-1)>0$ $\quad\therefore n<-\frac{5}{3}$ 또는 $n>1$
따라서 가장 작은 자연수 n의 값은 2이므로 $a=2$ ❶
$n=2$일 때, $f(x)=2x^3-3x^2-12x+4$이므로
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	11	↘	-16	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 11을 가지므로
$b=11$ ❷
$\therefore a+b=2+11=13$ ❸

정답_ 13

채점 기준	비율
❶ a의 값 구하기	50 %
❷ b의 값 구하기	40 %
❸ $a+b$의 값 구하기	10 %

501

$|3x^4+2x^3-3x^2+k|\le 15$에서 $-15\le 3x^4+2x^3-3x^2+k\le 15$
$f(x)=3x^4+2x^3-3x^2+k$라고 하면
$f'(x)=12x^3+6x^2-6x=6x(x+1)(2x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
$-2\le x\le 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k+20$	↘	$k-2$	↗	k

❶

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $k+20$, $x=-1$에서 최솟값 $k-2$를 가지므로 $-2\le x\le 0$에서 $-15\le f(x)\le 15$가 성립하려면
$k-2\ge -15$, $k+20\le 15$ $\quad\therefore -13\le k\le -5$ ❷
따라서 정수 k는 -13, -12, -11, $\cdots$, -5의 9개이다. ❸

정답_ 9

채점 기준	비율
❶ $f(x)=3x^4+2x^3-3x^2+k$라 하고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내기	60 %
❷ k의 값의 범위 구하기	30 %
❸ 정수 k의 개수 구하기	10 %

502

시각 t에서의 점 M의 위치를 x_M이라고 하면
$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$
$=\frac{(t^3-6t^2+14t)+(t^3-12t^2+34t)}{2}$
$=t^3-9t^2+24t$ ❶
시각 t에서의 점 M의 속도를 v라고 하면
$v=\frac{dx_M}{dt}=3t^2-18t+24$ ❷
점 M이 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$3t^2-18t+24=0$, $(t-2)(t-4)=0$
$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

즉, 점 M은 $t=4$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 이때의 점 A의 위치는

$x_A=64-96+56=24$

점 B의 위치는

$x_B=64-192+136=8$ ❸

따라서 이때의 선분 AB의 길이는

$24-8=16$ ❹

정답_ 16

채점 기준	비율
❶ 시각 t에서의 점 M의 위치 구하기	30 %
❷ 시각 t에서의 점 M의 속도 구하기	30 %
❸ 점 M이 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 순간의 두 점 A, B의 위치 구하기	30 %
❹ 점 M이 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 순간의 선분 AB의 길이 구하기	10 %

503

$x_P=t^3+2t$, $x_Q=3t^2+2t+1$에서 선분 PQ의 길이를 l이라고 하면

$l=|x_P-x_Q|$

$=|t^3+2t-(3t^2+2t+1)|$

$=|t^3-3t^2-1|$ ❶

$f(t)=t^3-3t^2-1$이라고 하면

$f'(t)=3t^2-6t$

이때 $f(1)=1-3-1=-3<0$이므로 $t=1$에서 선분 PQ의 길이의 변화율은

$-f'(1)=-(3-6)=3$ ❷

정답_ 3

채점 기준	비율
❶ 선분 PQ의 길이를 t에 대한 식으로 나타내기	50 %
❷ $t=1$에서 선분 PQ의 길이의 변화율 구하기	50 %

504

$f(x)=t$로 놓으면

$t=x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geq1$

$g(f(x))=g(t)=t^3-3t^2+1$ (단, $t\geq1$)

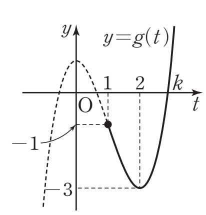
$g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

$t\geq1$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$	-1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $g(t)=0$의 실근을 $t=k$ $(k>2)$라고 하면 방정식 $f(x)=k$의 실근은 2개이다.

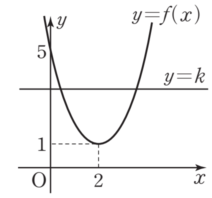
즉, 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근은 2개이다.

정답_ ②

참고 방정식 $g(t)=0$의 실근을 $t=k$ $(k>2)$라고 하면 $f(x)=k$에서

$(x-2)^2+1=k$ $\quad\therefore x=2\pm\sqrt{k-1}$ ($\because k>2$)

따라서 방정식 $f(x)=k$의 실근은 2개이다.



505

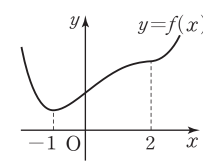
주어진 그래프에서 $f'(x)=0$인 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

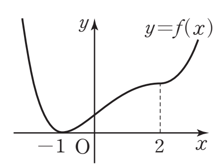
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

ㄱ. $f(-1)>0$이면 $f(2)>0$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다. (참)

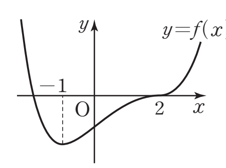


ㄴ. $f(-1)f(2)=0$이면 $f(-1)=0$ 또는 $f(2)=0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



[$f(-1)=0$인 경우]



[$f(2)=0$인 경우]

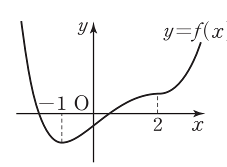
즉, 방정식 $f(x)=0$은 한 실근 또는 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $f(-1)f(2)<0$이면

$f(-1)<0$, $f(2)>0$

($\because f(-1)<f(2)$)

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ④

506

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$ (a, b는 상수)

라고 하자.

방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2이므로 $g(2)=f(-2)$에서

$f(2)+8=f(-2)$

$8+4a+2b+\frac{1}{2}+8=-8+4a-2b+\frac{1}{2}$

$4b=-24$ $\quad\therefore b=-6$

즉, $f(x)=x^3+ax^2-6x+\frac{1}{2}$이므로

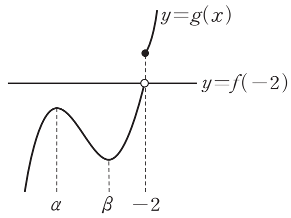
$f'(x)=3x^2+2ax-6$

함수 $f(x)$가 극값을 가지므로 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하자.

(ⅰ) $\alpha<\beta\le-2$인 경우

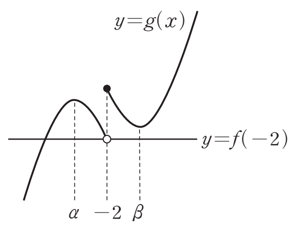
오른쪽 그림과 같이 $x\ge-2$에서 함수 $g(x)$는 증가하므로 $f(-2)<g(-2)<g(2)$

즉, $g(2)\ne f(-2)$이므로 모순이다.



(ⅱ) $\alpha<-2<\beta$인 경우

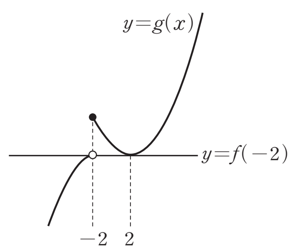
방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 오른쪽 그림과 같이 구간 $(-\infty, \alpha)$에 존재하므로 모순이다.



(ⅲ) $\alpha=-2$인 경우

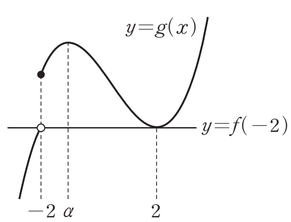
방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 오른쪽 그림과 같이 2뿐이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

즉, $f'(x)=3(x+2)(x-2)$이고 $3x^2+2ax-6\ne3x^2-12$이므로 모순이다.



(ⅳ) $-2<\alpha<\beta$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 조건을 만족시키려면 $\beta=2$



(ⅰ)~(ⅳ)에서 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f'(2)=0$에서

$12+4a-6=0 \qquad \therefore a=-\frac{3}{2}$

즉, $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{1}{2}$이므로

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1-\frac{3}{2}+6+\frac{1}{2}=4$

정답_ ③

507

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고, 방정식 $f(x)=0$이 한 개의 음의 근과 서로 다른 두 양의 근을 가지므로

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $(a>0,\ \alpha<0<\beta<\gamma)$

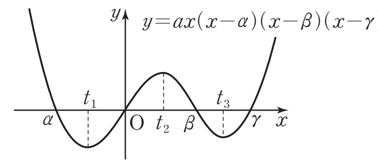
로 놓을 수 있다.

ㄱ. $g(0)=f(0)=-a\alpha\beta\gamma>0$ (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'$이므로

$g(x)=\{ax(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\}'$

함수 $y=ax(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$의 그래프는 x축과 네 점 $(\alpha, 0)$, $(0, 0)$, $(\beta, 0)$, $(\gamma, 0)$에서 만나고 $\alpha<0<\beta<\gamma$이므로 그 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 방정식 $g(x)=0$의 세 근은 함수 $y=ax(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 점의 x좌표이므로 위의 그림과 같이 그 x좌표들을 t_1, t_2, t_3이라고 하면 $\alpha<t_1<0<t_2<\beta<t_3<\gamma$

따라서 방정식 $g(x)=0$은 한 개의 음의 근과 서로 다른 두 양의 근을 갖는다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 방정식 $g(x)=0$의 음의 근은 t_1이다.

그런데 방정식 $f(x)=0$의 음의 근은 α이고, $\alpha<t_1<0$이므로 두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$은 공통인 음의 근을 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ④

508

함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

방정식 $f(x)=x$, 즉 $f(x)-x=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$h(x)=f(x)-x$라고 하면

$h(x)=\frac{1}{3}x^3-x+a$

$h'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$h(-1)h(1)=0$이어야 하므로

$\left(a+\frac{2}{3}\right)\left(a-\frac{2}{3}\right)=0 \qquad \therefore a=-\frac{2}{3}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은

$-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{9}$

정답_ ②

참고 **함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계**

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

509

$f'(x)=(x-1)^2(x-2)$이므로

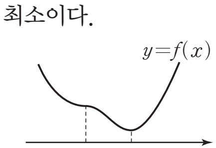
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

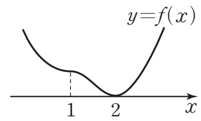
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이다.

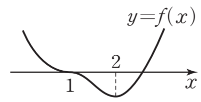
ㄱ. $f(2)>0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립한다. (참)



ㄴ. $f(2)=0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립한다. (참)



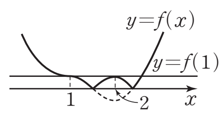
ㄷ. $f(1)=0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\leq 0$을 만족시키는 x의 최솟값은 1이다. (참)



ㄹ. $f(1)>f(2)$이므로 $f(1)=-f(2)$이면

$f(1)>0,\ f(2)<0,\ \dfrac{f(1)+f(2)}{2}=0$

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=f(1)$은 서로 다른 세 점에서 만난다.



즉, 방정식 $|f(x)|=f(1)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

510

조건 (나)에서 $f(0)=g(0)$

조건 (다)에서 $f(4)=g(4)$, $f'(4)=g'(4)$

$f(x)\geq g(x)+5$에서 $f(x)-g(x)\geq 5$

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$f(0)=g(0)$에서 $h(0)=0$ − $h(x)$는 x를 인수로 갖는다. ...... ㉠

$f(4)=g(4)$에서 $h(4)=0$ ...... ㉡

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로 − $h(x)$는 $(x-4)^2$을 인수로 갖는다.

$f'(4)=g'(4)$에서 $h'(4)=0$ ...... ㉢

조건 (가)에서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$h(x)=x(x-4)^2=x^3-8x^2+16x$

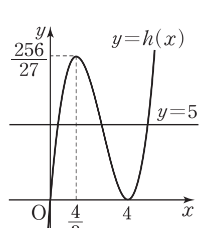
$h'(x)=3x^2-16x+16=(3x-4)(x-4)$

$h'(x)=0$에서 $x=\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=4$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	$\frac{256}{27}$	↘	0	↗

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$h(x)=5$에서

$x^3-8x^2+16x=5$

$x^3-8x^2+16x-5=0$

$(x-5)(x^2-3x+1)=0$

$\therefore x=5$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

즉, $x\geq k$에서 부등식 $h(x)\geq 5$가 항상 성립하려면

$k\geq 5$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 5이다.

정답_ ②

511

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}라고 하면

$v_{\mathrm{P}}=\dfrac{dx_{\mathrm{P}}}{dt}=4t^3-24t^2+36t$, $v_{\mathrm{Q}}=\dfrac{dx_{\mathrm{Q}}}{dt}=m$

두 점 P, Q의 속도가 같게 되는 시각은 $v_{\mathrm{P}}=v_{\mathrm{Q}}$에서

$4t^3-24t^2+36t=m$

이때 $f(m)$은 방정식 $4t^3-24t^2+36t=m$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$g(t)=4t^3-24t^2+36t$라고 하면

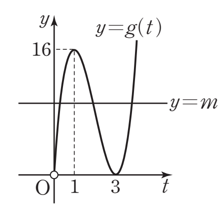
$g'(t)=12t^2-48t+36=12(t-1)(t-3)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

$t>0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

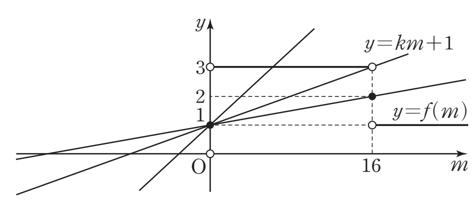
t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		+	0	−	0	+
$g(t)$		↗	16	↘	0	↗

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(m)$은 다음과 같다.



$$f(m)=\begin{cases} 0 & (m<0) \\ 1 & (m=0) \\ 3 & (0<m<16) \\ 2 & (m=16) \\ 1 & (m>16) \end{cases}$$

방정식 $f(m)=km+1$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(m)$의 그래프와 직선 $y=km+1$이 다음 그림과 같이 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.



직선 $y=km+1$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 함수 $y=f(m)$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나려면 점 $(16,\ 2)$를 지나거나 점 $(16,\ 3)$을 지날 때보다 기울기가 커야 한다.

(i) 직선 $y=km+1$이 점 $(16,\ 2)$를 지날 때

$2=16k+1$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{16}$

(ii) 직선 $y=km+1$이 점 $(16,\ 3)$을 지날 때

$3=16k+1$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{8}$

(i), (ii)에서 $k=\dfrac{1}{16}$ 또는 $k>\dfrac{1}{8}$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 $\dfrac{1}{16}$이다.

정답_ $\dfrac{1}{16}$

512

(i) $0<t<1$일 때

원점과 점 $(1,\ k)$를 잇는 직선의 기울기는 k이므로 주어진 그래프에서 $v'(a)=a(a)>k$를 만족시키는 a의 값이 구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

(ii) $1<t<2$일 때

$v(t)=k$이므로

$v'(t)=a(t)=0$

(iii) $2<t<3$일 때

$v(t)=-k(t-3)$이므로

$v'(t)=a(t)=-k$

(i)~(iii)에서 가속도 $a(t)$를 나타내는 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.

정답_ ②

참고 $0<t<1$일 때, 원점과 점 $(1,\ k)$를 잇는 직선의 기울기가 k이므로 $v'(t)=k$인 t의 값은 2개이다. 이 값을 각각 a, b $(a<b)$라고 하면 $a<t<b$에서 $v'(t)>k$이다.
따라서 $t=\alpha$ $(0<\alpha<1)$에서 $v'(t)$의 값이 최대라고 하면 $v'(\alpha)>k$인 α가 존재한다.

513

ㄱ. 두 함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프는 $t=b$, $t=e$에서 만나므로 $0<t<10$에서 두 점 P, Q는 두 번 만난다. (참)

ㄴ. $b<t<e$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프가 함수 $y=g(t)$의 그래프보다 아래쪽에 있으므로 점 P는 점 Q의 왼쪽에 있다. (참)

ㄷ. $d<t<e$에서 $f'(t)>0$, $g'(t)<0$이므로 두 점 P, Q는 서로 반대 방향으로 움직인다. (참)

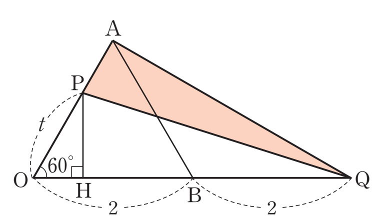
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ㄱ, ㄴ, ㄷ

514

(i) $0<t<2$일 때

점 P가 원점 O를 출발한 지 t초 후 $\overline{\mathrm{OP}}=t$이다.



위의 그림과 같이 점 P에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼각형 POH에서

$\overline{\mathrm{PH}}=t\sin 60^\circ=t\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t$

이므로

$S(t)=\triangle\mathrm{AOQ}-\triangle\mathrm{POQ}$

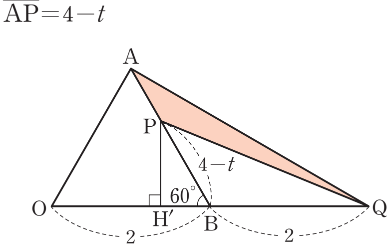
$=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}t$

$=-\sqrt{3}t+2\sqrt{3}$

(ii) $2\le t<4$일 때

점 P가 원점 O를 출발한 지 t초 후 $\overline{\mathrm{AP}}=t-2$이므로

$\overline{\mathrm{PB}}=2-\overline{\mathrm{AP}}=4-t$



위의 그림과 같이 점 P에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H′이라고 하면 삼각형 PBH′에서

$\overline{\mathrm{PH'}}=(4-t)\sin 60^\circ=(4-t)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}t$

이므로

$S(t)=\triangle\mathrm{ABQ}-\triangle\mathrm{PBQ}$

$=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times2\times\left(2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $S(t)=\begin{cases}-\sqrt{3}t+2\sqrt{3} & (0<t<2)\\ \frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3} & (2\le t<4)\end{cases}$이므로

$S'(t)=\begin{cases}-\sqrt{3} & (0<t<2)\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & (2<t<4)\end{cases}$

ㄱ. $t=1$일 때 $S(t)$의 변화율은

$S'(1)=-\sqrt{3}$ (거짓)

ㄴ. $t=3$일 때 $S(t)$의 변화율은

$S'(3)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (참)

ㄷ. $0<t<4$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(4)
$S'(t)$		$-$		$+$	
$S(t)$		↘	0	↗	

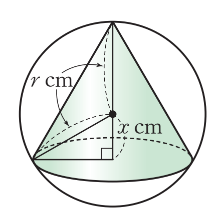
즉, 함수 $S(t)$는 $t=2$에서 극솟값 0을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

515

t초 후의 구의 반지름의 길이를 r cm, 구의 중심에서 원뿔의 밑면까지의 거리를 x cm라고 하면 오른쪽 그림에서 원뿔의 밑면의 반지름의 길이는 $\sqrt{r^2-x^2}$ cm, 원뿔의 높이는 $(r+x)$ cm이다.



원뿔의 부피를 $V(x)$ cm³라고 하면

$V(x)=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2(r+x)=\frac{\pi}{3}(r^2-x^2)(r+x)$

$V'(x)=\frac{\pi}{3}\{-2x(r+x)+(r^2-x^2)\}$

$=-\frac{\pi}{3}(3x^2+2rx-r^2)$

$=-\frac{\pi}{3}(x+r)(3x-r)$

$V'(x)=0$에서 $x=-r$ 또는 $x=\frac{r}{3}$

$0<x<r$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{r}{3}$	$\cdots$	(r)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	$\frac{32}{81}\pi r^3$	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=\frac{r}{3}$일 때 최댓값 $\frac{32}{81}\pi r^3$을 갖는다.

이때 $r=3+t$이므로 t초 후의 원뿔의 부피를 $V(t)\text{ cm}^3$라고 하면

$V(t)=\frac{32\pi}{81}(3+t)^3=\frac{32\pi}{81}(27+27t+9t^2+t^3)$

$V'(t)=\frac{32\pi}{81}(27+18t+3t^2)=\frac{32\pi}{27}(3+t)^2$

구의 반지름의 길이가 9 cm가 되는 순간의 시각 t는

$3+t=9 \qquad \therefore t=6$

따라서 $t=6$에서 원뿔의 부피의 변화율은

$V'(6)=\frac{32\pi}{27}\times(3+6)^2=96\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$

정답_ ⑤

III 적분

07 부정적분

516

(1) $f(x)=(x^2+x-1)'=2x+1$

(2) $f(x)=(2x^3+6x^2-5x)'=6x^2+12x-5$

(3) $f(x)=\left(\frac{4}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3-x+2\right)'=4x^4-2x^2-1$

정답_ (1) $f(x)=2x+1$
(2) $f(x)=6x^2+12x-5$
(3) $f(x)=4x^4-2x^2-1$

517

$F(x)=-x^2+2x$라고 하면 $F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)=(-x^2+2x)'=-2x+2$

정답_ ③

518

$\int(x+3)f(x)dx=2x^3-54x+C$에서

$(x+3)f(x)=(2x^3-54x+C)'$
$=6x^2-54$
$=6(x^2-9)$
$=6(x+3)(x-3)$

따라서 $f(x)=6(x-3)$이므로

$f(4)=6\times(4-3)=6$

정답_ ③

519

함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나가 $2x^3-\frac{a}{2}x^2+x$이므로

$\int f(x)dx=2x^3-\frac{a}{2}x^2+x+C$ (C는 적분상수)로 놓으면

$f(x)=\left(2x^3-\frac{a}{2}x^2+x+C\right)'=6x^2-ax+1$

$\therefore f'(x)=12x-a$

이때 $f'(2)=3$이므로

$24-a=3 \qquad \therefore a=21$

따라서 $f(x)=6x^2-21x+1$이므로

$f(2)=24-42+1=-17$

정답_ ①

520

$\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}-3x^2-3x+C$에서

$f(x)=\left(\frac{x^3}{3}-3x^2-3x+C\right)'=x^2-6x-3$

이때 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$을 만족시키는 실수 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2-6x-3=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=-3$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=6^2-2\times(-3)=42$$

정답_ 42

521

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int(2x^2+ax-1)dx=bx^2+3x+c$에서

$2x^2+ax-1=bx^2+3x+c$

위의 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=3$, $b=2$, $c=-1$

$\therefore abc=3\times2\times(-1)=-6$

정답_ ②

522

$\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^2-3x)\right\}dx=2x^2-3x+C$ (C는 적분상수)

이므로

$f(x)=2x^2-3x+C$

이때 $f(1)=0$이므로

$2-3+C=0 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=2x^2-3x+1$이므로

$f(2)=8-6+1=3$

정답_ ④

523

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int\{f(x)-x^2+4\}dx=f(x)-x^2+4$,

$\displaystyle\int\frac{d}{dx}\{2f(x)-3x+1\}dx=2f(x)-3x+C$ (C는 적분상수)

이므로

$f(x)-x^2+4=2f(x)-3x+C$

$\therefore f(x)=-x^2+3x+4-C$

이때 $f(1)=3$이므로

$-1+3+4-C=3 \qquad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=-x^2+3x+1$이므로

$f(0)=1$

정답_ ④

참고 $\displaystyle\int\frac{d}{dx}\{2f(x)-3x+1\}dx=2f(x)-3x+1+C$로 놓고 풀어도 결과는 같지만 $1+C$보다는 C로 놓고 푸는 것이 계산이 더 간단하다.

