풍산자
라이트유형
대수

정답과 풀이

01 지수

기본을 다지는 유형

본문 009쪽

001

(1) 27의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=27$

$x^3-27=0$, $(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 27의 세제곱근은 3, $\frac{-3+3\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$이다.

(2) -27의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=-27$

$x^3+27=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -27의 세제곱근은 -3, $\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$이다.

(3) 16의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=16$

$x^4-16=0$, $(x^2+4)(x^2-4)=0$

$(x^2+4)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=\pm2i$ 또는 $x=\pm2$

따라서 16의 네제곱근은 $2i$, $-2i$, 2, -2이다.

(4) 4의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=4$

$x^4-4=0$, $(x^2+2)(x^2-2)=0$

$(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 4의 네제곱근은 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$이다.

답 (1) 3, $\frac{-3+3\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$ (2) -3, $\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $2i$, $-2i$, 2, -2 (4) $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$

002

(1) 8의 제곱근을 x라고 하면 $x^2=8$

$\therefore x=\pm2\sqrt{2}$

따라서 8의 제곱근 중에서 실수인 것은 $2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$이다.

(2) -64의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=-64$

$x^3+64=0$, $(x+4)(x^2-4x+16)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}i$

따라서 -64의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -4이다.

(3) 1의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=1$

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 1의 세제곱근 중에서 실수인 것은 1이다.

(4) 25의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=25$

$x^4-25=0$, $(x^2+5)(x^2-5)=0$

$(x^2+5)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}$

따라서 25의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$이다.

답 (1) $2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$ (2) -4

(3) 1 (4) $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$

003

-12의 세제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^3=-12$의 실근이므로 1개이다.

$\therefore m=1$

또, 15의 네제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^4=15$의 실근이므로 2개이다.

$\therefore n=2$

$\therefore m+n=1+2=3$

답 ③

004

양수인 것은 ㅁ, ㅂ의 2개이므로

$a=2$ ❶

음수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅅ의 4개이므로

$b=4$ ❷

$\therefore b-a=4-2=2$ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	45 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	45 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고

ㄴ, ㅇ, ㅈ은 허수이다.

005

(i) $n=3$일 때, $2n^2-9n=2\times3^2-9\times3=-9$

-9의 세제곱근 중에서 실수인 것은 1개이므로

$f(3)=1$

(ii) $n=4$일 때, $2n^2-9n=2\times4^2-9\times4=-4$

-4의 네제곱근 중에서 실수인 것은 없으므로

$f(4)=0$

(iii) $n=5$일 때, $2n^2-9n=2\times5^2-9\times5=5$

5의 다섯제곱근 중에서 실수인 것은 1개이므로

$f(5)=1$

(iv) $n=6$일 때, $2n^2-9n=2\times6^2-9\times6=18$

18의 여섯제곱근 중에서 실수인 것은 2개이므로

$f(6)=2$

(i)~(iv)에서

$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

답 4

006

(1) $\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\times8}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(2) $\sqrt[3]{\frac{1}{81}}\times\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{\frac{1}{81}\times\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^6}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(3) $\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[3]{\frac{64}{8}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

(4) $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{162}}=\sqrt[4]{\frac{2}{162}}=\sqrt[4]{\frac{1}{81}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}=\frac{1}{3}$

답 (1) 2 (2) $\frac{1}{9}$ (3) 2 (4) $\frac{1}{3}$

007

(1) $(\sqrt[4]{9})^2=\sqrt[4]{9^2}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(2) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}=\sqrt[4]{\sqrt{256}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(3) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{9}\right)^9}=\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^{18}}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

(4) $\sqrt[5]{8}\times\sqrt[10]{16}=\sqrt[10]{8^2}\times\sqrt[10]{16}=\sqrt[10]{2^6\times2^4}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$

답 (1) 3 (2) 2 (3) $\frac{1}{27}$ (4) 2

| 다른 풀이 |

(2) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}=\sqrt{\sqrt[4]{2^8}}=\sqrt{2^2}=2$

(4) $\sqrt[5]{8}\times\sqrt[10]{16}=\sqrt[5]{2^3}\times\sqrt[10]{2^4}=\sqrt[5]{2^3}\times\sqrt[5]{2^2}$

$=\sqrt[5]{2^3\times2^2}=\sqrt[5]{2^5}=2$

008

$\sqrt[4]{48}+\sqrt[4]{243}-\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{2^4\times3}+\sqrt[4]{3^4\times3}-\sqrt[4]{3}$

$=2\sqrt[4]{3}+3\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{3}=4\sqrt[4]{3}$

$\therefore a=4$

답 4

009

$(\sqrt[3]{2\times\sqrt[4]{6}})^4=\sqrt[3]{(2\times\sqrt[4]{6})^4}=\sqrt[3]{2^4\times(\sqrt[4]{6})^4}$

$=\sqrt[3]{16\times6}=\sqrt[3]{96}$

이때 $\sqrt[3]{64}<\sqrt[3]{96}<\sqrt[3]{125}$이므로

$4<\sqrt[3]{96}<5$

따라서 $(\sqrt[3]{2\times\sqrt[4]{6}})^4$보다 작은 자연수 중에서 가장 큰 수는 4이다.

답 ③

010

$\sqrt{\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt[5]{a^6}}}=\frac{\sqrt{\sqrt[5]{a^4}}}{\sqrt{\sqrt{a}}}\times\frac{\sqrt[4]{\sqrt{a^2}}}{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^6}}}=\frac{\sqrt[10]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}\times\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[20]{a^6}}$

$=\frac{\sqrt[10]{a^4}}{\sqrt[20]{a^6}}=\sqrt[20]{\frac{a^8}{a^6}}$

$=\sqrt[20]{a^2}=\sqrt[10]{a}$

$\therefore n=1$

답 ①

011

$\sqrt{\sqrt[3]{25}}=\sqrt[6]{25}$, $\sqrt[3]{2\sqrt{7}}=\sqrt[3]{\sqrt{28}}=\sqrt[6]{28}$이고 $10<25<28$이므로

$\sqrt[6]{10}<\sqrt[6]{25}<\sqrt[6]{28}$

따라서 $M=\sqrt[6]{28}$, $m=\sqrt[6]{10}$이므로

$M^6-m^6=28-10=18$

답 18

| 다른 풀이 |

$A=\sqrt{\sqrt[3]{25}}$, $B=\sqrt[6]{10}$, $C=\sqrt[3]{2\sqrt{7}}$이라고 하면

$A^6=(\sqrt{\sqrt[3]{25}})^6=(\sqrt[6]{25})^6=25$

$B^6=(\sqrt[6]{10})^6=10$

$C^6=(\sqrt[3]{2\sqrt{7}})^6=(\sqrt[3]{\sqrt{28}})^6=(\sqrt[6]{28})^6=28$

$\therefore B^6<A^6<C^6$

이때 A, B, C는 양수이므로

$B<A<C$

따라서 $M=\sqrt[3]{2\sqrt{7}}$, $m=\sqrt[6]{10}$이므로

$M^6-m^6=28-10=18$

012

$A-C=\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}-(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{5})$

$=\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{3}>0$

$\therefore A>C$ ·········· ㉠

$B-C=\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}-(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{5})$

$=\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{5}=\sqrt[12]{8}-\sqrt[12]{625}<0$

$\therefore B<C$ ·········· ㉡

㉠, ㉡에서 $B<C<A$

답 ④

참고

두 수의 차를 이용하여 실수의 대소를 비교할 수 있다.

➡ 실수 a, b에 대하여

$a-b>0$이면 $a>b$

$a-b=0$이면 $a=b$

$a-b<0$이면 $a<b$

013

(1) $4^{-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

(2) $\left(-\frac{1}{5}\right)^0=1$

(3) $(a^3\div a^4)^{-3}=(a^{3-4})^{-3}=(a^{-1})^{-3}=a^3$

(4) $(a^{-1})^2\div(a^2)^{-4}\times a^{-3}=a^{-2}\div a^{-8}\times a^{-3}=a^{-2-(-8)-3}=a^3$

답 (1) $\frac{1}{16}$ (2) 1 (3) a^3 (4) a^3

014

(1) $(3^{-2})^{-2}\div3^6\times3^{-1}=3^4\div3^6\times3^{-1}$

$=3^{4-6-1}=3^{-3}=\frac{1}{27}$

(2) $\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left\{\left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(\frac{81}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=\left(\frac{8}{3}\times\frac{81}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

(3) $\left(\frac{2^{\sqrt{7}}}{8}\right)^{\sqrt{7}+3}=\left(\frac{2^{\sqrt{7}}}{2^3}\right)^{\sqrt{7}+3}=(2^{\sqrt{7}-3})^{\sqrt{7}+3}=2^{(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)}$

$=2^{7-9}=2^{-2}=\frac{1}{4}$

답 (1) $\frac{1}{27}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$

015

$9\times4^{-\frac{1}{6}}\times(3^{\sqrt{2}}\times2^{\frac{2\sqrt{2}}{3}})^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=3^2\times2^{-\frac{1}{3}}\times\{3^{\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\times2^{\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\}$

$=3^2\times2^{-\frac{1}{3}}\times3^{-1}\times2^{-\frac{2}{3}}$

$=3^{2-1}\times2^{-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}$

$=3\times2^{-1}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

016

$$12^{\frac{2}{3}} \div 18^{-\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{8}{9}} = (2^2\times 3)^{\frac{2}{3}} \div (2\times 3^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2^3)^{\frac{8}{9}}$$
$$= (2^{\frac{4}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}})\times(2^{\frac{1}{2}}\times 3)\times 2^{\frac{8}{3}}$$
$$= 2^{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}+\frac{8}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}+1} = 2^{\frac{9}{2}}\times 3^{\frac{5}{3}}$$

따라서 $\alpha=\frac{9}{2}$, $\beta=\frac{5}{3}$이므로

$$\alpha\beta=\frac{9}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{15}{2}$$

답 $\frac{15}{2}$

017

ㄱ. $36^{-0.25}=(6^2)^{-\frac{1}{4}}=6^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$ (참)

ㄴ. $\left(\frac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3}=\left(\frac{3^{2\sqrt{2}}}{3^3}\right)^{2\sqrt{2}+3}=(3^{2\sqrt{2}-3})^{2\sqrt{2}+3}=3^{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}$

$=3^{-1}=\frac{1}{3}$ (참)

ㄷ. $(\sqrt{5})^{5\sqrt{5}}=\{(\sqrt{5})^5\}^{\sqrt{5}}=(25\sqrt{5})^{\sqrt{5}}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

018

$$\frac{27^{10}}{27^{10}-27^{-10}}+\frac{9^{-15}}{9^{-15}-9^{15}}=\frac{(3^3)^{10}}{(3^3)^{10}-(3^3)^{-10}}+\frac{(3^2)^{-15}}{(3^2)^{-15}-(3^2)^{15}}$$
$$=\frac{3^{30}}{3^{30}-3^{-30}}+\frac{3^{-30}}{3^{-30}-3^{30}}$$
$$=\frac{3^{60}}{3^{60}-1}+\frac{1}{1-3^{60}}$$

두 항의 분자와 분모에 각각 3^{30}을 곱한다.

$$=\frac{3^{60}-1}{3^{60}-1}=1$$

답 ③

019

$$f(x)=\frac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}+x^{-5}+x^{-6}+x^{-7}}$$
$$=\frac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^7}}$$
$$=\frac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{\frac{1}{x^7}(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{x^7}}=x^7$$

$\therefore f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^7=8\sqrt{2}$

답 ④

020

$\left(\frac{1}{512}\right)^{\frac{1}{n}}=(2^{-9})^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{9}{n}}$ ······ ❶

즉, $2^{-\frac{9}{n}}$이 자연수가 되려면 $-n$은 9의 양의 약수이어야 한다.
······ ❷

9의 양의 약수는 1, 3, 9이므로 주어진 조건을 만족시키는 n은 -1, -3, -9의 3개이다. ······ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 밑이 자연수가 되도록 바꿀 수 있다.	35 %
❷ 주어진 식이 자연수가 되도록 하는 $-n$의 조건을 찾을 수 있다.	35 %
❸ 조건을 만족시키는 n을 찾고, 그 개수를 구할 수 있다.	30 %

021

$$\sqrt{\sqrt[4]{a}}\times\sqrt{a\times\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}=\sqrt[8]{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt[3]{a}}\times\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$$
$$=\sqrt[8]{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[12]{a}$$
$$=a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{12}}$$
$$=a^{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}$$
$$=a^{\frac{3+12+4+2}{24}}=a^{\frac{7}{8}}$$

답 ④

022

$$\sqrt[4]{a\sqrt{a^k}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{\sqrt{a^k}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[8]{a^k}$$
$$=a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{k}{8}}=a^{\frac{1}{4}+\frac{k}{8}}=a^{\frac{2+k}{8}}$$

$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{5}{3}}=(a^{-1})^{\frac{5}{3}}=a^{-\frac{5}{3}}$

이므로 $a^{\frac{2+k}{8}}=a^{-\frac{5}{3}}$

즉, $\frac{2+k}{8}=-\frac{5}{3}$이므로

$3(2+k)=-40$, $3k=-46$

$\therefore k=-\frac{46}{3}$

답 ①

023

$$\frac{\sqrt{4\sqrt{2\times\sqrt[3]{3}}}}{\sqrt[12]{12}}=\frac{\sqrt{4}\times\sqrt{\sqrt{2}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}}{\sqrt[12]{12}}=\frac{\sqrt{4}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[12]{3}}{\sqrt[12]{2^2\times 3}}$$
$$=\frac{4^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{1}{12}}}{(2^2\times 3)^{\frac{1}{12}}}=\frac{2\times 2^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{1}{12}}}{2^{\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{1}{12}}}$$
$$=2^{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}=2^{\frac{13}{12}}$$
$$=(2^{13})^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{2^{13}}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 양수 a의 값은 2^{13}이다.

답 ③

024

$$A=\sqrt[4]{\sqrt[3]{32}}\times\sqrt[6]{4}=\sqrt[12]{32}\times\sqrt[6]{4}=\sqrt[12]{2^5}\times\sqrt[3]{2}$$
$$=2^{\frac{5}{12}}\times 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{12}+\frac{1}{3}}=2^{\frac{3}{4}}$$

즉, $A^n=(2^{\frac{3}{4}})^n=2^{\frac{3}{4}n}$이 정수가 되려면 n은 4의 배수이어야 한다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 4이다.

답 ②

025

$(\sqrt[n]{a})^3=a^{\frac{3}{n}}$ ······ ㉠

㉠에 $a=4$를 대입하면 $4^{\frac{3}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$
이 값이 자연수가 되려면 n이 2 이상인 6의 약수이어야 하므로
$n=2,\ 3,\ 6 \qquad \therefore f(4)=6$
㉠에 $a=27$을 대입하면 $27^{\frac{3}{n}}=3^{\frac{9}{n}}$
이 값이 자연수가 되려면 n이 2 이상인 9의 약수이어야 하므로
$n=3,\ 9 \qquad \therefore f(27)=9$
$\therefore f(4)+f(27)=6+9=15$

답 ③

026

$a=2^{\frac{1}{2}}$에서 $2=a^2$
$b=3^{\frac{2}{3}}$에서 $3=b^{\frac{3}{2}}$
이때 $648=2^3\times3^4$이므로
$a^mb^n=648=2^3\times3^4$
$\quad=(a^2)^3\times(b^{\frac{3}{2}})^4=a^6b^6$
따라서 $m=6$, $n=6$이므로
$m+n=6+6=12$

답 ②

027

$a^2=\sqrt[4]{3}$에서 $a^2=3^{\frac{1}{4}} \qquad \therefore a=3^{\frac{1}{8}}$
$b^3=\sqrt[3]{4}$에서 $b^3=4^{\frac{1}{3}} \qquad \therefore b=4^{\frac{1}{9}}$
$\therefore (ab)^9=a^9b^9=(3^{\frac{1}{8}})^9\times(4^{\frac{1}{9}})^9=3^{\frac{9}{8}}\times4$

답 ④

028

$28^a\div28^b=81\div9=9$이므로 $a-b$가 나오도록 식을 변형한다.
$28^{a-b}=9$
$\therefore 9^{\frac{1}{a-b}}=(28^{a-b})^{\frac{1}{a-b}}=28$

답 ①

029

$3^{a-1}=2$에서 $\frac{3^a}{3}=2 \qquad \therefore 3^a=6$
$6^{2b}=5$에서 $(3^a)^{2b}=5 \qquad \therefore 3^{2ab}=5$
$\therefore 5^{\frac{1}{ab}}=(3^{2ab})^{\frac{1}{ab}}=3^2=9$

답 9

030

$31^x=8$에서 $31^x=2^3 \qquad \therefore 31=2^{\frac{3}{x}}$
$496^y=32$에서 $496^y=2^5 \qquad \therefore 496=2^{\frac{5}{y}}$
이때 $2^{\frac{5}{y}-\frac{3}{x}}=\frac{2^{\frac{5}{y}}}{2^{\frac{3}{x}}}=\frac{496}{31}=16=2^4$이므로
$\frac{5}{y}-\frac{3}{x}=4$

답 ③

031

$7^{\frac{1}{2}}=A$, $3^{\frac{1}{2}}=B$로 놓으면
$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(A+B)^2+(A-B)^2\\&=(A^2+2AB+B^2)+(A^2-2AB+B^2)\\&=2(A^2+B^2)\\&=2\{(7^{\frac{1}{2}})^2+(3^{\frac{1}{2}})^2\}\\&=2(7+3)=20\end{aligned}$$

답 ④

032

$2^{\frac{1}{3}}=A$, $3^{\frac{1}{3}}=B$로 놓으면
$4^{\frac{1}{3}}=A^2$, $9^{\frac{1}{3}}=B^2$이므로
$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(A+B)(A^2-AB+B^2)\\&=A^3+B^3\\&=(2^{\frac{1}{3}})^3+(3^{\frac{1}{3}})^3\\&=2+3=5\end{aligned}$$

답 5

풍쌤 개념 CHECK

곱셈 공식_高 공통수학 1
(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

033

앞에서부터 두 항씩 차례대로 통분하여 곱셈 공식
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 연쇄적으로 적용하면
$$\frac{2}{1-5^{\frac{1}{8}}}+\frac{2}{1+5^{\frac{1}{8}}}+\frac{4}{1+5^{\frac{1}{4}}}+\frac{8}{1+5^{\frac{1}{2}}}$$
$$\frac{2(1+5^{\frac{1}{8}})+2(1-5^{\frac{1}{8}})}{(1-5^{\frac{1}{8}})(1+5^{\frac{1}{8}})}=\frac{4}{(1-5^{\frac{1}{8}})(1+5^{\frac{1}{8}})}$$
$$=\frac{4}{(1-5^{\frac{1}{8}})(1+5^{\frac{1}{8}})}+\frac{4}{1+5^{\frac{1}{4}}}+\frac{8}{1+5^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{4}{1-5^{\frac{1}{4}}}+\frac{4}{1+5^{\frac{1}{4}}}+\frac{8}{1+5^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{8}{(1-5^{\frac{1}{4}})(1+5^{\frac{1}{4}})}+\frac{8}{1+5^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{8}{1-5^{\frac{1}{2}}}+\frac{8}{1+5^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{16}{(1-5^{\frac{1}{2}})(1+5^{\frac{1}{2}})}$$
$$=\frac{16}{1-5}=-4$$

답 ②

034

$$\begin{aligned}\{4^{\sqrt{3}}+(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\}\{4^{\sqrt{3}}-(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\}&=(4^{\sqrt{3}})^2-\{(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\}^2\\&=4^{2\sqrt{3}}-\{(\sqrt{2})^2\}^{\sqrt{3}}\\&=2^{4\sqrt{3}}-2^{\sqrt{3}}\\&=2^{\sqrt{3}}\times2^{3\sqrt{3}}-2^{\sqrt{3}}\\&=2^{\sqrt{3}}(2^{3\sqrt{3}}-1)\end{aligned}$$

답 ③

035

$(x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3-(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})^3$

$=\{(x^{\frac{2}{3}})^3+3\times(x^{\frac{2}{3}})^2\times x^{-\frac{1}{3}}+3\times x^{\frac{2}{3}}\times(x^{-\frac{1}{3}})^2+(x^{-\frac{1}{3}})^3\}$

$\quad-\{(x^{\frac{2}{3}})^3-3\times(x^{\frac{2}{3}})^2\times x^{-\frac{1}{3}}+3\times x^{\frac{2}{3}}\times(x^{-\frac{1}{3}})^2-(x^{-\frac{1}{3}})^3\}$

$=(x^2+3x+3+x^{-1})-(x^2-3x+3-x^{-1})$

$=6x+2x^{-1}$ ············ ❶

$=6(\sqrt{5}-2)+\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}$

$=6(\sqrt{5}-2)+\dfrac{2(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$

$=6\sqrt{5}-12+2\sqrt{5}+4$

$=8\sqrt{5}-8$ ············ ❷

답 $8\sqrt{5}-8$

채점 기준	비율
❶ 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 정리할 수 있다.	60 %
❷ 분모의 유리화를 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

036

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2$의 양변을 제곱하면

$a-2+a^{-1}=4 \qquad \therefore a+a^{-1}=6$

$a+a^{-1}=6$의 양변을 제곱하면

$a^2+2+a^{-2}=36 \qquad \therefore a^2+a^{-2}=34$

$\therefore \dfrac{a^2+a^{-2}-4}{a+a^{-1}-1}=\dfrac{34-4}{6-1}=\dfrac{30}{5}=6$

답 ⑤

037

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로

$2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2\times2^x\times2^{-x}$ $a=2^x$, $b=2^{-x}$으로 생각한다.

$\qquad=3^2-2=7$

또, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$이므로

$2^{3x}+2^{-3x}=(2^x+2^{-x})^3-3\times2^x\times2^{-x}(2^x+2^{-x})$

$\qquad=3^3-3\times3=18$

$\therefore \dfrac{2^{2x}+2^{-2x}}{2^{3x}+2^{-3x}}=\dfrac{7}{18}$

답 ②

038

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$이므로

$a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3-3\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})$

$\qquad=(\sqrt{6})^3-3\times\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

또, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$이므로

$(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-4\times a\times a^{-1}$

$\qquad=(3\sqrt{6})^2-4=50$

이때 $a>1$이므로 $a-a^{-1}>0$ $a-a^{-1}=a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2-1}{a}$

$a>1$에서 $a^2>1$이므로 $\dfrac{a^2-1}{a}>0$

$\therefore a-a^{-1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

답 ③

039

$x^3=(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}})^3$

$\quad=(3^{\frac{1}{3}})^3-(3^{-\frac{1}{3}})^3-3\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{-\frac{1}{3}}(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}})$

$\quad=3-3^{-1}-3(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}})$

$\quad=\dfrac{8}{3}-3x$

$\therefore x^3+3x=\dfrac{8}{3}$

$\therefore 3x^3+9x=3(x^3+3x)=3\times\dfrac{8}{3}=8$

답 ①

040

$(x+x^{-1})^2=x^2+2+x^{-2}=7+2=9$이므로

$x+x^{-1}=3$ ($\because x>1$에서 $x+x^{-1}>0$)

또, $(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=x-2+x^{-1}=3-2=1$이므로

$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=1$ ($\because x>1$에서 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}>0$)

$\therefore \dfrac{x+x^{-1}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{3}{1}=3$

답 3

041

$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{a^x(a^{3x}-a^{-3x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\dfrac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}-1}$

$\qquad=\dfrac{(a^{2x})^2-(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1}=\dfrac{2^2-\frac{1}{2}}{2-1}$

$\qquad=\dfrac{7}{2}$

답 ②

|다른 풀이| $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$을 이용하여 인수분해한다.