524

$\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-5x+4)\right\}dx=x^2-5x+C$ (C는 적분상수)

이므로

$f(x)=x^2-5x+C$

이때 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2-5x+C=0$의 모든 근의 곱이 -2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$C=-2$

따라서 $f(x)=x^2-5x-2$이므로

$f(1)=1-5-2=-6$

정답_ ①

525

$\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^2+4x)\right\}dx=2x^2+4x+C$ (C는 적분상수)

이므로

$f(x)=2x^2+4x+C=2(x+1)^2+C-2$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 3이므로

$C-2=3 \qquad \therefore C=5$

따라서 $f(x)=2x^2+4x+5$이므로

$f(1)=2+4+5=11$

정답_ ④

526

$$F(x)=\int\left[\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx$$
$$=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$$
$$=f(x)+C_2 \text{ (단, } C_1,\ C_2\text{는 적분상수)}$$

이때 $F(0)=4$이고 $f(0)=0$이므로 위의 식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+C_2=4 \qquad \therefore C_2=4$

따라서 $F(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots+100x^{100}+4$이므로

$$F(-1)=-1+2+(-3)+\cdots+100+4$$
$$=50+4=54$$

정답_ 54

527

(1) $\displaystyle\int x^4dx=\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C$

$=\dfrac{1}{5}x^5+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\displaystyle\int(3x^2-2x+5)dx=3\times\frac{1}{2+1}x^{2+1}-2\times\frac{1}{1+1}x^{1+1}+5x+C$

$=x^3-x^2+5x+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\displaystyle\int(x-1)(x^2+x+1)dx=\int(x^3-1)dx$

$=\dfrac{1}{3+1}x^{3+1}-x+C$

$=\dfrac{1}{4}x^4-x+C$ (단, C는 적분상수)

(4) $\displaystyle\int\frac{x^3-x+6}{x+2}dx=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+3)}{x+2}dx$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ & & -2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}$$

$=\displaystyle\int(x^2-2x+3)dx$

$=\dfrac{1}{2+1}x^{2+1}-2\times\dfrac{1}{1+1}x^{1+1}+3x+C$

$=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수)

정답_ (1) $\dfrac{1}{5}x^5+C$ **(단, C는 적분상수)**

(2) x^3-x^2+5x+C **(단, C는 적분상수)**

(3) $\dfrac{1}{4}x^4-x+C$ **(단, C는 적분상수)**

(4) $\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x+C$ **(단, C는 적분상수)**

528

$f(x)=\int(3x^2+4x-2)dx$

$=x^3+2x^2-2x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=-3$이므로 $C=-3$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-2x-3$이므로

$f(1)=1+2-2-3=-2$

정답_ ①

529

$f(x)=\int(x+1)^2dx+\int(x-1)^2dx$

$=\int\{(x+1)^2+(x-1)^2\}dx$

$=\int(2x^2+2)dx$

$=\frac{2}{3}x^3+2x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(3)=16$이므로

$18+6+C=16 \qquad \therefore C=-8$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+2x-8$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 -8이다.

정답_ -8

530

$f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x-2\right)^3dx$

$=2\times\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x-2\right)^4+C$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-2\right)^4+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(2)=\frac{3}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times(1-2)^4+C=\frac{3}{2} \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-2\right)^4+1$이므로

$f(0)=8+1=9$

정답_ ⑤

참고 $\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\times\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

531

$f(x)=\int\frac{x^3-2x}{x-1}dx+\int\frac{2x-1}{x-1}dx$

$=\int\left(\frac{x^3-2x}{x-1}+\frac{2x-1}{x-1}\right)dx$

$=\int\frac{x^3-1}{x-1}dx$

$=\int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx$

$=\int(x^2+x+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=2$이므로

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+C=2 \qquad \therefore C=\frac{1}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{6}$이므로

$f(-2)=-\frac{8}{3}+2-2+\frac{1}{6}=-\frac{5}{2}$

정답_ ②

532

$f(x)=\int(1+4x+9x^2+\cdots+100x^9)dx$

$=x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10}+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(-1)=8$이므로

$-1+2+(-3)+\cdots+10+C=8$

$5+C=8 \qquad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10}+3$이므로

$f(1)=1+2+3+\cdots+10+3=58$

정답_ 58

533

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=8x$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 8x dx$

$f(x)+g(x)=4x^2+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

이때 $f(0)=2$, $g(0)=1$에서 $f(0)+g(0)=3$이므로

$f(0)+g(0)=C_1 \qquad \therefore C_1=3$

$\therefore f(x)+g(x)=4x^2+3$ …… ㉠

또, $\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=-2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int(-2)dx$

$f(x)-g(x)=-2x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

이때 $f(0)=2$, $g(0)=1$에서 $f(0)-g(0)=1$이므로

$f(0)-g(0)=C_2 \qquad \therefore C_2=1$

$\therefore f(x)-g(x)=-2x+1$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2f(x)=4x^2-2x+4 \qquad \therefore f(x)=2x^2-x+2$

㉠−㉡을 하면

$2g(x)=4x^2+2x+2 \qquad \therefore g(x)=2x^2+x+1$

따라서

$f(2)=8-2+2=8$,

$g(-3)=18-3+1=16$

이므로

$f(2)+g(-3)=8+16=24$

정답_ 24

534

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=-4x+3$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(-4x+3)dx$

$f(x)g(x)=-2x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=-1$, $g(1)=0$이므로

$f(1)g(1)=-2+3+C$

$0=1+C \qquad \therefore C=-1$

따라서

$f(x)g(x)=-2x^2+3x-1=-(2x-1)(x-1)$

이므로 $f(1)=-1$, $g(1)=0$을 만족시키고 계수가 정수인 두 일차함수 $f(x)$, $g(x)$는

$f(x)=-2x+1$, $g(x)=x-1$

$\therefore f(3)=-6+1=-5$

정답_ ③

535

$f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)

라고 하면

$$g(x)=\int xf(x)dx$$
$$=\int(ax^3+bx^2+cx)dx$$
$$=\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(x)+g(x)=x^4+7x^2-1$이므로

$$(ax^2+bx+c)+\left(\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+C\right)$$
$$=\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\left(a+\frac{c}{2}\right)x^2+bx+c+C$$
$$=x^4+7x^2-1$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$\frac{a}{4}=1$, $\frac{b}{3}=0$, $a+\frac{c}{2}=7$, $b=0$, $c+C=-1$

$\therefore a=4$, $b=0$, $c=6$, $C=-7$

따라서 $g(x)=x^4+3x^2-7$이므로

$g(1)=1+3-7=-3$

정답_ ②

536

$\int(x^2-1)f'(x)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$(x^2-1)f'(x)=x^3+2x^2-x-2$$
$$=(x^2-1)(x+2)$$

$\therefore f'(x)=x+2$

따라서

$$f(x)=\int(x+2)dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+2x+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

이고 $f(0)=-2$이므로

$f(x)=\frac{x^2}{2}+2x-2$

이때 $f(k)=0$을 만족시키는 실수 k는 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $\frac{x^2}{2}+2x-2=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 실수 k의 값의 합은

$$\frac{-2}{\frac{1}{2}}=-4$$

정답_ -4

537

$f'(x)=4x^3-2x$이므로

$$f(x)=\int(4x^3-2x)dx$$
$$=x^4-x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=x^4-x^2+3$이므로

$f(2)=16-4+3=15$

정답_ 15

538

$f'(x)=5x^4+2x+k$이므로

$$f(x)=\int(5x^4+2x+k)dx$$
$$=x^5+x^2+kx+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(0)=1$, $f(-2)=-11$이므로

$C=1$, $-32+4-2k+C=-11$

$\therefore k=-8$

따라서 $f(x)=x^5+x^2-8x+1$이므로

$f(1)=1+1-8+1=-5$

정답_ ②

539

$f'(x)=6x^2-2f(1)x$이므로

$$f(x)=\int\{6x^2-2f(1)x\}dx$$
$$=2x^3-f(1)x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(0)=4$이므로 $C=4$

$f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$이므로 이 식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-f(1)+4$, $2f(1)=6$

$\therefore f(1)=3$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2+4$이므로

$f(2)=16-12+4=8$

정답_ ④

540

$f'(x)=4x^2+4x+1$이므로

$$f(x)=\int(4x^2+4x+1)dx$$
$$=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수)}$$

이때 $f(1)=2$이므로

$\frac{4}{3}+2+1+C_1=2 \qquad \therefore C_1=-\frac{7}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x-\frac{7}{3}$이므로

$$F(x)=\int\left(\frac{4}{3}x^3+2x^2+x-\frac{7}{3}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{3}x+C_2 \text{ (단, } C_2\text{는 적분상수)}$$

이때 $F(1)=2$이므로

$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{7}{3}+C_2=2 \qquad \therefore C_2=\frac{17}{6}$

따라서 $F(x)=\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{3}x+\frac{17}{6}$이므로

$6F(0)=6\times\frac{17}{6}=17$

정답_ ④

541

$f'(x)=4x^3+3ax^2-18x-2$이므로

$f(x)=\int(4x^3+3ax^2-18x-2)dx$

$=x^4+ax^3-9x^2-2x+C$ (단, C는 적분상수)

다항식 $f(x)$가 $x+1$, $x-2$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0$, $f(2)=0$

$f(-1)=0$에서

$1-a-9+2+C=0 \quad \therefore -a+C=6$ …… ㉠

$f(2)=0$에서

$16+8a-36-4+C=0 \quad \therefore 8a+C=24$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $C=8$

따라서 $f(x)=x^4+2x^3-9x^2-2x+8$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는

$f(0)=8 \quad \therefore b=8$

$\therefore a+b=2+8=10$

정답_ ①

참고 인수 정리

다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$

542

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $6x^2+3$이므로

$f'(x)=6x^2+3$

$\therefore f(x)=\int(6x^2+3)dx$

$=2x^3+3x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$f(0)=-2 \quad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=2x^3+3x-2$이므로

$f(-1)=-2-3-2=-7$

정답_ -7

543

$f'(x)=2x+k$이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, -3)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(2)=4+k=-1 \quad \therefore k=-5$

$\therefore f(x)=\int(2x-5)dx$

$=x^2-5x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 점 $(2, -3)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=4-10+C=-3 \quad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=x^2-5x+3$이므로

$f(-2)=4+10+3=17$

정답_ ③

544

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $6x^2+2x+3$이므로

$f'(x)=6x^2+2x+3$

$\therefore f(x)=\int(6x^2+2x+3)dx$

$=2x^3+x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, 6)$을 지나므로

$f(-1)=-2+1-3+C=6 \quad \therefore C=10$

$\therefore f(x)=2x^3+x^2+3x+10$

즉,

$f'(1)=6+2+3=11$,

$f(1)=2+1+3+10=16$

이므로 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식은

$y-16=11(x-1) \quad \therefore y=11x+5$

따라서 $a=11$, $b=5$이므로

$a-b=11-5=6$

정답_ ①

545

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $-4x+4$이므로

$f'(x)=-4x+4$

$\therefore f(x)=\int(-4x+4)dx$

$=-2x^2+4x+C$

$=-2(x-1)^2+2+C$ (단, C는 적분상수)

이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 6이므로

$2+C=6 \quad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=-2x^2+4x+4$이므로

$f(0)=4$

정답_ 4

546

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $2x+1$이므로

$f'(x)=2x+1$

$\therefore f(x)=\int(2x+1)dx$

$=x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$f(2)=4+2+C=1 \quad \therefore C=-5$

$\therefore f(x)=x^2+x-5$

한편, $P(\alpha, 0)$, $Q(\beta, 0)$이라고 하면

$\overline{PQ}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}$

이때 α, β는 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2+x-5=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-5$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}$

$=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{(-1)^2-4\times(-5)}=\sqrt{21}$

정답_ $\sqrt{21}$

547

$F(x)+\int(x-1)f(x)dx=x^4-4x^3+6x^2+5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f(x)=4x^3-12x^2+12x$

$xf(x)=x(4x^2-12x+12)$

$\therefore f(x)=4x^2-12x+12$

$=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 3을 갖는다.

정답_ ②

548

$\int f(x)dx=xf(x)+2x^3-2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2-4x$

$xf'(x)=-6x^2+4x=x(-6x+4)$

즉, $f'(x)=-6x+4$이므로

$f(x)=\int(-6x+4)dx$

$=-3x^2+4x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=4$에서

$-3+4+C=4 \qquad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=-3x^2+4x+3$이므로

$f(2)=-12+8+3=-1$

정답_ -1

549

$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3x^2+12$

$(x+2)f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

즉, $f'(x)=3(x-2)$이므로

$f(x)=\int 3(x-2)dx$

$=\int(3x-6)dx$

$=\frac{3}{2}x^2-6x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$F(0)=2f(0)=30 \qquad \therefore f(0)=15$

$f(0)=0-0+C=15 \qquad \therefore C=15$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+15$이므로

$f(2)=6-12+15=9$

정답_ 9

550

$f(x)+\int xf(x)dx=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+xf(x)=x^4-3x^3+4x^2-7x+1$ …… ㉠

$f(x)$의 차수를 n이라고 하면 $xf(x)$의 차수는 $n+1$이므로

$n+1=4 \qquad \therefore n=3$

따라서 $f(x)$는 삼차함수이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라고 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

즉,

$f'(x)+xf(x)=(3ax^2+2bx+c)+x(ax^3+bx^2+cx+d)$

$=ax^4+bx^3+(3a+c)x^2+(2b+d)x+c$

이므로 ㉠과 동류항의 계수를 비교하면

$a=1$, $b=-3$, $3a+c=4$, $2b+d=-7$, $c=1$

$\therefore a=1$, $b=-3$, $c=1$, $d=-1$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+x-1$이므로

$f(3)=27-27+3-1=2$

정답_ 2

551

$f'(x)=\begin{cases}-4x+6 & (x<-1)\\ 3x^2+2x & (x>-1)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}-2x^2+6x+C_1 & (x<-1)\\ x^3+x^2+C_2 & (x\geq-1)\end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

이때 $f(0)=1$이므로 $C_2=1$

또, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-}(-2x^2+6x+C_1)=\lim_{x\to-1+}(x^3+x^2+1)=f(-1)$

$-2-6+C_1=-1+1+1 \qquad \therefore C_1=9$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-2x^2+6x+9 & (x<-1)\\ x^3+x^2+1 & (x\geq-1)\end{cases}$이므로

$f(-2)=-8-12+9=-11$

정답_ ②

552

$f'(x)=\begin{cases}x+1 & (x<2)\\ x^3-5 & (x>2)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+x+C_1 & (x<2)\\ \frac{1}{4}x^4-5x+C_2 & (x\geq2)\end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉,

$\lim_{x\to2-}\left(\frac{1}{2}x^2+x+C_1\right)=\lim_{x\to2+}\left(\frac{1}{4}x^4-5x+C_2\right)=f(2)$

$2+2+C_1=4-10+C_2 \qquad \therefore C_2=C_1+10$

$\therefore f(1)-f(3)=\left(\frac{1}{2}+1+C_1\right)-\left(\frac{81}{4}-15+C_2\right)$

$=\frac{3}{2}+C_1-\left(\frac{21}{4}+C_1+10\right)$

$=-\frac{55}{4}$

정답_ $-\frac{55}{4}$

553

$f'(x)=\begin{cases}4x^3-2x & (x<0)\\ 4x^3+2x & (x>0)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}x^4-x^2+C_1 & (x<0)\\ x^4+x^2+C_2 & (x\geq0)\end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

이때 $f(0)=-3$이므로 $C_2=-3$

또, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}(x^4-x^2+C_1)=\lim_{x\to 0+}(x^4+x^2-3)=f(0)$

$C_1=-3$이므로 $f(x)=\begin{cases} x^4-x^2-3 & (x<0) \\ x^4+x^2-3 & (x\ge 0) \end{cases}$에서

$f(-1)+f(2)=(1-1-3)+(16+4-3)=14$

정답_ ①

554

주어진 그래프에서 $f'(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<1) \\ 2x-5 & (x>1) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} -x^3+C_1 & (x<1) \\ x^2-5x+C_2 & (x\ge 1) \end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

이때 $f(2)=1$이므로

$4-10+C_2=1 \qquad \therefore C_2=7$

또, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}(-x^3+C_1)=\lim_{x\to 1+}(x^2-5x+7)=f(1)$

$-1+C_1=1-5+7 \qquad \therefore C_1=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -x^3+4 & (x<1) \\ x^2-5x+7 & (x\ge 1) \end{cases}$이므로

$f(-2)=8+4=12$

정답_ ②

555

$f(x)=\begin{cases} -2x & (x<0) \\ k(2x-x^2) & (x\ge 0) \end{cases}$에서

$F(x)=\begin{cases} -x^2+C_1 & (x<0) \\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2 & (x\ge 0) \end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

함수 $F(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-}(-x^2+C_1)=\lim_{x\to 0+}\left\{k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2\right\}=f(0)$이므로

$C_1=C_2$에서

$F(2)-F(-3)=k\left(4-\frac{8}{3}\right)+C_2-(-9+C_1)$

$=\frac{4}{3}k+9=21$

$\frac{4}{3}k=12 \qquad \therefore k=9$

정답_ 9

556

$\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)=2-1+3=4$

정답_ ④

557

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$

$f(x)=\int(x^2-x+6)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-x+6$

따라서 $f'(2)=4-2+6=8$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=2f'(2)$

$=2\times 8=16$

정답_ ⑤

558

$f(x)=\int(3x^2+kx-7)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+kx-7$

이때 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=0$이므로

$f'(-1)=3-k-7=0 \qquad \therefore k=-4$

즉, $f'(x)=3x^2-4x-7$

$\therefore f(x)=\int(3x^2-4x-7)dx$

$=x^3-2x^2-7x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-7x+2$이므로

$f(-1)=-1-2+7+2=6$

정답_ ④

559

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x-2h)-f(x+h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x-2h)-f(x)\}-\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}\times(-2)-\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=-2f'(x)-f'(x)=-3f'(x)$

즉, $-3f'(x)=3x^3-12x+9$이므로

$f'(x)=-x^3+4x-3$

$\therefore f(x)=\int(-x^3+4x-3)dx$

$=-\frac{1}{4}x^4+2x^2-3x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(2)=4$이므로

$-4+8-6+C=4 \qquad \therefore C=6$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^2-3x+6$이므로

$f(1)=-\frac{1}{4}+2-3+6=\frac{19}{4}$

정답_ ③

560

조건 (가)에서

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times 2$

$=2f'(x)$

즉, $2f'(x)=6x^2-8x$이므로

$f'(x)=3x^2-4x$

$\therefore\ f(x)=\int(3x^2-4x)dx$

$=x^3-2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

조건 ㈏에서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^3-2x^2+C=0$의 모든 근의 곱이 3이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-C=3 \qquad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-3$이므로

$f(1)=1-2-3=-4$

정답_ -4

561

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

즉, $f(0)=0$, $f'(0)=-3$이므로

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=-3$

따라서

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+xh}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+x$$
$$=f'(0)+x=x-3$$

이므로

$f(x)=\int(x-3)dx$

$=\frac{1}{2}x^2-3x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

즉, $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x=\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{9}{2}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 $-\frac{9}{2}$를 갖는다.

정답_ $-\frac{9}{2}$

562

$\Delta y=(ax+1)\Delta x-(\Delta x)^2$에서 $\Delta x\neq0$일 때 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=ax+1-\Delta x$이므로

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(ax+1-\Delta x)=ax+1$

$\therefore\ f(x)=\int(ax+1)dx$

$=\frac{a}{2}x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=1$, $f(1)=0$이므로

$C=1$, $\frac{a}{2}+1+C=0 \qquad \therefore a=-4$

따라서 $f(x)=-2x^2+x+1$이므로

$f(-1)=-2-1+1=-2$

정답_ ②

563

조건 ㈎에서 $f(x+y)=f(x)-f(y)+x^2y+y$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)-f(0)$

$\therefore f(0)=0$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)-f(h)+x^2h+h-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-f(h)+x^2h+h}{h}$$
$$=-\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+x^2+1$$
$$=-(-4)+x^2+1\ (\because \text{조건 ㈏})$$
$$=x^2+5$$

$\therefore\ f(x)=\int(x^2+5)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+5x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+5x$이므로

$f(3)=9+15=24$

정답_ ⑤

564

$f(k+h)=f(k)+3mk^2h+8kh-4h^2$에서

$f(k+h)-f(k)=3mk^2h+8kh-4h^2$

위의 식의 양변에 $k=x$를 대입하면

$f(x+h)-f(x)=3mx^2h+8xh-4h^2$

즉,

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{3mx^2h+8xh-4h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(3mx^2+8x-4h)$$
$$=3mx^2+8x$$

이므로

$f(x)=\int(3mx^2+8x)dx$

$=mx^3+4x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=-1$, $f(2)=-3$이므로

$f(1)=m+4+C=-1 \qquad \therefore m+C=-5$ …… ㉠

$f(2)=8m+16+C=-3 \qquad \therefore 8m+C=-19$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=-2$, $C=-3$

따라서 $f(x)=-2x^3+4x^2-3$이므로

$m+f(-1)=-2+(2+4-3)=1$

정답_ 1

다른 풀이

$f(k+h)=f(k)+3mk^2h+8kh-4h^2$의 양변에 $k=1$, $h=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)+3m+8-4=f(1)+3m+4$

이때 $f(1)=-1$, $f(2)=-3$이므로

$-3=-1+3m+4 \qquad \therefore m=-2$

즉, $f(k+h)=f(k)-6k^2h+8kh-4h^2$이므로 양변에 $k=x$를 대

입하면

$f(x+h)-f(x)=-6x^2h+8xh-4h^2$

따라서

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-6x^2h+8xh-4h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(-6x^2+8x-4h)$$
$$=-6x^2+8x$$

이므로

$$f(x)=\int(-6x^2+8x)dx$$
$$=-2x^3+4x^2+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

이때 $f(1)=-1$이므로

$f(1)=-2+4+C=-1\qquad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=-2x^3+4x^2-3$이므로

$m+f(-1)=-2+(2+4-3)=1$

565

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극댓값, $x=4$일 때 극솟값을 갖는다.

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int 3x(x-4)dx$$
$$=\int(3x^2-12x)dx$$
$$=x^3-6x^2+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

이때 극댓값이 5이므로

$f(0)=C=5\qquad \therefore C=5$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+5$이므로 극솟값은

$f(4)=64-96+5=-27$

정답_ ②

566

$f'(-1)=f'(1)=0$에서

$f'(x)=a(x+1)(x-1)$ (a는 양의 상수)

이라고 하면

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값, $x=1$일 때 극솟값을 갖는다.

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int a(x+1)(x-1)dx$$
$$=\int(ax^2-a)dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3-ax+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

이때 극댓값이 4, 극솟값이 0이므로

$f(-1)=-\frac{a}{3}+a+C=4\qquad \therefore \frac{2}{3}a+C=4$ ...... ㉠

$f(1)=\frac{a}{3}-a+C=0\qquad \therefore \frac{2}{3}a-C=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ C=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x+2$이므로

$f(3)=27-9+2=20$

정답_ ④

567

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극솟값, $x=3$일 때 극댓값을 갖는다.

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(x-1)(3-x)dx$$
$$=\int(-x^2+4x-3)dx$$
$$=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

이때 극댓값이 극솟값의 3배이므로 $f(3)=3f(1)$에서

$-9+18-9+C=3\left(-\frac{1}{3}+2-3+C\right)$

$C=-4+3C\qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+2$이므로

$f(-1)=\frac{1}{3}+2+3+2=\frac{22}{3}$

정답_ ②

568

삼차함수 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다.

이때 $f'(-2)=f'(5)=0$이므로 $f'(x)=3(x+2)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 극댓값, $x=5$일 때 극솟값을 갖는다.

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int 3(x+2)(x-5)dx$$
$$=\int (3x^2-9x-30)dx$$
$$=x^3-\frac{9}{2}x^2-30x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 극솟값이 $-\frac{245}{2}$이므로 $f(5)=-\frac{245}{2}$에서

$125-\frac{225}{2}-150+C=-\frac{245}{2}$ $\qquad \therefore C=15$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2-30x+15$이므로 극댓값은

$f(-2)=-8-18+60+15=49$

정답_ 49

569

삼차함수 $f(x)$의 최고차항이 $2x^3$이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $6x^2$이고, 조건 ㈎에서

$f'(x)=6(x+k)(x-k)$ (k는 상수, $k>0$)

라고 하면

$f'(x)=0$에서 $x=-k$ 또는 $x=k$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-k$일 때 극댓값, $x=k$일 때 극솟값을 갖는다.

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int 6(x+k)(x-k)dx$$
$$=\int (6x^2-6k^2)dx$$
$$=2x^3-6k^2x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

조건 ㈏에서 극댓값이 12, 극솟값이 4이므로

$f(-k)=-2k^3+6k^3+C=4k^3+C=12$ ...... ㉠

$f(k)=2k^3-6k^3+C=-4k^3+C=4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$k=1$, $C=8$

따라서 $f(x)=2x^3-6x+8$이므로

$f(-3)=-54+18+8=-28$

정답_ ①

참고 $f(x)$가 극값을 가지므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

570

조건 ㈎에서 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+1$이므로

$$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int(2x+1)dx$$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

이때 $f(0)=1$, $g(0)=-2$이므로

$f(0)+g(0)=1+(-2)=C_1$ $\qquad \therefore C_1=-1$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+x-1$ ...... ㉠

.... ❶

조건 ㈏에서 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-4x+1$이므로

$$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(3x^2-4x+1)dx$$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-2x^2+x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

이때 $f(0)=1$, $g(0)=-2$이므로

$f(0)g(0)=1\times(-2)=C_2$ $\qquad \therefore C_2=-2$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-2x^2+x-2=(x-2)(x^2+1)$ ...... ㉡

.... ❷

㉠, ㉡에서 $\begin{cases} f(x)=x-2 \\ g(x)=x^2+1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=x^2+1 \\ g(x)=x-2 \end{cases}$

그런데 $f(0)=1$, $g(0)=-2$이므로

$f(x)=x^2+1$, $g(x)=x-2$

$\therefore f(1)=1+1=2$ .... ❸

정답_ 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)+g(x)$의 식 구하기	30 %
❷ $f(x)g(x)$의 식 구하기	30 %
❸ $f(1)$의 값 구하기	40 %

571

$f'(x)=6x^2+6x-8$이므로

$$f(x)=\int(6x^2+6x-8)dx$$
$$=2x^3+3x^2-8x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$ .... ❶

$2x-1$이 다항식 $f(x)$의 인수이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서

$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-4+C=0$ $\qquad \therefore C=3$ .... ❷

$\therefore f(x)=2x^3+3x^2-8x+3$

$\qquad =(2x-1)(x-1)(x+3)$

따라서 $f(k)=0$을 만족시키는 정수 k의 값은

$k=-3$ 또는 $k=1$

이므로 그 곱은

$-3\times1=-3$ .... ❸

정답_ -3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$ 적분하기	30 %
❷ 적분상수 C의 값 구하기	30 %
❸ 정수 k의 값의 곱 구하기	40 %

572

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $-4x^3+10x-2$에 정비례하므로

$f'(x)=a(-4x^3+10x-2)$ (a는 상수, $a\neq0$)

라고 하자. .... ❶

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int a(-4x^3+10x-2)dx$

$=-ax^4+5ax^2-2ax+C$ (단, C는 적분상수)

이때 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-1, 8)$, $(1, 4)$를 지나므로

$f(-1)=-a+5a+2a+C=8 \quad \therefore 6a+C=8$ …… ㉠

$f(1)=-a+5a-2a+C=4 \quad \therefore 2a+C=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $C=2$

따라서 $f(x)=-x^4+5x^2-2x+2$이므로 ❷

$f(2)=-16+20-4+2=2$ ❸

정답_ 2

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$의 식 세우기	30 %
❷ $f(x)$의 식 구하기	50 %
❸ $f(2)$의 값 구하기	20 %

573

$f'(x)=\begin{cases} k & (x<-1) \\ 4x-1 & (x>-1) \end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases} kx+C_1 & (x<-1) \\ 2x^2-x+C_2 & (x\geq -1) \end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수) …… ❶

이때 $f(-2)=1$이므로

$-2k+C_1=1 \quad \therefore C_1=2k+1$

또, $f(0)=2$이므로 $C_2=2$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1-}(kx+2k+1)=\lim_{x\to -1+}(2x^2-x+2)=f(-1)$

$-k+2k+1=2+1+2 \quad \therefore k=4$

$\therefore C_1=8+1=9$ ❷

따라서 $f(x)=\begin{cases} 4x+9 & (x<-1) \\ 2x^2-x+2 & (x\geq -1) \end{cases}$이므로

$f(-3)=-12+9=-3$ ❸

정답_ -3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$ 적분하기	20 %
❷ 적분상수 C의 값 구하기	40 %
❸ $f(-3)$의 값 구하기	40 %

574

$f(x)=\int(3x^3-x+2)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^3-x+2$ ❶

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to 1}(x+1)$

$=f'(1)\times(1+1)$

$=(3-1+2)\times 2=8$ ❷

정답_ 8

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$의 식 구하기	40 %
❷ 주어진 식의 값 구하기	60 %

575

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-12$이므로

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 극댓값, $x=2$일 때 극솟값을 갖는다. ❶

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(3x^2-12)dx$

$=x^3-12x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 극솟값이 3이므로

$f(2)=8-24+C=3 \quad \therefore C=19$ ❷

따라서 $f(x)=x^3-12x+19$이므로 극댓값은

$f(-2)=-8+24+19=35$ ❸

정답_ 35

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 극댓값, 극솟값을 갖는 x의 값 구하기	30 %
❷ 적분상수 C의 값 구하기	30 %
❸ $f(x)$의 극댓값 구하기	40 %

576

ㄱ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=1$일 때

$\int f(x)g(x)dx=\int 0dx=C$ (단, C는 적분상수)

$\int f(x)dx\times\int g(x)dx$

$=\int 0dx\times\int 1dx$

$=C_1(x+C_2)$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

$\therefore \int f(x)g(x)dx\neq\int f(x)dx\times\int g(x)dx$ (거짓)

ㄴ. $\int f(x)dx$는 x에 대한 식이고, $\int f(t)dt$는 t에 대한 식이므로

$\int f(x)dx\neq\int f(t)dt$ (거짓)

ㄷ. $\int f(x)dx=\int g(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=\frac{d}{dx}\left\{\int g(x)dx\right\}$

$\therefore f(x)=g(x)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

정답_ ②

577

$\frac{d}{dx}\{(2x+5)f(x)\}=2f(x)+(2x+5)f'(x)$이므로

$g(x)=\int 2f(x)dx+\int (2x+5)f'(x)dx$

$=\int \{2f(x)+(2x+5)f'(x)\}dx$

$=\int \left[\frac{d}{dx}\{(2x+5)f(x)\}\right]dx$

$=(2x+5)f(x)+C$ (C는 적분상수)

$=(2x+5)\times\frac{2x^3-5x+3}{2x+5}+C$

$=2x^3-5x+3+C$

이때 $g(0)=-4$이므로

$3+C=-4$ $\quad\therefore C=-7$

따라서 $g(x)=2x^3-5x-4$이므로

$g(-2)=-16+10-4=-10$

정답_ ②

578

$f(x)=\int xg(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=xg(x)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$에서 $f'(x)-g'(x)=4x^3+2x$이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$xg(x)-g'(x)=4x^3+2x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$g(x)$의 최고차항을 ax^n (a는 0이 아닌 상수, n은 자연수)이라고 하면 $xg(x)$의 최고차항은 ax^{n+1}이므로 $ax^{n+1}=4x^3$에서

$a=4$, $n=2$

즉, $g(x)$는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이므로

$g(x)=4x^2+bx+c$ (b, c는 상수)

라고 하자.

$g'(x)=8x+b$이므로 ㉡에 대입하면

$x(4x^2+bx+c)-(8x+b)=4x^3+2x$

$4x^3+bx^2+(c-8)x-b=4x^3+2x$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$b=0$, $c-8=2$

$\therefore b=0$, $c=10$

따라서 $g(x)=4x^2+10$이므로

$g(1)=4+10=14$

정답_ ⑤

579

$f'(x)=2x+2$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (2x+2)dx$

$=x^2+2x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

$\therefore g(x)=\int xf(x)dx$

$=\int (x^3+2x^2+C_1x)dx$

$=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

이때 $g(x)$가 $f'(x)$로 나누어떨어지므로 $g(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

즉, $g(-1)=0$에서

$\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}C_1+C_2=0$ $\quad\therefore C_2=-\frac{1}{2}C_1+\frac{5}{12}$

따라서

$g(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2-\frac{1}{2}C_1+\frac{5}{12}$

이므로

$g(1)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{2}C_1+\frac{5}{12}=\frac{4}{3}$

정답_ ③

580

조건 (가)에서

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (-6x+3)dx$

$=-3x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수)

조건 (나)에서 $-3x^2+3x+C\le 0$, 즉 $3x^2-3x-C\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $3x^2-3x-C=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-3)^2-4\times 3\times(-C)\le 0$

$9+12C\le 0$ $\quad\therefore C\le -\frac{3}{4}$

이때 $f(2)=-12+6+C=-6+C$이므로

$f(2)\le -6+\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{27}{4}$

따라서 $f(2)$의 최댓값은 $-\frac{27}{4}$이다.

정답_ ④

581

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$\therefore y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$

이 직선의 방정식이 $y=(8t^3+3t^2-2)x+g(t)$이므로

$f'(t)=8t^3+3t^2-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$g(t)=-tf'(t)+f(t)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서

$f(t)=\int f'(t)dt$

$=\int (8t^3+3t^2-2)dt$

$=2t^4+t^3-2t+C$ (단, C는 적분상수)

즉, ㉡에서

$g(t)=-t(8t^3+3t^2-2)+2t^4+t^3-2t+C=-6t^4-2t^3+C$

$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^4}=\lim_{t\to\infty}\frac{-6t^4-2t^3+C}{t^4}=-6$

정답_ -6

582

$4\int f(x)dx=(x-1)f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4f(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$

$\therefore 3f(x)=(x-1)f'(x)$ …… ㉠

$f(x)$의 최고차항을 ax^n (a는 0이 아닌 상수, n은 자연수)이라고 하면 $3f(x)$의 최고차항은 $3ax^n$, $(x-1)f'(x)$의 최고차항은 anx^n이므로

$3a=an \qquad \therefore n=3 \ (\because a\neq0)$

따라서 $f(x)$는 삼차함수이고, $f(0)=1$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$ (b, c는 상수)

이라고 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$3(ax^3+bx^2+cx+1)=(x-1)(3ax^2+2bx+c)$

$3ax^3+3bx^2+3cx+3=3ax^3+(2b-3a)x^2+(c-2b)x-c$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$3b=2b-3a$, $3c=c-2b$, $3=-c$

$\therefore a=-1$, $b=3$, $c=-3$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2-3x+1$이므로

$f(2)=-8+12-6+1=-1$

정답_ -1

583

$f(x)=3x^2-12x+1$이므로 $f'(x)=6x-12$이고

$$F(x)=\int f(x)dx$$
$$=\int(3x^2-12x+1)dx$$
$$=x^3-6x^2+x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $F(x)$가 $f'(x)$로 나누어떨어지므로 $F(x)$는 $x-2$를 인수로 가진다.

즉, $F(2)=8-24+2+C=0$에서 $C=14$

$\therefore F(x)=x^3-6x^2+x+14$

한편, 방정식 $F(x)=0$의 세 실근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=6$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=-14$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=6^2-2\times1=34$$

$$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$
$$=6\times(34-1)+3\times(-14)=156$$

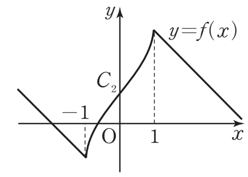
정답_ 156

584

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & (x<-1)\\ x^2 & (-1<x<1)\\ -1 & (x>1)\end{cases}$$ 에서

$$f(x)=\begin{cases}-x+C_1 & (x<-1)\\ \frac{1}{3}x^3+C_2 & (-1\le x\le1)\\ -x+C_3 & (x>1)\end{cases}$$ (단, C_1, C_2, C_3은 적분상수)

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $y=f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. y축에 대하여 대칭이 아니므로 $f(x)=f(-x)$라고 할 수 없다. (거짓)

ㄷ. $f(1)>f(0)$이므로 $f(0)=0$이면 $f(1)>0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ④

585

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=2k$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $f(2)=0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=2k$$

이때 $f(x)=\int(4x+k)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x+k$

즉, $f'(2)=8+k=2k$이므로 $k=8$

따라서

$$f(x)=\int(4x+8)dx$$
$$=2x^2+8x+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

이고, $f(2)=0$이므로

$8+16+C=0 \qquad \therefore C=-24$

$\therefore f(x)=2x^2+8x-24$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$=f(1)\times\frac{1}{3}$$
$$=-14\times\frac{1}{3}=-\frac{14}{3}$$

정답_ $-\frac{14}{3}$

586

$f(x+y)=f(x)+f(y)+6xy-2y$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+6xh-2h-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+6xh-2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+6x-2$$
$$=f'(0)+6x-2$$

이때 $f'(0)=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f'(x)=6x+k-2$

$g(x)=\int xf'(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=xf'(x)=6x^2+(k-2)x$

함수 $g(x)$의 극값이 존재하지 않으려면 $g'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $g'(x)=0$, 즉 $6x^2+(k-2)x=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(k-2)^2\le 0 \qquad \therefore k=2$

즉, $f'(x)=6x$이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=\int f'(x)dx \\ &=\int 6x\,dx \\ &=3x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)} \end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=3x^2$이므로

$f(3)=27$

정답_ 27

참고 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖지 않아야 한다.

⇨ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D\le 0$

587

함수 $f'(x)$는 삼차함수이고

$f'(-\sqrt{2})=f'(0)=f'(\sqrt{2})=0$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x)&=kx(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \\ &=kx^3-2kx \ (k>0) \end{aligned}$$

로 놓으면

$$\begin{aligned} f(x)&=\int f'(x)dx \\ &=\int (kx^3-2kx)dx \\ &=\frac{k}{4}x^4-kx^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)} \end{aligned}$$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

즉, $f(x)=\frac{k}{4}x^4-kx^2+1$이고 $f(\sqrt{2})=-3$이므로

$k-2k+1=-3 \qquad \therefore k=4$

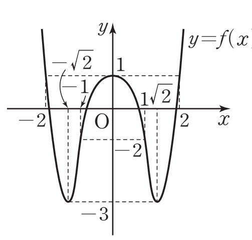
$\therefore f(x)=x^4-4x^2+1$

한편, $f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



$f(-2)=f(0)=f(2)=1>0$,

$f(-1)=f(1)=-2<0$

이므로 $f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 정수 m은 -2, -1, 0, 1이다.

따라서 정수 m의 값의 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$

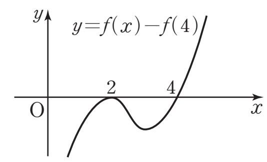
정답_ ①

588

조건 ㈐에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=f(4)$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

이때 조건 ㈏에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 함수 $y=f(x)-f(4)$의 그래프는 다음 두 가지 경우가 있다.

(i) $f(2)=f(4)$인 경우



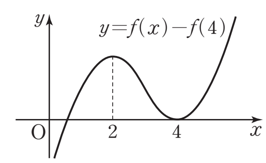
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)-f(4)=(x-2)^2(x-4)$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x)&=2(x-2)(x-4)+(x-2)^2 \\ &=(x-2)(3x-10) \end{aligned}$$

그런데 $f'\left(\frac{11}{3}\right)>0$이므로 조건 ㈎를 만족시키지 않는다.

(ii) $x=4$에서 극소인 경우



$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

이때 $f'(2)=0$, $f'(4)=0$이므로

$f'(x)=3(x-2)(x-4)$

이것은 $f'\left(\frac{11}{3}\right)<0$이므로 조건 ㈎를 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \therefore f(x)&=\int f'(x)dx \\ &=\int 3(x-2)(x-4)dx \\ &=\int (3x^2-18x+24)dx \\ &=x^3-9x^2+24x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)} \end{aligned}$$

이때 조건 ㈏에서 $f(2)=35$이므로

$8-36+48+C=35 \qquad \therefore C=15$

$\therefore f(x)=x^3-9x^2+24x+15$

(i), (ii)에서 $f(0)=15$

정답_ ④

08 정적분

589

$$\int_0^3 (x+1)^2 dx = \int_0^3 (x^2+2x+1)dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^3$$
$$=9+9+3=21$$

정답_ ④

590

$$\int_0^1 (ax^2+1)dx = \left[\frac{a}{3}x^3+x\right]_0^1 = \frac{a}{3}+1$$

즉, $\frac{a}{3}+1=6$이므로

$\frac{a}{3}=5$ $\quad\therefore a=15$

정답_ ⑤

591

$$\int_0^1 \left(\frac{x^4}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^4-1}{x^2+1}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}dx$$
$$= \int_0^1 (x^2-1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$$

정답_ ②

592

$$\int_{-3}^1 (4t-3)(2-t^2)dt + \int_4^4 (t^2+2)(4t+3)dt$$
$$= \int_{-3}^1 (-4t^3+3t^2+8t-6)dt+0$$
$$= \left[-t^4+t^3+4t^2-6t\right]_{-3}^1$$
$$=-2-(-54)=52$$

정답_ 52

593

$$\int_0^a (3x^2-4)dx = \left[x^3-4x\right]_0^a = a^3-4a$$

즉, $a^3-4a=0$이므로

$a(a^2-4)=0$, $a(a+2)(a-2)=0$

따라서 양수 a의 값은 2이다.

정답_ ①

594

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax+b)dx$$
$$= \left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^1$$
$$= \frac{a}{2}+b=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 (ax^2+bx)dx$$
$$= \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= \frac{a}{3}+\frac{b}{2}=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=18$, $b=-8$

$\therefore a+b=18+(-8)=10$

정답_ ③

595

$$\int_2^4 \{f'(x)-4x\}dx = \left[f(x)-2x^2\right]_2^4$$
$$=\{f(4)-32\}-\{f(2)-8\}$$
$$=(25-32)-\{f(2)-8\}$$
$$=-f(2)+1$$

따라서 $-f(2)+1=6$이므로

$f(2)=-5$

정답_ ①

596

$f'(x)=g'(x)$이므로

$$\int f'(x)dx = \int g'(x)dx$$

$\therefore f(x)=g(x)+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)+3=g(0)$이므로

$g(0)+C+3=g(0)$ $\quad\therefore C=-3$

즉, $f(x)=g(x)-3$이므로

$f(-1)=g(-1)-3=5-3=2$

$$\therefore \int_{-1}^2 f'(x)dx = \left[f(x)\right]_{-1}^2$$
$$=f(2)-f(-1)$$
$$=-2-2=-4$$

정답_ -4

다른 풀이

$f(2)=g(2)-3=-2$이므로

$g(2)=1$

$$\therefore \int_{-1}^2 f'(x)dx = \int_{-1}^2 g'(x)dx$$
$$= \left[g(x)\right]_{-1}^2$$
$$=g(2)-g(-1)$$
$$=1-5=-4$$

597

$$\int_1^2 (3x^2+2ax+2)dx = \left[x^3+ax^2+2x\right]_1^2$$
$$=(8+4a+4)-(1+a+2)$$
$$=3a+9$$

$3a+9>6$에서 $3a>-3$

$\therefore a>-1$

따라서 정수 a의 최솟값은 0이다.

정답_ ③

598

$f(-1)=f(1)=f(2)=0$에서

$f(x)=a(x+1)(x-1)(x-2)$ (a는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 $f(0)=2$이므로

$2a=2 \qquad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^4 f'(x)dx&=\Big[f(x)\Big]_0^4\\&=f(4)-f(0)\\&=30-2=28\end{aligned}$$

정답_ 28

599

$$\begin{aligned}\int_0^1(-4a^2x^3+8ax+2)dx&=\Big[-a^2x^4+4ax^2+2x\Big]_0^1\\&=-a^2+4a+2\\&=-(a-2)^2+6\end{aligned}$$

따라서 주어진 정적분은 $a=2$일 때 최댓값 6을 가지므로

$m=2,\ n=6$

$\therefore m+n=2+6=8$

정답_ 8

600

조건 (가)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}\\&=2f'(1)=-12\end{aligned}$$

$\therefore f'(1)=-6$

이때 $f'(x)=3ax^2+2bx$이므로

$f'(1)=3a+2b=-6$ ...... ㉠

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 f(x)dx&=\int_{-1}^0(ax^3+bx^2)dx\\&=\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3\right]_{-1}^0\\&=-\frac{a}{4}+\frac{b}{3}=2\end{aligned}$$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4,\ b=3$

따라서 $f(x)=-4x^3+3x^2$이므로

$f'(x)=-12x^2+6x=-12x\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 극댓값 $\frac{1}{4}$을 갖는다.

정답_ ④

601

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^2(x^2-2x)dx-2\int_{-1}^2(3x-x^2)dx\\&=\int_{-1}^2(x^2-2x)dx+\int_{-1}^2(2x^2-6x)dx\\&=\int_{-1}^2(3x^2-8x)dx\\&=\Big[x^3-4x^2\Big]_{-1}^2\\&=-8-(-5)=-3\end{aligned}$$

정답_ ①

602

$$\begin{aligned}&\int_0^2(3x^2-2x+3)dx-\int_2^0(2x+1)dx\\&=\int_0^2(3x^2-2x+3)dx+\int_0^2(2x+1)dx\\&=\int_0^2(3x^2+4)dx\\&=\Big[x^3+4x\Big]_0^2\\&=16\end{aligned}$$

정답_ 16

603

$$\begin{aligned}&\int_0^6\frac{x^3}{x+2}dx+\int_0^6\frac{8}{x+2}dx\\&=\int_0^6\frac{x^3+8}{x+2}dx\\&=\int_0^6\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx\\&=\int_0^6(x^2-2x+4)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x\right]_0^6\\&=60\end{aligned}$$

정답_ ②

604

$\int_0^a\{f(x)+g(x)\}dx+\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx=2\int_0^a f(x)dx$

$7+3=2\int_0^a f(x)dx$

$\therefore \int_0^a f(x)dx=5$

또,

$\int_0^a\{f(x)+g(x)\}dx-\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx=2\int_0^a g(x)dx$

$7-3=2\int_0^a g(x)dx$

$\therefore \int_0^a g(x)dx=2$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^a\{3f(x)+g(x)\}dx&=3\int_0^a f(x)dx+\int_0^a g(x)dx\\&=3\times5+2=17\end{aligned}$$

정답_ 17

605

$$\int_1^3 (x-k)^2dx+\int_3^1 (x+k)(x-1)dx$$
$$=\int_1^3 (x-k)^2dx-\int_1^3 (x+k)(x-1)dx$$
$$=\int_1^3 (x^2-2kx+k^2)dx-\int_1^3 \{x^2+(k-1)x-k\}dx$$
$$=\int_1^3 \{(-3k+1)x+k^2+k\}dx$$
$$=\left[\frac{-3k+1}{2}x^2+(k^2+k)x\right]_1^3$$
$$=\frac{6k^2-21k+9}{2}-\frac{2k^2-k+1}{2}$$
$$=2k^2-10k+4$$

즉, $2k^2-10k+4=-4$이므로

$k^2-5k+4=0$, $(k-1)(k-4)=0$

$\therefore$ $k=1$ 또는 $k=4$

따라서 상수 k의 값의 합은

$1+4=5$

정답_ ③

606

$$\int_{-2}^1 \{f(x)-3\}^2dx$$ — $\int_2^1 f(x)dx=1$, $\int_1^{-2} \{f(x)\}^2dx=5$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

$$=\int_{-2}^1 [\{f(x)\}^2-6f(x)+9]dx$$
$$=\int_{-2}^1 \{f(x)\}^2dx-6\int_{-2}^1 f(x)dx+\int_{-2}^1 9dx$$
$$=-\int_1^{-2} \{f(x)\}^2dx-6\int_{-2}^1 f(x)dx+\Big[9x\Big]_{-2}^1$$

$=-5-6\times1+\{9-(-18)\}$ ($\because$ 조건 ㈎, ㈏)

$=16$

정답_ ④

607

$$\int_0^5 (6x^2-2x)dx+\int_5^1 (6t^2-2t)dt$$
$$=\int_0^5 (6x^2-2x)dx+\int_5^1 (6x^2-2x)dx$$
$$=\int_0^1 (6x^2-2x)dx=\Big[2x^3-x^2\Big]_0^1$$
$$=1$$

정답_ ④

608

$$\int_2^4 (x+1)(x^2-x+1)dx+\int_4^3 (x^3+1)dx$$
$$=\int_2^4 (x^3+1)dx+\int_4^3 (x^3+1)dx$$
$$=\int_2^3 (x^3+1)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_2^3$$
$$=\frac{93}{4}-6=\frac{69}{4}$$

정답_ ③

609

$$\int_1^4 f(x)dx-\int_2^4 f(x)dx+\int_{-2}^1 f(x)dx$$
$$=\int_1^4 f(x)dx+\int_4^2 f(x)dx+\int_{-2}^1 f(x)dx$$
$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_{-2}^1 f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^2 f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^2 (5x^4+2x)dx$$
$$=\Big[x^5+x^2\Big]_{-2}^2$$
$$=36-(-28)=64$$

정답_ ⑤

610

$$\int_0^a (2x-3)dx+\int_a^{2a} (2x-3)dx=\int_0^{2a} (2x-3)dx$$
$$=\Big[x^2-3x\Big]_0^{2a}$$
$$=4a^2-6a$$

즉, $4a^2-6a=4$이므로

$2a^2-3a-2=0$, $(2a+1)(a-2)=0$

$\therefore$ $a=2$ ($\because$ $a>0$)

정답_ ④

611

$$\int_{-2}^0 f(x)dx=\int_{-2}^1 f(x)dx+\int_1^{10} f(x)dx+\int_{10}^0 f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^1 f(x)dx+\int_1^{10} f(x)dx-\int_0^{10} f(x)dx$$
$$=8+12-16=4$$
$$\therefore \int_{-2}^0 \{f(x)-4x^3\}dx=\int_{-2}^0 f(x)dx-\int_{-2}^0 4x^3dx$$
$$=4-\Big[x^4\Big]_{-2}^0$$
$$=4-(-16)=20$$

정답_ 20

612

$\int_{-1}^3 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx$이므로

$$\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx$$
$$\therefore \int_{-1}^0 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx=0$$

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라고 하면

$f(0)=2$에서 $c=2$이므로

$f(x)=ax^2+bx+2$

$\int_0^3 f(x)dx=0$에서

$$\int_0^3 (ax^2+bx+2)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+2x\right]_0^3$$
$$=9a+\frac{9}{2}b+6=0$$

$\therefore\ 6a+3b=-4$ …… ㉠

$\int_{-1}^{0} f(x)dx=0$에서

$$\int_{-1}^{0}(ax^2+bx+2)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+2=0$$

$\therefore\ 2a-3b=-12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=\frac{8}{3}$

따라서 $f(x)=-2x^2+\frac{8}{3}x+2$이므로

$f(-3)=-18-8+2=-24$

정답_ -24

613

$$\int_{1}^{5} f(x)dx=\int_{1}^{2}(-x+3)dx+\int_{2}^{5}(3x-5)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{3}{2}x^2-5x\right]_{2}^{5}$$
$$=\left(4-\frac{5}{2}\right)+\left\{\frac{25}{2}-(-4)\right\}=18$$

정답_ ④

614

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=1$에서도 미분가능하다.