$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{(a^x-a^{-x})(a^{2x}+a^x\times a^{-x}+a^{-2x})}{a^x-a^{-x}}$

$\qquad=a^{2x}+1+a^{-2x}=2+1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$

042

$4^x=2^{2x}=3$이므로

$\dfrac{2^x+2^{-x}}{8^x+8^{-x}}=\dfrac{2^x(2^x+2^{-x})}{2^x(2^{3x}+2^{-3x})}=\dfrac{2^{2x}+1}{2^{4x}+2^{-2x}}$

$\qquad=\dfrac{2^{2x}+1}{(2^{2x})^2+(2^{2x})^{-1}}=\dfrac{3+1}{3^2+\frac{1}{3}}$

$\qquad=\dfrac{4}{\frac{28}{3}}=\dfrac{3}{7}$

답 $\dfrac{3}{7}$

|다른 풀이|

$\dfrac{2^x+2^{-x}}{8^x+8^{-x}}=\dfrac{2^x+2^{-x}}{(2^x+2^{-x})(2^{2x}-2^x\times2^{-x}+2^{-2x})}$

$\qquad=\dfrac{1}{2^{2x}-1+2^{-2x}}$

$\qquad=\dfrac{1}{3-1+\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{7}$

043

$(\sqrt{3})^{\frac{1}{x}}=a$에서 $a^x=\sqrt{3}$ ❶

$\therefore \dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\dfrac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}$ ❷

$=\dfrac{(\sqrt{3})^2+1}{(\sqrt{3})^2-1}=2$ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ a^x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 식의 분모와 분자에 a^x을 곱하여 정리할 수 있다.	50 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

|다른 풀이|

주어진 식에 $a^x=\sqrt{3}$을 대입하면

$$\frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{3+1}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{\sqrt{3}}}=\frac{4}{2}=2$$

044

$a^{-2x}=3$에서 $a^{2x}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{3x}+a^{-3x}}=\dfrac{a^x(a^{3x}-a^{-3x})}{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}=\dfrac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{4x}+a^{-2x}}$

$=\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^2-3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+3}=-\dfrac{13}{14}$

답 ④

045

$\dfrac{a^x-2a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{a^x(a^x-2a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\dfrac{a^{2x}-2}{a^{2x}+1}$

즉, $\dfrac{a^{2x}-2}{a^{2x}+1}=\dfrac{1}{4}$이므로

$4(a^{2x}-2)=a^{2x}+1$, $3a^{2x}=9$

$\therefore a^{2x}=3$

$\therefore a^{2x}+a^{-2x}=3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$

답 ③

실력을 높이는 연습 문제

본문 018쪽

01

집합 X의 원소 중에서 양수의 개수를 p, 음수의 개수를 q라고 하자. 양수의 네제곱근 중 실수인 것은 2개, 0의 네제곱근 중 실수인 것은 1개, 음수의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

이때 $n(A)=9$이므로 $0\in X$

$n(A)=2p+1=9$에서 $p=4$

실수의 세제곱근 중 실수인 것은 항상 1개이므로

$n(B)=p+q+1=7$에서 $q=2$

따라서 집합 X의 원소는 4개의 양수, 0, 2개의 음수이어야 한다.

이때 집합 X의 모든 원소의 합은

$X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$-2+(-1)+0+2+3+4+5=11$

답 11

02

3, 2, 4의 최소공배수가 12이므로

$\sqrt[3]{ab^2}\times\sqrt{a^2b}\div\sqrt[4]{b^2}=\sqrt[12]{(ab^2)^4}\times\sqrt[12]{(a^2b)^6}\div\sqrt[12]{(b^2)^3}$

$=\dfrac{\sqrt[12]{a^4b^8}\times\sqrt[12]{a^{12}b^6}}{\sqrt[12]{b^6}}$

$=\sqrt[12]{\dfrac{a^4b^8\times a^{12}b^6}{b^6}}$

$=\sqrt[12]{a^{16}b^8}=\sqrt[3]{a^4b^2}$

답 ③

|다른 풀이|

$\sqrt[3]{ab^2}\times\sqrt{a^2b}\div\sqrt[4]{b^2}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\times ab^{\frac{1}{2}}\div b^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{1}{3}+1}b^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}=(a^4b^2)^{\frac{1}{3}}$

$=\sqrt[3]{a^4b^2}$

03

$\sqrt[6]{\dfrac{\sqrt[12]{16}}{\sqrt[6]{64}}}=\dfrac{\sqrt[72]{16}}{\sqrt[36]{64}}=\dfrac{\sqrt[72]{2^4}}{\sqrt[36]{2^6}}=\dfrac{\sqrt[18]{2}}{\sqrt[18]{2^3}}$

$=\sqrt[18]{\dfrac{2}{2^3}}=\sqrt[18]{\dfrac{1}{4}}=\sqrt[18]{2^{-2}}$

$\therefore k=-2$

답 ①

04

$3=\sqrt[3]{27}$이고 $\sqrt[3]{27}<\sqrt[3]{36}$이므로

$3<\sqrt[3]{36}$

$\therefore 3*\sqrt[3]{36}=(\sqrt[3]{36})^3=36$

또, $2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이고 $36>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$36>2^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore (3*\sqrt[3]{36})*2^{-\frac{1}{2}}=36*\dfrac{\sqrt{2}}{2}=36^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$=(36^{\frac{1}{2}})^{\sqrt{2}}=6^{\sqrt{2}}$

답 ③

05

문제 접근하기

$x^3=64^{\frac{1}{7}}$이므로 이 식을 이용하여 x의 값을 구한다. 또, x^n이 1000 이하의 자연수이어야 하므로 x^n이 '자연수가 되는' 조건과 '1000 이하의 수가 되는' 조건을 둘 다 확인해야 한다.

x는 $64^{\frac{1}{7}}$의 세제곱근이므로 $x^3=64^{\frac{1}{7}}$

$x^3=(2^6)^{\frac{1}{7}}$, $x^3=2^{\frac{6}{7}}$ $\quad\therefore x=2^{\frac{2}{7}}$

즉, $x^n=2^{\frac{2}{7}n}$이 자연수가 되려면 n은 0 또는 7의 양의 배수이어야 한다.
이때 $n=28$이면 $x^{28}=2^8=256$, $n=35$이면 $x^{35}=2^{10}=1024$이므로 x^n이 1000 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n은 28 이하의 7의 배수이다.
따라서 구하는 자연수 n은 7, 14, 21, 28의 4개이다.

답 ④

06

$$2^{ab+a+b}=(2^a)^b\times 2^a\times 2^b=3^b\times 3\times 2^b$$
$$=(3^b\times 2^b)\times 3=(3\times 2)^b\times 3$$
$$=6^b\times 3=5\times 3=15$$

답 ①

07

$a=4^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}$, $b=8^{\frac{1}{12}}=2^{\frac{1}{4}}$이므로
$(\sqrt[11]{a^2b})^n=(a^2b)^{\frac{n}{11}}=(2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{1}{4}})^{\frac{n}{11}}=(2^{\frac{11}{12}})^{\frac{n}{11}}=2^{\frac{n}{12}}$
즉, $2^{\frac{n}{12}}$이 자연수가 되려면 n은 0 또는 12의 양의 배수이어야 한다.
이때 n은 100 이하의 자연수이므로 12, 24, 36, $\cdots$, 96의 8개이다.

답 ⑤

08

$\sqrt[3]{15}=A$, $\sqrt[3]{7}=B$로 놓으면
$\sqrt[3]{225}=\sqrt[3]{15^2}=(\sqrt[3]{15})^2=A^2$
$\sqrt[3]{105}=\sqrt[3]{15\times 7}=\sqrt[3]{15}\times\sqrt[3]{7}=AB$
$\sqrt[3]{49}=\sqrt[3]{7^2}=(\sqrt[3]{7})^2=B^2$
$\therefore$ (주어진 식)$=(A+B)(A^2-AB+B^2)$
$=A^3+B^3$
$=(\sqrt[3]{15})^3+(\sqrt[3]{7})^3$
$=15+7=22$

답 ④

09

$\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=3$에서 $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=3$이므로 양변을 제곱하면
$(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^2=x^{\frac{2}{3}}+2+x^{-\frac{2}{3}}=9 \qquad \therefore x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}=7$
또, 위 식의 양변을 제곱하면
$(x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}})^2=x^{\frac{4}{3}}+2+x^{-\frac{4}{3}}=49 \qquad \therefore x^{\frac{4}{3}}+x^{-\frac{4}{3}}=47$
$(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}})^2=x^{\frac{4}{3}}-2+x^{-\frac{4}{3}}=47-2=45$이므로
$x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}=3\sqrt{5}$ ($\because x>1$에서 $x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}>0$)
$\therefore \sqrt[3]{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=x^{\frac{4}{3}}-x^{-\frac{4}{3}}=(x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}})$
$=7\times 3\sqrt{5}=21\sqrt{5}$

답 $21\sqrt{5}$

10

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=10$ ⋯⋯ ㉠

한편,
$$\frac{\alpha^{-2}-\beta^{-2}}{\alpha^{-1}-\beta^{-1}}=\frac{\alpha^2\beta^2(\alpha^{-2}-\beta^{-2})}{\alpha^2\beta^2(\alpha^{-1}-\beta^{-1})}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta^2-\alpha^2\beta}$$
$$=\frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\ (\because \beta-\alpha\neq 0)$$
α, β는 서로 다른 두 실근이므로 $\alpha\neq\beta \quad \therefore \beta-\alpha\neq 0$

이므로 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{5}$
위의 식에 ㉠을 대입하면
$\frac{-a}{10}=\frac{2}{5} \qquad \therefore a=-4$

답 ④

풍쌤 개념 CHECK

이차방정식의 근과 계수의 관계_高 공통수학 1
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β라고 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

11

$f(2\alpha)=\frac{3^{2\alpha}-3^{-2\alpha}}{3^{2\alpha}+3^{-2\alpha}}=\frac{3}{5}$에서
$5(3^{2\alpha}-3^{-2\alpha})=3(3^{2\alpha}+3^{-2\alpha})$, $2\times 3^{2\alpha}=8\times 3^{-2\alpha}$
$(3^{2\alpha})^2=4 \qquad \therefore 3^{2\alpha}=2$ ($\because 3^{2\alpha}>0$)
$f(2\beta)=\frac{3^{2\beta}-3^{-2\beta}}{3^{2\beta}+3^{-2\beta}}=\frac{4}{5}$에서
$5(3^{2\beta}-3^{-2\beta})=4(3^{2\beta}+3^{-2\beta})$, $3^{2\beta}=9\times 3^{-2\beta}$
$(3^{2\beta})^2=9 \qquad \therefore 3^{2\beta}=3$ ($\because 3^{2\beta}>0$)
$$\therefore f(\alpha+\beta)=\frac{3^{\alpha+\beta}-3^{-(\alpha+\beta)}}{3^{\alpha+\beta}+3^{-(\alpha+\beta)}}=\frac{3^{\alpha+\beta}\{3^{\alpha+\beta}-3^{-(\alpha+\beta)}\}}{3^{\alpha+\beta}\{3^{\alpha+\beta}+3^{-(\alpha+\beta)}\}}$$
$$=\frac{3^{2(\alpha+\beta)}-1}{3^{2(\alpha+\beta)}+1}=\frac{3^{2\alpha}\times 3^{2\beta}-1}{3^{2\alpha}\times 3^{2\beta}+1}$$
$$=\frac{2\times 3-1}{2\times 3+1}=\frac{5}{7}$$

답 $\frac{5}{7}$

12

문제 접근하기

주어진 조건이 어떤 문자에 대입되는 숫자인지 파악한다. 4년, 10년은 $t=4$, $t=10$으로 나타낼 수 있고, 처음 물질의 양은 m_0, 4년 후의 물질의 양은 $\frac{1}{4}m_0$과 같이 나타낼 수 있다.

4년 후 이 방사능 물질의 양은 $\frac{1}{4}m_0$이므로
$\frac{1}{4}m_0=m_0\times a^{-4} \qquad \therefore a^{-4}=\frac{1}{4}$
따라서 10년 후의 이 방사능 물질의 양 m_{10}은
$m_{10}=m_0\times a^{-10}=m_0\times(a^{-4})^{\frac{5}{2}}=m_0\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{32}m_0$
$\therefore k=\frac{1}{32}$

답 ③

02 로그

기본을 다지는 유형

본문 021쪽

001

(1) $\log_2 x=3$에서 $x=2^3=8$

(2) $\log_9 x=\frac{1}{2}$에서 $x=9^{\frac{1}{2}}=3$

(3) $\log_x 32=5$에서 $x^5=32$

양변에 $\frac{1}{5}$제곱을 하면 $(x^5)^{\frac{1}{5}}=32^{\frac{1}{5}}$

$\therefore x=(2^5)^{\frac{1}{5}}=2$

(4) $\log_x 27=-3$에서 $x^{-3}=27$

양변에 $-\frac{1}{3}$제곱을 하면 $(x^{-3})^{-\frac{1}{3}}=27^{-\frac{1}{3}}$

$\therefore x=(3^3)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$

답 (1) 8 (2) 3 (3) 2 (4) $\frac{1}{3}$

002

$\log_{\sqrt{2}} a=6$에서 $a=(\sqrt{2})^6=2^3=8$

$\log_{\frac{1}{4}} 16=b$에서 $16=\left(\frac{1}{4}\right)^b$

$4^2=4^{-b}$ $\quad\therefore b=-2$

따라서 $b^6=(-2)^6=64$이므로

$\log_a b^6=\log_8 64$

이때 $\log_8 64=k$로 놓으면

$8^k=64=8^2$ $\quad\therefore k=2$

답 ③

003

$a^{\frac{1}{2}}=8$의 양변을 제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}})^2=8^2=(2^3)^2=2^6$ $\quad\therefore a=2^6$

$\therefore \log_2 a=6$

답 6

004

$\log_2\{\log_3(\log_4 x)\}=0$에서

$\log_3(\log_4 x)=2^0=1$

$\log_3(\log_4 x)=A$로 놓으면
$\log_2 A=0$에서 $A=2^0$으로 생각할 수 있다.

또, $\log_3(\log_4 x)=1$에서

$\log_4 x=3^1=3$ $\quad\therefore x=4^3=64$

답 ②

005

$\log_2(5+\log_3 x)=5$에서

$5+\log_3 x=2^5$

$\therefore \log_3 x=32-5=27$

$\log_3 x=27$에서 $x=3^{27}$

따라서 $a=3$, $b=27$이므로

$a+b=3+27=30$

답 ⑤

006

밑의 조건에 의하여 $x-9>0$, $x-9\neq1$

$x>9$, $x\neq10$

$\therefore 9<x<10$ 또는 $x>10$

답 ④

007

밑의 조건에 의하여 $x+4>0$, $x+4\neq1$

$x>-4$, $x\neq-3$

$\therefore -4<x<-3$ 또는 $x>-3$ ······ ㉠

진수의 조건에 의하여 $-x^2-6x+7>0$

$x^2+6x-7<0$, $(x+7)(x-1)<0$

$\therefore -7<x<1$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<x<-3$ 또는 $-3<x<1$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0의 3개이다.

답 ③

008

밑의 조건에 의하여

$|x-3|>0$, $|x-3|\neq1$

$\therefore x\neq2$, $x\neq3$, $x\neq4$ ······ ㉠

······ ❶

진수의 조건에 의하여

$12+4x-x^2>0$, $x^2-4x-12<0$

$(x+2)(x-6)<0$ $\quad\therefore -2<x<6$ ······ ㉡

······ ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2<x<2$ 또는 $2<x<3$ 또는 $3<x<4$ 또는 $4<x<6$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1, 5이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$-1+0+1+5=5$ ······ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 밑의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 로그가 정의되도록 하는 정수 x를 구하고, 그 합을 구할 수 있다.	20 %

009

ㄱ. 진수 x^4이 양수이므로 로그가 항상 정의된다.

ㄴ. $x<0$이면 $x^5<0$이므로 진수의 조건에 의하여 로그가 정의되지 않는다.

ㄷ. 진수 $|x|$가 양수이므로 로그가 항상 정의된다.

ㄹ. $x=-1$ 또는 $x=1$이면 $|x|=1$이므로 밑의 조건에 의하여 로그가 정의되지 않는다.

따라서 로그가 항상 정의되는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

010

(ⅰ) $\log_{x-3}(x-8)^2$의 밑의 조건에 의하여

$x-3>0,\ x-3\neq 1$

$\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ ⋯⋯ ㉠

진수의 조건에 의하여

$(x-8)^2>0 \qquad \therefore x\neq 8$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<8$ 또는 $x>8$

(ⅱ) $\log_{6-x}|x-5|$의 밑의 조건에 의하여

$6-x>0,\ 6-x\neq 1$

$\therefore x<5$ 또는 $5<x<6$ ⋯⋯ ㉢

진수의 조건에 의하여

$|x-5|>0 \qquad \therefore x\neq 5$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$x<5$ 또는 $5<x<6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 로그가 모두 정의되도록 하는 x의 값의 범위는

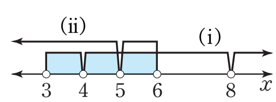
$3<x<4$ 또는 $4<x<5$ 또는 $5<x<6$

따라서 실수 x의 값의 범위가 아닌 것은 ①, ⑤이다.

답 ①, ⑤

참고

(ⅰ), (ⅱ)를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



011

(1) $\log_2 7+\log_2\frac{8}{7}=\log_2\left(7\times\frac{8}{7}\right)=\log_2 8$

$=\log_2 2^3=3$

(2) $\log_3 108-\log_3 12=\log_3\frac{108}{12}=\log_3 9$

$=\log_3 3^2=2$

(3) $6\log_5\sqrt[3]{10}-2\log_5 2=\log_5(\sqrt[3]{10})^6-\log_5 2^2$

$=\log_5 10^2-\log_5 2^2=\log_5\frac{100}{4}$

$=\log_5 25=\log_5 5^2=2$

(4) $\log_2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\log_2\frac{36^2}{5}-\log_2 9$

$=\log_2\sqrt{5}+\log_2\left(\frac{36^2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}-\log_2 9$

$=\log_2\sqrt{5}+\log_2\frac{36}{\sqrt{5}}-\log_2 9$

$=\log_2\left(\sqrt{5}\times\frac{36}{\sqrt{5}}\div 9\right)$

$=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

답 (1) 3 (2) 2 (3) 2 (4) 2

012

$\log_2 4x+3\log_2 y-\frac{1}{2}\log_2 z=\log_2 4x+\log_2 y^3-\log_2\sqrt{z}$

$=\log_2\frac{4xy^3}{\sqrt{z}}$

즉, $\log_2\frac{4xy^3}{\sqrt{z}}=3$이므로

$\frac{4xy^3}{\sqrt{z}}=2^3 \qquad \therefore \frac{xy^3}{\sqrt{z}}=2$

$\therefore \frac{x^2y^6}{z}=\left(\frac{xy^3}{\sqrt{z}}\right)^2=2^2=4$

답 ④

013

$\log_2 32+\frac{4}{3}\log_2\frac{1}{2}-2\log_2\sqrt[3]{2}-5$

$=\log_2 2^5+\log_2 2^{-\frac{4}{3}}-\log_2 2^{\frac{2}{3}}-\log_2 2^5$

$=\log_2 2^{-\frac{4}{3}}-\log_2 2^{\frac{2}{3}}$

$=\log_2(2^{-\frac{4}{3}}\div 2^{\frac{2}{3}})$

$=\log_2 2^{-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}}=-2$

따라서 $\log_3 x=-2$이므로

$x=3^{-2}=\frac{1}{9}$

답 ①

014

$\underbrace{\log_5 1}_{\to 0}+\log_5 2+\log_5\frac{3}{2}+\log_5\frac{4}{3}+\cdots+\log_5\frac{125}{124}$

$=\log_5\frac{2}{1}+\log_5\frac{3}{2}+\log_5\frac{4}{3}+\cdots+\log_5\frac{125}{124}$

$=\log_5\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{125}{124}\right)$

$=\log_5 125=\log_5 5^3=3$

답 ③

015

$\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{x}=\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x^{-1}$

$=\log_2 x-\frac{1}{2}\log_2 x$

$=\frac{1}{2}\log_2 x$

즉, $\frac{1}{2}\log_2 x=8$이므로

$\log_2 x=16 \qquad \therefore x=2^{16}$ ⋯⋯ ❶

$\therefore \log_4 x-\log_2\frac{1}{x}=\log_4 2^{16}-\log_2\frac{1}{2^{16}}$

$=\log_4 4^8-\log_2 2^{-16}$

$=8-(-16)=24$ ⋯⋯ ❷

답 24

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

|다른 풀이|

$\log_4 x-\log_2\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\log_2 x+\log_2 x$

$=\frac{3}{2}\log_2 x=\frac{3}{2}\log_2 2^{16}$

$=\frac{3}{2}\times 16=24$

016

$$\log_4 8+\frac{\log_8 48}{\log_8 4}-\frac{1}{\log_{24} 4}=\log_4 8+\log_4 48-\log_4 24$$
$$=\log_4 \frac{8\times 48}{24}$$
$$=\log_4 16$$
$$=\log_4 4^2=2$$

답 ②

017

$\log_a x=\frac{1}{2}$, $\log_b x=\frac{1}{4}$, $\log_c x=\frac{1}{8}$에서

$\log_x a=2$, $\log_x b=4$, $\log_x c=8$

$$\therefore \log_{abc} x=\frac{1}{\log_x abc}$$
$$=\frac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c}$$
$$=\frac{1}{2+4+8}$$
$$=\frac{1}{14}$$

답 ⑤

018

$$\log_5 a\times\log_a 2a\times\log_{2a} 4a=\log_5 a\times\frac{\log_5 2a}{\log_5 a}\times\frac{\log_5 4a}{\log_5 2a}$$
$$=\log_5 4a$$

즉, $\log_5 4a=\log_5 a^2$이므로

$4a=a^2$, $a^2-4a=0$

$a(a-4)=0 \qquad \therefore a=4\ (\because a>0)$

답 ③

019

$$\log_a \frac{a^3}{b^2}=\log_a a^3-\log_a b^2$$
$$=3-2\log_a b$$

즉, $3-2\log_a b=2$이므로

$2\log_a b=1 \qquad \therefore \log_a b=\frac{1}{2}$

$$\therefore \log_b a=\frac{1}{\log_a b}=2$$

$$\therefore \log_a b+3\log_b a=\frac{1}{2}+3\times 2$$
$$=\frac{13}{2}$$

답 ⑤

020

주어진 식에서 밑을 모두 x로 바꾸면

$\log_x 2+\log_x 3+\log_x 7=\log_x a-\log_x 4$

$$\therefore \log_x a=\log_x 2+\log_x 3+\log_x 7+\log_x 4$$
$$=\log_x (2\times 3\times 7\times 4)$$
$$=\log_x 168$$

$\therefore a=168$

답 168

021

$$(\log_2 \sqrt{3}+\log_{\sqrt{2}} 3)\times\frac{1}{2}\log_{27} 2\sqrt{2}$$
$$=(\log_2 3^{\frac{1}{2}}+\log_{2^{\frac{1}{2}}} 3)\times\frac{1}{2}\log_{3^3} 2^{\frac{3}{2}}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\log_2 3+2\log_2 3\right)\times\frac{1}{4}\log_3 2$$
$$=\frac{5}{2}\log_2 3\times\frac{1}{4}\log_3 2$$
$$=\frac{5}{2}\times\frac{1}{4}\times\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 3}=\frac{5}{8}$$

답 ①

022

$$(\log_4 27+\log_8 3)(\log_9 2+\log_3 2)$$
$$=(\log_{2^2} 3^3+\log_{2^3} 3)(\log_{3^2} 2+\log_3 2)$$
$$=\left(\frac{3}{2}\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3\right)\left(\frac{1}{2}\log_3 2+\log_3 2\right)$$
$$=\frac{11}{6}\log_2 3\times\frac{3}{2}\log_3 2$$
$$=\frac{11}{6}\times\frac{3}{2}\times\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 3}=\frac{11}{4}$$

답 $\frac{11}{4}$

023

$$A=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{4}=\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{-2}$$
$$=-2\times 2\log_2 2=-4$$
$$B=-2\log_8\frac{1}{8}=-2\log_{2^3} 2^{-3}$$
$$=-2\times(-3)\times\frac{1}{3}\log_2 2=2$$
$$C=4^{\log_2 3}=2^{2\log_2 3}=2^{\log_2 9}=9$$

$\therefore A<B<C$

답 ①

024

$$\log_{\sqrt{5}} 2+2\log_5 3-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{5}} 9=\log_{5^{\frac{1}{2}}} 2+2\log_5 3-\frac{1}{2}\log_{5^{-1}} 9$$
$$=2\log_5 2+2\log_5 3+\frac{1}{2}\log_5 9$$
$$=\log_5 2^2+\log_5 3^2+\log_5 9^{\frac{1}{2}}$$
$$=\log_5 (4\times 9\times 3)=\log_5 108$$

이므로

(주어진 식)$=5^{\log_5 108}=108$

답 108

025

$\log_3 4+\log_3 2=\log_3 (4\times 2)=\log_3 2^3=3\log_3 2$

이므로

$$(\text{주어진 식})=(3^{3\log_3 2})^2+(2^{3\log_3 2})^{\log_2 3}$$
$$=(3^{\log_3 2})^6+2^{3\log_3 2\times\log_2 3}$$
$$=(2^{\log_3 3})^6+2^3=2^6+2^3$$
$$=64+8=72$$

$$3\log_3 2\times\log_2 3$$
$$=3\log_3 2\times\frac{1}{\log_3 2}=3$$

답 ③

026

$\log_2 3=a$에서 $\log_3 2=\frac{1}{a}$

$$\therefore \log_{20} 90=\frac{\log_3 90}{\log_3 20}=\frac{\log_3 (2\times3^2\times5)}{\log_3 (2^2\times5)}$$
$$=\frac{\log_3 2+\log_3 3^2+\log_3 5}{\log_3 2^2+\log_3 5}$$
$$=\frac{\log_3 2+2\log_3 3+\log_3 5}{2\log_3 2+\log_3 5}$$
$$=\frac{\frac{1}{a}+2+b}{\frac{2}{a}+b}=\frac{ab+2a+1}{ab+2}$$