$g(x)=3x^2+2ax,\ h(x)=2x+b$로 놓자.

(i) $x=1$에서 연속이므로

$g(1)=h(1)$

즉, $3+2a=2+b$에서

$b=2a+1$ …… ㉠

(ii) $x=1$에서 미분계수가 존재하므로

$g'(1)=h'(1)$

이때

$g'(x)=6x+2a,\ h'(x)=2$

이므로

$6+2a=2 \qquad \therefore\ a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases} 3x^2-4x & (x\le 1) \\ 2x-3 & (x\ge 1) \end{cases}$

$$\therefore\ \int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(3x^2-4x)dx+\int_{1}^{2}(2x-3)dx$$
$$=\left[x^3-2x^2\right]_{-1}^{1}+\left[x^2-3x\right]_{1}^{2}$$
$$=\{-1-(-3)\}+\{-2-(-2)\}=2$$

정답_ ②

615

$$\int_{-2}^{k} f(x)dx=\int_{-2}^{0}(-4x+2)dx+\int_{0}^{k}(9x^2+6x-2)dx$$
$$=\left[-2x^2+2x\right]_{-2}^{0}+\left[3x^3+3x^2-2x\right]_{0}^{k}$$
$$=12+3k^3+3k^2-2k$$

즉, $3k^3+3k^2-2k+12=16$이므로

$3k^3+3k^2-2k-4=0,\ (k-1)(3k^2+6k+4)=0$

이때 $3k^2+6k+4>0$이므로 구하는 실수 k의 값은 1이다.

정답_ 1

참고 이차함수의 그래프와 이차방정식의 해

이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 만나지 않는다.

따라서 이차방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.

616

주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & (x\le 1) \\ -x+2 & (x\ge 1) \end{cases}$$

이므로

$$\int_{0}^{2} xf(x)dx=\int_{0}^{1} xf(x)dx+\int_{1}^{2} xf(x)dx$$
$$=\int_{0}^{1} x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx+\int_{1}^{2} x(-x+2)dx$$
$$=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{5}{12}+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{13}{12}$$

정답_ ③

617

$x+|x-3|=\begin{cases} 3 & (x\le 3) \\ 2x-3 & (x\ge 3) \end{cases}$이므로

$$\int_{1}^{4}(x+|x-3|)dx=\int_{1}^{3} 3dx+\int_{3}^{4}(2x-3)dx$$
$$=\left[3x\right]_{1}^{3}+\left[x^2-3x\right]_{3}^{4}$$
$$=(9-3)+4=10$$

정답_ 10

618

$|x|+x+1=\begin{cases} 1 & (x\le 0) \\ 2x+1 & (x\ge 0) \end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^{1}(|x|+x+1)^2dx=\int_{-2}^{0} 1^2dx+\int_{0}^{1}(2x+1)^2dx$$
$$=\int_{-2}^{0} 1dx+\int_{0}^{1}(4x^2+4x+1)dx$$
$$=\left[x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\right]_{0}^{1}$$
$$=2+\frac{13}{3}=\frac{19}{3}$$

정답_ ⑤

619

$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$에서

$$|x^2-2x-3|=\begin{cases} x^2-2x-3 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 3) \\ -x^2+2x+3 & (-1\le x\le 3) \end{cases}$$

이므로

$\int_{-2}^{2} \frac{|x^2-2x-3|}{x-3}dx$

$=\int_{-2}^{-1} \frac{x^2-2x-3}{x-3}dx+\int_{-1}^{2} \frac{-x^2+2x+3}{x-3}dx$

$=\int_{-2}^{-1} \frac{(x+1)(x-3)}{x-3}dx+\int_{-1}^{2} \frac{-(x+1)(x-3)}{x-3}dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x+1)dx+\int_{-1}^{2}(-x-1)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-1}^{2}$

$=-\frac{1}{2}+\left(-4-\frac{1}{2}\right)=-5$

정답_ ①

620

$(x+1)|x-1|=\begin{cases} -(x+1)(x-1) & (x\le 1) \\ (x+1)(x-1) & (x\ge 1)\end{cases}$이므로

$\int_0^k (x+1)|x-1|dx$

$=\int_0^1 \{-(x+1)(x-1)\}dx+\int_1^k (x+1)(x-1)dx$

$=\int_0^1(-x^2+1)dx+\int_1^k(x^2-1)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^k$

$=\frac{2}{3}+\left\{\frac{k^3}{3}-k-\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$

$=\frac{k^3}{3}-k+\frac{4}{3}$

즉, $\frac{k^3}{3}-k+\frac{4}{3}=2$이므로

$k^3-3k-2=0$, $(k+1)^2(k-2)=0$

이때 $k>1$이므로 $k=2$

정답_ 2

621

$3x|x-2a|=\begin{cases} -3x(x-2a) & (x\le 2a) \\ 3x(x-2a) & (x\ge 2a)\end{cases}$

이고 $0<a<1$에서 $0<2a<2$이므로

$\int_0^2 3x|x-2a|dx$

$=\int_0^{2a}\{-3x(x-2a)\}dx+\int_{2a}^2 3x(x-2a)dx$

$=\int_0^{2a}(-3x^2+6ax)dx+\int_{2a}^2(3x^2-6ax)dx$

$=\left[-x^3+3ax^2\right]_0^{2a}+\left[x^3-3ax^2\right]_{2a}^2$

$=4a^3+\{8-12a-(-4a^3)\}$

$=8a^3-12a+8$

$f(a)=8a^3-12a+8$이라고 하면

$f'(a)=24a^2-12=24\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f'(a)=0$에서 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because 0<a<1$)

$0<a<1$에서 함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(a)$는 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 최솟값을 가지므로 주어진 정적분의 값이 최소가 되도록 하는 상수 a의 값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

정답_ ⑤

622

$\int_{-1}^{0}(2x^3-6x^2-3x+3)dx+\int_0^1(2t^3-6t^2-3t+3)dt$

$=\int_{-1}^{0}(2x^3-6x^2-3x+3)dx+\int_0^1(2x^3-6x^2-3x+3)dx$

$=\int_{-1}^{1}(2x^3-6x^2-3x+3)dx$

$=\int_{-1}^{1}(2x^3-3x)dx+\int_{-1}^{1}(-6x^2+3)dx$

$=0+2\int_0^1(-6x^2+3)dx$

$=2\left[-2x^3+3x\right]_0^1$

$=2\times 1=2$

정답_ ⑤

623

$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$에서

$(x-1)f(x)=(x-1)(3x^3+3x^2+3x)$

이때 $f(x)$가 삼차함수이므로

$f(x)=3x^3+3x^2+3x$

$\therefore \int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{2}(3x^3+3x^2+3x)dx$

$=\int_{-2}^{2}(3x^3+3x)dx+\int_{-2}^{2}3x^2dx$

$=0+2\int_0^2 3x^2dx=2\left[x^3\right]_0^2$

$=2\times 8=16$

정답_ ②

624

$\int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+50x^{49})dx$

$=\int_{-1}^{1}(1+3x^2+5x^4+\cdots+49x^{48})dx$

$=2\int_0^1(1+3x^2+5x^4+\cdots+49x^{48})dx$

$=2\left[x+x^3+x^5+\cdots+x^{49}\right]_0^1$

$=2\times 25=50$

정답_ ③

625

$\int_{-a}^{a}(3x^2+2x)dx=2\int_0^a 3x^2dx=2\left[x^3\right]_0^a=2a^3$

즉, $2a^3=\frac{1}{4}$이므로

$a^3=\frac{1}{8}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because$ a는 실수)

$\therefore 20a=20\times\frac{1}{2}=10$

정답_ 10

626

$$\int_{-a}^{a}(x^5+2x^3-6x^2+a)dx=\int_{-a}^{a}(-6x^2+a)dx$$
$$=2\int_{0}^{a}(-6x^2+a)dx$$
$$=2\Big[-2x^3+ax\Big]_0^a$$
$$=-4a^3+2a^2$$

즉, $-4a^3+2a^2=a(10a-4)-8$이므로

$a^3+2a^2-a-2=0$, $(a+2)(a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-2+(-1)+1=-2$

정답_ ②

627

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라고 하면

$$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}ax^2dx=2\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_0^1$$
$$=2\times\frac{a}{3}=\frac{2a}{3}$$

즉, $\frac{2a}{3}=-4$이므로 $a=-6$

$$\int_{-2}^{2}x^2f(x)dx=\int_{-2}^{2}(ax^3+bx^2)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}bx^2dx=2\Big[\frac{b}{3}x^3\Big]_0^2$$
$$=2\times\frac{8b}{3}=\frac{16b}{3}$$

즉, $\frac{16b}{3}=48$이므로 $b=9$

따라서 $f(x)=-6x+9$이므로

$f(1)=-6+9=3$

정답_ 3

628

$f(-x)=f(x)$에서 함수 $f(x)$는 우함수이므로 $f'(x)$는 기함수이다.

$\therefore \int_{-1}^{1}f'(x)dx=0$

정답_ 0

다른 풀이

$f(-x)=f(x)$에서 $f(-1)=f(1)=3$이므로

$$\int_{-1}^{1}f'(x)dx=f(1)-f(-1)$$
$$=3-3=0$$

참고 다항함수 $f(x)$가 우함수이면

$f(x)=a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}$ (n은 자연수, a_0, a_2, a_4, $\cdots$, a_{2n}은 상수)

으로 놓을 수 있다. 이때

$f'(x)=2a_2x+4a_4x^3+6a_6x^5+\cdots+2na_{2n}x^{2n-1}$

이므로 $f'(x)$는 기함수이다.

629

조건 (가)에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx=6$$

$$\therefore \int_{-5}^{5}f(x)dx=2\int_{0}^{5}f(x)dx=2\Big\{\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{5}f(x)dx\Big\}$$
$$=2\times(6+9)=30$$

정답_ ③

630

$f(-x)+f(x)=0$, 즉 $f(-x)=-f(x)$에서 함수 $f(x)$는 기함수이므로 $\int_{-1}^{0}f(x)dx=-\int_{0}^{1}f(x)dx$에서

$$\int_{-1}^{4}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{4}f(x)dx$$
$$=-\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{0}^{4}f(x)dx$$
$$=k+4$$

즉, $k+4=6k+3$이므로

$5k=1$ $\quad\therefore k=\frac{1}{5}$

정답_ $\frac{1}{5}$

참고 $F'(x)=f(x)$라고 하면 $F(-x)=F(x)$이므로

$\int_{-1}^{0}f(x)=F(0)-F(-1)=F(0)-F(1)=-\int_{0}^{1}f(x)dx$

631

$f(-x)=f(x)$에서 함수 $f(x)$는 우함수이므로 $x^3f(x)$, $xf(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^{1}(x^3-x+1)f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx-\int_{-1}^{1}xf(x)dx+\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}f(x)dx=5$$

정답_ 5

632

$f(x)=-f(-x)$에서 함수 $f(x)$는 기함수이므로 $xf(x)$는 우함수, $x^2f(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^{2}(3x^2-2x+5)f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}3x^2f(x)dx-\int_{-2}^{2}2xf(x)dx+\int_{-2}^{2}5f(x)dx$$
$$=-2\int_{-2}^{2}xf(x)dx=-4\int_{0}^{2}xf(x)dx$$
$$=-4\times8=-32$$

정답_ ①

633

$h(x)=f(x)g(x)$의 양변에 x 대신 $-x$를 대입하면

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$

즉, $h(x)$는 기함수이므로 $h'(x)$는 우함수, $xh'(x)$는 기함수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx&=\int_{-3}^{3}xh'(x)dx+\int_{-3}^{3}5h'(x)dx\\&=\int_{-3}^{3}5h'(x)dx\\&=10\int_{0}^{3}h'(x)dx\\&=10\Big[h(x)\Big]_{0}^{3}\\&=10h(3)-10h(0) \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $h(-x)=-h(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$h(0)=-h(0)$ $\quad\therefore h(0)=0$

따라서 ㉠에서 $10h(3)=10$ $\quad\therefore h(3)=1$

정답_ ①

634

$f(x+4)=f(x)$에서

$\int_{2}^{3}f(x)dx=\int_{2+4n}^{3+4n}f(x)dx$ (단, n은 정수)

이때 $50=2+4\times12$, $51=3+4\times12$이므로

$\int_{2}^{3}f(x)dx=\int_{50}^{51}f(x)dx$

정답_ ①

635

$f(x+3)=f(x)$에서

$\int_{-4}^{-1}f(x)dx=\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{2}^{5}f(x)dx=2$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-4}^{5}f(x)dx&=\int_{-4}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{5}f(x)dx\\&=3\times2=6\end{aligned}$$

정답_ 6

636

$f(x+1)=f(x)$에서

$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{2}^{3}f(x)dx=3$

또, $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx$, $\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{-1}f(x)dx$,

$\int_{2}^{3}f(x)dx=\int_{-3}^{-2}f(x)dx$

$$\begin{aligned}&\therefore \int_{-3}^{1}f(x)dx\\&=\int_{-3}^{-2}f(x)dx+\int_{-2}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx\\&=\int_{2}^{3}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx\\&=4\times3=12\end{aligned}$$

정답_ 12

637

조건 (나)에서 $-1\le x\le1$일 때, $f(x)=1-x^2$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(x)dx&=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx\\&=2\int_{0}^{1}(1-x^2)dx=2\Big[x-\frac{1}{3}x^3\Big]_{0}^{1}\\&=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

조건 (가)에서 $f(x+2)=f(x)$이므로

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{5}f(x)dx=\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{1}^{5}f(x)dx&=\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{5}f(x)dx\\&=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

정답_ ④

638

$f(x+2)=f(x)$에서

$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{2}^{4}f(x)dx=\int_{4}^{6}f(x)dx$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{2}^{6}f(x)dx&=\int_{2}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{6}f(x)dx\\&=2\int_{0}^{2}f(x)dx\\&=2\Big\{\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx\Big\}\\&=2\int_{0}^{1}(-3x^2)dx+2\int_{1}^{2}(4x^3-16)dx\\&=2\Big[-x^3\Big]_{0}^{1}+2\Big[x^4-16x\Big]_{1}^{2}\\&=2\times(-1)+2\times\{-16-(-15)\}=-4\end{aligned}$$

정답_ -4

639

$\int_{0}^{2}f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=2x+k$

$\int_{0}^{2}f(t)dt=\int_{0}^{2}(2t+k)dt=\Big[t^2+kt\Big]_{0}^{2}=4+2k$

즉, $k=4+2k$이므로 $k=-4$

따라서 $f(x)=2x-4$이므로

$f(2)=4-4=0$

정답_ 0

640

$\int_{-1}^{1}tf(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=4x^2+6x+k$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}tf(t)dt&=\int_{-1}^{1}(4t^3+6t^2+kt)dt\\&=2\int_{0}^{1}6t^2dt=2\Big[2t^3\Big]_{0}^{1}\\&=2\times2=4\end{aligned}$$

$\therefore k=4$
따라서 $f(x)=4x^2+6x+4$이므로
$f(1)=4+6+4=14$

정답_ ③

641

$\int_0^1 tf'(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면
$f(x)=-x^2-k$
이때 $f'(x)=-2x$이므로
$\int_0^1 tf'(t)dt=\int_0^1(-2t^2)dt=\left[-\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=-\frac{2}{3}$
즉, $k=-\frac{2}{3}$이므로
$f(x)=-x^2+\frac{2}{3}$
따라서 방정식 $f(x)=0$은 $-x^2+\frac{2}{3}=0$, 즉 $3x^2-2=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 근의 곱은 $-\frac{2}{3}$이다.

정답_ $-\frac{2}{3}$

642

$f(x)=3x^2+\int_0^1(2x+1)f(t)$에서
$f(x)=3x^2+(2x+1)\int_0^1 f(t)dt$
$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면
$f(x)=3x^2+2kx+k$
$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(3t^2+2kt+k)dt$
$=\left[t^3+kt^2+kt\right]_0^1$
$=2k+1$
즉, $k=2k+1$이므로 $k=-1$
따라서 $f(x)=3x^2-2x-1$이므로 $f(x)<g(x)$에서
$3x^2-2x-1<x+5$, $3x^2-3x-6<0$
$3(x+1)(x-2)<0$ $\quad\therefore -1<x<2$
따라서 정수 x는 0, 1의 2개이다.

정답_ ③

643

$f(x)=4x^3+9x\int_0^2\frac{f(t)}{2}dt+\left\{\int_0^2\frac{f(t)}{\sqrt{2}}dt\right\}^2$
$=4x^3+\frac{9}{2}x\int_0^2 f(t)dt+\frac{1}{2}\left\{\int_0^2 f(t)dt\right\}^2$
이므로 $\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면
$f(x)=4x^3+\frac{9k}{2}x+\frac{k^2}{2}$
$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2\left(4t^3+\frac{9k}{2}t+\frac{k^2}{2}\right)dt$
$=\left[t^4+\frac{9k}{4}t^2+\frac{k^2}{2}t\right]_0^2$
$=k^2+9k+16$
즉, $k^2+9k+16=k$이므로
$k^2+8k+16=0$, $(k+4)^2=0$
$\therefore k=-4$
따라서 $f(x)=4x^3-18x+8$이므로
$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(4x^3-18x+8)dx$
$=\left[x^4-9x^2+8x\right]_0^1=0$

정답_ 0

644

$g(x)=\int_{-1}^1 xf(t)dt=x\int_{-1}^1 f(t)dt$
이므로
$\int_0^1 g'(t)dt=\left[g(t)\right]_0^1$
$=g(1)-g(0)=g(1)$ ($\because g(0)=0$)
$=\int_{-1}^1 f(t)dt$
위의 식을 $f(x)=4x+3+\int_0^1 g'(t)dt$에 대입하면
$f(x)=4x+3+\int_{-1}^1 f(t)dt$
$\int_{-1}^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면
$f(x)=4x+k+3$
$\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^1(4t+k+3)dt$
$=\left[2t^2+kt+3t\right]_{-1}^1$
$=(k+5)-(-k-1)$
$=2k+6$
즉, $2k+6=k$이므로 $k=-6$
따라서 $f(x)=4x-3$이므로
$f(5)=4\times5-3=17$

정답_ 17

645

$\int_0^1 g(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 조건 (가)에서
$f(x)=2x+2k$
$g(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이므로
$g(x)=\int f(x)dx$
$=\int(2x+2k)dx$
$=x^2+2kx+C$ (단, C는 적분상수)
조건 (나)에서
$g(0)-\int_0^1 g(t)dt=C-\int_0^1(t^2+2kt+C)dt$
$=C-\left[\frac{1}{3}t^3+kt^2+Ct\right]_0^1$
$=C-\left(\frac{1}{3}+k+C\right)$
$=-k-\frac{1}{3}$

즉, $-k-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로 $k=-1$

따라서 $g(x)=x^2-2x+C$이므로

$$\int_0^1 g(t)dt=\int_0^1 (t^2-2t+C)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+Ct\right]_0^1$$
$$=-\frac{2}{3}+C$$

즉, $-\frac{2}{3}+C=-1$이므로 $C=-\frac{1}{3}$

따라서 $g(x)=x^2-2x-\frac{1}{3}$이므로

$g(1)=1-2-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

정답_ ③

646

$f(x)=\int_1^x (4t^3-t^2+3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x^3-x^2+3$

$\therefore f'(1)=4-1+3=6$

또, $f(1)=\int_1^1 (4t^3-t^2+3)dt=0$이므로

$f'(1)+f(1)=6+0=6$

정답_ ③

647

$\int_{-1}^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{7}{6}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2-x-2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 모든 점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2-x-2=0$의 근과 같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 -2이다.

정답_ -2

648

$\int_1^x f(t)dt=x^3+2ax^2-ax$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+2a-a$ $\quad\therefore a=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+4ax-a=3x^2-4x+1$

$\therefore f(2)=12-8+1=5$

정답_ ①

649

$\int_a^x f(t)dt=2x^3-5x^2+2x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=2a^3-5a^2+2a$, $a(2a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

그런데 a는 0이 아닌 정수이므로 $a=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x^2-10x+2$

$\therefore f(a)=f(2)=24-20+2=6$

정답_ ②

650

$f(x)=\int_x^{x+1} (3t^2-7)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{3(x+1)^2-7\}-(3x^2-7)$
$\quad=6x+3$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$
$\quad=\int (6x+3)dx$
$\quad=3x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=0$이므로

$3+3+C=0$ $\quad\therefore C=-6$

따라서 $f(x)=3x^2+3x-6$이므로

$f(-1)=3-3-6=-6$

정답_ -6

651

$\int_0^x f(t)dt=3x^3+4x\int_0^1 f(t)dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_0^1 f(t)dt=3+4\int_0^1 f(t)dt$, $-3\int_0^1 f(t)dt=3$

$\therefore \int_0^1 f(t)dt=-1$

이것을 주어진 식에 대입하면

$\int_0^x f(t)dt=3x^3-4x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=9x^2-4$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 -4이다.

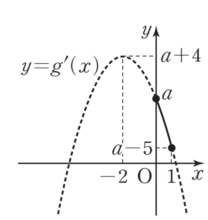
정답_ ②

652

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$
$\quad=-x^2-4x+a$
$\quad=-(x+2)^2+a+4$

함수 $g(x)$가 구간 $[0, 1]$에서 증가하려면 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0, 1]$에서 $g'(x)\geq0$이어야 한다.