답 ⑤

027

$\log_{10} 18=\log_{10}(2\times3^2)=\log_{10} 2+2\log_{10} 3$

이므로

$\log_{10} 2+2\log_{10} 3=a$ ······ ㉠

$\log_{10} 36=\log_{10}(2^2\times3^2)=2\log_{10} 2+2\log_{10} 3$

이므로

$2\log_{10} 2+2\log_{10} 3=b$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 $\log_{10} 2$, $\log_{10} 3$을 a, b로 나타내면

$\log_{10} 2=b-a$, $\log_{10} 3=a-\frac{b}{2}$

$$\therefore \log_{10} 12=\log_{10}(2^2\times3)=2\log_{10} 2+\log_{10} 3$$
$$=2(b-a)+a-\frac{b}{2}=-a+\frac{3}{2}b$$

답 ②

028

$\log_3 15=\log_3(3\times5)=\log_3 3+\log_3 5=1+\log_3 5$

즉, $1+\log_3 5=a$이므로

$\log_3 5=a-1$

$$\therefore \log_{75} 45=\frac{\log_3 45}{\log_3 75}=\frac{\log_3 (3^2\times5)}{\log_3 (3\times5^2)}$$
$$=\frac{\log_3 3^2+\log_3 5}{\log_3 3+\log_3 5^2}=\frac{2+\log_3 5}{1+2\log_3 5}$$
$$=\frac{2+a-1}{1+2(a-1)}=\frac{a+1}{2a-1}$$

답 ③

029

$10^x=5$에서

$x=\log_{10} 5$

$\therefore \log_{100} 125=\log_{10^2} 5^3=\frac{3}{2}\log_{10} 5=\frac{3}{2}x$

$\therefore k=\frac{3}{2}$

답 ④

030

$10^x=a$, $10^y=b$에서

$x=\log_{10} a$, $y=\log_{10} b$ ······ ❶

$$\therefore \log_{\sqrt[3]{a}} b^2=\frac{\log_{10} b^2}{\log_{10}\sqrt[3]{a}}=\frac{2\log_{10} b}{\frac{1}{3}\log_{10} a}$$
$$=\frac{2y}{\frac{1}{3}x}=\frac{6y}{x}$$ ······ ❷

답 $\frac{6y}{x}$

채점 기준	비율
❶ x, y를 밑이 10인 로그로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식을 정리하여 x, y로 나타낼 수 있다.	60 %

031

$2^a=70$에서

$a=\log_2 70$

$5^b=70$에서

$b=\log_5 70$

$7^c=70$에서

$c=\log_7 70$

밑의 변환에 의하여

$\frac{1}{a}=\log_{70} 2$, $\frac{1}{b}=\log_{70} 5$, $\frac{1}{c}=\log_{70} 7$

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\log_{70} 2+\log_{70} 5+\log_{70} 7$$
$$=\log_{70}(2\times5\times7)$$
$$=\log_{70} 70=1$$

답 ②

032

$3^a=\sqrt{7}$에서

$a=\log_3\sqrt{7}=\frac{1}{2}\log_3 7$

$7^b=9$에서

$b=\log_7 9=\log_7 3^2=2\log_7 3$

$$\therefore ab=\frac{1}{2}\log_3 7\times2\log_7 3$$
$$=\frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 3}\times\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 7}=1$$

답 ⑤

033

$8^a=243$에서

$a=\log_8 243$

$24^b=27$에서

$b=\log_{24} 27$

밑의 변환에 의하여

$\frac{5}{a}=5\log_{243} 8=5\log_{3^5} 8=\log_3 8$

$\frac{3}{b}=3\log_{27} 24=3\log_{3^3} 24=\log_3 24$

$$\therefore \frac{5}{a}-\frac{3}{b}=\log_3 8-\log_3 24=\log_3\frac{8}{24}$$
$$=\log_3\frac{1}{3}=-1$$

답 ①

|다른 풀이|

$p^x=q$의 양변에 $\frac{1}{x}$제곱을 하면 $p=q^{\frac{1}{x}}$임을 이용한다.

$8^a=243$에서 $8=243^{\frac{1}{a}}=(3^5)^{\frac{1}{a}}$

$\therefore 8=3^{\frac{5}{a}}$ ········· ㉠

$24^b=27$에서 $24=27^{\frac{1}{b}}=(3^3)^{\frac{1}{b}}$

$\therefore 24=3^{\frac{3}{b}}$ ········· ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{8}{24}=\frac{3^{\frac{5}{a}}}{3^{\frac{3}{b}}}$

$\frac{1}{3}=3^{\frac{5}{a}-\frac{3}{b}}$, $3^{-1}=3^{\frac{5}{a}-\frac{3}{b}}$ $\quad\therefore \frac{5}{a}-\frac{3}{b}=-1$

034

$2^x=3^y=\sqrt{6^z}=k$로 놓자.

$2^x=k$에서

$x=\log_2 k$

$3^y=k$에서

$y=\log_3 k$

$\sqrt{6^z}=k$, 즉 $6^z=k^2$에서

$z=\log_6 k^2=2\log_6 k$

밑의 변환에 의하여

$\frac{1}{x}=\log_k 2$, $\frac{1}{y}=\log_k 3$, $\frac{2}{z}=\log_k 6$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=\log_k 2+\log_k 3-\log_k 6$

$=\log_k \frac{2\times3}{6}=\log_k 1=0$

답 ①

035

$2^x=\log_2 3$에서

$x=\log_2(\log_2 3)$

$2^y=\log_3 16$에서

$y=\log_2(\log_3 16)$

$\therefore x+y=\log_2(\log_2 3)+\log_2(\log_3 16)$

$=\log_2(\log_2 3\times\log_3 16)$

$=\log_2(\log_2 3\times\log_3 2^4)$

$=\log_2(\log_2 3\times 4\log_3 2)$

$=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

$\log_2 3\times 4\log_3 2$

$=\log_2 3\times\frac{4}{\log_2 3}=4$

답 2

|다른 풀이|

$2^x\times2^y=\log_2 3\times\log_3 16=\log_2 3\times\log_3 2^4$

$=4\times\log_2 3\times\log_3 2=4$

이때 $2^x\times2^y=2^{x+y}$이므로

$2^{x+y}=4=2^2$ $\quad\therefore x+y=2$

036

$3^{a+b}=8$에서

$a+b=\log_3 8=\log_3 2^3=3\log_3 2$

$2^{a-b}=7$에서

$a-b=\log_2 7$

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$=3\log_3 2\times\log_2 7$

$=3\times\log_3 2\times\frac{\log_3 7}{\log_3 2}=3\log_3 7$

$\therefore 3^{a^2-b^2}=3^{3\log_3 7}=7^{3\log_3 3}=7^3$

답 ③

037

$\log_{\sqrt{2}} a=\log_{2^{\frac{1}{2}}} a=2\log_2 a$

$=2\log_{2^3} a^3=\log_8 a^6$ ········· ❶

즉, $\log_8 a^6=\log_8 ab^2$이므로

$a^6=ab^2$, $a^5=b^2$ $\quad\therefore b=a^{\frac{5}{2}}$ ········· ❷

$\therefore \log_a b=\log_a a^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$ ········· ❸

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\log_{\sqrt{2}} a$를 밑이 8인 로그로 바꿀 수 있다.	50 %
❷ a와 b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\log_a b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

|다른 풀이|

$\log_8 ab^2=\log_{2^3} ab^2=\frac{1}{3}\log_2 ab^2$

$=\frac{1}{3}\log_{\sqrt{2}}(ab^2)^{\frac{1}{2}}=\log_{\sqrt{2}}(ab^2)^{\frac{1}{6}}$

즉, $\log_{\sqrt{2}} a=\log_{\sqrt{2}}(ab^2)^{\frac{1}{6}}$이므로

$a=(ab^2)^{\frac{1}{6}}$, $a=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$

$a^{\frac{5}{6}}=b^{\frac{1}{3}}$ $\quad\therefore b=a^{\frac{5}{2}}$

$\therefore \log_a b=\log_a a^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$

038

$a^2b^3=1$의 양변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a a^2b^3=\log_a 1$, $\log_a a^2+\log_a b^3=0$

$2+3\log_a b=0$ $\quad\therefore \log_a b=-\frac{2}{3}$

$\therefore \log_{a^2} a^4b^3=\log_{a^2} a^4+\log_{a^2} b^3$

$=\log_a a^2+\frac{3}{2}\log_a b$

$=2+\frac{3}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=1$

답 ③

|다른 풀이|

$a^2b^3=1$에서 $b^3=\frac{1}{a^2}=a^{-2}$

$\therefore \log_{a^2} a^4b^3=\log_{a^2} a^4a^{-2}=\log_{a^2} a^2=1$

039

$\log_c a : \log_c b=2 : 3$이므로

$2\log_c b=3\log_c a$, $\log_c b=\frac{3}{2}\log_c a$

$\log_c b=\log_c a^{\frac{3}{2}}$ $\quad\therefore b=a^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ 10\log_a b+9\log_b a=10\log_a a^{\frac{3}{2}}+9\log_{a^{\frac{3}{2}}} a$

$=10\times\frac{3}{2}+9\times\frac{2}{3}$

$=15+6=21$

답 21

|다른 풀이|

$\log_c a : \log_c b=2:3$이므로

$\log_c a=2k$, $\log_c b=3k$ (k는 0이 아닌 실수)

로 놓으면 밑의 변환에 의하여

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}=\frac{3k}{2k}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore \log_b a=\frac{2}{3}$

$\therefore\ 10\log_a b+9\log_b a=10\times\frac{3}{2}+9\times\frac{2}{3}$

$=15+6=21$

040

$\log_2 a+\log_2 b+\log_2 c=0$에서

$\log_2 abc=0$ $\quad\therefore abc=1$

따라서 $bc=\frac{1}{a}$, $ac=\frac{1}{b}$, $ab=\frac{1}{c}$이므로

$\log_{\sqrt{a}} bc+\log_{b^2} ac+\log_{\frac{1}{c}} ab=\log_{\sqrt{a}}\frac{1}{a}+\log_{b^2}\frac{1}{b}+\log_{\frac{1}{c}}\frac{1}{c}$

$=\log_{a^{\frac{1}{2}}} a^{-1}+\log_{b^2} b^{-1}+1$

$=-2-\frac{1}{2}+1=-\frac{3}{2}$

답 ④

041

$16<27<32$이므로

$\log_2 16<\log_2 27<\log_2 32$, $\log_2 2^4<\log_2 27<\log_2 2^5$

$\therefore 4<\log_2 27<5$

즉, $\log_2 27$의 정수 부분은 4이므로

$a=4$

$\log_2 27$의 소수 부분은 $\log_2 27$에서 정수 부분을 뺀 수와 같으므로

$b=\log_2 27-4=\log_2 27-\log_2 16=\log_2\frac{27}{16}$

$\therefore 3^{\frac{a}{4}}+2^b=3+2^{\log_2\frac{27}{16}}=3+\frac{27}{16}=\frac{75}{16}$

답 ④

042

$9<10<27$이므로

$\log_3 9<\log_3 10<\log_3 27$, $\log_3 3^2<\log_3 10<\log_3 3^3$

$\therefore 2<\log_3 10<3$

즉, $\log_3 10$의 정수 부분은 2이므로

$n=2$

$\log_3 10$의 소수 부분은 $\log_3 10$에서 정수 부분을 뺀 수와 같으므로

$\alpha=\log_3 10-2=\log_3 10-\log_3 9=\log_3\frac{10}{9}$

$\therefore \frac{n-3^\alpha}{n+3^\alpha}=\frac{2-3^{\log_3\frac{10}{9}}}{2+3^{\log_3\frac{10}{9}}}=\frac{2-\frac{10}{9}}{2+\frac{10}{9}}=\frac{2}{7}$

답 ②

043

이차방정식 $x^2-18x+6=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=18$, $\alpha\beta=6$

$\therefore \log_2(\alpha+\beta)-2\log_2\alpha\beta=\log_2 18-2\log_2 6$

$=\log_2 18-\log_2 6^2$

$=\log_2\frac{18}{36}$

$=\log_2\frac{1}{2}=-1$

답 ⑤

044

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 2, $\log_2 5$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=2+\log_2 5=\log_2 4+\log_2 5$

$=\log_2(4\times5)=\log_2 20$

$b=2\times\log_2 5=\log_2 5^2=\log_2 25$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\log_2 25}{\log_2 20}=\log_{20} 25$

$=\log_{20} 5^2=2\log_{20} 5$

답 ④

045

이차방정식 $x^2-3x\log_5 4+4\log_5 2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3\log_5 4$, $\alpha\beta=4\log_5 2$ ······ ❶

$\therefore 5^{(\alpha-1)(\beta-1)}=5^{\alpha\beta-\alpha-\beta+1}=5^{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$ ······ ❷

$=5^{4\log_5 2-3\log_5 4+1}$

$=5^{4\log_5 2-3\log_5 2^2+1}$

$=5^{4\log_5 2-6\log_5 2+1}$

$=5^{-2\log_5 2+1}$

$=5^{\log_5 2^{-2}}\times5$

$=2^{-2}\times5=\frac{5}{4}$ ······ ❸

답 $\frac{5}{4}$

채점 기준	비율
❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$가 나타나도록 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❸ 로그의 성질과 지수법칙을 이용하여 $5^{(\alpha-1)(\beta-1)}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

046

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$a^2=3^2-4\times1=5$

$\therefore a=\alpha-\beta=\sqrt{5}$ ($\because \alpha>\beta$)

$\therefore \log_a \frac{\beta+1}{\alpha}+\log_a \frac{\alpha+1}{\beta}=\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\times\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$

$=\log_{\sqrt{5}}\frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}$

$=\log_{\sqrt{5}}\frac{1+3+1}{1}$

$=\log_{\sqrt{5}}5=\log_{5^{\frac{1}{2}}}5$

$=2\log_5 5=2$

답 ③

047

(1) $\log 100=\log 10^2=2\log 10=2$

(2) $\log 0.001=\log 10^{-3}=-3\log 10=-3$

(3) $\log \sqrt[4]{1000}=\log 1000^{\frac{1}{4}}=\log (10^3)^{\frac{1}{4}}$

$=\log 10^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}\log 10=\frac{3}{4}$

(4) $\log \frac{1}{\sqrt[6]{10}}=\log (\sqrt[6]{10})^{-1}=\log (10^{\frac{1}{6}})^{-1}$

$=\log 10^{-\frac{1}{6}}=-\frac{1}{6}\log 10=-\frac{1}{6}$

답 (1) 2 (2) -3 (3) $\frac{3}{4}$ (4) $-\frac{1}{6}$

048

(1) $\log 6=\log (2\times 3)=\log 2+\log 3$

$=0.3010+0.4771=0.7781$

(2) $\log 12=\log (2^2\times 3)=2\log 2+\log 3$

$=2\times 0.3010+0.4771=1.0791$

(3) $\log 25=\log 5^2=2\log 5=2\log \frac{10}{2}$

$=2(\log 10-\log 2)$

$=2(1-0.3010)$

$=2\times 0.6990=1.3980$

(4) $\log 15=\log (3\times 5)=\log 3+\log 5$

$=0.4771+\underline{0.6990}=1.1761$ (3)에서 $\log 5=0.6990$

답 (1) 0.7781 (2) 1.0791 (3) 1.3980 (4) 1.1761

049

$\log x^{20}=20\log x=5.712$이므로

$\log x=0.2856$

주어진 상용로그표에서 $\log 1.93=0.2856$이므로

$x=1.93$ $\therefore 100x=193$

답 193

050

$\log_{21} 147=\frac{\log 147}{\log 21}=\frac{\log (3\times 7^2)}{\log (3\times 7)}$

$=\frac{\log 3+\log 7^2}{\log 3+\log 7}$

$=\frac{\log 3+2\log 7}{\log 3+\log 7}$

$=\frac{a+2b}{a+b}$

답 ①

051

$\log a=2.5$ ······ ㉠

$\log b=1.2$ ······ ㉡

㉠$-2\times$㉡을 하면

$\log a-2\log b=0.1$ $\therefore \log \frac{a}{b^2}=0.1$

$\therefore \log N=2.1=2+0.1=2\log 10+\log \frac{a}{b^2}$

$=\log 10^2+\log \frac{a}{b^2}=\log \frac{100a}{b^2}$

$\therefore N=\frac{100a}{b^2}$

답 ⑤

052

$\log 7570=\log (7.57\times 10^3)$

$=\log 7.57+\log 10^3$

$=3+\log 7.57$

$\log 0.0757=\log (7.57\times 10^{-2})$

$=\log 7.57+\log 10^{-2}$

$=-2+\log 7.57$

이때 $0\le \log 7.57<1$이므로

$a=\log 7.57=0.8791$, $b=-2$

$\therefore a+b=0.8791+(-2)=-1.1209$

답 ④

참고

양수 N에 대하여 $\log N$의 정수 부분을 n, 소수 부분을 α라고 하면

(1) $10^n\le N<10^{n+1}$

(2) $\alpha=\log N-n$ (단, $0\le\alpha<1$)

053

15^{30}에 상용로그를 취하면

$\log 15^{30}=30\log 15=30\log (3\times 5)$

$=30(\log 3+\log 5)$

$=30\left(\log 3+\log \frac{10}{2}\right)$

$=30(\log 3+\log 10-\log 2)$ ······ ❶

$=30(0.4771+1-0.3010)$

$=30\times 1.1761=35.283$ ······ ❷

이때 $\log 15^{30}$의 정수 부분이 35이므로 15^{30}은 36자리의 정수이다.

······ ❸

답 36자리

채점 기준	비율
❶ $\log 15^{30}$을 $\log 2$, $\log 3$을 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 주어진 조건을 이용하여 $\log 15^{30}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 15^{30}이 몇 자리의 정수인지 구할 수 있다.	30 %

054

$\log \frac{1}{x^2}=\log x^{-2}=-2\log x$

$=-2\times(-3.12)=6.24$

$\therefore a=6$

$\log x^2 = 2\log x = 2\times(-3.12)$

$= -6.24 = -6-0.24$

$= (-6-1)+(1-0.24)$

$= -7+0.76$ $0 \le b < 1$이어야 하므로 소수 부분이 양수가 되도록 변형한다.

$\therefore b = 0.76$

$\therefore a+b = 6+0.76 = 6.76$

답 ⑤

055

$\log x$와 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분이 같으므로

$\log x - \log\sqrt{x} = (\text{정수})$, $\log x - \log x^{\frac{1}{2}} = (\text{정수})$

$\log x - \frac{1}{2}\log x = (\text{정수})$ $\quad \therefore \frac{1}{2}\log x = (\text{정수})$

$\frac{1}{10} \le x < 10$의 각 변에 상용로그를 취하면

$-1 \le \log x < 1$ $\quad \therefore -\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\log x < \frac{1}{2}$

이때 $\frac{1}{2}\log x$는 정수이므로 $\frac{1}{2}\log x = 0$

$\log x = 0$ $\quad \therefore x = 1$

따라서 $10^a = 1 = 10^0$이므로

$a = 0$

답 ③

056

A^{10}이 소수점 아래 5째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $\log A^{10}$의 정수 부분은 -5이다.

즉, $-5 \le \log A^{10} < -4$이므로 소수 부분은 0 이상 1 미만이므로 $\log A^{10}$의 값은 -5보다 크거나 같고, -4보다 작다.

$-5 \le 10\log A < -4$

이때 $\log A^{20} = 20\log A$이므로 위 부등식의 각 변에 2를 곱하면

$-10 \le 20\log A < -8$ $\quad \therefore -10 \le \log A^{20} < -8$

따라서 $\log A^{20}$의 정수 부분이 될 수 있는 수는 -10, -9이므로 A^{20}은 소수점 아래 9째 또는 10째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타날 수 있다.

답 ②, ③

057

2^n이 10자리의 정수이면 $\log 2^n$의 정수 부분은 9이다.

즉, $9 \le \log 2^n < 10$이므로

$9 \le n\log 2 < 10$, $9 \le 0.3010n < 10$

$\frac{9}{0.3010} \le n < \frac{10}{0.3010}$ $\quad \therefore 29.\cdots \le n < 33.\cdots$

따라서 2^n이 10자리의 정수가 되도록 하는 자연수 n은 30, 31, 32, 33의 4개이다.

답 ③

058

(i) $1 \le x < 10$일 때, $f(x) = 0$ $\quad$ x가 1자리의 수이므로 정수 부분이 0

(ii) $10 \le x < 100$일 때, $f(x) = 1$ $\quad$ x가 2자리의 수이므로 정수 부분이 1

(iii) $100 \le x < 1000$일 때, $f(x) = 2$

(iv) $1000 \le x \le 1500$일 때, $f(x) = 3$

(i)~(iv)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(1500)$

$= 0\times 9 + 1\times 90 + 2\times 900 + 3\times 501$

$= 90+1800+1503 = 3393$ $\quad$ 1000부터 1500까지의 숫자의 개수는 500이 아닌 501임에 주의한다.

답 ②

059

처음 빛의 밝기를 A, 통과시킨 유리의 장수를 n이라고 하면 n장의 유리를 통과시킨 후의 빛의 밝기는 $A\left(1-\frac{50}{100}\right)^n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로

$A\left(\frac{1}{2}\right)^n \le \frac{1}{20}A$ $\quad \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^n \le \frac{1}{20}$

위 부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log\left(\frac{1}{2}\right)^n \le \log\frac{1}{20}$, $-n\log 2 \le -\log(2\times 10)$

$\therefore n \ge \frac{\log 2+\log 10}{\log 2} = \frac{1.3}{0.3} = 4.\cdots$

따라서 적어도 5장의 유리를 통과시켜야 한다.

답 5장

참고

상용로그의 활용 ― 일정한 비율로 증가, 감소할 때

초기 양이 A이고 매번 $a\,\%$씩 증가하는 경우 n번 시행한 후의 양은 $A\left(1+\frac{a}{100}\right)^n$이다.

또, $a\,\%$씩 감소하는 경우 n번 시행한 후의 양은 $A\left(1-\frac{a}{100}\right)^n$이다.

060

소리의 크기가 20 dB인 소리의 세기를 I_{20}, 소리의 크기가 10 dB인 소리의 세기를 I_{10}이라고 하면

$20 = 120 + 10\log I_{20}$ ⋯⋯ ㉠

$10 = 120 + 10\log I_{10}$ ⋯⋯ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$10 = 10(\log I_{20} - \log I_{10})$, $\log\frac{I_{20}}{I_{10}} = 1$

$\therefore \frac{I_{20}}{I_{10}} = 10$

따라서 크기가 20 dB인 소리의 세기는 크기가 10 dB인 소리의 세기의 10배이다.

답 ③

061

박테리아의 수가 두 배가 되는 데에 걸리는 시간은 6시간, 즉 $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$일이므로 박테리아의 수는 하루에 2^4배씩 늘어난다.

따라서 초기 박테리아의 수를 A라고 하면 x일 후의 박테리아의 수는 $A\times 2^{4x}$이므로

$A\times 2^{4x} \ge 10^6 A$ $\quad \therefore 2^{4x} \ge 10^6$

위 부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 2^{4x} \ge \log 10^6$, $4x\log 2 \ge 6$

$\therefore x \ge \frac{6}{4\log 2} = \frac{6}{4\times 0.3} = 5$

따라서 처음으로 초기 박테리아의 수의 10^6배 이상이 되는 것은 5일 후이다.

답 ⑤

062

1000원이었던 재료의 가격이 매년 a %씩 상승하여 5년 후에 1110원이 되었으므로

$1000\times\left(1+\frac{a}{100}\right)^5=1110$ ❶

$\left(1+\frac{a}{100}\right)^5=1.11$

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$5\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 1.11$

상용로그표에서 $\log 1.11=0.045$이므로

$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{0.045}{5}=0.009$ ❷

이때 상용로그표에서 $\log 1.02=0.009$이므로

$1+\frac{a}{100}=1.02$, $\frac{a}{100}=0.02$

$\therefore a=2$ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 상용로그표를 이용하여 $\log\left(1+\frac{a}{100}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 상용로그표를 이용하여 a의 값을 구할 수 있다.	30 %

실력을 높이는 연습 문제

본문 034쪽

01

$\log_2\{\log_3(\log_5 x)\}=0$에서

$\log_3(\log_5 x)=1$, $\log_5 x=3$

$\therefore x=5^3=125$

또, $\log_5\{\log_3(\log_2 y)\}=0$에서

$\log_3(\log_2 y)=1$, $\log_2 y=3$

$\therefore y=2^3=8$

$\therefore x+y=125+8=133$

답 ④

02

$\log_3(a+b)=2$에서 $a+b=3^2=9$

$\log_{ab}4=2$에서 $(ab)^2=4=2^2$ $\quad\therefore ab=2$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=9^2-2\times2=77$

답 ⑤

03

문제 접근하기

모든 실수 x에 대하여 진수의 조건인 $x^2+ax+a+8>0$을 만족시키는 a의 값의 범위를 구해야 한다. 이때 '모든 실수 x에 대하여'라는 조건이 있으므로 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용한다.

밑의 조건에 의하여

$a>0$, $a\neq1$ $\quad\therefore 0<a<1$ 또는 $a>1$ ㉠

진수의 조건에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$x^2+ax+a+8>0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+ax+a+8=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-4(a+8)<0$

$a^2-4a-32<0$, $(a+4)(a-8)<0$

$\therefore -4<a<8$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$0<a<1$ 또는 $1<a<8$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$2+3+4+5+6+7=27$

답 ①

풍쌤 개념 CHECK

이차부등식이 항상 성립할 조건_高 공통수학 1

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 하면 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립할 조건은 다음과 같다.

(1) $ax^2+bx+c>0$이 성립 ➡ $a>0$, $D<0$

(2) $ax^2+bx+c\geq0$이 성립 ➡ $a>0$, $D\leq0$

(3) $ax^2+bx+c<0$이 성립 ➡ $a<0$, $D<0$

(4) $ax^2+bx+c\leq0$이 성립 ➡ $a<0$, $D\leq0$

04

$a=\log_2 5$에서

$2^a=5$

$b=\log_2 7$에서

$2^b=7$

$c=\log_2 11$에서

$2^c=11$

$\therefore 2^{a+b+c}=2^a\times2^b\times2^c=5\times7\times11=385$

답 385

| 다른 풀이 |

$a+b+c=\log_2 5+\log_2 7+\log_2 11$

$=\log_2(5\times7\times11)$

$=\log_2 385$

이므로

$2^{a+b+c}=2^{\log_2 385}=385$

05

$\log_2\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log_2\left(1-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_2\left(1-\frac{1}{1024}\right)$

$=\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\cdots+\log_2\frac{1023}{1024}$

$=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{1023}{1024}\right)$

$=\log_2\frac{1}{1024}$

$=\log_2 2^{-10}$

$=-10\log_2 2=-10$

답 ①

06

$\log_{15} 3=A$, $\log_{15} 5=B$라고 하면

$$A+B=\log_{15} 3+\log_{15} 5$$
$$=\log_{15}(3\times5)$$
$$=\log_{15} 15=1$$

$\log_{15} 27=\log_{15} 3^3=3\log_{15} 3=3A$이므로

$$(\log_{15} 3)^3+\log_{15} 27\times\log_{15} 5+(\log_{15} 5)^3$$
$$=A^3+3AB+B^3$$
$$=A^3+3AB(A+B)+B^3\ (\because A+B=1)$$
$$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$
$$=(A+B)^3=1$$

답 ①

07

문제 접근하기

로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 정리하여 삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계를 파악한 후 다음을 이용하여 삼각형의 모양을 판단한다.

➡ 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c일 때

(1) $a=b=c$이면 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

(2) $a=b\neq c$이면 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

(3) $a^2+b^2=c^2$이면 삼각형 ABC는 $\angle C=90^\circ$, 즉 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

$\log_c(a+b)+\log_c(a-b)=2$에서

$\log_c(a+b)(a-b)=2$, $\log_c(a^2-b^2)=2$

$a^2-b^2=c^2 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

답 ④

08

$\log_a b=81$에서

$\dfrac{\log_c b}{\log_c a}=81 \qquad \therefore \log_c b=81\log_c a$ ······ ㉠

$\log_c\sqrt{a}=\log_{\sqrt{b}} c$에서

$\log_c a^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\log_c b^{\frac{1}{2}}}$, $\dfrac{1}{2}\log_c a=\dfrac{2}{\log_c b}$

$\therefore \log_c b=\dfrac{4}{\log_c a}$ ······ ㉡

㉠×㉡을 하면

$(\log_c b)^2=81\times4$

$b>1$, $c>1$이므로 $\log_c b>0$

$\therefore \log_c b=\sqrt{81\times4}=18$

답 18

09

$$\left(\log_3 a^2-6\log_{27}\frac{1}{b}\right)\times\log_{\sqrt{ab}} 9$$
$$=(2\log_3 a-6\log_{3^3} b^{-1})\times\log_{(ab)^{\frac{1}{2}}} 3^2$$
$$=2(\log_3 a+\log_3 b)\times4\log_{ab} 3$$
$$=8\log_3 ab\times\log_{ab} 3$$
$$=8\times\log_3 ab\times\frac{1}{\log_3 ab}=8$$

답 ③

10

선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1이므로

$$\frac{m\log_5 12+(1-m)\log_5 3}{m+(1-m)}=1$$
$$m\log_5 12+(1-m)\log_5 3=1$$
$$m(\underbrace{\log_5 12-\log_5 3}_{\log_5 \frac{12}{3}})=\underbrace{1-\log_5 3}_{\log_5 5-\log_5 3}$$
$$m\log_5 4=\log_5\frac{5}{3}$$
$$\therefore m=\frac{\log_5\frac{5}{3}}{\log_5 4}=\log_4\frac{5}{3}$$
$$\therefore 4^m=4^{\log_4\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$$

답 ④

풍쌤 개념 CHECK

수직선 위의 선분의 내분점_高 공통수학 2

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를

$m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는 $P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

11

$$A=\sqrt{9^{\log_3 2}}=(9^{\log_3 2})^{\frac{1}{2}}=(9^{\frac{1}{2}})^{\log_3 2}=3^{\log_3 2}=2$$
$$B=\log_5 16\times\log_8 25$$
$$=\frac{\log 16}{\log 5}\times\frac{\log 25}{\log 8}=\frac{\log 2^4}{\log 5}\times\frac{\log 5^2}{\log 2^3}$$
$$=\frac{4\log 2}{\log 5}\times\frac{2\log 5}{3\log 2}=\frac{8}{3}$$
$$C=\log_4 2+\log_9\frac{1}{3}=\log_{2^2} 2+\log_{3^2} 3^{-1}$$
$$=\frac{1}{2}\log_2 2-\frac{1}{2}\log_3 3=0$$
$$\therefore C<A<B$$

답 ⑤

12

$$\log_2 10=\log_2(2\times5)$$
$$=\log_2 2+\log_2 5$$
$$=1+\log_2 5$$

이므로

$1+\log_2 5=a \qquad \therefore \log_2 5=a-1$ ······ ㉠

$\log_2\dfrac{3}{5}=\log_2 3-\log_2 5$이므로

$\log_2 3-\log_2 5=b$

위 식에 ㉠을 대입하면

$b=\log_2 3-(a-1) \qquad \therefore \log_2 3=a+b-1$

이때 밑의 변환에 의하여

$$\log_3 2=\frac{1}{a+b-1}$$
$$\therefore \log_3 48=\log_3(2^4\times3)$$
$$=\log_3 2^4+\log_3 3=4\log_3 2+1$$
$$=\frac{4}{a+b-1}+1=\frac{a+b+3}{a+b-1}$$

답 ③

13

$\sqrt[3]{2\sqrt{14}}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{14}=2^{\frac{1}{3}}\times(2\times7)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}\times7^{\frac{1}{6}}$,

$\sqrt[3]{7\sqrt{2}}=\sqrt[3]{7}\times\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{6}}\times7^{\frac{1}{3}}$

이므로

$$\begin{aligned}\log_7\sqrt[3]{2\sqrt{14}}-\log_2\sqrt[3]{7\sqrt{2}}&=\log_7(2^{\frac{1}{2}}\times7^{\frac{1}{6}})-\log_2(2^{\frac{1}{6}}\times7^{\frac{1}{3}})\\&=\log_7 2^{\frac{1}{2}}+\log_7 7^{\frac{1}{6}}-\log_2 2^{\frac{1}{6}}-\log_2 7^{\frac{1}{3}}\\&=\frac{1}{2}\log_7 2+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\log_2 7\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\log_2 7}-\frac{1}{3}\log_2 7\\&=\frac{1}{2a}-\frac{a}{3}=\frac{3-2a^2}{6a}\end{aligned}$$

답 ②

14

$2^a=\frac{3}{5}$에서

$a=\log_2\frac{3}{5}$

$3^b=\frac{3}{5}$에서

$b=\log_3\frac{3}{5}$

$10^c=\frac{3}{5}$에서

$c=\log_{10}\frac{3}{5}$

밑의 변환에 의하여

$\frac{1}{a}=\log_{\frac{3}{5}}2,\ \frac{1}{b}=\log_{\frac{3}{5}}3,\ \frac{1}{c}=\log_{\frac{3}{5}}10$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}&=\log_{\frac{3}{5}}2+\log_{\frac{3}{5}}3-\log_{\frac{3}{5}}10\\&=\log_{\frac{3}{5}}\frac{2\times3}{10}=\log_{\frac{3}{5}}\frac{3}{5}=1\end{aligned}$$

답 1

15

$x^5=y^3$의 양변에 밑이 y인 로그를 취하면

$\log_y x^5=\log_y y^3$, $5\log_y x=3\log_y y$

$5\log_y x=3\qquad\therefore\ \log_y x=\frac{3}{5}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \log_{y^2}\frac{x^4}{y^5}&=\log_{y^2}x^4-\log_{y^2}y^5=2\log_y x-\frac{5}{2}\\&=2\times\frac{3}{5}-\frac{5}{2}=-\frac{13}{10}\end{aligned}$$

답 ①

16

$64<100<256$이므로

$\log_4 64<\log_4 100<\log_4 256$, $\log_4 4^3<\log_4 100<\log_4 4^4$

$\therefore\ 3<\log_4 100<4$

$\log_4 100$의 정수 부분은 3이므로

$n=3$

$\log_4 100$의 소수 부분은 $\log_4 100$에서 정수 부분을 뺀 수와 같으므로

$\alpha=\log_4 100-3=\log_4 100-\log_4 64=\log_4\frac{100}{64}=\log_4\frac{25}{16}$

$$\begin{aligned}\therefore\ 4^n-8^\alpha&=4^3-8^{\log_4\frac{25}{16}}=64-\left(\frac{25}{16}\right)^{\log_4 8}\\&=64-\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{3}{2}}=64-\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\\&=64-\left(\frac{5}{4}\right)^3=64-\frac{125}{64}\end{aligned}$$

$\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$

따라서 $k=\frac{125}{64}$이므로

$64k=125$

답 ⑤

17

문제 접근하기

$\log_2\frac{1}{3}$에서 (밑)>1이고 $0<$(진수)<1이므로 $\log_2\frac{1}{3}$의 값은 음수이다. 따라서 (정수 부분)<0, $0\le$(소수 부분)<1이 되도록 $\log_2\frac{1}{3}$의 값을 적절히 분해해야 한다.

$\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$에서 $\log_2\frac{1}{4}<\log_2\frac{1}{3}<\log_2\frac{1}{2}$

$-2<\log_2\frac{1}{3}<-1\qquad\therefore\ \log_2\frac{1}{3}=-1.\cdots$

이때 $\log_2\frac{1}{3}=-1-\alpha\ \ (0\le\alpha<1)$라고 하면

$\log_2\frac{1}{3}=-1-\alpha=-2+(1-\alpha)$

로그의 소수 부분은 0 이상 1 미만이어야 하므로 정수 부분은 -1이 아닌 -2가 된다.

즉, $\log_2\frac{1}{3}$의 정수 부분은 -2이다.

$\therefore\ x=-2$

$\log_2\frac{1}{3}$의 소수 부분은 $\log_2\frac{1}{3}$에서 정수 부분을 뺀 수와 같으므로

$y=\log_2\frac{1}{3}-(-2)=\log_2\frac{1}{3}+\log_2 4=\log_2\frac{4}{3}$

$$\therefore\ \frac{2^x+2^y}{2^{-x}+2^{-y}}=\frac{2^{-2}+2^{\log_2\frac{4}{3}}}{2^2+2^{-\log_2\frac{4}{3}}}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{4}{3}}{4+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{19}{12}}{\frac{19}{4}}=\frac{1}{3}$$

답 ⑤

18

이차방정식 $x^2-11x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=11$, $\alpha\beta=4$

$$\begin{aligned}\therefore\ \log_2(\alpha+1)+\log_2(\beta+1)&=\log_2(\alpha+1)(\beta+1)\\&=\log_2(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)\\&=\log_2(4+11+1)\\&=\log_2 16\\&=\log_2 2^4=4\end{aligned}$$

답 ④

19

$$\begin{aligned}\log 231^5&=5\log 231=5\log(2.31\times10^2)\\&=5(\log 2.31+\log 10^2)\\&=5(0.3636+2)\\&=5\times2.3636=11.818\end{aligned}$$

답 11.818

20

a^2이 5자리의 수이므로 $\log a^2$의 정수 부분은 4이다.
즉, $4 \le \log a^2 < 5$이므로 $4 \le 2\log a < 5$

$\therefore 2 \le \log a < \dfrac{5}{2}$ ········· ㉠

또, ab^4이 10자리의 수이므로 $\log ab^4$의 정수 부분은 9이다.
즉, $9 \le \log ab^4 < 10$이므로 $9 \le \log a + 4\log b < 10$ ········· ㉡
㉡−㉠을 하면

$9 - \dfrac{5}{2} < 4\log b < 10 - 2$, $\dfrac{13}{2} < 4\log b < 8$

$\dfrac{13}{8} < \log b < 2$ $\quad \therefore 1.625 < \log b < 2$

따라서 $\log b$의 정수 부분이 1이므로 b는 2자리의 수이다.

답 ①

참고
$a<x<b$이고 $c<y<d$일 때, $x+y$, $x-y$의 값의 범위는

$$\begin{array}{rl} & a < x < b \\ +) & c < y < d \\ \hline & a+c < x+y < b+d \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & a < x < b \\ -) & c < y < d \\ \hline & a-d < x-y < b-c \end{array}$$

21

$\log \dfrac{100}{x} = \log 100 - \log x = 2 - \log x$
정수 부분이 -1이므로
$-1 \le 2 - \log x < 0$, $-3 \le -\log x < -2$
$2 < \log x \le 3$ $\quad \therefore 100 < x \le 1000$
따라서 이를 만족시키는 자연수 x는 101, 102, 103, ⋯, 1000의 900개이다.

답 ③

22

문제 접근하기
최고 자리의 숫자는 숫자의 배열과 관련이 있으므로 상용로그의 소수 부분을 이용할 수 있다. 즉, $\log 5^{20}$의 소수 부분을 구한 후 맨 앞자리 수를 추측해 본다.

$$\begin{aligned} \log 5^{20} &= 20\log 5 = 20\log\frac{10}{2} = 20(\log 10 - \log 2) \\ &= 20(1 - \log 2) = 20(1 - 0.3010) \\ &= 20 \times 0.6990 = 13.980 \end{aligned}$$

이때 $\log 5^{20}$의 소수 부분은 0.980이고,
$\log 9 = \log 3^2 = 2\log 3 = 2 \times 0.4771 = 0.9542$이므로
$\log 9 < 0.980 < \log 10$, $13 + \log 9 < 13.980 < 13 + \log 10$
$\log(9 \times 10^{13}) < \log 5^{20} < \log(10 \times 10^{13})$
$\therefore 9 \times 10^{13} < 5^{20} < 10^{14}$
따라서 5^{20}의 최고 자리의 숫자는 9이다.

답 9

23

문제 접근하기
$\log x$의 정수 부분은 자릿수와 관련이 있고, 소수 부분은 진수의 숫자의 배열과 관련이 있음을 이용한다.

ㄱ. $\log 1111$과 $\log 111.1$에서 진수 1111과 111.1의 숫자의 배열이 일치하므로 두 상용로그의 소수 부분은 같다.
$\therefore \langle\langle 1111 \rangle\rangle = \langle\langle 111.1 \rangle\rangle$ (거짓)
ㄴ. $\log x$의 정수 부분이 10이므로 자연수 x는 11자리의 수이다. (참)
ㄷ. $\log x$의 소수 부분과 $\log y$의 소수 부분의 합이 1이므로
$\log x + \log y = \log xy = $(정수)
즉, $xy = 10^n$ (n은 정수)의 꼴로 나타낼 수 있다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

참고
ㄱ에서
$\log 1111 = \log(1.111 \times 10^3) = \log 1.111 + 3$
$\log 111.1 = \log(1.111 \times 10^2) = \log 1.111 + 2$
이때 $0 < \log 1.111 < 1$이므로
$\langle 1111 \rangle = 3$, $\langle 111.1 \rangle = 2$
$\therefore \langle 1111 \rangle + 1 = \langle 111.1 \rangle + 2$
즉, 주어진 식은 소수 부분이 아닌 정수 부분일 때 성립한다.

24

처음 수조에 들어 있던 물의 양을 A L라고 하면 t분 후 수조에 들어 있는 물의 양은

$A\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$ L

와 같이 나타낼 수 있다.
수조에 남은 물의 양이 25 L, 5 L일 때까지 걸린 시간을 각각 t_1분, t_2분이라고 하면

$A\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{5}} = 25$, $A\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{5}} = 5$

따라서 $\dfrac{A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{5}}}{A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{5}}} = \dfrac{25}{5}$이므로

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{5} - \frac{t_2}{5}} = 5$ $\quad \therefore 2^{\frac{t_2 - t_1}{5}} = 5$

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 2^{\frac{t_2 - t_1}{5}} = \log 5$, $\dfrac{t_2 - t_1}{5}\log 2 = \log 5$

$\dfrac{t_2 - t_1}{5} = \dfrac{\log 5}{\log 2} = \dfrac{1 - \log 2}{\log 2} = \dfrac{1 - 0.3}{0.3} = \dfrac{7}{3}$

$\therefore t_2 - t_1 = 5 \times \dfrac{7}{3} = \dfrac{35}{3}$ $\quad \log 5 = \log\dfrac{10}{2}$
$\quad = \log 10 - \log 2$
$\quad = 1 - \log 2$

따라서 $a = t_2 - t_1 = \dfrac{35}{3}$이므로

$3a = 3 \times \dfrac{35}{3} = 35$

답 35

03 지수함수

기본을 다지는 유형

본문 039쪽

001

$y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$

ㄷ. 함수 $y=a^{-x}$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, 점근선은 x축이다. (거짓)

ㄹ. $a>1$에서 $0<\frac{1}{a}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

002

$f(k)=2f(5)$에서

$3^k=2\times3^5$

로그의 정의에 의하여

$k=\log_3(2\times3^5)=\log_3 2+\log_3 3^5=5+\log_3 2$

답 ⑤

003

함수 $y=a^x$의 그래프가 점 $\left(\frac{1}{2},\ 5\right)$를 지나므로

$5=a^{\frac{1}{2}}$ $\quad\therefore a=5^2=25$

즉, 함수 $y=25^x$의 그래프가 점 $\left(-\frac{3}{2},\ k\right)$를 지나므로

$k=25^{-\frac{3}{2}}=(5^2)^{-\frac{3}{2}}=5^{-3}=\frac{1}{125}$

답 ⑤

004

① $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$에서 $2>1$이므로 $f(x_1)<f(x_2)$

② $f(x)=(0.3)^x=\left(\frac{3}{10}\right)^x$에서 $0<\frac{3}{10}<1$이므로 $f(x_1)>f(x_2)$

③ $f(x)=2^x$에서 $2>1$이므로 $f(x_1)<f(x_2)$

④ $f(x)=\left(\frac{4}{3}\right)^x$에서 $\frac{4}{3}>1$이므로 $f(x_1)<f(x_2)$

⑤ $f(x)=(\sqrt{3})^x$에서 $\sqrt{3}>1$이므로 $f(x_1)<f(x_2)$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ②이다.

답 ②

005

ㄱ. $f(0)=a^0=1$ (참)

ㄴ. $f(x+y)=a^{x+y}=a^x\times a^y=f(x)f(y)$ (참)

ㄷ. $f(xy)=a^{xy}=(a^x)^y\neq f(x)+f(y)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

006

ㄱ. $y=\frac{1}{4^x}=4^{-x}$이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

ㄴ. $y=2^x=4^{\frac{1}{2}x}$이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 없다.

ㄷ. $y=\frac{1}{2}\times4^x=4^{-\frac{1}{2}}\times4^x=4^{x-\frac{1}{2}}$이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $-y=\left(\frac{1}{4}\right)^x=4^{-x}$에서 $y=-4^{-x}$이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

따라서 함수 $y=4^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

007

함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y-n=3^{x-m}$

$\therefore y=3^{x-m}+n$ ······ ❶

이때 $y=3^{x-m}+n$의 그래프가 두 점 $(2,\ -2)$, $(3,\ 4)$를 지나므로

$-2=3^{2-m}+n$ ······ ㉠ $\quad 4=3^{3-m}+n$ ······ ㉡

······ ❷

㉡−㉠을 하면

$6=3^{3-m}-3^{2-m}$, $3^{-m}(27-9)=6$

$3^{-m}=\frac{1}{3}=3^{-1}$ $\quad\therefore m=1$

$m=1$을 ㉠에 대입하면

$-2=3+n$ $\quad\therefore n=-5$ ······ ❸

$\therefore m+n=1+(-5)=-4$ ······ ❹

답 -4

채점 기준	비율
❶ m, n을 이용하여 함수 $y=3^x$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 평행이동한 그래프가 지나는 두 점을 이용하여 두 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❸ m, n의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

008

선분 AB의 중점의 x좌표가 0이므로

y축 위의 점의 x좌표는 0이다.

$\frac{a+b}{2}=0$ $\quad\therefore a+b=0$

함수 $y=\frac{1}{3^x}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$y=\frac{1}{3^{x-k}}$ $\quad\therefore f(x)=\frac{1}{3^{x-k}}$

따라서 $f(a)=\frac{1}{3^{a-k}}$, $f(b)=\frac{1}{3^{b-k}}$이므로

$f(a)f(b)=3^{-a+k}\times3^{-b+k}$

$=3^{2k-(a+b)}=3^{2k}$ $(\because a+b=0)$

이때 $f(a)f(b)=3$이므로

$3^{2k}=3,\ 2k=1\qquad \therefore\ k=\frac{1}{2}$

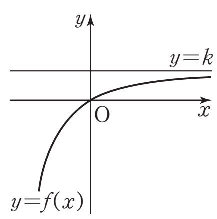
답 ②

009

$f(x)=-2^{4-3x}+k=-2^{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}+k=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}}+k$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않아야 하므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(0)\le 0$이어야 하므로

$x=0$일 때의 함숫값 $f(0)$이 0보다 크면 제2사분면을 지난다.

$-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}+k\le 0$

$k\le (2^{-3})^{-\frac{4}{3}}$

$\therefore\ k\le 16$

따라서 자연수 k의 최댓값은 16이다.

답 ④

010

함수 $y=2^x$의 그래프가 두 점 $(1,\ a)$, $(b,\ 32)$를 지나므로

$a=2^1=2$

$32=2^b$에서 $2^5=2^b\qquad \therefore\ b=5$

$\therefore\ a+b=2+5=7$

답 ③

011

함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$의 그래프가 세 점 $(0.1,\ a)$, $(0.2,\ b)$, $(0.3,\ c)$를 지나므로

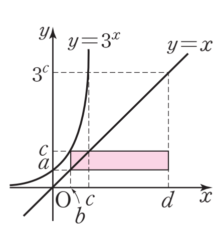
$a=\left(\frac{1}{4}\right)^{0.1},\ b=\left(\frac{1}{4}\right)^{0.2},\ c=\left(\frac{1}{4}\right)^{0.3}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \log_4 a^2b^3c^4&=\log_4 a^2+\log_4 b^3+\log_4 c^4\\&=\log_4\left(\frac{1}{4}\right)^{0.2}+\log_4\left(\frac{1}{4}\right)^{0.6}+\log_4\left(\frac{1}{4}\right)^{1.2}\\&=0.2\log_4 4^{-1}+0.6\log_4 4^{-1}+1.2\log_4 4^{-1}\\&=-0.2-0.6-1.2=-2\end{aligned}$$

답 -2

012

직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 서로 같으므로 오른쪽 그림에서



$a=3^0=1$

$b=a=1$

$c=3^b=3$

$d=3^c=3^3=27$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$(d-b)(c-a)=(27-1)(3-1)=26\times 2=52$

답 ②

013

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라고 하면 두 점 P, Q의 y좌표가 모두 10이므로

$3^{-\alpha}=10,\ 9^{-\beta}=10$

$-\alpha=\log_3 10,\ -\beta=\log_9 10$

$\therefore\ \alpha=-\log_3 10,\ \beta=-\log_9 10$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{PQ}&=\beta-\alpha\\&=-\log_9 10-(-\log_3 10)\\&=-\frac{1}{2}\log_3 10+\log_3 10\\&=\frac{1}{2}\log_3 10\end{aligned}$$

답 ②

014

함수 $y=2^{x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=2^{x-2}$의 그래프와 겹친다.