즉, $g'(1)\geq0$이어야 하므로

$a-5\geq0$ $\quad\therefore a\geq5$

따라서 실수 a의 최솟값은 5이다.

정답_ 5

653

$xf(x)=x^4+kx^2+\int_1^x f(t)dt+1$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=\int_{1}^{0} f(t)dt+1$, $0=-\int_{0}^{1} f(t)dt+1$

$\therefore \int_{0}^{1} f(t)dt=1$

이때 $\int_{0}^{1} f(t)dt=k-4$이므로

$k-4=1 \qquad \therefore k=5$

$\therefore xf(x)=x^4+5x^2+\int_{1}^{x} f(t)dt+1$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=4x^3+10x+f(x)$

$xf'(x)=4x^3+10x$

즉, $f'(x)=4x^2+10$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (4x^2+10)dx$

$=\frac{4}{3}x^3+10x+C$ (단, C는 적분상수) …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=7$이므로 ㉡에서

$\frac{4}{3}+10+C=7 \qquad \therefore C=-\frac{13}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{4}{3}x^3+10x-\frac{13}{3}$이므로

$f(2)=\frac{32}{3}+20-\frac{13}{3}=\frac{79}{3}$

정답_ ②

654

$\int_{0}^{x} (x-t)f(t)dt=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2$에서

$x\int_{0}^{x} f(t)dt-\int_{0}^{x} tf(t)dt=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2$ 피적분함수에 x가 포함되지 않도록 변형한다.

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{0}^{x} f(t)dt+xf(x)-xf(x)=x^2+\frac{1}{2}x$

$\therefore \int_{0}^{x} f(t)dt=x^2+\frac{1}{2}x$

위의 식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+\frac{1}{2}$

$\therefore f(3)=6+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$

정답_ ④

655

$\int_{-2}^{x} (x-t)f(t)dt=x^3+ax^2-4$의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$0=-8+4a-4 \qquad \therefore a=3$

$\int_{-2}^{x} (x-t)f(t)dt=x^3+3x^2-4$에서

$x\int_{-2}^{x} f(t)dt-\int_{-2}^{x} tf(t)dt=x^3+3x^2-4$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-2}^{x} f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+6x$

$\therefore \int_{-2}^{x} f(t)dt=3x^2+6x$

위의 식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+6$

즉, $f(2)=b$에서 $b=18$

$\therefore b-a=18-3=15$

정답_ ⑤

656

$G(x)=\int_{0}^{x} (x-t)f'(t)dt$

$=x\int_{0}^{x} f'(t)dt-\int_{0}^{x} tf'(t)dt$

이므로

$G'(x)=\int_{0}^{x} f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)$

$=\int_{0}^{x} f'(t)dt=\Big[f(t)\Big]_{0}^{x}$

$=f(x)-f(0)$

이때 $f(0)=2$, $f(1)=5$이므로

$G'(1)=f(1)-f(0)=5-2=3$

정답_ ④

657

$4\int_{1}^{x} (x-t)f(t)dt=2xf(x)+x^3$에서

$4x\int_{1}^{x} f(t)dt-4\int_{1}^{x} tf(t)dt=2xf(x)+x^3$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=2f(1)+1 \qquad \therefore f(1)=-\frac{1}{2}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4\int_{1}^{x} f(t)dt+4xf(x)-4xf(x)=2f(x)+2xf'(x)+3x^2$

$4\int_{1}^{x} f(t)dt=2f(x)+2xf'(x)+3x^2$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=2f(1)+2f'(1)+3$

$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2f'(1)+3=0$, $2f'(1)+2=0$

$\therefore f'(1)=-1$

정답_ -1

658

$f(x)=\int_{-3}^{x} (t^2+4t-5)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+4x-5=(x+5)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-5$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$f(1)=\int_{-3}^{1} (t^2+4t-5)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+2t^2-5t\right]_{-3}^{1}$

$=-\frac{8}{3}-24=-\frac{80}{3}$

정답_ ⑤

659

$g(x)=\int_{2}^{x} f(t)dt=\int_{2}^{x} t(t+2)(t+4)dt$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=x(x+2)(x+4)$

$g'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극대이므로 $\alpha=-2$

$\therefore g(\alpha)=g(-2)$

$=\int_{2}^{-2} f(t)dt$

$=-\int_{-2}^{2} (t^3+6t^2+8t)dt$

$=-2\int_{0}^{2} 6t^2dt=-2\Big[2t^3\Big]_0^2$

$=-2\times16=-32$

정답_ ⑤

660

$f(x)=\int_{0}^{x} (6t^2-6t-12)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$f(2)=\int_{0}^{2} (6t^2-6t-12)dt$

$=\Big[2t^3-3t^2-12t\Big]_0^2$

$=-20$

따라서 $a=2$, $b=-20$이므로

$ab=2\times(-20)=-40$

정답_ -40

661

$f(x)=\int_{x-a}^{x} t(t-3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x(x-3)-(x-a)(x-a-3)$

$=2ax-a^2-3a$

이때 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 $f'(2)=0$

$4a-a^2-3a=0$, $a^2-a=0$

$a(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

정답_ ①

662

$g(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt+f(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=f(0)$

조건 ㈎에서 $g(0)=0$이므로 $f(0)=0$

또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)+f'(x)$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g'(0)=f(0)+f'(0)$

조건 ㈎에서 $g'(0)=0$이므로

$f'(0)=0$

즉, 함수 $f(x)$는 $f(0)=0$, $f'(0)=0$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^2(x-k)$ (k는 상수)

라고 하면

$g'(x)=f(x)+f'(x)$

$=x^2(x-k)+\{2x(x-k)+x^2\}$

$=x^3+(3-k)x^2-2kx$

이때 조건 ㈏에서 $g'(x)$는 기함수이므로 x^2의 계수는 0이다.

즉, $3-k=0$에서 $k=3$

따라서 $f(x)=x^2(x-3)$이므로

$f(2)=4\times(-1)=-4$

정답_ ②

다른 풀이

$g(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt+f(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=f(0)$

조건 ㈎에서 $g(0)=0$이므로 $f(0)=0$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)

라고 하면 $f(0)=0$에서 $c=0$

또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)+f'(x)$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g'(0)=f(0)+f'(0)$

조건 ㈎에서 $g'(0)=0$이므로

$f'(0)=0$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $b=0$

즉, $f(x)=x^3+ax^2$, $f'(x)=3x^2+2ax$이므로

$g'(x)=f(x)+f'(x)$

$=x^3+ax^2+3x^2+2ax$

$=x^3+(a+3)x^2+2ax$

이때 조건 ㈏에서 $g'(x)$는 기함수이므로 x^2의 계수는 0이다.

즉, $a+3=0$에서 $a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2$이므로

$f(2)=8-12=-4$

663

$F(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 삼차함수 $f(x)$의 부호가 오직 한 번 바뀌어야 하므로 방정식 $f(x)=0$이 하나의 실근을 갖거나 중근과 하나의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=0$에서 $2x^3-6x-k=0$

$2x^3-6x=k$

즉, $g(x)=2x^3-6x$라고 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나거나 오직 하나의 점에서 만나야 한다.

$g'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$이므로

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

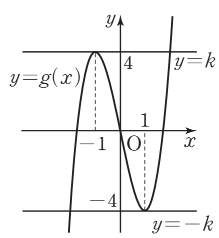
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 양수 k의 값의 범위는

$k\geq 4$

따라서 k의 최솟값은 4이다.



정답_ 4

664

$f(x)=\int_0^x 3t(t+2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

$-1\leq x\leq 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$

$$f(-1)=\int_0^{-1} 3t(t+2)dt$$
$$=-\int_{-1}^0 (3t^2+6t)dt$$
$$=-\Big[t^3+3t^2\Big]_{-1}^0=2$$

$$f(0)=\int_0^0 3t(t+2)dt=0$$

$$f(2)=\int_0^2 3t(t+2)dt=\Big[t^3+3t^2\Big]_0^2=20$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 20, $x=0$에서 최솟값 0을 가지므로 그 합은

$20+0=20$

정답_ 20

665

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=6x^2+12x+3k$

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (6t^2+12t+3k)dt$$
$$=\Big[2t^3+6t^2+3kt\Big]_0^1$$
$$=8+3k$$

즉, $8+3k=k$이므로

$2k=-8\qquad\therefore k=-4$

따라서 $f(x)=6x^2+12x-12=6(x+1)^2-18$이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 -18을 갖는다.

정답_ ④

666

$f(x)=\int_x^{x+1}(-t^2+3t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{-(x+1)^2+3(x+1)\}-(-x^2+3x)$

$\quad=-2x+2$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$-3\leq x\leq 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(3)$

$$f(-3)=\int_{-3}^{-2}(-t^2+3t)dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\Big]_{-3}^{-2}$$
$$=\frac{26}{3}-\frac{45}{2}=-\frac{83}{6}$$

$$f(1)=\int_1^2(-t^2+3t)dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\Big]_1^2$$
$$=\frac{10}{3}-\frac{7}{6}=\frac{13}{6}$$

$$f(3)=\int_3^4(-t^2+3t)dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\Big]_3^4$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{9}{2}=-\frac{11}{6}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $\frac{13}{6}$, $x=-3$에서 최솟값 $-\frac{83}{6}$을 가지므로

$M=\frac{13}{6}$, $m=-\frac{83}{6}$

$\therefore M-m=\frac{13}{6}-\left(-\frac{83}{6}\right)=16$

정답_ ②

667

$\int_0^x (x-t)f(t)dt=\frac{1}{6}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$에서

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\frac{1}{6}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\frac{2}{3}x^3+2x^2+x$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=\frac{2}{3}x^3+2x^2+x$

위의 식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x^2+4x+1=2(x+1)^2-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

정답_ ③

668

$f(x)=\int_1^x (2-|t|)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2-|x|$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$-4\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-4)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(2)$

$$\begin{aligned}f(-4)&=\int_1^{-4}(2-|t|)dt\\&=-\int_{-4}^1(2-|t|)dt\\&=-\left\{\int_{-4}^0(2-|t|)dt+\int_0^1(2-|t|)dt\right\}\\&=-\left\{\int_{-4}^0(2+t)dt+\int_0^1(2-t)dt\right\}\\&=-\left[2t+\frac{1}{2}t^2\right]_{-4}^0-\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1\\&=0-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(2)&=\int_1^2(2-|t|)dt\\&=\int_1^2(2-t)dt\\&=\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^2\\&=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

정답_ ③

669

$F(x)=\int_2^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

$F'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

구간 $[-1, 3]$에서 함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	$F(-1)$	↘	$F(2)$	↗	$F(3)$

따라서 함수 $F(x)$의 최솟값은

$F(2)=\int_2^2 f(t)dt=0$

정답_ 0

670

$f(x)=a(x+2)(x-4)$ $(a>0)$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, -8)$을 지나므로

$-8=-8a$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore f(x)=(x+2)(x-4)=x^2-2x-8$

$F(x)=\int_1^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

$F'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	$F(-2)$	↘	$F(4)$	↗

따라서 함수 $F(x)$는 $x=-2$에서 극대이므로 극댓값은

$$\begin{aligned}F(-2)&=\int_1^{-2}f(t)dt\\&=-\int_{-2}^1(t^2-2t-8)dt\\&=-\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-8t\right]_{-2}^1\\&=-\left(-\frac{26}{3}-\frac{28}{3}\right)=18\end{aligned}$$

정답_ ①

671

$F(x)=a(x+1)(x-2)$ $(a>0)$로 놓으면

$\int_{-3}^x f(t)dt=a(x+1)(x-2)$

$\therefore \int_{-3}^x f(t)dt=ax^2-ax-2a$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2ax-a$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 9)$를 지나므로

$9=2a\times2-a$, $3a=9$

$\therefore a=3$

따라서 $f(x)=6x-3$이므로

$f(1)=6-3=3$

정답_ ③

672

$f(x)=a(x-1)(x-4)$ $(a>0)$로 놓자.

$g(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}g'(x)&=f(x+1)-f(x)\\&=ax(x-3)-a(x-1)(x-4)\\&=ax^2-3ax-(ax^2-5ax+4a)\\&=2a(x-2)\end{aligned}$$

$g'(x)=0$에서 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $g(2)$를 갖는다.

정답_ ②

673

$F(x)=\int_2^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

$F'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

구간 $[1, 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	5
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	$F(1)$	$\nearrow$	$F(2)$	$\searrow$	$F(5)$

$F(1)=\int_2^1 f(t)dt=-\int_1^2 f(t)dt=-\frac{29}{12}$

$F(2)=\int_2^2 f(t)dt=0$

$$\begin{aligned}F(5)&=\int_2^5 f(t)dt\\&=\int_1^5 f(t)dt-\int_1^2 f(t)dt\\&=-\frac{40}{3}-\frac{29}{12}=-\frac{63}{4}\end{aligned}$$

따라서 $M=0$, $m=-\frac{63}{4}$이므로

$M-m=0-\left(-\frac{63}{4}\right)=\frac{63}{4}$

정답_ $\frac{63}{4}$

674

$f(x)=|x-10|$으로 놓고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^{10h}|x-10|dx&=\lim_{h\to0}\frac{F(10h)-F(0)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(0+10h)-F(0)}{10h}\times10\\&=10F'(0)=10f(0)\\&=10\times10=100\end{aligned}$$

정답_ ⑤

675

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt&=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}\\&=F'(0)=f(0)\end{aligned}$$

즉, $f(0)=1$이고

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx\\&=\int(3x^2-4x+1)dx\\&=x^3-2x^2+x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x+1$이므로

$f(2)=8-8+2+1=3$

정답_ ①

676

$f(x)=x^2+ax+1$로 놓고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+2h}(x^2+ax+1)dx\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(2+2h)-F(2-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(2+2h)-F(2)+F(2)-F(2-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(2+2h)-F(2)}{2h}\times2+\lim_{h\to0}\frac{F(2-h)-F(2)}{-h}\\&=2F'(2)+F'(2)\\&=3F'(2)=3f(2)\\&=3(4+2a+1)=6a+15\end{aligned}$$

즉, $6a+15=21$이므로 $a=1$

정답_ 1

677

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2+2h}\int_{1-h}^{1+2h}f(t)dt\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(1+2h)-F(1-h)}{h}\times\frac{1}{h+2}\right\}\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)+F(1)-F(1-h)}{h}\times\lim_{h\to0}\frac{1}{h+2}\\&=\left\{\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\times2+\lim_{h\to0}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}\right\}\\&\quad\times\lim_{h\to0}\frac{1}{h+2}\\&=\{2F'(1)+F'(1)\}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{3}{2}F'(1)=\frac{3}{2}f(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(1)&=\int_0^1(3t-1)^3dt=\left[\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}(3t-1)^4\right]_0^1\\&=\frac{4}{3}-\frac{1}{12}=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{3}{2}f(1)=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}=\frac{15}{8}$

정답_ ⑤

참고 **함수 $y=(ax+b)^n$ (a, b는 상수, $a\neq0$, n은 자연수)의 부정적분**

$\left\{\frac{1}{a}\times\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}\right\}'=(ax+b)^n$이므로

$\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\times\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

678

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{1}{x+2}\int_{-2}^x f(t)dt&=\lim_{x\to-2}\frac{F(x)-F(-2)}{x-(-2)}\\&=F'(-2)=f(-2)\\&=32-8-1=23\end{aligned}$$

정답_ ②

679

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_x^3 f(t)dt=-\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x f(t)dt$$
$$=-\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$$
$$=-F'(3)=-f(3)$$
$$=-(-27+30+k)=-3-k$$

즉, $-3-k=4$이므로

$k=-7$

정답_ -7

680

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x^2-1}\int_{-1}^x f(t)dt=\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}\times\frac{1}{x-1}\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}F'(-1)=-\frac{1}{2}f(-1)$$
$$=-\frac{1}{2}\times(-1-3+3-1)=1$$

정답_ ⑤

681

$\{f(t)\}^2f'(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$F'(t)=\{f(t)\}^2f'(t)$이고 $f(1)=2$, $f'(1)=3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}\{f(t)\}^2f'(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$$
$$=2F'(1)=2\{f(1)\}^2f'(1)$$
$$=2\times4\times3=24$$

정답_ ④

682

$F(x)=\int_1^x(x-t)f(t)dt$라고 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_1^x(x-t)f(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{F(x)}{x-2}=3$$

에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}F(x)=0$이므로 $F(2)=0$

따라서 $\lim_{x\to2}\frac{F(x)}{x-2}=F'(2)=3$

한편,

$$F(x)=\int_1^x(x-t)f(t)dt=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt$$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_1^x f(t)dt$$

이때 $F'(2)=3$이므로

$$\int_1^2 f(t)dt=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또, $F(2)=0$이므로

$$2\int_1^2 f(t)dt-\int_1^2 tf(t)dt=0 \qquad \therefore \int_1^2 tf(t)dt=6\ (\because ㉠)$$

$$\therefore \int_1^2(4x+1)f(x)dx=4\int_1^2 xf(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=4\times6+3=27$$

정답_ ⑤

683

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-6$ ······ ❶

$$\therefore \int_{-\alpha}^{\beta}(6x^2-2)dx=\Big[2x^3-2x\Big]_{-\alpha}^{\beta}$$
$$=(2\beta^3-2\beta)-(-2\alpha^3+2\alpha) \quad \cdots\cdots ❷$$
$$=2(\alpha^3+\beta^3)-2(\alpha+\beta)$$
$$=2\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}-2(\alpha+\beta)$$
$$=2\times\{3^3-3\times(-6)\times3\}-2\times3$$
$$=156 \quad \cdots\cdots ❸$$

정답_ 156

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	20 %
❷ 주어진 정적분을 α, β에 대한 식으로 나타내기	40 %
❸ 주어진 정적분의 값 구하기	40 %

684

$f(-1)-g(-1)=0$, $f(1)-g(1)=0$, $f(4)-g(4)=0$에서 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 세 근은 $x=-1$, $x=1$, $x=4$이므로

$f(x)-g(x)=a(x+1)(x-1)(x-4)$ (a는 상수)로 놓자.

이때 $f(0)-g(0)=4$에서

$4a=4 \qquad \therefore a=1$ ······ ❶

따라서 $f(x)-g(x)=(x+1)(x-1)(x-4)$이므로

$$\int_{-1}^2 f(x)dx-\int_{-1}^2 g(x)dx=\int_{-1}^2\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^2(x+1)(x-1)(x-4)dx$$
$$=\int_{-1}^2(x^3-4x^2-x+4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-1}^2$$
$$=-\frac{2}{3}-\left(-\frac{35}{12}\right)=\frac{9}{4} \quad \cdots\cdots ❷$$

정답_ $\frac{9}{4}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)-g(x)$의 최고차항의 계수 구하기	50 %
❷ 주어진 정적분의 값 구하기	50 %

685

$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)$ ······ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$ …… ㉡

㉠, ㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=0,\ f'(1)=0$ ❶

$f(x)=x^2-ax+\int_1^x g(t)dt$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=0$이므로

$1-a=0 \qquad \therefore a=1$ ❷

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2x-a+g(x)$

이므로 $f'(1)=2-a+g(1)$

이때 $f'(1)=0,\ a=1$이므로

$0=2-1+g(1) \qquad \therefore g(1)=-1$

따라서 다항식 $g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여

$g(1)=-1$ ❸

정답_ -1

채점 기준	비율
❶ $f(1)$, $f'(1)$의 값 구하기	40 %
❷ a의 값 구하기	30 %
❸ 다항식 $g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지 구하기	30 %

686

$f(x)=\int_1^x(3t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+ax+b$

이때 $x=-1$에서 극대이므로 $f'(-1)=0$

$3-a+b=0 \qquad \therefore a=3+b$ …… ㉠

또, $f(-1)=16$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^{-1}(3t^2+at+b)dt&=-\int_{-1}^1(3t^2+at+b)dt\\&=-2\int_0^1(3t^2+b)dt\\&=-2\Big[t^3+bt\Big]_0^1\\&=-2(1+b)=16\end{aligned}$$

$\therefore b=-9$

$b=-9$를 ㉠에 대입하면 $a=-6$ ❶

즉, $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$ ❷

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로

$$\begin{aligned}f(3)&=\int_1^3(3t^2-6t-9)dt\\&=\Big[t^3-3t^2-9t\Big]_1^3\\&=-27-(-11)=-16\end{aligned}$$ ❸

정답_ -16

채점 기준	비율
❶ a, b의 값 구하기	40 %
❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 구하기	30 %
❸ $f(x)$의 극솟값 구하기	30 %

687

$$\begin{aligned}&\int_0^2 x|x-a|dx\\&=\int_0^a\{-x(x-a)\}dx+\int_a^2 x(x-a)dx\ (\because 1\le a\le 2)\\&=-\int_0^a(x^2-ax)dx+\int_a^2(x^2-ax)dx\\&=-\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\Big]_0^a+\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\Big]_a^2\\&=\frac{1}{6}a^3+\left\{\frac{8}{3}-2a-\left(-\frac{1}{6}a^3\right)\right\}=\frac{1}{3}a^3-2a+\frac{8}{3}\end{aligned}$$

즉, $f(a)=\frac{1}{3}a^3-2a+\frac{8}{3}$이므로 ❶

$f'(a)=a^2-2=(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$

$f'(a)=0$에서 $a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$ ❷

$1\le a\le 2$에서 함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$f(1)$	↘	$f(\sqrt{2})$	↗	$f(2)$

따라서 함수 $f(a)$는 $a=\sqrt{2}$에서 최소이므로 최솟값은

$f(\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}+\frac{8}{3}=\frac{8-4\sqrt{2}}{3}$ ❸

정답_ $\frac{8-4\sqrt{2}}{3}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(a)$를 a에 대한 다항함수로 나타내기	40 %
❷ $f'(a)=0$을 만족시키는 a의 값 구하기	20 %
❸ 함수 $f(a)$의 최솟값 구하기	40 %

688

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^3}f(t)dt&=\lim_{x\to1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^3)-F(1)}{x^3-1}\times(x^2+x+1)\right\}\\&=3F'(1)=3f(1)\end{aligned}$$ ❶

즉, $3f(1)=9$이므로

$3(1-4+a)=9 \qquad \therefore a=6$ ❷

정답_ 6

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^3}f(t)dt$ 간단히 하기	70 %
❷ a의 값 구하기	30 %

689

$$\begin{aligned}f(n)&=\int_0^1\frac{x^n}{n}dx=\frac{1}{n}\int_0^1 x^n dx\\&=\frac{1}{n}\Big[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big]_0^1\\&=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(10)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

정답_ ③

690

5차 이하의 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 주어진 등식이 성립하므로

(i) $f(x)=1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} 1dx=\left[x\right]_{-1}^{1}=2$

$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=f(0)=f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=1$

이므로 주어진 등식은 $2=a+b+a$

$\therefore b=2-2a$ ······ ㉠

(ii) $f(x)=x^2$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$

$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{3}{5}$, $f(0)=0$

이므로 주어진 등식은 $\frac{2}{3}=\frac{3}{5}a+0+\frac{3}{5}a$

$\therefore a=\frac{5}{9}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{5}{9}$를 ㉠에 대입하면 $b=\frac{8}{9}$

$\therefore a+b=\frac{5}{9}+\frac{8}{9}=\frac{13}{9}$

정답_ $\frac{13}{9}$

691

함수 $f(x)$의 차수를 n이라고 하면 조건 ㈎에서 $\int\{f'(x)\}^2dx$의 차수는 $2(n-1)+1$, 즉 $2n-1$이고 $2f(x)$의 차수는 n이므로

$2n-1=n \qquad \therefore n=1$

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

로 놓으면 $f'(x)=a$이므로 조건 ㈎에서 $\int a^2dx=2(ax+b)$

$\therefore a^2x+C=2ax+2b$ (단, C는 적분상수)

즉, $a^2=2a$이므로

$a^2-2a=0$, $a(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a\neq0$)