$\therefore\ \overline{AB}=4$

이때 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로 $\overline{AC}=4$

점 A의 좌표를 $(a,\ 2^{a+2})$으로 놓으면 점 C의 좌표는 $(a,\ 2^{a-2})$이므로

$\overline{AC}=2^{a+2}-2^{a-2}=4\times 2^a-\frac{1}{4}\times 2^a=\frac{15}{4}\times 2^a$

즉, $\frac{15}{4}\times 2^a=4$이므로 $2^a=\frac{16}{15}$

따라서 점 C의 y좌표는

$2^{a-2}=\frac{1}{4}\times 2^a=\frac{1}{4}\times\frac{16}{15}=\frac{4}{15}$

답 ②

015

$f(x)=3^x$이라고 하면 $f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계이므로

$g(k)=2$에서 $f(2)=k$

$\therefore\ k=3^2=9$

답 9

016

함수 $y=5^x+1$의 역함수의 그래프가 점 $(4,\ \log_5 a)$를 지나므로 함수 $y=5^x+1$의 그래프는 점 $(\log_5 a,\ 4)$를 지난다.

따라서 $4=5^{\log_5 a}+1$이므로 $5^{\log_5 a}=a$

$a+1=4$

$\therefore\ a=3$

답 ③

017

$(f\circ g)(x)=x$이므로 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$g(9)=k$로 놓으면 $f(k)=9$이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^{k}=9=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$\therefore\ k=-2$

답 ①

018

$g(m^2)=l$로 놓으면

$f(l)=m^2$ ······ ❶

이때 $f(k)=m$에서 $a^k=m$이므로

$f(l)=a^l=m^2=(a^k)^2=a^{2k}$ $\quad\therefore l=2k$

$\therefore g(m^2)=l=2k$ ······ ❷

답 $2k$

채점 기준	비율
❶ m^2을 함수 $f(x)$를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 주어진 조건과 지수법칙을 이용하여 $g(m^2)$을 k를 이용하여 나타낼 수 있다.	60 %

019

$g(2)=k$로 놓으면 $f(k)=2$이므로

$\dfrac{2^k+2^{-k}}{2^k-2^{-k}}=2$, $\dfrac{2^{2k}+1}{2^{2k}-1}=2$ 분자와 분모에 각각 2^k을 곱한다.

$2^{2k}+1=2(2^{2k}-1)$, $2^{2k}=3$

$2k=\log_2 3$

$\therefore k=\dfrac{1}{2}\log_2 3=\log_2 \sqrt{3}$

답 ①

020

주어진 세 수를 밑이 $\dfrac{1}{2}$인 거듭제곱의 꼴로 변형하면

$A=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

$B=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$C=\sqrt[5]{\dfrac{1}{16}}=\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\right\}^{\frac{1}{5}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{4}{5}}$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $\dfrac{1}{3}<\dfrac{4}{5}<1$에서

$\dfrac{1}{2}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{4}{5}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore A<C<B$

답 ②

021

주어진 세 수를 밑이 3인 거듭제곱의 꼴로 변형하면

$A=\sqrt{3^{\sqrt{3}}}=(3^{\sqrt{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$B=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$

$C=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}=3^{-\sqrt{3}}$

이때 밑이 1보다 크므로 $-\sqrt{3}<\dfrac{1}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서

$3^{-\sqrt{3}}<3^{\frac{1}{3}}<3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore C<B<A$

답 ⑤

022

주어진 세 수를 밑이 2인 거듭제곱의 꼴로 변형하면

$A=\dfrac{1}{2^2}=2^{-2}$

$B=\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}$

$C=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{3}}$

이때 밑이 1보다 크므로 $-2<-\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{4}$에서

$2^{-2}<2^{-\frac{1}{3}}<2^{\frac{1}{4}}$

$\therefore A<C<B$

답 ②

| 다른 풀이 |

주어진 세 수를 밑이 $\dfrac{1}{2}$인 거듭제곱의 꼴로 변형하면

$A=\dfrac{1}{2^2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$B=\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}$

$C=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $-\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{3}<2$에서

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}$

$\therefore A<C<B$

023

$0<a<1$이므로

ㄱ. $1<2$에서 $a^2<a$ (거짓)

ㄴ. $a<1$에서 $a<a^a$ (참)

ㄷ. $a^2<a$에서 $a^a<a^{a^2}$ (참) ㄱ을 통해 알 수 있다.

ㄹ. $a^2<1$에서 $a<a^{a^2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

024

$0<a<1$이므로 $a<1<2$에서

$a^2<a<a^a$

세 수 $\left(\dfrac{5}{3}\right)^a$, $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{a^2}$, $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{a^a}$의 밑이 1보다 크므로 $a^2<a<a^a$에서

$\left(\dfrac{5}{3}\right)^{a^2}<\left(\dfrac{5}{3}\right)^a<\left(\dfrac{5}{3}\right)^{a^a}$

답 ③

025

(1) 함수 $y=3^{x-1}$은 밑이 1보다 크므로 $x=-1$일 때 최솟값, $x=1$일 때 최댓값을 갖는다.

$x=-1$일 때, $y=3^{-1-1}=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$

$x=1$일 때, $y=3^{1-1}=3^0=1$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 $\dfrac{1}{9}$이다.

(2) 함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+1}$은 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $x=0$일 때 최댓값, $x=3$일 때 최솟값을 갖는다.

$x=0$일 때, $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\times0+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^1=\dfrac{1}{2}$

$x=3$일 때, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\times3+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{1}{128}$

따라서 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $\frac{1}{128}$이다.

답 (1) 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{9}$ (2) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $\frac{1}{128}$

참고

$m\le x\le n$에서 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\ne1)$은

(1) $a>1$이면 최댓값 a^n, 최솟값 a^m을 갖는다.

(2) $0<a<1$이면 최댓값 a^m, 최솟값 a^n을 갖는다.

026

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$은 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값은

$f(1)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1}=1+1=2$

답 2

027

$y=2^{x-1}\times4^{-x+1}=2^{x-1}\times4^{-(x-1)}=\left(\frac{2}{4}\right)^{x-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 주어진 함수는 $x=-1$일 때 최댓값, $x=1$일 때 최솟값을 갖는다.

$\therefore\ M=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4,\ m=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$

$\therefore\ Mm=4\times1=4$

답 ④

028

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}=4^{x-2}$

이때 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 $x=-3$일 때 최솟값 a, $x=4$일 때 최댓값 b를 갖는다.

$\therefore\ a=4^{-3-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{5}=\frac{1}{1024},\ b=4^{4-2}=4^2=16$

$\therefore\ ab=\frac{1}{1024}\times16=\frac{1}{64}$

답 ①

참고

주어진 함수의 치역은 $\left\{y\,\middle|\,\frac{1}{1024}\le y\le16\right\}$이다.

029

$f(x)=2^{a-x}+4=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}+4$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}$은 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값 20을 갖고, $x=-4$일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $f(-2)=20$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2-a}+4=20,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-2-a}=16$

$2^{2+a}=2^4,\ 2+a=4$

$\therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+4$이므로 구하는 최댓값은

$f(-4)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4-2}+4=2^6+4=64+4=68$

답 ④

030

(1) $f(x)=x^2-4x+1$이라고 하면

$f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$

이므로 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

이때 함수 $y=2^{f(x)}$은 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=2$일 때 최솟값 $2^{-3}=\frac{1}{8}$을 갖는다.

(2) $f(x)=x^2+2x+2$라고 하면

$f(x)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$

이므로 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

이때 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $f(x)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=-1$일 때 최댓값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

(3) $f(x)=-x^2+3$이라고 하면 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 3을 갖는다.

이때 함수 $y=\left(\frac{4}{3}\right)^{f(x)}$은 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=0$일 때 최댓값 $\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$를 갖는다.

(4) $f(x)=-x^2+2x-4$라고 하면

$f(x)=-x^2+2x-4=-(x-1)^2-3$

이므로 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 -3을 갖는다.

이때 함수 $y=\left(\frac{2}{5}\right)^{f(x)}$은 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $f(x)$가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=1$일 때 최솟값 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}$를 갖는다.

답 (1) 최솟값: $\frac{1}{8}$ (2) 최댓값: $\frac{1}{2}$

(3) 최댓값: $\frac{64}{27}$ (4) 최솟값: $\frac{125}{8}$

031

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2^{-(x^2-6x+1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6x+1}$

$g(x)=x^2-6x+1=(x-3)^2-8$은 $x=3$일 때 최솟값 -8을 갖는다.

이때 $(f\circ g)(x)$의 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $f(-8)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}=2^8=256$을 갖는다.

따라서 $a=3,\ b=256$이므로

$a+b=3+256=259$

답 ⑤

032

(i) $-1\le x\le0$일 때, $f(x)=2^{|x|}=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $-1\le x\le0$에서 $f(x)$는

$x=-1$일 때 최댓값 $f(-1)=2^{-(-1)}=2$를 갖고,
$x=0$일 때 최솟값 $f(0)=2^0=1$을 갖는다.

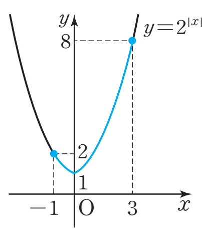
(ii) $0\le x\le 3$일 때, $f(x)=2^{|x|}=2^x$
밑이 1보다 크므로 $0\le x\le 3$에서 $f(x)$는
$x=0$일 때 최솟값 $f(0)=2^0=1$을 갖고,
$x=3$일 때 최댓값 $f(3)=2^3=8$을 갖는다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 8, 최솟값은 1이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$8+1=9$

답 ③

|다른 풀이| $f(x)=\begin{cases}2^{-x} & (-1\le x<0)\\ 2^x & (0\le x\le 3)\end{cases}$

$-1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)=2^{|x|}$의 그래프는 오른쪽 그림의 색선과 같다.
함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $f(3)=2^{|3|}=8$을 갖고, $x=0$일 때 최솟값 $f(0)=2^{|0|}=1$을 갖는다.
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$8+1=9$



033

$f(x)=x^2+2x-3$이라고 하면
$f(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$
$x=-1$은 정의역에 속하지 않고 $1\le x\le 4$에서 $f(1)=0$, $f(4)=21$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 0, $x=4$일 때 최댓값 21을 갖는다. ······ ❶
이때 함수 $y=2^{f(x)}$은 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 최댓값을 갖는다. ······ ❷
즉, 주어진 함수는 $x=4$일 때 최댓값 2^{21}을 가지므로
$a=4$, $b=21$
$\therefore b-a=21-4=17$ ······ ❸

답 17

채점 기준	비율
❶ 주어진 범위에서 x^2+2x-3의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 함수가 최댓값을 갖는 경우를 찾을 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구하여 $b-a$의 값을 구할 수 있다.	30 %

034

$g(x)=x^2-4x+2$라고 하면
$g(x)=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$
$1\le x\le 5$에서 $g(1)=-1$, $g(2)=-2$, $g(5)=7$이므로 함수 $g(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 -2, $x=5$일 때 최댓값 7을 갖는다.
이때 $0<a<1$이므로 함수 $f(x)$는 $g(x)$가 최대일 때 최솟값을 갖고, $g(x)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.
즉, $f(5)=b$, $f(2)=3$이므로
$a^7=b$, $a^{-2}=3$
$a^{-2}=3$에서 $\dfrac{1}{a^2}=3$, $a^2=\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<a<1$)
$\therefore b=a^7=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^7=\dfrac{\sqrt{3}}{81}$

답 $\dfrac{\sqrt{3}}{81}$

035

$y=-9^x+k\times 3^{x+2}-20=-(3^x)^2+9k\times 3^x-20$
$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면
$y=-t^2+9kt-20=-\left(t-\dfrac{9}{2}k\right)^2+\dfrac{81}{4}k^2-20$
이므로 $t=\dfrac{9}{2}k$일 때 최댓값 $\dfrac{81}{4}k^2-20$을 갖는다.
즉, $\dfrac{81}{4}k^2-20=\dfrac{1}{4}$이므로
$\dfrac{81}{4}k^2=\dfrac{81}{4}$, $k^2=1$
$\therefore k=1$ ($\because k>0$)

답 ①

036

$y=4^x-2^{x+2}+6=(2^x)^2-4\times 2^x+6$
$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $-2\le x\le 2$에서 $\dfrac{1}{4}\le t\le 4$
이때 주어진 함수는
$y=t^2-4t+6=(t-2)^2+2$
이므로
$t=2$, 즉 $x=1$일 때 최솟값 2를 갖고,
$t=4$, 즉 $x=2$일 때 최댓값 6을 갖는다.
따라서 $M=6$, $m=2$이므로
$M+m=6+2=8$

답 ②

참고
$2^x=t$로 치환하므로 문제에서 주어진 x의 값의 범위를 t에 대하여 변환하는 것을 잊지 말아야 한다.

037

$y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}+5=\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}^2-4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+5$
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $-2\le x\le 3$에서 $\dfrac{1}{8}\le t\le 4$
이때 주어진 함수는
$y=t^2-4t+5=(t-2)^2+1$
이므로
$t=2$, 즉 $x=-1$일 때 최솟값 1을 갖고,
$t=4$, 즉 $x=-2$일 때 최댓값 5를 갖는다.
따라서
$a=-1$, $b=1$, $c=-2$, $d=5$
구하는 것은 x의 값이므로 $t=2$에서 $a=2$, $t=4$에서 $c=4$로 착각하지 않도록 주의한다.
이므로
$a+b+c+d=-1+1+(-2)+5=3$

답 ②

038

$y=4^x-2^{x+a}+b=(2^x)^2-2^a\times 2^x+b$
$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면
$y=t^2-2^at+b=(t-2^{a-1})^2+b-(2^{a-1})^2$ ······ ❶
이므로 $t=2^{a-1}$일 때 최솟값 $b-(2^{a-1})^2$을 갖는다.
이때 주어진 함수는 $x=3$일 때 최솟값 -1을 가지므로
$2^{a-1}=2^3$, $b-(2^{a-1})^2=-1$
$2^{a-1}=2^3$에서 $a-1=3$ $\quad\therefore a=4$

$b-(2^{a-1})^2=-1$에서

$b=(2^{a-1})^2-1=(2^3)^2-1=63$ ❷

$\therefore a+b=4+63=67$ ❸

답 67

채점 기준	비율
❶ $2^x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

039

(1) $2^{x-3}=16$에서 $2^{x-3}=2^4$이므로

$x-3=4 \quad \therefore x=7$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}=8$에서 $2^{-2(x-1)}=2^3$이므로

$-2(x-1)=3,\ x-1=-\frac{3}{2} \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$

(3) $9^{x+1}=3\sqrt{3}$에서 $3^{2(x+1)}=3^{\frac{3}{2}}$이므로

$2(x+1)=\frac{3}{2},\ x+1=\frac{3}{4} \quad \therefore x=-\frac{1}{4}$

(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}=27^{x+2}$에서 $3^{-(x+2)}=3^{3(x+2)}$이므로

$-(x+2)=3(x+2),\ -x-2=3x+6$

$4x=-8 \quad \therefore x=-2$

답 (1) $x=7$ (2) $x=-\frac{1}{2}$ (3) $x=-\frac{1}{4}$ (4) $x=-2$

040

$3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$에서 $3^{x-8}=3^{-3x}$이므로

$x-8=-3x,\ 4x=8 \quad \therefore x=2$

답 2

041

$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x}=3\times\sqrt[4]{27}$에서

$3^{-(1-2x)}=3\times3^{\frac{3}{4}},\ 3^{-1+2x}=3^{\frac{7}{4}}$

$-1+2x=\frac{7}{4},\ 2x=\frac{11}{4} \quad \therefore x=\frac{11}{8}$

따라서 $a=\frac{11}{8}$이므로

$16a=16\times\frac{11}{8}=22$

답 ③

042

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x^2}=4^{x+a}$에서 $2^{-(2-x^2)}=2^{2(x+a)}$이므로

$-(2-x^2)=2(x+a),\ x^2-2=2x+2a$

$\therefore x^2-2x-2a-2=0$ ㉠

이때 주어진 방정식의 한 근이 -1이므로 ㉠에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^2-2\times(-1)-2a-2=0,\ 2a=1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$x^2-2x-3=0,\ (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 다른 한 근은 3이다.

답 3

043

$\frac{(16^x)^x}{2}=2^{3x}$에서

$(2^{4x})^x=2^{3x}\times2,\ 2^{4x^2}=2^{3x+1}$

$4x^2=3x+1,\ 4x^2-3x-1=0$

$(4x+1)(x-1)=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

즉, $\alpha=-\frac{1}{4},\ \beta=1$ 또는 $\alpha=1,\ \beta=-\frac{1}{4}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=\left(-\frac{1}{4}\right)^2+1^2=\frac{17}{16}$

답 ①

|다른 풀이|

이차방정식 $4x^2-3x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{3}{4},\ \alpha\beta=-\frac{1}{4}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\left(\frac{3}{4}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{17}{16}$

044

$9^x-6\times3^{x+1}+9=0$에서 $(3^x)^2-18\times3^x+9=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-18t+9=0$

위 이차방정식의 두 근은 3^α, 3^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha\times3^\beta=9,\ 3^{\alpha+\beta}=3^2$

$\therefore \alpha+\beta=2$

답 ③

045

$a^{2x}-2a^x=3$에서 $(a^x)^2-2a^x-3=0$

$a^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-3=0$ ❶

$(t+1)(t-3)=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=3$

$t>0$이므로 $t=3$

$\therefore a^x=3$ ❷

이때 한 근이 $x=2$이므로 위의 식에 대입하면

$a^2=3 \quad \therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$ ❸

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ $a^x=t$로 놓고 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a^x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 조건을 이용하여 a의 값을 구할 수 있다.	30 %

046

방정식 $4^x-3\times2^{x+1}+2^a=0$의 한 근이 1이므로 방정식에 $x=1$을 대입하면

$4-3\times2^2+2^a=0,\ 2^a=8=2^3$

$\therefore a=3$

$a=3$을 주어진 방정식에 대입하면

$4^x-3\times2^{x+1}+2^3=0 \qquad \therefore (2^x)^2-6\times2^x+8=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+8=0,\ (t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

즉, $2^x=2$ 또는 $2^x=4=2^2$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$

따라서 다른 한 근은 2이므로 $b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$

답 ①

047

방정식 $a^x+\dfrac{1}{a^x}=\dfrac{10}{3}$의 한 근이 1이므로 방정식에 $x=1$을 대입하면

$a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{10}{3}$

양변에 $3a$를 곱하여 정리하면

$3a^2-10a+3=0,\ (3a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=\dfrac{1}{3}\ (\because 0<a<1)$

주어진 방정식에 $a=\dfrac{1}{3}$을 대입하면

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x}=\dfrac{10}{3}$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{10}{3},\ 3t^2-10t+3=0$

$(3t-1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=\dfrac{1}{3}$ 또는 $t=3$

즉, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=3$이므로

$x=1$ 또는 $x=-1$

따라서 구하는 다른 한 근은 -1이다.

답 ④

048

$\dfrac{4^x+4^{-x}}{4^x-4^{-x}}=3$에서 $4^x+4^{-x}=3(4^x-4^{-x})$

$4^x+4^{-x}=3\times4^x-3\times4^{-x}$

$2\times4^x-4\times4^{-x}=0,\ 4^x-2\times4^{-x}=0$

양변에 4^x을 곱하면

$4^{2x}-2=0$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2=0,\ t^2=2$

$\therefore t=\sqrt{2}\ (\because t>0)$

따라서 $4^x=\sqrt{2}$이므로 $4^x=2^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{4}}$에서

$x=\dfrac{1}{4}$

답 ④

049

지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0이어야 한다.

(i) 밑이 같을 때

$x^2-1=8$이므로 $x^2=9$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

(ii) 지수가 0일 때

$x-10=0$이므로 $x=10$

$x=10$이면 주어진 방정식은 $99^0=8^0=1$로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=3$ 또는 $x=10$이므로 모든 x의 값의 합은

$(-3)+3+10=10$

답 ⑤

050

지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0이어야 한다.

(i) 밑이 같을 때

$x+1=4$이므로 $x=3$

(ii) 지수가 0일 때

$x^2-8=0$이므로 $x^2=8 \qquad \therefore x=2\sqrt{2}\ (\because x>-1)$

(i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=2\sqrt{2}$이므로 모든 근의 곱은

$3\times2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

답 $6\sqrt{2}$

051

밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같을 때

$2x-4=8-x$이므로 $3x=12 \qquad \therefore x=4$

(ii) 밑이 1, 즉 $x=1$일 때

주어진 방정식은 $1^{-2}=1^7$이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=4$이므로 모든 근의 합은

$1+4=5$

답 5

052

밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같을 때

$x^2-2x-5=2x+7$이므로 $x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0 \qquad \therefore x=6\ (\because x>2)$

(ii) 밑이 1, 즉 $x=3$일 때

주어진 방정식은 $1^{-2}=1^{13}$이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=6$이므로 모든 근의 합은

$3+6=9$

답 ④

053

밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같을 때

$2(x+2)=x^2+x-2$이므로 $2x+4=x^2+x-2$

$x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

(ii) 밑이 1, 즉 $x=-5$일 때

주어진 방정식은 $1^{-6}=1^{18}$이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=-5$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$이므로 모든 근의 곱은
$(-5)\times(-2)\times 3=30$

답 ③

054

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{5-x}$에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5}$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$2x\leq x-5$ $\therefore x\leq -5$ → 부등호 방향이 반대로 바뀐다.

답 $x\leq -5$

055

$\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}\leq 5^{x+4}$에서 $5^{2x-1}\leq 5^{x+4}$

이때 밑이 1보다 크므로

$2x-1\leq x+4$ $\therefore x\leq 5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$1+2+3+4+5=15$

답 ⑤

056

$a^{2x-1}>\sqrt[3]{a^2}\times a^{3x}$에서

$a^{2x-1}>a^{\frac{2}{3}}\times a^{3x}$ $\therefore a^{2x-1}>a^{\frac{2}{3}+3x}$

이때 $0<a<1$이므로 → 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 부등호 방향이 반대로 바뀐다.

$2x-1<\frac{2}{3}+3x$ $\therefore x>-\frac{5}{3}$

답 ①

057

$\left(\frac{1}{25}\right)^{x}<\frac{1}{125}$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}<\left(\frac{1}{5}\right)^{3}$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$2x>3$ $\therefore x>\frac{3}{2}$ ······ ㉠

$2^{x^2+x}\leq 4^{x^2+x-6}$에서 $2^{x^2+x}\leq 2^{2(x^2+x-6)}$

이때 밑이 1보다 크므로

$x^2+x\leq 2(x^2+x-6)$, $x^2+x\leq 2x^2+2x-12$

$x^2+x-12\geq 0$, $(x+4)(x-3)\geq 0$

$\therefore x\leq -4$ 또는 $x\geq 3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\geq 3$

따라서 구하는 정수 x의 최솟값은 3이다.

답 ②

058

$3^{ax(x-2)}<9$에서 $3^{ax^2-2ax}<3^2$

이때 밑이 1보다 크므로 $ax^2-2ax<2$

$\therefore ax^2-2ax-2<0$ ······ ㉠

㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.

(i) $a=0$일 때

㉠은 $-2<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a\neq 0$일 때

이차방정식 $ax^2-2ax-2=0$의 판별식을 D라고 하면 $a<0$, $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-a)^2-a\times(-2)<0$에서

$a^2+2a<0$, $a(a+2)<0$ $\therefore -2<a<0$ → $a<0$, $D<0$을 모두 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $-2<a\leq 0$

따라서 정수 a는 -1, 0의 2개이다.

답 ②

059

$4^x-10\times 2^x+16\leq 0$에서 $(2^x)^2-10\times 2^x+16\leq 0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-10t+16\leq 0$, $(t-2)(t-8)\leq 0$

$\therefore 2\leq t\leq 8$

즉, $2\leq 2^x\leq 2^3$이고 밑이 1보다 크므로

$1\leq x\leq 3$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$

답 6

060

$9^x-90\times 3^{x-1}+81<0$에서 $(3^x)^2-30\times 3^x+81<0$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-30t+81<0$, $(t-3)(t-27)<0$

$\therefore 3<t<27$

즉, $3<3^x<3^3$이고 밑이 1보다 크므로

$1<x<3$

따라서 주어진 부등식의 해가 아닌 것은 ①이다.

답 ①

061

$\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+1$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x<2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$

$\therefore \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1<0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-\frac{3}{2}t-1<0$, $2t^2-3t-2<0$

$(2t+1)(t-2)<0$ $\therefore -\frac{1}{2}<t<2$

그런데 $t>0$이므로 $0<t<2$

즉, $0<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$이고 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$x>-1$

답 ③

062

$9^{-x}-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-6>0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-\left(\frac{1}{3}\right)^x-6>0$ ❶

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-t-6>0,\ (t+2)(t-3)>0$

$\therefore t<-2$ 또는 $t>3$

그런데 $t>0$이므로 $t>3$

즉, $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$이고 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$x<-1$ ❷

따라서 구하는 정수 x의 최댓값은 -2이다. ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ a^x의 꼴이 반복되도록 주어진 부등식을 정리할 수 있다.	20 %
❷ 치환을 이용하여 주어진 부등식을 풀 수 있다.	60 %
❸ 정수 x의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

063

$(2^x-10)(2^x-1000)<0$에서

$10<2^x<1000$

이때 $2^3=8,\ 2^4=16$이고 $2^9=512,\ 2^{10}=1024$이므로

$10<2^4\le 2^x\le 2^9<1000$

즉, $2^4\le 2^x\le 2^9$이고 밑이 1보다 크므로

$4\le x\le 9$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 4, 5, 6, 7, 8, 9이므로 그 합은

$4+5+6+7+8+9=39$

답 ②

064

(i) $0<x<1$일 때

$3x-1>2(x+2),\ 3x-1>2x+4$

$\therefore x>5$

그런데 $0<x<1$이므로 해는 없다.

(ii) $x=1$일 때, $1<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때

$3x-1<2(x+2),\ 3x-1<2x+4$

$\therefore x<5$

그런데 $x>1$이므로 $1<x<5$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$1<x<5$

따라서 $\alpha=1,\ \beta=5$이므로

$\alpha+\beta=1+5=6$

답 6

065

(i) $0<x<1$일 때

$x^2-8<2x+7,\ x^2-2x-15<0$

$(x+3)(x-5)<0 \qquad \therefore -3<x<5$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $x=1$일 때, $1>1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때

$x^2-8>2x+7,\ x^2-2x-15>0$

$(x+3)(x-5)>0 \qquad \therefore x<-3$ 또는 $x>5$

그런데 $x>1$이므로 $x>5$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$0<x<1$ 또는 $x>5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값은 ⑤이다.

답 ⑤

066

(i) $0<x<1$일 때

$x^x\ge x^4 \qquad \therefore x\le 4$ 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 부등호의 방향이 바뀐다.

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $x=1$일 때, $1\le 1$이므로 부등식이 성립한다.

(iii) $x>1$일 때

$x^x\le x^4 \qquad \therefore x\le 4$

그런데 $x>1$이므로 $1<x\le 4$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$0<x\le 4$

답 ④

067

(i) $0<x-1<1$, 즉 $1<x<2$일 때

$3x-1\le 5x+4,\ 2x\ge -5$

$\therefore x\ge -\frac{5}{2}$

그런데 $1<x<2$이므로 $1<x<2$ ❶

(ii) $x-1=1$, 즉 $x=2$일 때

$1\ge 1$이므로 부등식이 성립한다. ❷

(iii) $x-1>1$, 즉 $x>2$일 때

$3x-1\ge 5x+4,\ 2x\le -5$

$\therefore x\le -\frac{5}{2}$

그런데 $x>2$이므로 해는 없다. ❸

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$1<x\le 2$ ❹

답 $1<x\le 2$

채점 기준	비율
❶ $0<$(밑)<1일 때, x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ (밑)$=1$일 때, 주어진 부등식이 성립함을 알 수 있다.	30 %
❸ (밑)>1일 때, 주어진 부등식의 해가 없음을 알 수 있다.	30 %
❹ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	10 %

068

(i) $0<x+2<1$, 즉 $-2<x<-1$일 때

$2x^2-3x>-x^2+4x-2,\ 3x^2-7x+2>0$

$(3x-1)(x-2)>0 \qquad \therefore x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>2$

그런데 $-2<x<-1$이므로 $-2<x<-1$

(ii) $x+2=1$, 즉 $x=-1$일 때, $1<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x+2>1$, 즉 $x>-1$일 때

$2x^2-3x<-x^2+4x-2$, $3x^2-7x+2<0$

$(3x-1)(x-2)<0 \qquad \therefore \frac{1}{3}<x<2$

그런데 $x>-1$이므로 $\frac{1}{3}<x<2$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$-2<x<-1$ 또는 $\frac{1}{3}<x<2$

따라서 $a=-2$, $b=-1$, $c=\frac{1}{3}$, $d=2$이므로

$$6(a+b+c+d)=6\left\{-2+(-1)+\frac{1}{3}+2\right\}$$
$$=6\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-4$$

답 ①

실력을 높이는 연습 문제

본문 053쪽

01

① $f(3)=a^3$, $f(1)f(2)=a\times a^2=a^3 \qquad \therefore f(3)=f(1)f(2)$
② $f(4)=a^4$, $\{f(2)\}^2=(a^2)^2=a^4 \qquad \therefore f(4)=\{f(2)\}^2$
③ $f(6)=a^6$, $\sqrt{f(12)}=\sqrt{a^{12}}=a^6 \qquad \therefore f(6)=\sqrt{f(12)}$
④ $f(-4)=a^{-4}=\left(\frac{1}{a}\right)^4$, $\frac{1}{f(8)}=\frac{1}{a^8}=\left(\frac{1}{a}\right)^8$

$\therefore f(-4)\neq\frac{1}{f(8)}$

⑤ $f\left(\frac{1}{10}\right)=a^{\frac{1}{10}}$, $\sqrt[20]{f(2)}=\sqrt[20]{a^2}=a^{\frac{1}{10}} \qquad \therefore f\left(\frac{1}{10}\right)=\sqrt[20]{f(2)}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

02

조건 (가)에 의하여 $f(x)=a^{bx-1}$의 그래프와 $g(x)=a^{1-bx}$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(1)=g(1)$이 성립한다.
즉, $a^{b-1}=a^{1-b}$이고 $a>1$이므로
$b-1=1-b$, $2b=2 \qquad \therefore b=1$
$\therefore f(x)=a^{x-1}$, $g(x)=a^{1-x}$
또, 조건 (나)에 의하여 $f(2)+g(2)=\frac{17}{4}$이므로

$a+a^{-1}=\frac{17}{4}$

양변에 $4a$를 곱하면
$4a^2+4=17a$, $4a^2-17a+4=0$
$(4a-1)(a-4)=0 \qquad \therefore a=4\ (\because a>1)$
$\therefore a+b=4+1=5$

답 ⑤

03

함수 $y=4^x-6$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면
$y=4^{x-a}-6+b$
이 함수의 그래프의 점근선이 직선 $y=-2$이므로
$-6+b=-2 \qquad \therefore b=4$
함수 $y=4^{x-a}-2$의 그래프가 원점을 지나므로
$0=4^{-a}-2$, $4^{-a}=2$

$2^{-2a}=2$, $-2a=1 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore ab=-\frac{1}{2}\times4=-2$

답 ④

참고
함수 $y=a^{x-m}+n\ (a>0,\ a\neq1)$에서
(1) 치역: $\{y\,|\,y>n\}$
(2) 점근선의 방정식: $y=n$

04

$f(x)=2^x$, $g(x)=\sqrt{x}$로 놓으면 $f(a)=g\left(\frac{1}{2}\right)$이므로

$2^a=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $2^a=2^{-\frac{1}{2}} \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

또, $f\left(\frac{1}{2}\right)=g(b)$이므로

$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{b} \qquad \therefore b=(2^{\frac{1}{2}})^2=2$

$\therefore ab=-\frac{1}{2}\times2=-1$

답 ②

05

$g\left(\frac{3}{4}\right)=k$로 놓으면 $f(k)=\frac{3}{4}$이므로

$\frac{2^k-2^{-k}}{2}=\frac{3}{4}$, $2^k-2^{-k}=\frac{3}{2}$

$2^k=t\ (t>0)$로 놓으면

$t-\frac{1}{t}=\frac{3}{2}$, $2t^2-3t-2=0$

$(2t+1)(t-2)=0 \qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$

즉, $2^k=2$이므로 $k=1$

$\therefore g\left(\frac{3}{4}\right)=1$

답 ②

06

(i) $0<a<1$일 때
밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $x=-3$일 때 최댓값, $x=2$일 때 최솟값을 갖는다.
따라서 $f(-3)=32f(2)$이므로

$a^{-3}=32a^2$, $a^5=\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^5 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

(ii) $a>1$일 때
밑이 1보다 크므로 $x=-3$일 때 최솟값, $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.
따라서 $f(2)=32f(-3)$이므로
$a^2=32a^{-3}$, $a^5=32=2^5 \qquad \therefore a=2$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$이므로 모든 실수 a의 값의 합은

$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

답 ④

07

(ⅰ) $x \le 2$일 때

$y=3^{-|x-2|+1}=3^{(x-2)+1}=3^{x-1}$

밑이 1보다 크므로 $x=2$일 때 최대이다.

따라서 최댓값은 $3^{2-1}=3$ $x \le 2$의 범위에서 가장 큰 수이다.

(ⅱ) $x \ge 2$일 때

$y=3^{-|x-2|+1}=3^{-(x-2)+1}=3^{-x+3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$

밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $x=2$일 때 최대이다.

$x \ge 2$의 범위에서 가장 작은 수이다.

따라서 최댓값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3}=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 최댓값은 3이다.

답 ③

| 다른 풀이 |

$y=3^{-|x-2|+1}=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|}$

밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $|x-2|$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

$|x-2|$는 $x=2$일 때 최솟값 0을 가지므로 함수 $y=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|}$의 최댓값은

$3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{0}=3$

08

$25^x-2\times5^{x+1}+k>0$에서

$(5^x)^2-10\times5^x+k>0$

$5^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-10t+k>0$

$t>0$에서 위 부등식이 항상 성립하려면 이차함수 $y=t^2-10t+k$의 $t>0$에서의 최솟값이 0보다 커야 한다.

이때 함수 $y=t^2-10t+k=(t-5)^2+k-25$는 $t=5$일 때 최솟값 $k-25$를 가지므로

$k-25>0$ $\quad\therefore k>25$

따라서 자연수 k의 최솟값은 26이다.

답 ④

참고

이차방정식 $t^2-10t+k=0$의 판별식을 이용하는 방법을 생각할 수도 있지만 $t>0$이라는 조건이 있으므로 $t>0$에서의 최솟값을 이용하여 구한다.

09

문제 접근하기

4^{3+x}과 4^{3-x}은 모두 양수이고, 두 식을 곱하면 미지수가 사라지고 상수만 남는다. 이와 같은 경우는 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면 최솟값이나 최댓값을 쉽게 구할 수 있다.

$4^{3+x}>0$, $4^{3-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4^{3+x}+4^{3-x}\ge2\sqrt{4^{3+x}\times4^{3-x}}$

$=2\sqrt{4^6}$

$=2\times4^3=128$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립한다.)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 128이다.

$4^{3+x}=4^{3-x}$에서
$3+x=3-x$
$\therefore x=0$

답 ③

풍쌤 개념 CHECK

산술평균과 기하평균의 관계_高 공통수학 2

$a>0$, $b>0$일 때

$a+b\ge2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

10

$\frac{4^{x^2-1}}{2^{x-2}}=8$에서 $\frac{2^{2(x^2-1)}}{2^{x-2}}=2^3$

$2^{2x^2-2-(x-2)}=2^3$, $2^{2x^2-x}=2^3$

$2x^2-x=3$, $2x^2-x-3=0$

$(x+1)(2x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

이때 $\alpha>\beta$이므로

$\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=-1$

$\therefore 2\alpha+\beta=2\times\frac{3}{2}+(-1)=2$

답 2

11

문제 접근하기

3^x의 꼴이 반복되는 지수방정식이므로 $3^x=t$로 놓고 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 바꾸어 생각한다. 이때 $t>0$이어야 하므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 때, t에 대한 이차방정식은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$9^x-2(k+1)\times3^x+4=0$에서

$(3^x)^2-2(k+1)\times3^x+4=0$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-2(k+1)t+4=0$ ········ ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다. $t>0$이므로 두 실근은 양수이어야 한다.

방정식 ㉠의 서로 다른 두 양의 실근을 α, β, 판별식을 D라고 하면

(ⅰ) $\frac{D}{4}=(k+1)^2-4>0$에서

$k^2+2k+1-4>0$, $k^2+2k-3>0$

$(k+3)(k-1)>0$

$\therefore k<-3$ 또는 $k>1$

(ⅱ) $\alpha+\beta=2(k+1)>0$에서 $k>-1$

(ⅲ) $\alpha\beta=4>0$이므로 모든 실수 k에 대하여 성립한다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 k의 값의 범위는

$k>1$

답 ⑤

풍쌤 개념 CHECK

이차방정식의 실근의 부호_高 공통수학 1

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β, 판별식을 D라고 하면

(1) 두 근이 모두 양수일 조건 ➡ $D>0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

(2) 두 근이 모두 음수일 조건 ➡ $D>0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호일 조건 ➡ $\alpha\beta<0$

12

$\begin{cases}2^x+4^y=12\\ 2^{x+2y}=32\end{cases}$에서 $\begin{cases}2^x+2^{2y}=12\\ 2^x\times2^{2y}=32\end{cases}$

$2^x=A$, $2^{2y}=B$ $(A>0,\ B>0)$로 놓으면

$\begin{cases}A+B=12\\ AB=32\end{cases}$

A, B는 이차방정식 $t^2-12t+32=0$의 두 근이므로

$(t-4)(t-8)=0\quad \therefore t=4$ 또는 $t=8$

따라서 $A=4$, $B=8$ 또는 $A=8$, $B=4$이므로

$2^x=4$, $2^{2y}=8$ 또는 $2^x=8$, $2^{2y}=4$

즉, $2^x=2^2$, $2^{2y}=2^3$ 또는 $2^x=2^3$, $2^{2y}=2^2$이므로

$\therefore x=2$, $y=\frac{3}{2}$ 또는 $x=3$, $y=1$

이때 α, β는 정수이므로 $\alpha=3$, $\beta=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=3^2+1^2=10$

답 10

13

밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같을 때

$2x+10=x^2-a$이므로 $x^2-2x-a-10=0$

이 이차방정식의 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a-10$

(ii) 밑이 1, 즉 $x=-1$일 때

주어진 방정식은 $1^8=1^{1-a}$이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은

$(-a-10)\times(-1)=a+10$

즉, $a+10=5$이므로 $a=-5$

답 ②

참고

$a=-5$이면 이차방정식 $x^2-2x-a-10=0$은 $x^2-2x-5=0$이므로 $x=1\pm\sqrt{6}$

따라서 주어진 이차방정식은 실근을 갖고, 두 실근은 조건 $x>-2$를 만족시킨다.

14

문제 접근하기

$A\cap B=B$이면 집합 B의 모든 원소가 집합 A에 모두 속한다. 즉, 두 집합 A, B의 원소를 $\alpha<x<\beta$의 꼴로 나타낸 후 $B\subset A$를 만족시키는 a의 값의 범위를 구해야 한다.

이때 부등식에서 등호가 없음에 주의한다.

$(x-1)(x-a)<0$에서

$1<x<a$ $(\because a>1)\quad \therefore A=\{x|1<x<a\}$

또, $4^x-5\times2^{x+2}+64<0$에서

$(2^x)^2-20\times2^x+64<0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

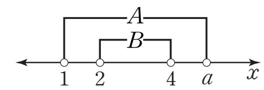
$t^2-20t+64<0$, $(t-4)(t-16)<0$

$\therefore 4<t<16$

즉, $2^2<2^x<2^4$이고 밑이 1보다 크므로

$2<x<4\quad \therefore B=\{x|2<x<4\}$

이때 $A\cap B=B$에서 $B\subset A$이어야 하므로 집합 B의 모든 원소가 집합 A에 속하려면



$a\ge4$ → $a=4$이어도 $B\subset A$, 즉 $A\cap B=B$가 성립한다.

따라서 정수 a의 최솟값은 4이다.

답 ②

15

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4}\le2^{k(3-2x)}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{k(2x-3)}$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$x^2+4\ge k(2x-3)$

$\therefore x^2-2kx+3k+4\ge0$

위 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2kx+3k+4=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(3k+4)\le0$

$k^2-3k-4\le0$, $(k+1)(k-4)\le0$

$\therefore -1\le k\le4$

따라서 정수 k의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 값은

$4+(-1)=3$

답 3

16

$a^{2x}-b\times a^x+5<0$에서 $a^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-bt+5<0$ ········· ㉠

또, $-1<x<2$에서 $a^{-1}<a^x<a^2$ $(\because a>1)$

$\therefore \frac{1}{a}<t<a^2$ ········· ㉡

이때 ㉠의 해가 ㉡이므로 이차방정식 $t^2-bt+5=0$의 두 근은 $\frac{1}{a}$, a^2이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{a}+a^2=b$, $\frac{1}{a}\times a^2=5$

$\frac{1}{a}\times a^2=5$에서 $a=5$이므로

$b=\frac{1}{a}+a^2=\frac{1}{5}+25=\frac{126}{5}$

$\therefore ab=5\times\frac{126}{5}=126$

답 126

17

(i) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-2}>\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x}$에서 $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-2}>\left(\frac{1}{6}\right)^{2(2-x)}$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$x-2<2(2-x)$, $x-2<4-2x$

$3x<6\quad \therefore x<2$

(ii) $4^x-9\times2^x+8<0$에서 $(2^x)^2-9\times2^x+8<0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-9t+8<0$, $(t-1)(t-8)<0$

$\therefore 1<t<8$

즉, $2^0<2^x<2^3$이고 밑이 1보다 크므로

$0<x<3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 연립부등식의 해는
$0<x<2$
따라서 $\alpha=0$, $\beta=2$이므로
$\alpha+\beta=0+2=2$

답 ②

18

$\frac{1}{x^2}>x^{x^2-3x}$에서 $x^{-2}>x^{x^2-3x}$
(ⅰ) $0<x<1$일 때
$-2<x^2-3x$이므로 $x^2-3x+2>0$
$(x-1)(x-2)>0$ $\quad\therefore x<1$ 또는 $x>2$
그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$
(ⅱ) $x=1$일 때, $1>1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.
(ⅲ) $x>1$일 때
$-2>x^2-3x$이므로 $x^2-3x+2<0$
$(x-1)(x-2)<0$ $\quad\therefore 1<x<2$
그런데 $x>1$이므로 $1<x<2$
(ⅰ)~(ⅲ)에서 주어진 부등식의 해는
$0<x<1$ 또는 $1<x<2$
따라서 $a=0$, $b=1$, $c=1$, $d=2$이므로
$a+b+c+d=0+1+1+2=4$

답 4

04 로그함수

기본을 다지는 유형

본문 057쪽

001

(1) $-x+6>0$에서 $x<6$이므로 정의역은 $\{x|x<6\}$
(2) $2x-4>0$에서 $x>2$이므로 정의역은 $\{x|x>2\}$
(3) $|x-2|>0$에서 $x\neq2$이므로 정의역은 $\{x|x\neq2\}$

답 (1) $\{x|x<6\}$ (2) $\{x|x>2\}$ (3) $\{x|x\neq2\}$

002

ㄱ. $y=\log_4 \frac{1}{x}=\log_4 x^{-1}=-\log_4 x$

ㄴ. $y=\frac{1}{2}\log_2 x=\log_{2^2} x=\log_4 x$

ㄷ. $y=\log_{16}\sqrt{x}=\log_{4^2} x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\log_4 x$

ㄹ. $y=\log_{\frac{1}{4}}(-x)=\log_{4^{-1}}(-x)=-\log_4(-x)$

따라서 함수 $y=\log_4 x$와 같은 함수는 ㄴ이다.

답 ②

003

$f(f(x))=1$에서
$\log_3(\log_3 x)=1$, $\log_3 x=3$
$\therefore x=3^3=27$

답 ③

004

함수 $y=\log_2(x^2+2x+a)$가 실수 전체의 집합에서 정의되려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+2x+a>0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=1^2-a<0$ $\quad\therefore a>1$
따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 2이다.

답 ⑤

|다른 풀이|
모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+2x+a>0$이 성립하려면 이차함수 $y=x^2+2x+a$의 최솟값이 0보다 커야 한다.
$y=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$이므로 $x=-1$일 때 최솟값 $a-1$을 갖는다.
즉, $a-1>0$이어야 하므로 $a>1$
따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 2이다.

005

①, ② $a>0$이면 $-a<0$이므로 $f(-a)$는 정의되지 않는다.

③ $f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=\log_{10} a+\log_{10}\frac{1}{a}=\log_{10} a-\log_{10} a=0$

④ $f(a)f\left(\frac{1}{a}\right)=\log_{10} a\times\log_{10}\frac{1}{a}=-(\log_{10} a)^2$

⑤ $f(a)-f\left(\frac{1}{a}\right)=\log_{10} a-\log_{10}\frac{1}{a}=2\log_{10} a$

따라서 항상 일정한 값을 갖는 것은 ③이다.

답 ③

006

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면

$y-4=\log_3(x-2)$

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y-4=\log_3(-x-2)$

$\therefore y=\log_3(-x-2)+4$

답 ④

007

곡선 $y=\log_2(x+6)$은 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=\log_2 x$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$이므로 곡선 $y=\log_2(x+6)$의 점근선의 방정식은

$x=-6$

$\therefore k=-6$

답 -6

참고

로그함수 $y=\log_a(x-m)+n$ $(a>0, a\neq 1)$에서

(1) 정의역: $\{x \mid x>m\}$ (2) 점근선의 방정식: $x=m$

008

함수 $y=\frac{1}{2}\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y-3=\frac{1}{2}\log_2(x+1)$

이 함수의 그래프가 점 $(3, a)$를 지나므로

$a-3=\frac{1}{2}\log_2 4$, $a-3=1$ $\quad\therefore a=4$

답 ④

참고

$y=\frac{1}{2}\log_2 x=\log_{2^2} x=\log_4 x$로 고쳐서 풀 수도 있다.

009

함수 $y=\log_3(x+a)+b$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=\log_3 x$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$이므로 함수 $y=\log_3(x+a)+b$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$

$\therefore a=4$

또, 함수 $y=\log_3(x+4)+b$의 그래프가 점 $(5, 0)$을 지나므로

$0=\log_3(5+4)+b$

$\therefore b=-\log_3 9=-2$

$\therefore a+b=4+(-2)=2$

답 ①

010

ㄱ. 함수 $y=\log\left(x+\frac{1}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\log x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\log\frac{1}{2}x=\log\frac{1}{2}+\log x=\log x-\log 2$

$\therefore y+\log 2=\log x$

이 함수의 그래프는 함수 $y=\log x$의 그래프를 y축의 방향으로 $-\log 2$만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 함수 $y=2\log x=\log x^2$의 그래프는 함수 $y=\log x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 없다.

ㄹ. 함수 $y=\log x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$y=-\log x=\log\frac{1}{x}$

또, 이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=\log\left(-\frac{1}{x}\right)$

즉, 함수 $y=\log\left(-\frac{1}{x}\right)$의 그래프는 함수 $y=\log x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\log x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ⑤

011

$$\begin{aligned}f(20)&=\log_a 20=\log_a(2^2\times 5)\\&=\log_a 2^2+\log_a 5\\&=2\log_a 2+\log_a 5\end{aligned}$$

이때 주어진 그래프에 의하여

$\log_a 2=p$, $\log_a 5=q$

이므로

$f(20)=2\log_a 2+\log_a 5=2p+q$

답 ②

012

$A(1, 0)$, $B(4, 2)$, $C(4, \log_a 4)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned}\triangle ABC&=\frac{1}{2}\times(4-1)\times(2-\log_a 4)\\&=\frac{3}{2}\times(2-\log_a 4)\\&=3-\frac{3}{2}\log_a 4\end{aligned}$$

변 BC를 밑변으로 보고 계산한다.

즉, $3-\frac{3}{2}\log_a 4=\frac{9}{2}$이므로

$\frac{3}{2}\log_a 4=-\frac{3}{2}$, $\log_a 4=-1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

답 ④

013

$A(0, \log_6 3)$, $B(0, \log_6 12)$, $M(0, \log_6 a)$ ······ ❶

이때 점 M이 선분 AB의 중점이므로

$\log_6 a=\frac{\log_6 3+\log_6 12}{2}$ ······ ❷

$=\frac{\log_6(3\times 12)}{2}=\frac{\log_6 36}{2}=1$

선분 AB는 y축 위에 있으므로 y좌표로 식을 세운다.

$\therefore a=6$ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 세 점 A, B, M의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 선분의 중점의 좌표를 구하는 방법을 이용하여 a에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

014

정사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{9}{4}$이므로 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\frac{3}{2}$이다.