또, 조건 ㈏에서

$\int_{-2}^{3} f(x)dx-\int_{5}^{3} f(x)dx+\int_{5}^{1} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{5} f(x)dx+\int_{5}^{1} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{5} f(x)dx+\int_{5}^{1} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{1} f(x)dx=\int_{-2}^{1}(2x+b)dx$

$=\left[x^2+bx\right]_{-2}^{1}$

$=1+b-(4-2b)=3b-3$

즉, $3b-3=0$이므로 $b=1$

따라서 $f(x)=2x+1$이므로

$f(1)=2+1=3$

정답_ ③

다른 풀이

조건 ㈎에서 $\int\{f'(x)\}^2dx=2f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\{f'(x)\}^2=2f'(x)$, $f'(x)\{f'(x)-2\}=0$

이때 함수 $f(x)$는 상수함수가 아니므로 $f'(x)\neq0$

$\therefore f'(x)=2$

따라서

$f(x)=2x+C$ (C는 적분상수)

로 놓으면 조건 ㈏에서

$\int_{-2}^{3} f(x)dx-\int_{5}^{3} f(x)dx+\int_{5}^{1} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{5} f(x)dx+\int_{5}^{1} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{5} f(x)dx+\int_{5}^{1} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{1} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{1}(2x+C)dx$

$=\left[x^2+Cx\right]_{-2}^{1}$

$=1+C-(4-2C)$

$=3C-3$

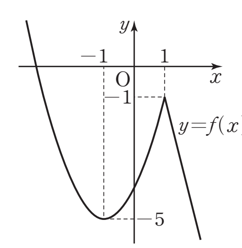
즉, $3C-3=0$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=2x+1$이므로

$f(1)=2+1=3$

692

함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$-1\le t\le1$일 때, $-1\le x\le1$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 최댓값 $g(t)$는

$g(t)=t^2+2t-4$

$t\ge1$일 때, $x\ge1$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 -1이므로 $g(t)=-1$

$\therefore \int_{0}^{2} g(t)dt=\int_{0}^{1}(t^2+2t-4)dt+\int_{1}^{2}(-1)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2-4t\right]_{0}^{1}+\left[-t\right]_{1}^{2}$

$=-\frac{8}{3}+\{-2-(-1)\}=-\frac{11}{3}$

정답_ ②

693

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=|3x^2+3x-6|$

이때 $3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$이므로

$(g\circ f)(x)=\begin{cases} 3x^2+3x-6 & (x\le-2 \text{ 또는 } x\ge1) \\ -3x^2-3x+6 & (-2\le x\le1) \end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^{2}(g\circ f)(x)dx$

$=\int_{-1}^{2}|3x^2+3x-6|dx$

$=\int_{-1}^{1}(-3x^2-3x+6)dx+\int_{1}^{2}(3x^2+3x-6)dx$

$=2\int_{0}^{1}(-3x^2+6)dx+\int_{1}^{2}(3x^2+3x-6)dx$

$=2\Big[-x^3+6x\Big]_0^1+\Big[x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\Big]_1^2$

$=2\times5+\Big\{2-\Big(-\frac{7}{2}\Big)\Big\}=\frac{31}{2}$

정답_ ④

694

조건 ㈎에서 함수 $f(x)$는 기함수이므로

$a=0,\ c=0$

$\therefore\ f(x)=5x^3+bx$

$\int_{1}^{2}xf(x)dx=\int_{1}^{2}(5x^4+bx^2)dx$

$=\Big[x^5+\frac{b}{3}x^3\Big]_1^2$

$=31+\frac{7b}{3}$

조건 ㈏에서

$26<31+\frac{7b}{3}<27,\ -5<\frac{7b}{3}<-4$

$\therefore\ -\frac{15}{7}<b<-\frac{12}{7}$

이때 b는 정수이므로 $b=-2$

따라서 $f(x)=5x^3-2x$이므로

$f(-1)=-5+2=-3$

정답_ -3

695

$\int_{0}^{6}\{f(x)-f(-x)\}dx=8$ …… ㉠

$\int_{-6}^{0}\{f(x)+f(-x)\}dx=-2$ …… ㉡

$f(x)-f(-x)$는 기함수이므로 ㉠에서

차수가 홀수인 항으로만 이루어진 함수이다.

$\int_{-6}^{0}\{f(x)-f(-x)\}dx=-8$

위의 식과 ㉡을 변끼리 더하면

$\int_{-6}^{0}\{f(x)+f(-x)\}dx+\int_{-6}^{0}\{f(x)-f(-x)\}dx=-10$

$2\int_{-6}^{0}f(x)dx=-10$

$\therefore\ \int_{-6}^{0}f(x)dx=-5$

또, $f(x)+f(-x)$는 우함수이므로 ㉡에서

차수가 짝수인 항과 상수항으로만 이루어진 함수이다.

$\int_{0}^{6}\{f(x)+f(-x)\}dx=-2$

위의 식과 ㉠을 변끼리 더하면

$\int_{0}^{6}\{f(x)-f(-x)\}dx+\int_{0}^{6}\{f(x)+f(-x)\}dx=6$

$2\int_{0}^{6}f(x)dx=6$

$\therefore\ \int_{0}^{6}f(x)dx=3$

$\therefore\ \int_{-6}^{6}f(x)dx=\int_{-6}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{6}f(x)dx$

$=-5+3=-2$

정답_ ③

696

함수 $y=-f(x+1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같다.

즉, $\int_{-1}^{0}\{-f(x+1)\}dx=-\int_{0}^{1}f(x)dx$이므로 조건 ㈎에서

$\int_{-1}^{0}g(x)dx=\int_{-1}^{0}\{-f(x+1)+1\}dx$

$=-\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{-1}^{0}1dx$

$=-\frac{1}{6}+\Big[x\Big]_{-1}^{0}$

$=-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$

또, $\int_{0}^{1}g(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{6}$이므로 조건 ㈏에서

$\int_{-3}^{-2}g(x)dx=\int_{-1}^{0}g(x)dx=\int_{1}^{2}g(x)dx=\frac{5}{6}$

$\int_{-2}^{-1}g(x)dx=\int_{0}^{1}g(x)dx=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \int_{-3}^{2}g(x)dx=\int_{-3}^{-2}g(x)dx+\int_{-2}^{-1}g(x)dx+\int_{-1}^{0}g(x)dx$

$+\int_{0}^{1}g(x)dx+\int_{1}^{2}g(x)dx$

$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}$

$=\frac{17}{6}$

정답_ ②

697

$\int_{0}^{1}(x-t)f(t)dt=x\int_{0}^{1}f(t)dt-\int_{0}^{1}tf(t)dt$이므로

$\int_{0}^{1}f(t)dt=a,\ \int_{0}^{1}tf(t)dt=b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=(a+6)x-b$

$\int_{0}^{1}f(t)dt=\int_{0}^{1}\{(a+6)t-b\}dt$

$=\Big[\frac{a+6}{2}t^2-bt\Big]_0^1$

$=\frac{a+6}{2}-b$

즉, $\frac{a+6}{2}-b=a$이므로

$a+2b=6$ …… ㉠

$\int_{0}^{1}tf(t)dt=\int_{0}^{1}\{(a+6)t^2-bt\}dt$

$=\Big[\frac{a+6}{3}t^3-\frac{b}{2}t^2\Big]_0^1$

$=\frac{a+6}{3}-\frac{b}{2}$

즉, $\frac{a+6}{3}-\frac{b}{2}=b$이므로

$2a-9b=-12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{30}{13}$, $b=\frac{24}{13}$

따라서 $f(x)=\frac{108}{13}x-\frac{24}{13}$이므로 구하는 근은

$\frac{108}{13}x-\frac{24}{13}=0 \qquad \therefore x=\frac{2}{9}$

정답_ ②

698

조건 ㈏의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{2x}{9}\int_0^a f(t)dt$

이때 $\int_0^a f(x)dx=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=\frac{2}{9}kx$

조건 ㈎에서

$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 \frac{2}{9}ktdt=\left[\frac{1}{9}kt^2\right]_0^1=\frac{1}{9}k=1$

이므로 $k=9$

$\therefore f(x)=2x$ …… ㉠

조건 ㈏의 식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_0^a f(t)dt=\frac{a^2}{9}\int_0^a f(t)dt$

$\frac{a^2}{9}=1$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$) …… ㉡

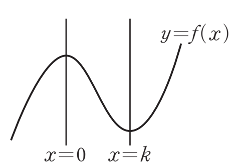
㉠, ㉡에서

$f(a)=f(3)=2\times3=6$

정답_ ②

699

ㄱ. 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고, 조건 ㈎에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



즉, $0<x<k$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로

$f(0)>f(k)$

$\therefore \int_0^k f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^k=f(k)-f(0)<0$ (참)

ㄴ. $1<t\le k$이면 구간 $[0,\ t]$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로

$f'(x)\le0$이다.

$\therefore \int_0^t |f'(x)|dx=\int_0^t \{-f'(x)\}dx$

$=\left[-f(x)\right]_0^t$

$=-f(t)+f(0)$

이것을 조건 ㈏의 식에 대입하면

$-f(t)+f(0)=f(t)+f(0)$

$\therefore f(t)=0$

그런데 함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여 $f(t)=0$이 될 수는 없다.

즉, $0<k<t$이고 t는 1보다 큰 모든 실수이므로 $0<k\le1$이 성립한다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $0<k<t$이므로

$0\le x\le k$에서 $f'(x)\le0$,

$k<x\le t$에서 $f'(x)>0$

이다.

$\int_0^t |f'(x)|dx=\int_0^k \{-f'(x)\}dx+\int_k^t f'(x)dx$

$=\left[-f(x)\right]_0^k+\left[f(x)\right]_k^t$

$=-f(k)+f(0)+f(t)-f(k)$

$=f(t)+f(0)-2f(k)$

이것을 조건 ㈏에 대입하면

$f(t)+f(0)-2f(k)=f(t)+f(0)$

$\therefore f(k)=0$

이때 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극솟값을 가지므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

700

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이면

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt=\int_x^{x+1}f(t)dt$

이때 $g(x)$는 이차함수이므로 극소인 x의 값은 1개뿐이다.

따라서

$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha<\beta)$

로 놓을 수 있다.

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|$

$g(x)$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이므로

$g'(1)=0$, $g'(4)=0$

$\therefore |f(1)|=|f(2)|$, $|f(4)|=|f(5)|$

이때 함수 $f(x)$는 이차함수이므로 위의 조건을 만족시키려면

$1<\alpha<2$이고 $f(1)=-f(2)$,

$4<\beta<5$이고 $f(4)=-f(5)$

이어야 한다.

(i) $f(1)=-f(2)$일 때

$2(1-\alpha)(1-\beta)=-2(2-\alpha)(2-\beta)$

$\alpha\beta-\alpha-\beta+1=-\alpha\beta+2\alpha+2\beta-4$

$\therefore 3\alpha+3\beta-2\alpha\beta-5=0$ …… ㉠

(ii) $f(4)=-f(5)$일 때

$2(4-\alpha)(4-\beta)=-2(5-\alpha)(5-\beta)$

$\alpha\beta-4\alpha-4\beta+16=-\alpha\beta+5\alpha+5\beta-25$

$\therefore 9\alpha+9\beta-2\alpha\beta-41=0$ …… ㉡

$3\times$㉠$-$㉡을 하면

$-4\alpha\beta+26=0 \qquad \therefore \alpha\beta=\frac{13}{2}$

$\therefore f(0)=2\alpha\beta=2\times\frac{13}{2}=13$

정답_ 13

701

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{f(1)}^{f(x)}(2t-1)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[t^2-t\Big]_{f(1)}^{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{[\{f(x)\}^2-f(x)]-[\{f(1)\}^2-f(1)]}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(1)\}^2}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)+f(1)\}\{f(x)-f(1)\}}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=2f(1)\times\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=2f(1)f'(1)-f'(1)$$
$$=2\times1\times(-1)-(-1)=-1$$

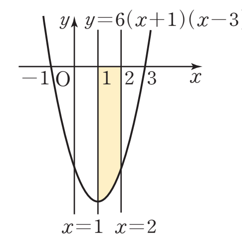
정답_ ②

다른 풀이

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{f(1)}^{f(x)}(2t-1)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{f(x)}(2t-1)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[t^2-t\Big]_{1}^{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-f(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}f(x)\times\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}$$
$$=f(1)f'(1)$$
$$=1\times(-1)=-1$$

09 정적분의 활용

702

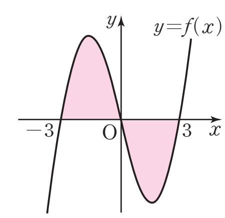


함수 $y=6(x+1)(x-3)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$$-\int_1^2 6(x+1)(x-3)dx$$
$$=-\int_1^2(6x^2-12x-18)dx$$
$$=-\Big[2x^3-6x^2-18x\Big]_1^2$$
$$=-\{-44-(-22)\}=22$$

정답_ 22

703



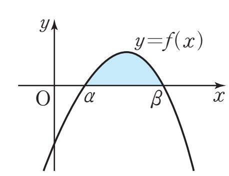
$f(x)=x^3-9x=x(x+3)(x-3)$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_{-3}^{0}(x^3-9x)dx=2\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\Big]_{-3}^{0}$$
$$=2\times\frac{81}{4}=\frac{81}{2}$$

정답_ ⑤

704

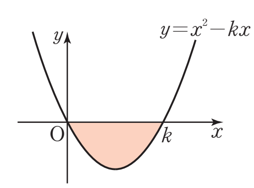


함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$
$$=\int_\alpha^0 f(x)dx+\int_0^\beta f(x)dx$$
$$=-\int_0^\alpha f(x)dx-\int_\beta^0 f(x)dx$$
$$=-(-4)-(-2)=6$$

정답_ ④

705



함수 $y=x^2-kx=x(x-k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$$\int_0^k|x^2-kx|dx=\int_0^k(-x^2+kx)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\Big]_0^k$$
$$=\frac{k^3}{6}$$

즉, $\frac{k^3}{6}=\frac{9}{2}$이므로 $k^3=27$

$\therefore k=3$

정답_ 3

다른 풀이

포물선 $y=x^2-kx$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

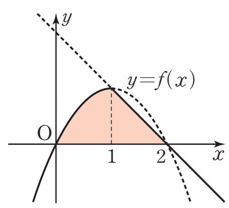
$\frac{1}{6}(k-0)^3=\frac{k^3}{6}$

즉, $\frac{k^3}{6}=\frac{9}{2}$이므로 $k^3=27$

$\therefore k=3$

706

$f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & (x<1) \\ -x+2 & (x\ge1) \end{cases}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$\int_0^1(-x^2+2x)dx+\int_1^2(-x+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

따라서 $p=6$, $q=7$이므로

$p+q=6+7=13$

정답_ 13

707

$S_1=\int_0^1 3x^2dx=\left[x^3\right]_0^1=1$

$S_2=1\times3-S_1=3-1=2$

$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{2}{1}=2$

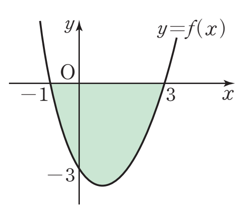
정답_ ③

708

$\int_2^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$-\int_{-1}^3(x^2-2x-3)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-1}^3$

$=-\left(-9-\frac{5}{3}\right)=\frac{32}{3}$

정답_ ①

다른 풀이

포물선 $y=x^2-2x-3$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{6}\times\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$

709

점 P의 x좌표가 2, 점 Q의 x좌표가 3이므로

$(A$의 넓이$)-(B$의 넓이$)=\int_0^2 f(x)dx-\int_2^3\{-f(x)\}dx$

$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$

$=\int_0^3 f(x)dx=3$

$\therefore \int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 kx(x-2)(x-3)dx$

$=k\int_0^3(x^3-5x^2+6x)dx$

$=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3$

$=\frac{9}{4}k$

즉, $\frac{9}{4}k=3$에서 $k=\frac{4}{3}$

정답_ ②

710

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 3이고 $f(2)=0$이므로

$f(x)=3(x-2)(x-k)$ (k는 상수)라고 하자.

$\int_1^{100} f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^{100} f(x)dx=\int_2^{100} f(x)dx+4$

이므로 $\int_1^2 f(x)dx=4$

$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 3(x-2)(x-k)dx$

$=\int_1^2\{3x^2-3(k+2)x+6k\}dx$

$=\left[x^3-\frac{3(k+2)}{2}x^2+6kx\right]_1^2$

$=(6k-4)-\left(\frac{9}{2}k-2\right)=\frac{3}{2}k-2$

즉, $\frac{3}{2}k-2=4$이므로 $k=4$

따라서 $f(x)=3(x-2)(x-4)=3x^2-18x+24$이므로 구하는 넓이는

$-\int_2^4(3x^2-18x+24)dx=-\left[x^3-9x^2+24x\right]_2^4$

$=-(16-20)=4$

정답_ 4

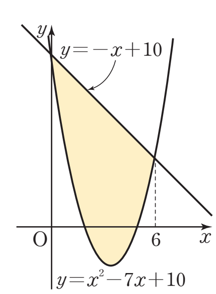
다른 풀이

포물선 $y=3x^2-18x+24$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{3}{6}\times(4-2)^3=4$

711

곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$의 교점의 x좌표는



$x^2-7x+10=-x+10$에서

$x^2-6x=0$, $x(x-6)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^6\{(-x+10)-(x^2-7x+10)\}dx$

$=\int_0^6(-x^2+6x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6$

$=36$

정답_ 36

다른 풀이

포물선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$의 교점의 x좌표가 0, 6이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{6}\times(6-0)^3=36$

712

곡선 $y=x^2+kx$와 직선 $y=x+k$의 교점의 x좌표는

$x^2+kx=x+k$에서

$x^2+(k-1)x-k=0,\ (x-1)(x+k)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-k$

이때 $k<-1$에서 $-k>1$이므로 곡선 $y=x^2+kx$와 직선 $y=x+k$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^{-k}\{(x+k)-(x^2+kx)\}dx$$

$$=\int_1^{-k}\{-x^2-(k-1)x+k\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{k-1}{2}x^2+kx\right]_1^{-k}$$

$$=-\frac{k^3}{6}-\frac{k^2}{2}-\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{6}\right)$$

$$=-\frac{k^3}{6}-\frac{k^2}{2}-\frac{k}{2}-\frac{1}{6}$$

$$=-\frac{(k+1)^3}{6}$$

즉, $-\frac{(k+1)^3}{6}=\frac{32}{3}$이므로

$(k+1)^3=-64,\ k+1=-4$

$\therefore\ k=-5$

정답_ ③

713

$y=|x|=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x & (x\geq 0)\end{cases}$이므로 두 함수 $y=|x|$, $y=-x^2+2$의 그래프의 교점의 x좌표는

(i) $x<0$일 때, $-x=-x^2+2$에서

$x^2-x-2=0,\ (x+1)(x-2)=0$

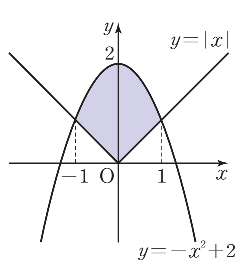
$\therefore\ x=-1\ (\because\ x<0)$

(ii) $x\geq 0$일 때, $x=-x^2+2$에서

$x^2+x-2=0,\ (x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1\ (\because\ x\geq 0)$

(i), (ii)에서 두 함수 $y=|x|$, $y=-x^2+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분은 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는



$$2\int_0^1\{(-x^2+2)-x\}dx$$

$$=2\int_0^1(-x^2-x+2)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1$$

$$=2\times\frac{7}{6}=\frac{7}{3}$$

정답_ ④

714

곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=x$에서

$-x^2+2x=0,\ x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

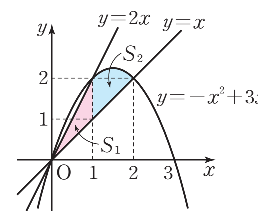
곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는

$-x^2+3x=2x$에서

$-x^2+x=0,\ x(x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



S_1+S_2

$$=\frac{1}{2}\times1\times1+\int_1^2\{(-x^2+3x)-x\}dx$$

$$=\frac{1}{2}+\int_1^2(-x^2+2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{6}$$

정답_ $\frac{7}{6}$

다른 풀이

구하는 넓이는

$$\int_0^2\{(-x^2+3x)-x\}dx-\int_0^1\{(-x^2+3x)-2x\}dx$$

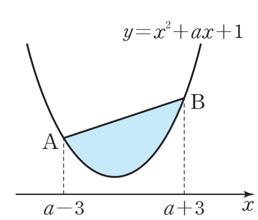
$$=\int_0^2(-x^2+2x)dx-\int_0^1(-x^2+x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2-\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$$

715

곡선 $y=x^2+ax+1$과 두 직선 $x=a-3$, $x=a+3$의 교점의 x좌표가 각각 $a-3$, $a+3$이므로 두 점 A, B의 좌표는



$A(a-3,\ 2a^2-9a+10)$,

$B(a+3,\ 2a^2+9a+10)$

이를 이용하여 직선 AB의 방정식을 나타내면

$y-(2a^2-9a+10)=3a\{x-(a-3)\}$

$\frac{(2a^2+9a+10)-(2a^2-9a+10)}{(a+3)-(a-3)}$

$\therefore\ y=3ax-a^2+10$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{a-3}^{a+3}\{(3ax-a^2+10)-(x^2+ax+1)\}dx$$

$$=\int_{a-3}^{a+3}(-x^2+2ax-a^2+9)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+ax^2-(a^2-9)x\right]_{a-3}^{a+3}$$

$=36$

정답_ ④

다른 풀이

곡선의 이차항의 계수가 1이고, 포물선과 직선 AB의 교점의 x좌표가 $a-3$, $a+3$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{6}\{(a+3)-(a-3)\}^3=\frac{1}{6}\times6^3=36$

716

두 곡선 $y=x^2-3x-10$, $y=-x^2-5x+2$의 교점의 x좌표는

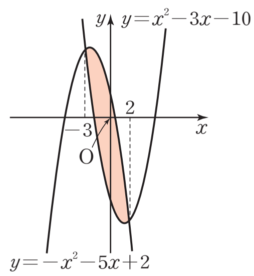
$x^2-3x-10=-x^2-5x+2$에서

$2x^2+2x-12=0$

$2(x+3)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-3}^{2}\{(-x^2-5x+2)-(x^2-3x-10)\}dx$

$=\int_{-3}^{2}(-2x^2-2x+12)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+12x\right]_{-3}^{2}$

$=\frac{44}{3}-(-27)=\frac{125}{3}$

정답_ $\frac{125}{3}$

다른 풀이

두 곡선 $y=x^2-3x-10$, $y=-x^2-5x+2$의 교점의 x좌표가 -3, 2이므로 구하는 넓이는

$\frac{1-(-1)}{6}\times\{2-(-3)\}^3=\frac{125}{3}$

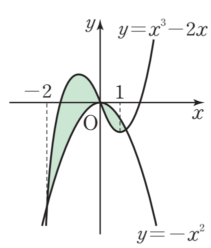
717

두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=-x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=-x^2$에서

$x^3+x^2-2x=0$, $x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-2}^{0}\{(x^3-2x)-(-x^2)\}dx$

$+\int_{0}^{1}\{-x^2-(x^3-2x)\}dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$

정답_ ④

718

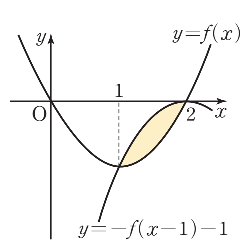
$-f(x-1)-1$

$=-\{(x-1)^2-2(x-1)\}-1$

$=-x^2+4x-4$

두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=-x^2+4x-4$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=-x^2+4x-4$에서



$2x^2-6x+4=0$, $2(x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{1}^{2}\{(-x^2+4x-4)-(x^2-2x)\}dx=\int_{1}^{2}(-2x^2+6x-4)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_{1}^{2}$

$=-\frac{4}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{3}$

정답_ ③

719

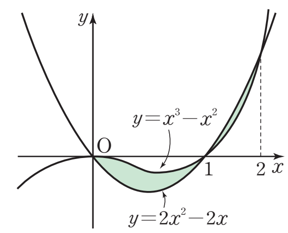
두 곡선 $y=x^3-x^2$, $y=2x^2-2x$의 교점의 x좌표는 $x^3-x^2=2x^2-2x$에서