점 A의 x좌표를 k라고 하면

점 B의 y좌표

$\log_3 k - \log_9 \frac{1}{k} = \frac{3}{2}$, $\log_3 k - \log_{3^2} k^{-1} = \frac{3}{2}$

점 A의 y좌표

$\log_3 k + \frac{1}{2}\log_3 k = \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}\log_3 k = \frac{3}{2}$

$\log_3 k = 1 \qquad \therefore k=3$

이때 점 D의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로

(점 D의 y좌표)$=\log_3 k = \log_3 3 = 1$

답 1

015

$f(a)=b$에서 $\log_{\sqrt{2}} a = b$

$g(4b)=k$로 놓으면 $f(k)=4b$이므로

$\log_{\sqrt{2}} k = 4b$

$\therefore k=(\sqrt{2})^{4b}=(\sqrt{2})^{4\log_{\sqrt{2}} a}=a^4$

답 ④

016

$y=\log_3 x+1$로 놓으면

$\log_3 x = y-1 \qquad \therefore x=3^{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=3^{x-1} \qquad \therefore g(x)=3^{x-1}$

또, $y=f(x-3)=\log_3(x-3)+1$에서

$\log_3(x-3)=y-1$

$x-3=3^{y-1} \qquad \therefore x=3^{y-1}+3$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=3^{x-1}+3=g(x)+3$

따라서 함수 $f(x-3)$의 역함수는 $g(x)+3$이다.

답 ③

017

주어진 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$a^{-1}=2 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 역함수가 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이므로

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 $\log_{\frac{1}{2}} y = x$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log_{\frac{1}{2}} x \qquad \therefore f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

$\therefore f(8)=\log_{\frac{1}{2}} 8=\log_{2^{-1}} 2^3=-3$

답 ①

참고

지수함수 $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$과 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$는 서로 역함수 관계이다.

018

함수 $y=5^{x+1}$에서

$\log_5 y = x+1 \qquad \therefore x=\log_5 y-1$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=\log_5 x-1$ ❶

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$y=\log_5(x-1)-4$ ❷

이 함수의 그래프가 점 $(k, -2)$를 지나므로

$-2=\log_5(k-1)-4$, $2=\log_5(k-1)$

$k-1=5^2 \qquad \therefore k=26$ ❸

답 26

채점 기준	비율
❶ 주어진 지수함수의 역함수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 로그함수의 그래프를 평행이동한 함수의 식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 그래프가 지나는 점을 이용하여 상수 k의 값을 구할 수 있다.	30 %

019

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면

$y=2^{x-m}+2$ ······ ㉠

또, 함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y=\log_2 8(x-2)$

$=\log_2 8+\log_2(x-2)$

$=\log_2(x-2)+3$ ······ ㉡

이때 두 함수 ㉠, ㉡의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

즉, ㉠에서

$y-2=2^{x-m}$, $\log_2(y-2)=x-m$

$\therefore x=\log_2(y-2)+m$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=\log_2(x-2)+m$

위 식이 ㉡과 같아야 하므로 $m=3$

답 ③

020

주어진 세 수를 밑이 3인 로그로 변형하면

$A=\log_3\sqrt{5}$

$B=\log_{\frac{1}{3}} 8=-\log_3 8=\log_3\frac{1}{8}$

$C=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{10}=\log_{3^{\frac{1}{2}}} 10^{\frac{1}{2}}=\log_3 10$

이때 밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{8}<\sqrt{5}<10$에서

$\log_3 \frac{1}{8}<\log_3 \sqrt{5}<\log_3 10$

$\therefore B<A<C$

답 ③

참고

밑을 $\frac{1}{3}$로 통일하여 풀 수도 있다. 이 경우에는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 부등호의 방향이 바뀜에 주의한다.

021

주어진 세 수를 밑이 2인 로그로 변형하면

$A=-3\log_2 \frac{1}{5}=\log_2 \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\log_2 125$

$B=6=\log_2 2^6=\log_2 64$

$C=\log_{\frac{1}{4}} 3=\log_{2^{-2}} 3=-\frac{1}{2}\log_2 3=\log_2 \frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 밑이 1보다 크므로 $\frac{\sqrt{3}}{3}<64<125$에서

$\log_2 \frac{\sqrt{3}}{3}<\log_2 64<\log_2 125$

$\therefore C<B<A$

답 ⑤

022

$1<x<5$의 각 변에 밑이 5인 로그를 취하면

$0<\log_5 x<1$

(i) $A-B=\log_5 x-(\log_5 x)^2$

$\quad =\underline{(1-\log_5 x)\times\log_5 x>0}$

$\quad \therefore A>B$ $\quad \log_5 x<1$에서 $1-\log_5 x>0$이고, $\log_5 x>0$

(ii) $0<\log_5 x<1$이므로

$\quad 0<(\log_5 x)^2<1 \qquad \therefore 0<B<1$

또, $\log_5 x<1$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\quad \log_3 (\log_5 x)<0 \qquad \therefore C<0$

$\quad \therefore C<B$

(i), (ii)에서 $C<B<A$

답 ⑤

참고

밑을 통일할 수 없거나 진수가 미지수인 경우는 두 수의 차를 이용하여 대소를 비교할 수 있다.

023

$1<x<3$의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면

$0<\log_3 x<1$

(i) $A=\frac{1}{2}\log_3 x^2=\log_3 x$이므로

$\quad 0<A<1$

또, $B=\log_3 (\log_3 x)^2=2\log_3 (\log_3 x)$이고

$\log_3 x<1$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 (\log_3 x)<0$

이므로

$2\log_3 (\log_3 x)<0 \qquad \therefore B<0$

$\therefore B<A$

(ii) $C=\log_x 3=\frac{1}{\log_3 x}$이므로 $0<\log_3 x<1$에서

$\frac{1}{\log_3 x}>1 \qquad \therefore C>1$

$\therefore A<C$

(i), (ii)에서 $B<A<C$

답 ②

024

(1) 함수 $y=\log_{\sqrt{2}} x$는 밑이 1보다 크므로 $x=2$일 때 최솟값, $x=8$일 때 최댓값을 갖는다.

$x=2$일 때, $y=\log_{\sqrt{2}} 2=\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2=2$

$x=8$일 때, $y=\log_{\sqrt{2}} 8=\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^6=6$

따라서 최댓값은 6, 최솟값은 2이다.

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} (2x-3)-2$는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $x=6$일 때 최댓값, $x=15$일 때 최솟값을 갖는다.

$x=6$일 때

$y=\log_{\frac{1}{3}} (2\times6-3)-2=\log_{3^{-1}} 9-2$

$\quad =\log_{3^{-1}} 3^2-2=-2-2=-4$

$x=15$일 때

$y=\log_{\frac{1}{3}} (2\times15-3)-2=\log_{3^{-1}} 27-2$

$\quad =\log_{3^{-1}} 3^3-2=-3-2=-5$

따라서 최댓값은 -4, 최솟값은 -5이다.

답 (1) **최댓값:** 6, **최솟값:** 2 (2) **최댓값:** -4, **최솟값:** -5

025

함수 $y=\log_4 2(x-1)$은 밑이 1보다 크므로 $x=2$일 때 최솟값, $x=9$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서

$m=\log_4 2(2-1)=\log_4 2=\log_{2^2} 2=\frac{1}{2}$,

$M=\log_4 2(9-1)=\log_4 16=\log_4 4^2=2$

이므로

$M-m=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

026

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} (x-a)$는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 <u>$x=10$일 때 최솟값 -1을 갖는다.</u>

$x=9$일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $\log_{\frac{1}{3}} (10-a)=-1$이므로

$10-a=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3 \qquad \therefore a=7$

답 ②

027

함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}} (x+k)$는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $x=0$일 때 최댓값 -4, $x=12$일 때 최솟값 m을 갖는다.

즉, $f(0)=-4$이므로

$2\log_{\frac{1}{2}} k=-4$, $\log_{2^{-1}} k=-2$

$\log_2 k=2 \qquad \therefore k=2^2=4$

따라서 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+4)$이므로

$m=f(12)=2\log_{\frac{1}{2}}(12+4)$

$=2\log_{\frac{1}{2}}16=2\log_{2^{-1}}2^4$

$=2\times(-1)\times4=-8$

$\therefore k+m=4+(-8)=-4$

답 ④

028

함수 $y=\log_2(4x-2)+k$는 밑이 1보다 크므로 $x=1$일 때 최솟값, $x=\frac{17}{2}$일 때 최댓값을 갖는다.

최솟값은

$f(1)=\log_2(4-2)+k$

$=\log_2 2+k=k+1$

최댓값은

$f\left(\frac{17}{2}\right)=\log_2\left(4\times\frac{17}{2}-2\right)+k=\log_2 32+k$

$=\log_2 2^5+k=k+5$

이때 최댓값이 최솟값의 2배이므로

$k+5=2(k+1),\ k+5=2k+2 \qquad \therefore k=3$

답 ①

029

(1) $f(x)=x^2-2x+2$라고 하면

$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

이므로 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

이때 함수 $y=\log_2 f(x)$는 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=1$일 때 최솟값 $\log_2 1=0$을 갖는다.

(2) $f(x)=x^2+6x+18$이라고 하면

$f(x)=x^2+6x+18=(x+3)^2+9$

이므로 $f(x)$는 $x=-3$일 때 최솟값 9를 갖는다.

이때 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $f(x)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=-3$일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}}9=\log_{3^{-1}}3^2=-2$를 갖는다.

(3) $f(x)=-x^2+8$이라고 하면 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

이때 함수 $y=\log_4 f(x)$는 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=0$일 때 최댓값 $\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$을 갖는다.

(4) $f(x)=-x^2+4x+4$라고 하면

$f(x)=-x^2+4x+4=-(x-2)^2+8$

이므로 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 8을 갖는다.

이때 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $f(x)$가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=2$일 때 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}}8=\log_{2^{-1}}2^3=-3$을 갖는다.

답 (1) 최솟값: 0 (2) 최댓값: -2 (3) 최댓값: $\frac{3}{2}$ (4) 최솟값: -3

030

$f(x)=-x^2+2x+4$라고 하면

$f(x)=-x^2+2x+4=-(x-1)^2+5$

$-1\le x\le 3$에서 $f(-1)=1,\ f(1)=5,\ f(3)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 5, $x=-1$ 또는 $x=3$일 때 최솟값 1을 갖는다.

이때 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}}f(x)$는 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $f(x)$가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=1$일 때 최솟값 $\log_{\frac{1}{5}}5=-1$을 가지므로

$a=1,\ b=-1$

$\therefore a+b=1+(-1)=0$

답 0

031

$f(x)=x^2+2x+3$이라고 하면

$f(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 2를 갖는다.

그런데 함수 $y=\log_a(x^2+2x+3)$이 최댓값을 가져야 하므로 $0<a<1$이어야 한다.

따라서 주어진 함수는 $x=-1$일 때 최댓값 -2를 가지므로

$\log_a 2=-2,\ a^{-2}=2$

$\therefore a=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ③

032

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\log_2(-x^2+2x+15)$

$h(x)=-x^2+2x+15$라고 하면

$h(x)=-x^2+2x+15=-(x-1)^2+16$

이므로 $x=1$일 때 최댓값 16을 갖는다.

함수 $(f\circ g)(x)$의 밑이 1보다 크므로 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $f(g(1))=\log_2 16=\log_2 2^4=4$를 갖는다.

따라서 $a=1,\ b=4$이므로

$a+b=1+4=5$

답 ⑤

033

$f(x)=x^2-x+\frac{9}{4}$라고 하면

$f(x)=x^2-x+\frac{9}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2$

$-1\le x\le 1$에서 $f(-1)=\frac{17}{4},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=2,\ f(1)=\frac{9}{4}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $\frac{17}{4}$, $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 2를 갖는다. ❶

이때 $0<a<1$이므로 주어진 함수는 $f(x)$가 최대일 때 최솟값을 갖고, $f(x)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

즉, 주어진 함수는 $x=-1$일 때 최솟값 $\log_a\frac{17}{4}$, $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\log_a 2$를 가지므로

$\log_a\frac{17}{4}=\log_a b+1,\ \log_a 2=-\frac{1}{2}$ ❷

$\log_a 2 = -\frac{1}{2}$에서 $a^{-\frac{1}{2}} = 2$

$\therefore a = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$a = \frac{1}{4}$을 $\log_a \frac{17}{4} = \log_a b + 1$에 대입하면

$\log_{\frac{1}{4}} \frac{17}{4} = \log_{\frac{1}{4}} b + 1$

$\log_{\frac{1}{4}} 17 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{4}} b + 1$

$\log_{\frac{1}{4}} 17 + 1 = \log_{\frac{1}{4}} b + 1$

$\therefore b = 17$ ······ ❸

답 17

채점 기준	비율
❶ $f(x) = x^2 - x + \frac{9}{4}$로 놓고 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 치역을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %

034

$\log_3 x = t$로 놓으면 주어진 함수는

$y = t^2 + at + b = \left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$

이 함수가 $x = \frac{1}{3}$, 즉 $t = -1$일 때 최솟값 3을 가지므로

$-\frac{a}{2} = -1$, $-\frac{a^2}{4} + b = 3$

$-\frac{a}{2} = -1$에서 $a = 2$

$a = 2$를 $-\frac{a^2}{4} + b = 3$에 대입하면

$-1 + b = 3 \qquad \therefore b = 4$

$\therefore ab = 2 \times 4 = 8$

답 ④

참고

지수함수 $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$의 치역은 양의 실수의 집합이므로 $a^x = t$로 치환하면 $t > 0$이다. 이와 달리 로그함수 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$의 치역은 실수 전체의 집합이므로 $\log_a x = t$로 치환했을 때 t는 실수 전체의 값을 가질 수 있다. 단, $x > 0$임에 주의한다.

035

$y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + \log_2 x^6 + 2$

$= (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - 6 \log_{\frac{1}{2}} x + 2$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$로 놓으면

$y = t^2 - 6t + 2 = (t-3)^2 - 7$ ······ ❶

따라서 주어진 함수는 $t = 3$일 때 최솟값 -7을 가지므로

$b = -7$ ······ ❷

이때 $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$에서 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$이므로

$a = \frac{1}{8}$ ······ ❸

$\therefore ab = \frac{1}{8} \times (-7) = -\frac{7}{8}$ ······ ❹

답 $-\frac{7}{8}$

채점 기준	비율
❶ 치환을 이용하여 주어진 로그함수를 이차함수의 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

036

$y = (\log_3 x)(\log_{\frac{1}{3}} x) + 4 \log_3 x$

$= (\log_3 x)(-\log_3 x) + 4 \log_3 x$

$= -(\log_3 x)^2 + 4 \log_3 x$

$\log_3 x = t$로 놓으면 $3 \le x \le 27$에서

$\log_3 3 \le \log_3 x \le \log_3 27$

$\log_3 3^1 \le \log_3 x \le \log_3 3^3$

$\therefore 1 \le t \le 3$

이때 주어진 함수는

$y = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4$

$1 \le t \le 3$에서 주어진 함수는 $t = 2$일 때 최댓값 4, $t = 1$ 또는 $t = 3$일 때 최솟값 3을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$4 + 3 = 7$

답 ②

037

$y = (\log_2 2x)\left(\log_4 \frac{x}{4}\right)$

$= (\log_2 x + \log_2 2)(\log_{2^2} x - \log_4 4)$

$= (\log_2 x + 1)\left(\frac{1}{2} \log_2 x - 1\right)$

$= \frac{1}{2}(\log_2 x)^2 - \frac{1}{2} \log_2 x - 1$

$\log_2 x = t$로 놓으면

$y = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - 1 = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{8}$

따라서 주어진 함수는 $t = \frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{9}{8}$를 가지므로

$b = -\frac{9}{8}$

$\log_2 x = \frac{1}{2}$에서 $x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$이므로

$a = \sqrt{2}$

$\therefore a^6 b = (\sqrt{2})^6 \times \left(-\frac{9}{8}\right) = 8 \times \left(-\frac{9}{8}\right) = -9$

답 -9

038

$y = (\log_3 27x)\left(\log_3 \frac{3}{x^2}\right)$

$= (\log_3 x + \log_3 27)(\log_3 3 - \log_3 x^2)$

$= (\log_3 x + 3)(1 - 2 \log_3 x)$

$= -2(\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x + 3$

$\log_3 x = t$로 놓으면 $\frac{1}{81} \le x \le 9$에서

$\log_3 \frac{1}{81} \le \log_3 x \le \log_3 9$

$\log_3 3^{-4} \le \log_3 x \le \log_3 3^2$

$\therefore\ -4 \le t \le 2$

이때 주어진 함수는

$y=-2t^2-5t+3=-2\left(t+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{49}{8}$

$-4 \le t \le 2$에서 주어진 함수는 $t=-\frac{5}{4}$일 때 최댓값 $\frac{49}{8}$, $t=2$일 때 최솟값 -15를 갖는다.

따라서 $M=\frac{49}{8}$, $m=-15$이므로

$8M+2m=8\times\frac{49}{8}+2\times(-15)=49-30=19$

답 19

039

(1) 진수의 조건에서

$x+1>0 \qquad \therefore\ x>-1$ ⋯⋯ ㉠

$\log_2(x+1)=4$에서

$x+1=2^4 \qquad \therefore\ x=2^4-1=15$

$x=15$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(2) 진수의 조건에서 $x-1>1 \quad \therefore\ x>2$

$x-1>0$, $\underline{\log_3(x-1)>0} \qquad \therefore\ x>2$ ⋯⋯ ㉠

$\log_4\{\log_3(x-1)\}=1$에서

$\log_4\{\log_3(x-1)\}=\log_4 4$

$\log_3(x-1)=4$, $x-1=3^4$

$\therefore\ x=3^4+1=82$

$x=82$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(3) 진수의 조건에서

$x+2>0 \qquad \therefore\ x>-2$ ⋯⋯ ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)=2\log_{\frac{1}{2}}3$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)=\log_{\frac{1}{2}}3^2$

$x+2=3^2 \qquad \therefore\ x=3^2-2=7$

$x=7$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(4) 진수의 조건에서

$x>0$, $x-3>0 \qquad \therefore\ x>3$ ⋯⋯ ㉠

$\log_3 x=1+\log_3(x-3)$에서

$\log_3 x=\log_3 3+\log_3(x-3)$

$\log_3 x=\log_3 3(x-3)$

$x=3(x-3)$, $x=3x-9$

$2x=9 \qquad \therefore\ x=\frac{9}{2}$

$x=\frac{9}{2}$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

답 (1) $x=15$ (2) $x=82$ (3) $x=7$ (4) $x=\frac{9}{2}$

참고

로그방정식을 풀 때에는 x의 값을 구한 후, 진수가 양수인 조건을 만족시키는지 확인해야 한다.

040

진수의 조건에서

$x-3>0$, $x-4>0 \qquad \therefore\ x>4$ ⋯⋯ ㉠

$\log_2(x-3)=1-\log_2(x-4)$에서

$\log_2(x-3)+\log_2(x-4)=1$

$\log_2(x-3)(x-4)=\log_2 2$

$(x-3)(x-4)=2$, $x^2-7x+10=0$

$(x-2)(x-5)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=5$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=5$

답 5

041

진수의 조건에서

$x-1>0$, $x-\frac{5}{3}>0 \qquad \therefore\ x>\frac{5}{3}$ ⋯⋯ ㉠

$\log_3(x-1)-\log_9\left(x-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{2}$에서

$\log_3(x-1)-\frac{1}{2}\log_3\left(x-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{2}\log_3 3$

$2\log_3(x-1)=\log_3 3+\log_3\left(x-\frac{5}{3}\right)$

$\log_3(x-1)^2=\log_3 3\left(x-\frac{5}{3}\right)$

$(x-1)^2=3\left(x-\frac{5}{3}\right)$

$x^2-2x+1=3x-5$

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=3$

이것은 모두 ㉠을 만족시킨다.

따라서 모든 근의 합은

$2+3=5$

답 ①

| 다른 풀이 |

다음과 같이 로그의 밑을 9로 통일하여 풀어도 결과는 같다.

$\log_3(x-1)-\log_9\left(x-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{2}$에서

$\log_{3^2}(x-1)^2-\log_9\left(x-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{2}\log_9 9$

$\log_9(x-1)^2-\log_9\left(x-\frac{5}{3}\right)=\log_9 9^{\frac{1}{2}}$

$\log_9(x-1)^2=\log_9\left(x-\frac{5}{3}\right)+\log_9 3$

$\log_9(x-1)^2=\log_9 3\left(x-\frac{5}{3}\right)$

$(x-1)^2=3\left(x-\frac{5}{3}\right)$

042

밑의 조건에서

$x>0$, $x\ne1 \qquad \therefore\ 0<x<1$ 또는 $x>1$ ⋯⋯ ㉠

$\log_{\sqrt{2}}8=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^3=3\times2\times\log_2 2=6$이므로

$\log_x(\log_{\sqrt{2}}8)=2$에서

$\log_x 6=2$, $x^2=6$

$\therefore\ x=-\sqrt{6}$ 또는 $x=\sqrt{6}$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=\sqrt{6}$

답 ⑤

043

진수의 조건에서

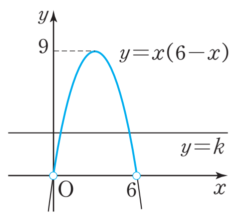
$x>0$, $6-x>0$ $\quad\therefore 0<x<6$ ········· ㉠

$\log_4 x+\log_4(6-x)-\log_4 k=0$에서

$\log_4 x(6-x)=\log_4 k$ $\quad\therefore x(6-x)=k$ ········· ㉡

주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 실근을 가지려면 ㉠의 범위에서 ㉡이 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 한다.

즉, $0<x<6$에서 곡선 $y=x(6-x)$와 직선 $y=k$의 교점이 2개이어야 하므로 오른쪽 그림에서 $0<k<9$



따라서 자연수 k는 1, 2, 3, ⋯, 8의 8개이다.

답 ③

044

$(\log_3 x)^2-4\log_9 x-3=0$에서

$(\log_3 x)^2-4\log_{3^2} x-3=0$

$\therefore (\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉, $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=3$이므로

$x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=27$

따라서 모든 실근의 곱은

$\dfrac{1}{3}\times 27=9$

답 ①

|다른 풀이|

주어진 방정식의 두 근을 α, β라고 하면 방정식 $t^2-2t-3=0$의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=2$, $\log_3\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha\beta=3^2=9$

045

$(\log_2 2x)\left(\log_2\dfrac{x}{2}\right)=8$에서

$(\log_2 2+\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 2)=8$

$(\log_2 x+1)(\log_2 x-1)=8$

$(\log_2 x)^2-1=8$ $\quad\therefore (\log_2 x)^2-9=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-9=0$, $(t+3)(t-3)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=3$

즉, $\log_2 x=-3$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=\dfrac{1}{8}$ 또는 $x=8$

답 $x=\dfrac{1}{8}$ 또는 $x=8$

046

$\log_2 x-3=\log_x 16$에서

$\log_2 x-3=\dfrac{\log_2 16}{\log_2 x}$ $\quad\therefore \log_2 x-3=\dfrac{4}{\log_2 x}$

$\log_2 x=t\ (t\neq 0)$로 놓으면

$t-3=\dfrac{4}{t}$, $t^2-3t=4$

$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

즉, $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=4$이므로

$x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=16$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은

$\dfrac{1}{2}\times 16=8$

답 8

047

$\log_{\frac{1}{3}} x\times\log_3 x+\log_3 x^3+k=0$의 한 근이 $\dfrac{1}{9}$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{9}\times\log_3\dfrac{1}{9}+\log_3\left(\dfrac{1}{9}\right)^3+k=0$

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\log_3 3^{-2}+\log_3 3^{-6}+k=0$

$2\times(-2)+(-6)+k=0$ $\quad\therefore k=10$

따라서 주어진 방정식은

$\log_{\frac{1}{3}} x\times\log_3 x+3\log_3 x+10=0$

$-(\log_3 x)^2+3\log_3 x+10=0$

$\therefore (\log_3 x)^2-3\log_3 x-10=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-3t-10=0$, $(t+2)(t-5)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=5$

즉, $\log_3 x=-2$ 또는 $\log_3 x=5$이므로

$x=\dfrac{1}{9}$ 또는 $x=243$

따라서 구하는 다른 한 근은 243이다.