$x^3-3x^2+2x=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 두 도형의 넓이는



$\int_{0}^{1}\{(x^3-x^2)-(2x^2-2x)\}dx$

$=\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{4}$

$\int_{1}^{2}\{(2x^2-2x)-(x^3-x^2)\}dx$

$=\int_{1}^{2}(-x^3+3x^2-2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_{1}^{2}$

$=\frac{1}{4}$

즉, $S_1=\frac{1}{4}$, $S_2=\frac{1}{4}$이므로

$S_1S_2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

정답_ ②

720

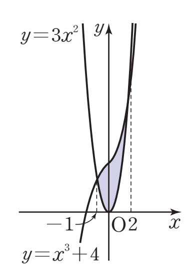
$f(x)=x^3+4$에서 $f'(x)=3x^2$이므로 두 곡선 $y=x^3+4$, $y=3x^2$의 교점의 x좌표는

$x^3+4=3x^2$에서

$x^3-3x^2+4=0$, $(x+1)(x-2)^2=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$

즉, 구하는 도형의 넓이는



$\int_{-1}^{2}\{(x^3+4)-3x^2\}dx$

$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$

$=4-\left(-\frac{11}{4}\right)=\frac{27}{4}$

따라서 $p=4$, $q=27$이므로

$p+q=4+27=31$

정답_ 31

721

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 각각 1, -2이므로 함수 $g(x)-f(x)$의 최고차항의 계수는

$-2-1=-3$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 0, k이므로

$g(x)-f(x)=-3x(x-k)$

따라서 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^k \{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^k \{-3x(x-k)\}dx$$
$$=\int_0^k (-3x^2+3kx)dx$$
$$=\left[-x^3+\frac{3}{2}kx^2\right]_0^k$$
$$=\frac{k^3}{2}$$

즉, $\frac{k^3}{2}=\frac{27}{2}$에서 $k^3=27$

$\therefore k=3$

따라서 $f(x)-g(x)=3x(x-3)$이므로

$$f(k-1)-g(k-1)=f(2)-g(2)$$
$$=3\times2\times(-1)$$
$$=-6$$

정답_ -6

722

$f(x)=x^3$이라고 하면 $f'(x)=3x^2$

점 $(-1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3$이므로 접선의 방정식은

$y-(-1)=3\{x-(-1)\}$

$\therefore y=3x+2$

곡선 $y=x^3$과 직선 $y=3x+2$의 교점의 x좌표는 $x^3=3x+2$에서

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^2 \{(3x+2)-x^3\}dx=\int_{-1}^2 (-x^3+3x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$$
$$=6-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{4}$$

정답_ ①

723

$f(x)=3x^2+x$라고 하면

$f'(x)=6x+1$

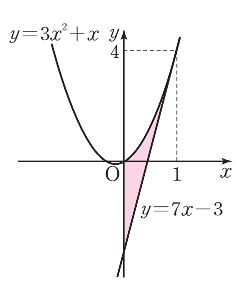
점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=7$이므로 접선의 방정식은

$y-4=7(x-1)$

$\therefore y=7x-3$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_0^1 \{(3x^2+x)-(7x-3)\}dx$$
$$=\int_0^1 (3x^2-6x+3)dx$$
$$=\left[x^3-3x^2+3x\right]_0^1$$
$$=1$$

정답_ 1

724

$f(x)=x^2-4x+3$이라고 하면 $f'(x)=2x-4$

점 $(0, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-4$이므로 접선의 방정식은

$y-3=-4(x-0)$

$\therefore y=-4x+3$

점 $(4, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(4)=4$이므로 접선의 방정식은

$y-3=4(x-4)$

$\therefore y=4x-13$

두 직선 $y=-4x+3$, $y=4x-13$의 교점의 x좌표는

$-4x+3=4x-13$에서

$8x=16$ $\quad\therefore x=2$

이때 구하는 도형은 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 그 넓이는

$$2\int_0^2 \{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx=2\int_0^2 x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=2\times\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

정답_ ⑤

725

최고차항의 계수가 -3인 삼차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$의 교점의 x좌표가 0, 2이고, 두 함수의 그래프가 점 $(2, f(2))$에서 접하므로

$g(x)-f(x)=3x(x-2)^2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 3x(x-2)^2dx=\int_0^2 (3x^3-12x^2+12x)dx$$
$$=\left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+6x^2\right]_0^2$$
$$=4$$

정답_ ③

726

$f(x)=-x^2$이라고 하면 $f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(a, -a^2)$이라고 하면 이 접점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=-2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(-a^2)=-2a(x-a)$

$\therefore y=-2ax+a^2$

이 접선이 점 $(-2, 5)$를 지나므로

$5=4a+a^2$, $a^2+4a-5=0$

$(a+5)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=-5$ 또는 $a=1$

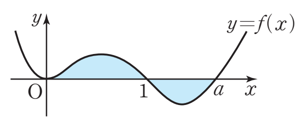
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=10x+25$ 또는 $y=-2x+1$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-5}^{-2}\{(10x+25)-(-x^2)\}dx+\int_{-2}^{1}\{(-2x+1)-(-x^2)\}dx$$
$$=\int_{-5}^{-2}(x^2+10x+25)dx+\int_{-2}^{1}(x^2-2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+5x^2+25x\right]_{-5}^{-2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left\{-\frac{98}{3}-\left(-\frac{125}{3}\right)\right\}+\left\{\frac{1}{3}-\left(-\frac{26}{3}\right)\right\}$$
$$=9+9=18$$

정답_ ⑤

727

곡선 $f(x)=x^2(x-1)(x-a)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로



$$\int_0^a x^2(x-1)(x-a)dx$$
$$=\int_0^a\{x^4-(a+1)x^3+ax^2\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}(a+1)x^4+\frac{1}{3}ax^3\right]_0^a$$
$$=-\frac{1}{20}a^5+\frac{1}{12}a^4=0$$
$3a^5-5a^4=0$, $a^4(3a-5)=0$

$\therefore a=\frac{5}{3}$ ($\because a>1$)

따라서 $f(x)=x^2(x-1)\left(x-\frac{5}{3}\right)$이므로

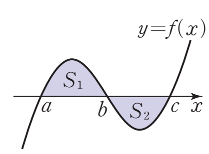
$$f(-1)=1\times(-2)\times\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{16}{3}$$

정답_ ③

참고 두 도형의 넓이가 같은 경우

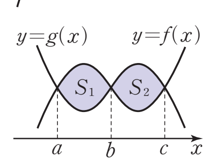
(1) 오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$일 때

$$\int_a^c f(x)dx=0$$



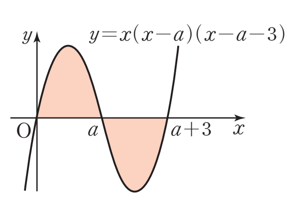
(2) 오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$일 때

$$\int_a^c\{f(x)-g(x)\}dx=0$$



728

곡선 $y=x(x-a)(x-a-3)$과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로



$$\int_0^{a+3}x(x-a)(x-a-3)dx$$
$$=\int_0^{a+3}\{x^3-(2a+3)x^2+a(a+3)x\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(2a+3)x^3+\frac{1}{2}a(a+3)x^2\right]_0^{a+3}$$
$$=\frac{1}{4}(a+3)^4-\frac{1}{3}(2a+3)(a+3)^3+\frac{1}{2}a(a+3)^3$$
$$=\frac{1}{12}(a+3)^3\{3(a+3)-4(2a+3)+6a\}$$
$$=\frac{1}{12}(a+3)^3(a-3)=0$$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

정답_ 3

다른 풀이

곡선 $y=x(x-a)(x-a-3)$과 x축의 교점의 x좌표가 0, a, $a+3$이고, $a>0$이므로

$0<a<a+3$

곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으려면 교점 사이의 간격이 같아야 하므로

$a-0=(a+3)-a \qquad \therefore a=3$

729

$A=B$이므로

$$\int_0^2\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx$$
$$=\int_0^2(x^3+2x^2-k)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2$$
$$=\frac{28}{3}-2k=0$$
$$\therefore k=\frac{14}{3}$$

정답_ ④

730

S_1+S_2의 값은 곡선 $y=-x^2+4$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$S_1+S_2=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx$$
$$=2\int_0^2(-x^2+4)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2$$
$$=\frac{32}{3}$$

이때 $S_1:S_2=1:3$이어야 하므로

$$S_1=\frac{32}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{8}{3}$$

두 곡선 $y=x^2+2a$, $y=-x^2+4$의 교점의 x좌표는

$x^2+2a=-x^2+4$에서

$2x^2=4-2a$, $x^2=2-a$

$\therefore x=\pm\sqrt{2-a}$

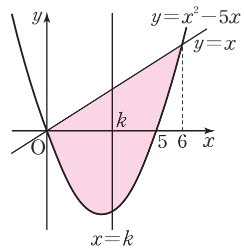
$$S_1=\int_{-\sqrt{2-a}}^{\sqrt{2-a}}\{(-x^2+4)-(x^2+2a)\}dx$$
$$=\int_{-\sqrt{2-a}}^{\sqrt{2-a}}(-2x^2+4-2a)dx$$
$$=2\int_0^{\sqrt{2-a}}(-2x^2+4-2a)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+(4-2a)x\right]_0^{\sqrt{2-a}}$$
$$=\frac{8}{3}(\sqrt{2-a})^3$$

즉, $\frac{8}{3}(\sqrt{2-a})^3=\frac{8}{3}$이므로 $(\sqrt{2-a})^3=1$

$\therefore a=1$

정답_ 1

731



곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^2-5x=x$에서

$x^2-6x=0$, $x(x-6)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

따라서 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^6 \{x-(x^2-5x)\}dx$$
$$=\int_0^6 (-x^2+6x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6$$
$$=36$$

이때 직선 $x=k$가 이 도형의 넓이를 이등분하므로

$$\int_0^k \{x-(x^2-5x)\}dx=\int_0^k (-x^2+6x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^k$$
$$=-\frac{1}{3}k^3+3k^2=18$$

즉, $-\frac{1}{3}k^3+3k^2-18=0$에서

$k^3-9k^2+54=0$, $(k-3)(k^2-6k-18)=0$

$\therefore k=3$ ($\because 0<k<6$)

정답_ ①

732

곡선 $y=x^2+3x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 $x^2+3x=mx$에서

$x^2-(m-3)x=0$, $x\{x-(m-3)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=m-3$

곡선 $y=x^2+3x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{m-3}^0 \{mx-(x^2+3x)\}dx=\int_{m-3}^0 \{-x^2+(m-3)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{m-3}{2}x^2\right]_{m-3}^0$$
$$=-\frac{(m-3)^3}{6}$$

이때 곡선 $y=x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-3}^0 (-x^2-3x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^0=\frac{9}{2}$$

즉, $-\frac{(m-3)^3}{6}=2\times\frac{9}{2}$이므로

$(m-3)^3=-6\times 9=-54$

정답_ -54

733

곡선 $y=3x^2$ $(x\ge 0)$과 직선 $y=3$의 교점의 x좌표는 $3x^2=3$에서

$x^2=1$ $\qquad \therefore x=1$ ($\because x\ge 0$)

따라서 곡선 $y=3x^2$ $(x\ge 0)$과 y축 및 직선 $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$1\times 3-\int_0^1 3x^2dx=3-\left[x^3\right]_0^1$$
$$=3-1=2$$

또, 곡선 $y=ax^2$ $(x\ge 0)$과 직선 $y=3$의 교점의 x좌표는 $ax^2=3$에서

$x^2=\frac{3}{a}$ $\qquad \therefore x=\sqrt{\frac{3}{a}}$ ($\because a>0$, $x\ge 0$)

따라서 곡선 $y=ax^2$ $(x\ge 0)$과 y축 및 직선 $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\sqrt{\frac{3}{a}}\times 3-\int_0^{\sqrt{\frac{3}{a}}} ax^2dx=3\sqrt{\frac{3}{a}}-\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{a}}}$$
$$=3\sqrt{\frac{3}{a}}-\sqrt{\frac{3}{a}}=2\sqrt{\frac{3}{a}}$$

즉, $2=2\times 2\sqrt{\frac{3}{a}}$이므로

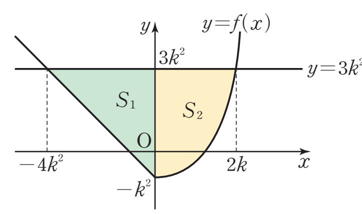
$\sqrt{\frac{3}{a}}=\frac{1}{2}$, $\frac{3}{a}=\frac{1}{4}$

$\therefore a=12$

정답_ 12

734

다음 그림과 같이 $x<0$, $x\ge 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3k^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라고 하자.



(i) $x<0$일 때

두 직선 $y=-x-k^2$, $y=3k^2$의 교점의 x좌표는 $-x-k^2=3k^2$에서

$x=-4k^2$

즉, $x<0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3k^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S_1=\frac{1}{2}\times|-4k^2|\times|3k^2-(-k^2)|=8k^4$$

(ii) $x\ge 0$일 때

곡선 $y=x^2-k^2$과 직선 $y=3k^2$의 교점의 x좌표는 $x^2-k^2=3k^2$에서

$x^2=4k^2$ $\qquad \therefore x=2k$ ($\because k>0$, $x\ge 0$)

즉, $x\ge 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3k^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S_2=\int_0^{2k} \{3k^2-(x^2-k^2)\}dx$$
$$=\int_0^{2k} (-x^2+4k^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4k^2x\right]_0^{2k}$$
$$=\frac{16}{3}k^3$$

(i), (ii)에서 $S_1=S_2$이므로

$8k^4=\frac{16}{3}k^3$ $\qquad \therefore k=\frac{2}{3}$

정답_ ②

735

곡선 $y=x^2+2$와 직선 $y=ax+3$의 교점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$

라고 하면 $x^2+2=ax+3$에서

$x^2-ax-1=0$ ······ ㉠

즉, ㉠의 두 근이 α, β이므로 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ ······ ㉡

이때 ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-1$이므로

$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{a^2+4}$

이것을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4}\right)^3$

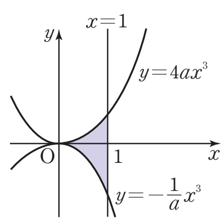
$a^2\geq 0$이므로 구하는 최솟값은

$\frac{1}{6}\times(\sqrt{4})^3=\frac{4}{3}$

정답_ $\frac{4}{3}$

736

두 곡선 $y=4ax^3$, $y=-\frac{1}{a}x^3$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\int_0^1\left\{4ax^3-\left(-\frac{1}{a}x^3\right)\right\}dx$

$=\left(4a+\frac{1}{a}\right)\int_0^1 x^3dx$

$=\left(4a+\frac{1}{a}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}\left(4a+\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{4a}$

$a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+\frac{1}{4a}\geq 2\sqrt{a\times\frac{1}{4a}}=2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{4a}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 1이다.

정답_ ②

737

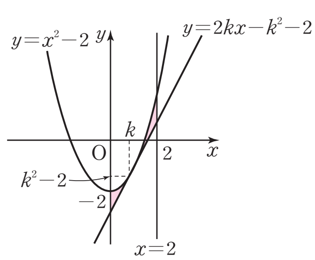
$f(x)=x^2-2$라고 하면 $f'(x)=2x$

점 (k, k^2-2)에서의 접선의 기울기는 $f'(k)=2k$이므로 접선의 방정식은

$y-(k^2-2)=2k(x-k)$

$\therefore y=2kx-k^2-2$

이때 곡선 $y=x^2-2$와 직선 $y=2kx-k^2-2$ 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\int_0^2\{(x^2-2)-(2kx-k^2-2)\}dx$

$=\int_0^2(x^2-2kx+k^2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-kx^2+k^2x\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}-4k+2k^2=2(k-1)^2+\frac{2}{3}$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다.

정답_ ②

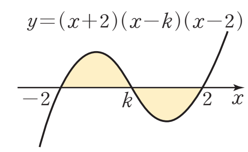
738

곡선 $y=(x+2)(x-k)(x-2)$와 x축의 교점의 x좌표는

$(x+2)(x-k)(x-2)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=k$ 또는 $x=2$

이므로 곡선 $y=(x+2)(x-k)(x-2)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\int_{-2}^k(x+2)(x-k)(x-2)dx$

$+\int_k^2\{-(x+2)(x-k)(x-2)\}dx$

$=\int_{-2}^k(x^3-kx^2-4x+4k)dx+\int_k^2(-x^3+kx^2+4x-4k)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k}{3}x^3-2x^2+4kx\right]_{-2}^k+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{k}{3}x^3+2x^2-4kx\right]_k^2$

$=\left(-\frac{k^4}{12}+2k^2+\frac{16}{3}k+4\right)+\left(-\frac{k^4}{12}+2k^2-\frac{16}{3}k+4\right)$

$=-\frac{k^4}{6}+4k^2+8$

이때 곡선 $y=(x+2)(x-k)(x-2)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$라고 하면 $S(k)=-\frac{k^4}{6}+4k^2+8$에서

$S'(k)=-\frac{2}{3}k^3+8k=-\frac{2}{3}k(k+2\sqrt{3})(k-2\sqrt{3})$

$S'(k)=0$에서 $k=0$ ($\because -2<k<2$)

$-2<k<2$에서 함수 $S(k)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	(-2)	$\cdots$	0	$\cdots$	(2)
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘	극소	↗	

따라서 $S(k)$는 $k=0$일 때 최솟값을 가지므로 구하는 k의 값은 0이다.

정답_ 0

739

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 2, 4이므로 구하는 넓이는

$2\int_2^4\{x-f(x)\}dx=2\left(\int_2^4 xdx-\int_2^4 f(x)dx\right)$

$=2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^4-2\times 4$

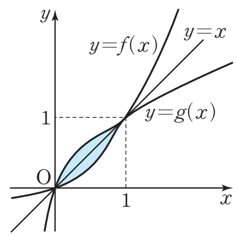
$=2\times 6-8=4$

정답_ ③

740

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=x^3-2x^2+2x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x^2+2x=x$에서
$x^3-2x^2+x=0$, $x(x-1)^2=0$
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$
따라서 구하는 넓이는

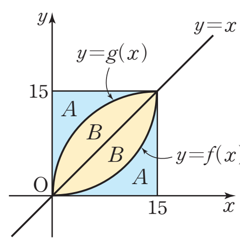


$$2\int_0^1\{(x^3-2x^2+2x)-x\}dx$$
$$=2\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

정답_ ①

741

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
오른쪽 그림과 같이 파란색이 칠해진 부분과 노란색이 칠해진 부분의 넓이의 $\frac{1}{2}$을 각각 A, B라고 하자.



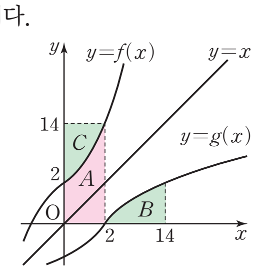
파란색이 칠해진 부분과 노란색이 칠해진 부분의 넓이의 비가 2 : 3이므로
$A:B=2:3$
$\therefore$ $3A=2B$ …… ㉠
정사각형의 넓이는 $15^2=225$이므로
$2A+2B=225$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=45$, $B=\frac{135}{2}$

$$\therefore \int_0^{15}f(x)dx=A=45$$

정답_ 45

742

함수 $f(x)=x^3+2x+2$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
오른쪽 그림에서

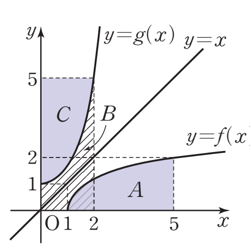


$$A=\int_0^2 f(x)dx,\ B=\int_2^{14}g(x)dx$$
이고 $B=C$이므로
$$\int_0^2 f(x)dx+\int_2^{14}g(x)dx$$
$$=A+B=A+C$$
$$=2\times14=28$$

정답_ ⑤

743

함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
오른쪽 그림에서

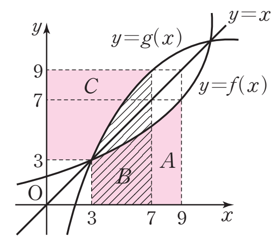


$$\int_1^5 f(x)dx=A,\ \int_0^2 g(x)dx=B$$
이고 $A=C$이므로
$$\int_1^5 f(x)dx+\int_0^2 g(x)dx=A+B=C+B$$
$$=2\times5=10$$

정답_ 10

744

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
오른쪽 그림에서



$$\int_3^9 f(x)dx=A,\ \int_3^7 g(x)dx=B$$
이고 $A=C$이므로
$$\int_3^9 f(x)dx+\int_3^7 g(x)dx$$
$$=A+B=C+B$$
$$=9\times7-3\times3=54$$

정답_ ②

745

시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은
$$\int_1^2 v(t)dt=\int_1^2(3t^2-4t)dt=\left[t^3-2t^2\right]_1^2=1$$

정답_ ④

746

$v(t)=0$에서
$-3t+t^2=0$, $t(t-3)=0$
$\therefore$ $t=0$ 또는 $t=3$
즉, 구간 $[1, 3]$에서 $v(t)\le0$이고, 구간 $[3, 4]$에서 $v(t)\ge0$이므로 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는
$$\int_1^4|v(t)|dt=\int_1^3(3t-t^2)dt+\int_3^4(-3t+t^2)dt$$
$$=\left[\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_1^3+\left[-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_3^4$$
$$=\left(\frac{9}{2}-\frac{7}{6}\right)+\left\{-\frac{8}{3}-\left(-\frac{9}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{10}{3}+\frac{11}{6}=\frac{31}{6}$$

정답_ $\frac{31}{6}$

747

좌표가 -4인 점에서 출발한 점 P의 시각 $t=3$에서의 위치는
$$-4+\int_0^2(2t+4)dt+\int_2^3(3t^2-4)dt$$
$$=-4+\left[t^2+4t\right]_0^2+\left[t^3-4t\right]_2^3$$
$$=-4+12+15=23$$

정답_ ②

748

두 점 P, Q가 시각 $t=a$에서 처음으로 다시 만났으므로 $t=a$에서의 위치가 같다.

즉, $0+\int_0^a v_1(t)dt=0+\int_0^a v_2(t)dt$이므로

$\int_0^a (t^2-2t)dt=\int_0^a 2tdt$

$\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^a=\left[t^2\right]_0^a$

$\frac{1}{3}a^3-a^2=a^2$, $a^3-6a^2=0$

$a^2(a-6)=0 \qquad \therefore a=6\ (\because a>0)$

정답_ 6

749

$v(t)=0$에서 $2t-6=0$

$\therefore t=3$

이때 $k>3$이므로 점 P가 시각 $t=3$에서 $t=k$까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_3^k |2t-6|dt&=\int_3^k (2t-6)dt\\&=\left[t^2-6t\right]_3^k\\&=(k^2-6k)-(-9)=k^2-6k+9\end{aligned}$$

즉, $k^2-6k+9=25$이므로

$k^2-6k-16=0$, $(k+2)(k-8)=0$

$\therefore k=8\ (\because k>3)$

정답_ ③

750

지면에서 똑바로 위로 던진 물체가 6초 후에 다시 지면에 떨어지므로 $t=6$일 때의 위치는 0 m이다.

즉, $0+\int_0^6 (v_0-10t)dt=0$이므로

$\left[v_0t-5t^2\right]_0^6=6v_0-180=0$

$\therefore v_0=30\ (\mathrm{m/s})$

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0 m/s이므로 $v(t)=0$에서

$30-10t=0 \qquad \therefore t=3$

따라서 물체는 3초 후 최고 높이에 도달하므로 이 물체의 최고 높이는

$$0+\int_0^3 (30-10t)dt=\left[30t-5t^2\right]_0^3=45\ (\mathrm{m})$$

정답_ ③

751

처음에 지면에 정지해 있었으므로 출발한 지 45초 후의 지면으로부터 열기구의 높이는

$$\begin{aligned}0+\int_0^{45} v(t)dt&=\int_0^{30} tdt+\int_{30}^{45} (90-2t)dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{30}+\left[90t-t^2\right]_{30}^{45}\\&=450+(2025-1800)=675\ (\mathrm{m})\end{aligned}$$

정답_ 675 m

752

3 km를 달리는 데 걸린 시간을 x분이라고 하면

$$\begin{aligned}\int_0^x v(t)dt&=\int_0^x \left(\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t\right)dt\\&=\left[\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^x\\&=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2=3\end{aligned}$$

$x^3+x^2-12=0$, $(x-2)(x^2+3x+6)=0$

$\therefore x=2\ (\because x^2+3x+6>0)$

이때 $v(2)=3+1=4$이므로 2분 후부터는 속도가 4 km/min으로 일정하다.

따라서 나머지 3분 동안 열차가 달린 거리는 $4\times3=12\ (\mathrm{km})$이므로 출발 후 5분 동안 이 열차가 달린 거리는

$3+12=15\ (\mathrm{km})$

정답_ ③

753

속도가 일정한 비율로 줄어들었으므로 브레이크를 밟은 후 시각 t초에서의 속도를 $v(t)$라고 하면

$v(t)=60-kt\ (\mathrm{m/s})$ (단, k는 상수)

정지했을 때의 속도는 0 m/s이므로 $v(t)=0$에서

$60-kt=0 \qquad \therefore t=\frac{60}{k}$

따라서 브레이크를 밟은 후 정지할 때까지 자동차가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{60}{k}} (60-kt)dt=\left[60t-\frac{1}{2}kt^2\right]_0^{\frac{60}{k}}=\frac{1800}{k}\ (\mathrm{m})$$

즉, $\frac{1800}{k}=300$이므로 $k=6$

따라서 브레이크를 밟은 후 정지할 때까지 걸린 시간은

$t=\frac{60}{6}=10$(초)

정답_ 10초

754

원점을 출발하였으므로 물체가 다시 원점을 통과하는 것은 위치의 변화량이 0일 때이다.

$$\begin{aligned}\int_0^{12} v(t)dt&=\int_0^6 v(t)dt+\int_6^{12} v(t)dt\\&=\frac{1}{2}\times6\times4-\frac{1}{2}\times6\times4=0\end{aligned}$$

이므로 12초 동안 물체의 위치의 변화량이 0이다.

따라서 물체가 다시 원점을 통과하는 것은 12초 후이다.

정답_ ③

755

ㄱ. 1초 동안 $v(t)=0$인 적은 없다. (거짓)

ㄴ. 시각 $t=4$와 시각 $t=6$에서 속도의 부호가 바뀌므로 운동 방향이 바뀐다.
즉, 점 P는 출발 후 운동 방향을 2번 바꾼다. (참)

ㄷ. 시각 $t=4$에서의 점 P의 위치는
$0+\int_0^4 v(t)dt=\frac{1}{2}\times(2+4)\times2=6$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

정답_ ②

756

② 속력은 $|v(t)|$이므로 시각 $t=5$에서 점 P의 속력이 최대이다.

③ $v(2)<0$이므로 $t=2$일 때 점 P는 음의 방향으로 움직이고 있다.

④ $t=4$일 때 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 시각 $t=4$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

⑤ 주어진 그래프에 의하여 $v(t)=(t-2)^2-4=t^2-4t$이므로

시각 $t=2$에서의 위치는

$$0+\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2 (t^2-4t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_0^2$$

$$=-\frac{16}{3}$$

시각 $t=5$에서의 위치는

$$0+\int_0^5 v(t)dt=\int_0^5 (t^2-4t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_0^5$$

$$=-\frac{25}{3}$$

따라서 $\left|-\frac{16}{3}\right|<\left|-\frac{25}{3}\right|$이므로 시각 $t=2$에서의 위치는 시각 $t=5$에서의 위치보다 원점과 더 가깝다.

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

정답_ ②

757

점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꾸는 것은 시각 $t=a$일 때이므로

$$0+\int_0^a v(t)dt=-8$$

또, 시각 $t=c$에서의 위치가 -6이므로

$$0+\int_0^c v(t)dt=-6$$

이때 $\int_0^b v(t)dt=\int_b^c v(t)dt$이므로

$$\int_0^c v(t)dt=\int_0^a v(t)dt+\int_a^b v(t)dt+\int_b^c v(t)dt$$

$$=\int_0^a v(t)dt+\int_a^b v(t)dt+\int_0^b v(t)dt$$

$$=\int_0^a v(t)dt+\int_a^b v(t)dt+\left(\int_0^a v(t)dt+\int_a^b v(t)dt\right)$$

$$=2\int_0^a v(t)dt+2\int_a^b v(t)dt$$

즉, $-6=2\times(-8)+2\int_a^b v(t)dt$이므로

$$2\int_a^b v(t)dt=10 \qquad \therefore \int_a^b v(t)dt=5$$

따라서 점 P가 $t=a$부터 $t=b$까지 움직인 거리는 5이다.

정답_ ③

758

$$f(x)=\int(6x^2+4x-4)dx$$

$$=2x^3+2x^2-4x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=2x^3+2x^2-4x$ ······ ❶

즉, $f(x)=2x(x+2)(x-1)$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^1 |f(x)|dx$$

$$=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^1\{-f(x)\}dx$$

$$=\int_{-2}^0(2x^3+2x^2-4x)dx+\int_0^1(-2x^3-2x^2+4x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3-2x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^1$$

$=\frac{16}{3}+\frac{5}{6}=\frac{37}{6}$ ······ ❷

정답_ $\frac{37}{6}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$의 식 구하기	30 %
❷ 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	70 %

759

곡선 $y=x^2$을 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=x^2 \qquad \therefore y=-x^2$ ······ ㉠

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 26만큼 평행이동하면

$y-26=-(x-4)^2$

$\therefore f(x)=-x^2+8x+10$ ······ ❶

즉, 두 곡선 $y=x^2$, $y=f(x)$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x^2+8x+10$에서

$2x^2-8x-10=0$, $2(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$ ······ ❷

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^5\{(-x^2+8x+10)-x^2\}dx=\int_{-1}^5(-2x^2+8x+10)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2+10x\right]_{-1}^5$$

$=\frac{200}{3}-\left(-\frac{16}{3}\right)=72$ ······ ❸

정답_ 72

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$의 식 구하기	30 %
❷ 두 곡선 $y=x^2$, $y=f(x)$의 교점의 x좌표 구하기	30 %
❸ 두 곡선 $y=x^2$, $y=f(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	40 %

760

$f(x)=x^2-2x+3$이라고 하면 $f'(x)=2x-2$

점 $(t,\ t^2-2t+3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-2t+3)=(2t-2)(x-t)$

$\therefore y=(2t-2)x-t^2+3$ ······ ❶

이때 $t>0$이므로 곡선과 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S(t)=\int_0^t[(x^2-2x+3)-\{(2t-2)x-t^2+3\}]dx$$

$$=\int_0^t(x^2-2tx+t^2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_0^t$$

$=\frac{1}{3}t^3$ ······ ❷

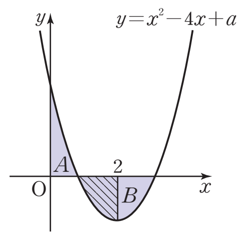
$\therefore \dfrac{S(t)}{t^3}=\dfrac{\frac{1}{3}t^3}{t^3}=\dfrac{1}{3}$ ❸

정답_ $\dfrac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식 구하기	30 %
❷ $S(t)$의 식 구하기	40 %
❸ $\dfrac{S(t)}{t^3}$의 값 구하기	30 %

761

함수 $y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, $A:B=1:2$이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{2}B=A$이다. ❶



즉, 함수 $y=x^2-4x+a$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2(x^2-4x+a)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+ax\right]_0^2$$
$$=-\frac{16}{3}+2a=0$$

$\therefore a=\dfrac{8}{3}$ ❷

정답_ $\dfrac{8}{3}$

채점 기준	비율
❶ 도형 A와 넓이가 같은 부분 찾기	60 %
❷ 상수 a의 값 구하기	40 %

762

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다. ❶

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=x$에서
$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$ ❷
따라서 구하는 넓이는

$$2\int_0^3\{x-(x^2-2x)\}dx=2\int_0^3(-x^2+3x)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$=2\times\frac{9}{2}=9$$ ❸

정답_ 9

채점 기준	비율
❶ 구하는 넓이가 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 알기	30 %
❷ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표 구하기	30 %
❸ 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	40 %

763

$v_1(t)=v_2(t)$에서
$-t^2+8t=2t^2-t$, $3t^2-9t=0$
$3t(t-3)=0 \quad \therefore t=3\ (\because t>0)$ ❶
시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 v_1(t)dt=\int_0^3(-t^2+8t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+4t^2\right]_0^3$$
$$=27$$ ❷

시각 $t=3$에서의 점 Q의 위치는

$$\frac{1}{2}+\int_0^3 v_2(t)dt=\frac{1}{2}+\int_0^3(2t^2-t)dt$$
$$=\frac{1}{2}+\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^3$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=14$$ ❸

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는
$27-14=13$ ❹

정답_ 13

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각 구하기	20 %
❷ 시각 $t=3$에서 점 P의 위치 구하기	30 %
❸ 시각 $t=3$에서 점 Q의 위치 구하기	30 %
❹ 두 점 P, Q 사이의 거리 구하기	20 %

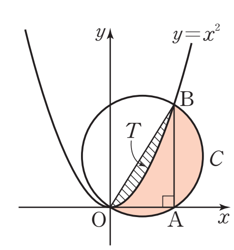
764

$$S_1=\int_{-a}^0 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^0=\frac{1}{3}a^3$$
$$S_2=3\times9-a\times a^2-\int_a^3 x^2dx$$
$$=27-a^3-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^3$$
$$=27-a^3-\left(9-\frac{1}{3}a^3\right)$$
$$=18-\frac{2}{3}a^3$$
$$\therefore 2S_1+S_2=\frac{2}{3}a^3+\left(18-\frac{2}{3}a^3\right)=18$$

정답_ ④

765

세 점 O, A$(t, 0)$, B(t, t^2)은 원 C 위의 점이고 $\angle$OAB$=90^\circ$이므로 $\overline{\text{OB}}$는 원의 지름이다.
즉, $\overline{\text{OB}}$의 중점이 원 C의 중심이다.
이때
$\overline{\text{OB}}=\sqrt{(t-0)^2+(t^2-0)^2}=\sqrt{t^4+t^2}$
이므로 원 C의 반지름의 길이는
$\dfrac{\sqrt{t^4+t^2}}{2}$



이때 직선 OB와 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T라고 하면

$T=\triangle\mathrm{OAB}-\int_0^t x^2dx$

$=\frac{1}{2}\times t\times t^2-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t$

$=\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{6}t^3$

따라서 $S(t)$는 반원의 넓이에서 T를 뺀 것과 같으므로

$S(t)=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{\sqrt{t^4+t^2}}{2}\right)^2-\frac{1}{6}t^3=\frac{t^4+t^2}{8}\pi-\frac{1}{6}t^3$

$S'(t)=\frac{4t^3+2t}{8}\pi-\frac{1}{2}t^2=\frac{2t^3+t}{4}\pi-\frac{1}{2}t^2$

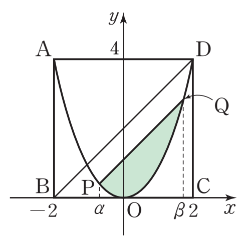
$\therefore S'(1)=\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}=\frac{3\pi-2}{4}$

따라서 $p=3$, $q=-2$이므로

$p^2+q^2=9+4=13$

정답_ 13

766



오른쪽 그림과 같이 선분 BC를 지나는 직선을 x축, 선분 BC의 중점을 지나고 선분 BC에 수직인 직선을 y축으로 정하자.

포물선의 방정식을 $y=ax^2$ $(a>0)$이라고 하면 점 $\mathrm{D}(2, 4)$를 지나므로

$4=a\times 2^2$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore y=x^2$

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=3\sqrt{2}$이고, 직선 PQ가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$이므로

$\beta-\alpha=\overline{\mathrm{PQ}}\cos 45°=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$

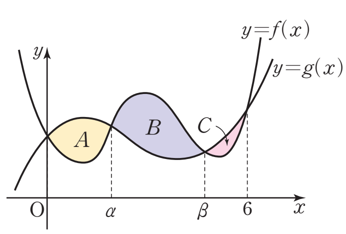
따라서 구하는 넓이는

$\left|\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right|=\frac{1}{6}\times 3^3=\frac{9}{2}$

정답_ ④

767

다음 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표 중 0, 6이 아닌 것을 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하자.



$\int_0^6\{f(x)-g(x)\}dx$

$=\int_0^\alpha\{f(x)-g(x)\}dx+\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx$

$\quad+\int_\beta^6\{f(x)-g(x)\}dx$

$=-\int_0^\alpha\{g(x)-f(x)\}dx+\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx$

$\quad-\int_\beta^6\{g(x)-f(x)\}dx$

$=-A+B-C$

즉, $-A+B-C=3$이므로 $B=A+C+3$

이때 $A+2C=B$이므로

$A+2C=A+C+3$ $\quad\therefore C=3$

정답_ 3

768

$f(x)=x^3-6x^2+8x+1$에서

$f'(x)=3x^2-12x+8$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(k, f(k))$에서의 접선의 방정식은

$y-(k^3-6k^2+8k+1)=(3k^2-12k+8)(x-k)$

$\therefore y=(3k^2-12k+8)x-2k^3+6k^2+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $\mathrm{A}(0, 1)$을 지나므로

$1=-2k^3+6k^2+1$, $2k^3-6k^2=0$

$k^2(k-3)=0$ $\quad\therefore k=3$ $(\because k>0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $y=-x+1$

따라서

$S_1=\int_0^3\{f(x)-(-x+1)\}dx=\int_0^3\{f(x)+x-1\}dx$

$S_2=\int_0^3\{(-x+1)-g(x)\}dx=\int_0^3\{-g(x)-x+1\}dx$

이고 $S_1=S_2$이므로

$\int_0^3\{f(x)+x-1\}dx=\int_0^3\{-g(x)-x+1\}dx$

$\int_0^3\{f(x)+x-1\}dx=-\int_0^3 g(x)dx+\int_0^3(-x+1)dx$

$\therefore \int_0^3 g(x)dx=-\int_0^3\{f(x)+x-1\}dx+\int_0^3(-x+1)dx$

$=\int_0^3\{-f(x)-2x+2\}dx$

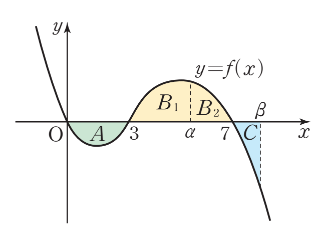
$=\int_0^3(-x^3+6x^2-10x+1)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-5x^2+x\right]_0^3$

$=-\frac{33}{4}$

정답_ ②

769



오른쪽 그림과 같이 $A=B_1$을 만족시키는 x의 값을 α $(3<\alpha<7)$, $B_2=C$를 만족시키는 x의 값을 β $(\beta>7)$라고 하자.

$A=B_1$에서

$-\int_0^3 f(x)dx=\int_3^\alpha f(x)dx$

$\int_0^3 f(x)dx+\int_3^\alpha f(x)dx=0$

$\therefore \int_0^\alpha f(x)dx=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $B_2=C$에서

$\int_\alpha^7 f(x)dx=-\int_7^\beta f(x)dx$

$\int_\alpha^7 f(x)dx+\int_7^\beta f(x)dx=0$

$\therefore \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$\int_{0}^{\beta} f(x)dx=\int_{0}^{\alpha} f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$

한편, $x>\beta$에서 $f(x)<0$이므로 $t>\beta$인 t에 대하여

$\int_{0}^{t} f(x)dx<0$

따라서 $\int_{0}^{t} f(x)dx=0$을 만족시키는 양수 t는 α, β의 2개이다.

정답_ ③

770

곡선 $y=ax^2+4$와 x축의 교점의 x좌표는

$ax^2+4=0$, $x^2=-\frac{4}{a}$

$\therefore x=\pm\sqrt{-\frac{4}{a}}$

곡선 $y=-x^2+4$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+4=0$, $x^2=4$

$\therefore x=\pm 2$

이때 곡선 $y=ax^2+4$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 곡선 $y=-x^2+4$가 삼등분하고, 두 곡선 모두 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{0}^{\sqrt{-\frac{4}{a}}} (ax^2+4)dx=3\int_{0}^{2}(-x^2+4)dx$

$\left[\frac{a}{3}x^3+4x\right]_{0}^{\sqrt{-\frac{4}{a}}}=3\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{0}^{2}$

$\frac{16}{3}\sqrt{-\frac{1}{a}}=16$, $\sqrt{-\frac{1}{a}}=3$

$-\frac{1}{a}=9$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{9}$

정답_ ③

771

$x\ge t$일 때, 직선 $y=-(x-t)+f(t)$와 x축의 교점의 x좌표는

$-(x-t)+f(t)=0$ $\quad\therefore x=t+f(t)$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$$S(t)=\int_{0}^{t} f(x)dx+\int_{t}^{t+f(t)}\{-(x-t)+f(t)\}dx$$
$$=\int_{0}^{t} f(x)dx+\left[-\frac{1}{2}x^2+\{t+f(t)\}x\right]_{t}^{t+f(t)}$$
$$=\int_{0}^{t} f(x)dx+\frac{\{f(t)\}^2}{2}$$

$S(t)$를 t에 대하여 미분하면

$S'(t)=f(t)+f(t)f'(t)=f(t)\{1+f'(t)\}$

이때 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$이므로

$$1+f'(t)=1+\frac{1}{9}\{(t-6)(t-9)+t(t-9)+t(t-6)\}$$
$$=1+\frac{1}{9}\{(t^2-15t+54)+(t^2-9t)+(t^2-6t)\}$$
$$=1+\frac{1}{3}(t^2-10t+18)=\frac{1}{3}(t^2-10t+21)$$
$$=\frac{1}{3}(t-3)(t-7)$$

$S'(t)=0$에서 $t=3$ ($\because 0<t<6$)

$0<t<6$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(6)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=3$에서 극대이고 최대이므로 구하는 최댓값은

$$S(3)=\int_{0}^{3} f(x)dx+\frac{\{f(3)\}^2}{2}$$
$$=\int_{0}^{3}\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)dx+\frac{6^2}{2}$$
$$=\frac{1}{9}\int_{0}^{3}(x^3-15x^2+54x)dx+18$$
$$=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4-5x^3+27x^2\right]_{0}^{3}+18$$
$$=\frac{1}{9}\times\frac{513}{4}+18=\frac{129}{4}$$

정답_ ③

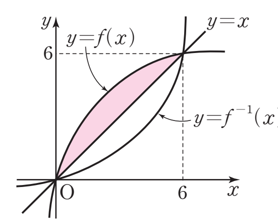
772

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\int_{0}^{6}\{f(x)-x\}dx$는 [그림1]에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$\int_{0}^{6}\{x-f^{-1}(x)\}dx$

$=\int_{0}^{6}\{f(x)-x\}dx=6$

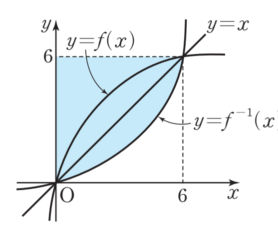


[그림1]

이때 $\int_{0}^{6}\{6-f^{-1}(x)\}dx$는 [그림2]에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$\int_{0}^{6}\{6-f^{-1}(x)\}dx$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 6+6=24$



[그림2]

정답_ ④

다른 풀이

$\int_{0}^{6}\{x-f^{-1}(x)\}dx=6$에서

$$\int_{0}^{6}xdx-\int_{0}^{6}f^{-1}(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{6}-\int_{0}^{6}f^{-1}(x)dx$$
$$=18-\int_{0}^{6}f^{-1}(x)dx=6$$

$\therefore \int_{0}^{6}f^{-1}(x)dx=12$

따라서 구하는 값은

$$\int_{0}^{6}\{6-f^{-1}(x)\}dx=\int_{0}^{6}6dx-\int_{0}^{6}f^{-1}(x)dx$$
$$=\left[6x\right]_{0}^{6}-12$$
$$=36-12=24$$

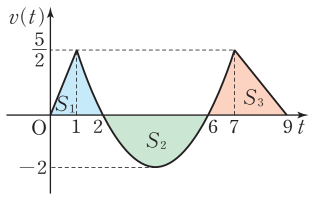
773

$\frac{1}{2}t^2-4t+6=0$에서

$t^2-8t+12=0$, $(t-2)(t-6)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=6$

따라서 함수 $v(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라고 하면

$$S_1=\int_0^1 \frac{5}{2}t\,dt+\int_1^2\left(\frac{1}{2}t^2-4t+6\right)dt$$
$$=\left[\frac{5}{4}t^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{6}t^3-2t^2+6t\right]_1^2$$
$$=\frac{5}{4}+\left(\frac{16}{3}-\frac{25}{6}\right)=\frac{29}{12}$$

$$S_2=-\int_2^6\left(\frac{1}{2}t^2-4t+6\right)dt$$
$$=-\left[\frac{1}{6}t^3-2t^2+6t\right]_2^6$$
$$=\frac{16}{3}$$

$$S_3=\int_6^7\left(\frac{1}{2}t^2-4t+6\right)dt+\int_7^9\left(-\frac{5}{4}t+\frac{45}{4}\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{6}t^3-2t^2+6t\right]_6^7+\left[-\frac{5}{8}t^2+\frac{45}{4}t\right]_7^9$$
$$=\frac{7}{6}+\left(\frac{405}{8}-\frac{385}{8}\right)=\frac{11}{3}$$

에서 $S_1<S_3<S_2$이므로 $t=6$일 때 선분 OP의 길이가 최대이다.

따라서 선분 OP의 길이의 최댓값은

$$\left|\frac{29}{12}-\frac{16}{3}\right|=\frac{35}{12}$$

정답_ ①

참고 $0\le t<2$에서 점 P는 양의 방향으로 움직이므로

$t=2$일 때 점 P의 좌표는 $\frac{29}{12}$

$2<t<6$에서 점 P는 음의 방향으로 움직이므로

$t=6$일 때 점 P의 좌표는 $\frac{29}{12}-\frac{16}{3}=-\frac{35}{12}$

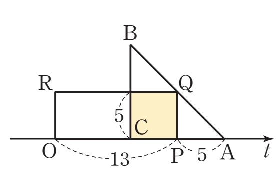
$6<t<9$에서 점 P는 양의 방향으로 움직이므로

$t=9$일 때 점 P의 좌표는 $\frac{29}{12}-\frac{16}{3}+\frac{11}{3}=\frac{3}{4}$

따라서 선분 OP의 길이가 최대일 때, 즉 점 P가 원점과 가장 멀리 떨어져 있을 때는 $t=6$일 때이다.

774

직사각형 OPQR와 겹쳐지는 부분이 최초로 직사각형이 될 때는 오른쪽 그림과 같이 점 Q가 직각이등변삼각형 ABC의 빗변 위에 있을 때이다.



이때 점 A의 위치는 18이므로 이때까지 걸린 시간을 x라고 하면

$$\int_0^x v(t)dt=\int_0^x(3t^2-2t)dt=\left[t^3-t^2\right]_0^x=x^3-x^2=18$$

$x^3-x^2-18=0$, $(x-3)(x^2+2x+6)=0$

$\therefore x=3$

따라서 구하는 t의 값은 3이다.

정답_ 3

775

ㄱ. P 지점에서 Q 지점까지의 거리를 s라고 하면 A와 C의 평균 속도는

$\frac{(위치의\ 변화량)}{(걸린\ 시간)}=\frac{s}{40}$

이므로 같다. (참)

ㄴ. 속도의 그래프에서 가속도는 접선의 기울기이다.

B의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 순간은 한 번, C의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 순간은 세 번 있다. (참)

ㄷ. A, B, C의 속도의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 위치의 변화량을 나타낸다.

이때 A, B, C 모두 P 지점에서 출발하여 Q 지점에 도착했으므로 위치의 변화량은 모두 같다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