답 ⑤

048

$\log_3 x-\log_x 9+1=0$에서

$\log_3 x-\dfrac{\log_3 9}{\log_3 x}+1=0$

$\therefore \log_3 x-\dfrac{2}{\log_3 x}+1=0$

$\log_3 x=t\ (t\neq 0)$로 놓으면

$t-\dfrac{2}{t}+1=0$, $t^2+t-2=0$

$(t-1)(t+2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=-2$

즉, $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=-2$이므로

$x=3$ 또는 $x=\dfrac{1}{9}$

두 수 3, $\dfrac{1}{9}$을 근으로 하고 x^2의 계수가 9인 이차방정식은

$9(x-3)\left(x-\dfrac{1}{9}\right)=0$

$\therefore 9x^2-28x+3=0$

따라서 $a=-28$, $b=3$이므로

$a+b=-28+3=-25$

답 ①

풍쌤 개념 CHECK

> **이차방정식의 작성**_高 공통수학 1
> (1) 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
> $(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
> (2) 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은
> $a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

| 다른 풀이 |

이차방정식 $9x^2+ax+b=0$의 두 근이 3, $\frac{1}{9}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3+\frac{1}{9}=-\frac{a}{9}$, $\frac{28}{9}=-\frac{a}{9}$ $\quad\therefore a=-28$

$3\times\frac{1}{9}=\frac{b}{9}$, $\frac{1}{3}=\frac{b}{9}$ $\quad\therefore b=3$

049

밑과 진수의 조건에서

$x^2>0$, $x^2\neq1$, $6-x>0$, $6-x\neq1$, $x+1>0$

$\therefore -1<x<0$ 또는 $0<x<1$ 또는 $1<x<5$ 또는 $5<x<6$

진수가 같으므로 밑이 같거나 진수가 1이어야 한다.

(i) 밑이 같을 때

$x^2=6-x$이므로

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

이때 밑과 진수의 조건에 의하여 $x=2$

(ii) 진수가 1일 때

$x+1=1$이므로 $x=0$

이때 밑과 진수의 조건에 의하여 해는 없다.

(i), (ii)에서 $x=2$

답 ②

050

밑과 진수의 조건에서

$\underbrace{12x+4>0}_{x>-\frac{1}{3}}$, $\underbrace{12x+4\neq1}_{x\neq-\frac{1}{4}}$, $\underbrace{4x^2-3x>0}_{x<0\text{ 또는 }x>\frac{3}{4}}$,

$\underbrace{4x^2-3x\neq1}_{x\neq-\frac{1}{4},\, x\neq1}$, $\underbrace{4x-5>0}_{x>\frac{5}{4}}$

$\therefore x>\frac{5}{4}$ ❶

진수가 같으므로 밑이 같거나 진수가 1이어야 한다.

(i) 밑이 같을 때

$12x+4=4x^2-3x$이므로

$4x^2-15x-4=0$, $(4x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{4}$ 또는 $x=4$

이때 밑과 진수의 조건에 의하여 $x=4$ ❷

(ii) 진수가 1일 때

$4x-5=1$이므로 $x=\frac{3}{2}$

이것은 밑과 진수의 조건을 만족시킨다. ❸

(i), (ii)에서 $x=4$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 모든 실근의 곱은

$4\times\frac{3}{2}=6$ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ 밑과 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 밑이 같을 때, 밑과 진수의 조건을 만족시키는 근을 구할 수 있다.	30 %
❸ 진수가 1일 때, 밑과 진수의 조건을 만족시키는 근을 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 실근의 곱을 구할 수 있다.	10 %

051

$x^{\log x}=\frac{x^3}{100}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log\frac{x^3}{100}$

$\log x\times\log x=\log x^3-\log 100$

$(\log x)^2=3\log x-2$

$\therefore (\log x)^2-3\log x+2=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

즉, $\log x=1$ 또는 $\log x=2$이므로

$x=10$ 또는 $x=100$

따라서 $\alpha=10$, $\beta=100$ 또는 $\alpha=100$, $\beta=10$이므로

$\alpha\beta=10\times100=1000$

답 ④

| 다른 풀이 |

주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 방정식 $t^2-3t+2=0$의 두 근은 $\log\alpha$, $\log\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=3$, $\log\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha\beta=10^3=1000$

052

$(64x)^{\log_2 x}=x^3$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2(64x)^{\log_2 x}=\log_2 x^3$

$\log_2 x\times\log_2 64x=\log_2 x^3$

$\log_2 x\times(\log_2 64+\log_2 x)=\log_2 x^3$

$\log_2 x\times(6+\log_2 x)=3\log_2 x$

$\therefore (\log_2 x)^2+3\log_2 x=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+3t=0$, $t(t+3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=-3$

즉, $\log_2 x=0$ 또는 $\log_2 x=-3$이므로

$x=1$ 또는 $x=\frac{1}{8}$

따라서 모든 실근의 곱은

$1\times\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

답 ②

053

(1) 진수의 조건에서

$x+3>0 \quad \therefore x>-3$ ······ ㉠

$\log_3(x+3)\le 3$에서 $\log_3(x+3)\le\log_3 3^3$

$\log_3(x+3)\le\log_3 27$

이때 밑이 1보다 크므로

$x+3\le 27 \quad \therefore x\le 24$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<x\le 24$

(2) 진수의 조건에서

$1-2x>0 \quad \therefore x<\frac{1}{2}$ ······ ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(1-2x)>1$에서 $\log_{\frac{1}{2}}(1-2x)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$1-2x<\frac{1}{2} \quad \therefore x>\frac{1}{4}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$

(3) 진수의 조건에서

$3x+1>0,\ x-1>0 \quad \therefore x>1$ ······ ㉠

$\log_4(3x+1)>\log_4(x-1)$에서 밑이 1보다 크므로

$3x+1>x-1 \quad \therefore x>-1$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x>1$

(4) 진수의 조건에서

$4-x>0,\ 2x+2>0 \quad \therefore -1<x<4$ ······ ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(4-x)\le\log_{\frac{1}{3}}(2x+2)$에서 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$4-x\ge 2x+2 \quad \therefore x\le\frac{2}{3}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1<x\le\frac{2}{3}$

답 (1) $-3<x\le 24$ (2) $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ (3) $x>1$ (4) $-1<x\le\frac{2}{3}$

054

진수의 조건에서

$x-5>0,\ x+5>0 \quad \therefore x>5$ ······ ㉠

$\log_3(x-5)+\log_3(x+5)\le 3$에서

$\log_3(x-5)+\log_3(x+5)\le\log_3 3^3$

$\log_3(x-5)(x+5)\le\log_3 27$

$\log_3(x^2-25)\le\log_3 27$

이때 밑이 1보다 크므로

$x^2-25\le 27,\ x^2-52\le 0,\ (x+2\sqrt{13})(x-2\sqrt{13})\le 0$

$\therefore -2\sqrt{13}\le x\le 2\sqrt{13}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $5<x\le 2\sqrt{13}$

따라서 $\alpha=5,\ \beta=2\sqrt{13}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=5^2+(2\sqrt{13})^2=25+52=77$

답 77

055

진수의 조건에서

$n^2-9n+18>0,\ (n-3)(n-6)>0$

$\therefore n<3$ 또는 $n>6$ ······ ㉠

$\log_{18}(n^2-9n+18)<1$에서

$\log_{18}(n^2-9n+18)<\log_{18}18$

이때 밑이 1보다 크므로

$n^2-9n+18<18,\ n^2-9n<0$

$n(n-9)<0 \quad \therefore 0<n<9$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$0<n<3$ 또는 $6<n<9$

따라서 구하는 자연수 n은 1, 2, 7, 8이므로 그 합은

$1+2+7+8=18$

답 ⑤

056

진수의 조건에서

$3(x+5)>0,\ x-1>0 \quad \therefore x>1$ ······ ㉠

$\log_{\frac{1}{4}}3(x+5)>\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$에서

$\log_{(\frac{1}{2})^2}3(x+5)>\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}3(x+5)>\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

$\log_{\frac{1}{2}}3(x+5)>2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

$\log_{\frac{1}{2}}3(x+5)>\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$3(x+5)<(x-1)^2,\ 3x+15<x^2-2x+1$

$x^2-5x-14>0,\ (x+2)(x-7)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>7$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x>7$

따라서 구하는 정수 x의 최솟값은 8이다.

답 ②

057

진수의 조건에서

$|x-2|>0 \quad \therefore x\ne 2$ ······ ㉠

······ ❶

$2\log_5|x-2|\le 2-\log_5 16$에서

$2\log_5|x-2|\le\log_5 25-\log_5 16$

$2\log_5|x-2|\le\log_5\frac{25}{16}$

$2\log_5|x-2|\le\log_5\left(\frac{5}{4}\right)^2$

$\log_5|x-2|\le\frac{1}{2}\log_5\left(\frac{5}{4}\right)^2$

$\log_5|x-2|\le\log_5\frac{5}{4}$

이때 밑이 1보다 크므로

$|x-2|\le\frac{5}{4},\ -\frac{5}{4}\le x-2\le\frac{5}{4}$

$\therefore \frac{3}{4}\le x\le\frac{13}{4}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{3}{4}\le x<2$ 또는 $2<x\le\frac{13}{4}$ ······ ❷

따라서 구하는 정수 x는 1, 3이므로 그 합은

$1+3=4$ ······ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 로그부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 x를 구하고, 그 합을 구할 수 있다.	20 %

058

진수의 조건에서 $x>0$ ······ ㉠

$(\log_2 x)^2+\log_2 \frac{32}{x^6}\le 0$에서

$(\log_2 x)^2+\log_2 32-\log_2 x^6\le 0$

$(\log_2 x)^2+\log_2 2^5-6\log_2 x\le 0$

$(\log_2 x)^2-6\log_2 x+5\le 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-6t+5\le 0$, $(t-1)(t-5)\le 0$

$\therefore 1\le t\le 5$

즉, $1\le \log_2 x\le 5$이므로 $\log_2 2\le \log_2 x\le \log_2 2^5$

밑이 1보다 크므로 $2\le x\le 32$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2\le x\le 32$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=32$이므로

$\alpha+\beta=2+32=34$

답 ④

059

진수의 조건에서 $x>0$, $x^2>0$ $\quad \therefore x>0$ ······ ㉠

$(\log_3 x)^2>\log_{\frac{1}{3}} x^2+3$에서

$(\log_3 x)^2>\log_{3^{-1}} x^2+3$, $(\log_3 x)^2>-2\log_3 x+3$

$(\log_3 x)^2+2\log_3 x-3>0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2+2t-3>0$, $(t+3)(t-1)>0$

$\therefore t<-3$ 또는 $t>1$

즉, $\log_3 x<-3$ 또는 $\log_3 x>1$이므로

$\log_3 x<\log_3 3^{-3}$ 또는 $\log_3 x>\log_3 3$

밑이 1보다 크므로 $x<\frac{1}{27}$ 또는 $x>3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$0<x<\frac{1}{27}$ 또는 $x>3$

따라서 구하는 정수 x의 최솟값은 4이다.

답 4

060

$f(x)=x^2$, $g(x)=\log_7 x$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(\log_7 x)^2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\log_7 x^2=2\log_7 x$

$(f\circ g)(x)\le(g\circ f)(x)$에서

$(\log_7 x)^2\le 2\log_7 x$

$\log_7 x=t$로 놓으면

$t^2\le 2t$, $t^2-2t\le 0$

$t(t-2)\le 0$ $\quad \therefore 0\le t\le 2$

즉, $0\le \log_7 x\le 2$이므로 $\log_7 1\le \log_7 x\le \log_7 7^2$

밑이 1보다 크므로 $1\le x\le 49$

따라서 구하는 자연수 x는 1, 2, 3, ⋯, 49의 49개이다.

답 ②

참고

자연수 a, b에 대하여

(1) $a<x<b$를 만족시키는 자연수 x는 $(b-a-1)$개이다.

(2) $a\le x<b$ 또는 $a<x\le b$를 만족시키는 자연수 x는 $(b-a)$개이다.

(3) $a\le x\le b$를 만족시키는 자연수 x는 $(b-a+1)$개이다.

061

진수의 조건에서

$\frac{2}{x}>0$, $x>0$ $\quad \therefore x>0$ ······ ㉠

$\log_2 \frac{2}{x}\times\log_2 x\ge -20$에서

$(\log_2 2-\log_2 x)(\log_2 x)\ge -20$

$(1-\log_2 x)(\log_2 x)\ge -20$

$(\log_2 x)^2-\log_2 x-20\le 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-t-20\le 0$, $(t+4)(t-5)\le 0$

$\therefore -4\le t\le 5$

즉, $-4\le \log_2 x\le 5$이므로 $\log_2 2^{-4}\le \log_2 x\le \log_2 2^5$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{16}\le x\le 32$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{1}{16}\le x\le 32$

따라서 구하는 자연수 x의 최댓값은 32이다.

답 ②

062

진수의 조건에서

$\frac{x}{9}>0$, $\frac{x}{27}>0$ $\quad \therefore x>0$ ······ ㉠

$\left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{9}\right)\left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{27}\right)<2$에서

$\left(\log_{\frac{1}{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}\right)\left(\log_{\frac{1}{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}\right)<2$

$(\log_{\frac{1}{3}} x+2)(\log_{\frac{1}{3}} x+3)<2$

$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2+5\log_{\frac{1}{3}} x+4<0$

$\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 놓으면

$t^2+5t+4<0$, $(t+1)(t+4)<0$

$\therefore -4<t<-1$

즉, $-4<\log_{\frac{1}{3}} x<-1$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}<\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$\log_{\frac{1}{3}} 81<\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}} 3$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$3<x<81$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3<x<81$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=81$이므로

$\beta-\alpha=81-3=78$

답 ④

063

진수의 조건에서

$x>0$, $\log_2 x>0$ $\quad\therefore x>1$ ········ ㉠

·· ❶

$\log_2(\log_2 x)\le 2$에서 $\log_2(\log_2 x)\le \log_2 2^2$

밑이 1보다 크므로

$\log_2 x\le 2^2$, $\log_2 x\le 4$, $\log_2 x\le \log_2 2^4$

또, 밑이 1보다 크므로

$x\le 2^4$ $\quad\therefore x\le 16$ ········ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<x\le 16$ ································ ❷

따라서 구하는 정수 x는 2, 3, 4, …, 16의 15개이다. ········ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 로그부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

064

진수의 조건에서

$x>0$, $\log_8 x>0$ $\quad\therefore x>1$ ········ ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)>1$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$\log_8 x<\frac{1}{3}$, $\log_8 x<\log_8 8^{\frac{1}{3}}$

밑이 1보다 크므로

$x<8^{\frac{1}{3}}$ $\quad\therefore x<2$ ········ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<x<2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=1+2=3$

답 ③

065

밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 부등호의 방향이 바뀐다.

$x^{\log_{\frac{1}{3}}x}>27x^4$의 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{3}}x\times\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}27x^4$, $(\log_{\frac{1}{3}}x)^2<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}+\log_{\frac{1}{3}}x^4$

$(\log_{\frac{1}{3}}x)^2<-3+4\log_{\frac{1}{3}}x$, $(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-4\log_{\frac{1}{3}}x+3<0$

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면

$t^2-4t+3<0$, $(t-1)(t-3)<0$

$\therefore 1<t<3$

즉, $1<\log_{\frac{1}{3}}x<3$이므로 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$\frac{1}{27}<x<\frac{1}{3}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{27}$, $\beta=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=27+3=30$

답 ①

| 다른 풀이 |

$x^{\log_{\frac{1}{3}}x}>27x^4$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{3}}x\times\log_3 x>\log_3 27x^4$

밑이 1보다 크므로
부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$-\log_3 x\times\log_3 x>\log_3 3^3+\log_3 x^4$

$-(\log_3 x)^2>3+4\log_3 x$

$(\log_3 x)^2+4\log_3 x+3<0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2+4t+3<0$, $(t+1)(t+3)<0$

$\therefore -3<t<-1$

즉, $-3<\log_3 x<-1$이므로 $\log_3\frac{1}{27}<\log_3 x<\log_3\frac{1}{3}$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{27}<x<\frac{1}{3}$

066

$x^{\log_4\frac{1}{x}}>\frac{1}{256}$의 양변에 밑이 4인 로그를 취하면

$\log_4\frac{1}{x}\times\log_4 x>\log_4\frac{1}{256}$

$-\log_4 x\times\log_4 x>\log_4 4^{-4}$

$-(\log_4 x)^2>-4$, $(\log_4 x)^2-4<0$

$\log_4 x=t$로 놓으면

$t^2-4<0$, $(t+2)(t-2)<0$

$\therefore -2<t<2$

즉, $-2<\log_4 x<2$이므로 $\log_4\frac{1}{16}<\log_4 x<\log_4 16$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{16}<x<16$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값은 15이다.

답 ③

실력을 높이는 연습 문제

본문 071쪽

01

$f(4)=2f(8)$에서

$\log_2 4+k\log_4 8=2(\log_2 8+k\log_8 8)$

$\log_2 2^2+k\log_{2^2}2^3=2(\log_2 2^3+k\log_8 8)$

$2+\frac{3}{2}k=2(3+k)$, $2+\frac{3}{2}k=6+2k$

$\frac{k}{2}=-4$ $\quad\therefore k=-8$

답 ①

02

함수 $f(x)=\log_a x+3$의 그래프와 직선 $x=2$의 교점의 좌표가 $(2, 2)$이므로

$f(2)=\log_a 2+3=2$, $\log_a 2=-1$

$a^{-1}=2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

또, 함수 $g(x)=\log_b(x+6)$의 그래프와 직선 $x=2$의 교점의 좌표가 $(2, 3)$이므로

$g(2)=\log_b(2+6)=3$, $\log_b 8=3$

$b^3=8$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore \log_b a=\log_2 \frac{1}{2}=-1$

답 ①

|다른 풀이|

$f(2)=2$에서 $\log_a 2=-1$이므로

$\frac{\log_2 2}{\log_2 a}=-1$, $\frac{1}{\log_2 a}=-1$ $\quad\therefore \log_2 a=-1$

$g(2)=3$에서 $\log_b 8=3$이므로

$\frac{\log_2 8}{\log_2 b}=3$, $\frac{3}{\log_2 b}=3$ $\quad\therefore \log_2 b=1$

$\therefore \log_b a=\frac{\log_2 a}{\log_2 b}=\frac{-1}{1}=-1$

03

$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-1}{x}$이므로

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(27)$

$=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{4}+\cdots+\log_{\frac{1}{3}}\frac{26}{27}$

$=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{26}{27}\right)$

$=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$

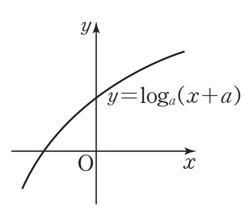
$=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3=3$

답 ④

04

함수 $y=\log_a(x+a)$의 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이다.

이때 제4사분면만을 지나지 않는 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $a>1$이어야 하고, 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표의 값이 음수이어야 한다.



$0=\log_a(x+a)$에서

$x+a=1$ $\quad\therefore x=1-a$

즉, $1-a<0$이어야 하므로 $a>1$

답 ①

05

곡선 $y=\log_4 x$ 위의 점 A의 y좌표가 1이므로 $\mathrm{A}(4,\ 1)$

선분 AB와 x축이 만나는 점을 C라고 하면 x축이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하므로 점 C는 선분 AB의 중점이다.

점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$\frac{1+b}{2}=0$ $\quad\therefore b=-1$

또, 점 B는 곡선 $y=-\log_4(x+1)$ 위의 점이므로

$-1=-\log_4(a+1)$, $\log_4(a+1)=1$

$a+1=4$ $\quad\therefore a=3$

따라서 $\mathrm{B}(3,\ -1)$이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

답 ③

06

$(f^{-1}\circ g)(25)=f^{-1}(g(25))=f^{-1}(\log_5 25)=f^{-1}(2)$

$f^{-1}(2)=k$로 놓으면 $f(k)=2$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} k=2$ $\quad\therefore k=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(25)=\frac{1}{4}$

답 ③

|다른 풀이|

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$에서 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$로 놓으면 $\left(\frac{1}{2}\right)^y=x$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\therefore f^{-1}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(25)=f^{-1}(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

07

문제 접근하기

주어진 세 수의 밑을 쉽게 통일할 수 없으므로 진수를 비교하는 방법이 아니라 주어진 조건인 $0<a<1<b$를 이용하여 세 수를 표현하여 비교하는 방법을 사용한다.

이때 a와 b 사이에 1이 있으므로 로그값들을 양수와 음수로 표현하고 이를 이용한다.

$a<1<b$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

부등호의 방향이 바뀐다.

$\log_a b<\log_a 1<\log_a a$ $\quad\therefore \log_a b<0$ ......… ㉠

또, $a<1<b$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면 밑이 1보다 크므로

부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$\log_b a<\log_b 1<\log_b b$

$\log_b a<0$, $-\log_b a>0$

$\therefore \log_b \frac{1}{a}>0$ ......… ㉡

또, $\log_a \frac{b}{a}=\log_a b-\log_a a=\log_a b-1$이므로

$\log_a \frac{b}{a}<\log_a b$ ......… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\log_a \frac{b}{a}<\log_a b<\log_b \frac{1}{a}$

답 ④

08

함수 $y=\log_4(x+a)$의 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 $x=8$일 때 최댓값 2를 갖는다.

즉, $\log_4(8+a)=2$이므로

$8+a=4^2$ $\quad\therefore a=8$

답 8

09

$f(x)=|x-4|+4$라고 하면 $f(x)$는 $x=4$일 때 최솟값 4를 갖는다.

주어진 함수에서 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 $f(x)$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $x=4$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$3+\log_2 4=3+\log_2 2^2=3+2=5$

답 ③

10

$y=\log_{15}(25-x)+\log_{15}(x+5)$

$\quad=\log_{15}(25-x)(x+5)$

$\quad=\log_{15}(-x^2+20x+125)$

$f(x)=-x^2+20x+125$라고 하면

$f(x)=-x^2+20x+125=-(x-10)^2+225$

이므로 $f(x)$는 $x=10$일 때 최댓값 225를 갖는다.

주어진 함수에서 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 $f(x)$가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $x=10$일 때 최대이므로 최댓값은

$\log_{15} 225=\log_{15} 15^2=2$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y\,|\,y\le 2\}$이므로 $a=2$

답 ②

11

$y=(\log_2 4x)(\log_2 16x)$

$\quad=(\log_2 x+\log_2 2^2)(\log_2 x+\log_2 2^4)$

$\quad=(\log_2 x+2)(\log_2 x+4)$

$\quad=(\log_2 x)^2+6\log_2 x+8$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 2$에서

$\log_2 1\le \log_2 x\le \log_2 2 \qquad \therefore 0\le t\le 1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+6t+8=(t+3)^2-1$

$0\le t\le 1$에서 주어진 함수는 $t=1$일 때 최댓값 15, $t=0$일 때 최솟값 8을 갖는다.

따라서 $M=15$, $m=8$이므로

$M+m=15+8=23$

답 ④

12

문제 접근하기

지수에 로그가 있는 문제는 양변에 로그를 취하여 지수를 아래로 내려 식을 정리하여 해결할 수 있다.

주어진 식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 y=\log_{\frac{1}{2}} 2x\times\log_2 32x$

로 정리할 수 있다. 이때 $\log_2 y$가 최댓값을 가지면 y도 최댓값을 갖는다.

만약 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하여 푼다면 최댓값과 최솟값이 바뀔 수도 있으므로 주의해야 한다.

$y=(32x)^{\log_{\frac{1}{2}} 2x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 y=\log_2 (32x)^{\log_{\frac{1}{2}} 2x}=\log_{\frac{1}{2}} 2x\times\log_2 32x$

$\qquad=(\log_{\frac{1}{2}} 2+\log_{\frac{1}{2}} x)(\log_2 32+\log_2 x)$

$\qquad=(\log_{2^{-1}} 2+\log_{2^{-1}} x)(\log_2 2^5+\log_2 x)$

$\qquad=(-\log_2 x-1)(\log_2 x+5)$

$\qquad=-(\log_2 x)^2-6\log_2 x-5$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$\log_2 y=-t^2-6t-5=-(t+3)^2+4$

이므로 $t=-3$일 때 $\log_2 y$는 최댓값 4를 갖는다.

즉, $\log_2 y=4$에서 $y=2^4=16$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 16이다.

답 ③

|다른 풀이|

$y=(32x)^{\log_{\frac{1}{2}} 2x}$의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}} y=\log_{\frac{1}{2}} (32x)^{\log_{\frac{1}{2}} 2x}=\log_{\frac{1}{2}} 2x\times\log_{\frac{1}{2}} 32x$

$\qquad=(\log_{\frac{1}{2}} 2+\log_{\frac{1}{2}} x)(\log_{\frac{1}{2}} 32+\log_{\frac{1}{2}} x)$

$\qquad=\left\{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\log_{\frac{1}{2}} x\right\}\left\{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}+\log_{\frac{1}{2}} x\right\}$

$\qquad=(\log_{\frac{1}{2}} x-1)(\log_{\frac{1}{2}} x-5)$

$\qquad=(\log_{\frac{1}{2}} x)^2-6\log_{\frac{1}{2}} x+5$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면

$\log_{\frac{1}{2}} y=t^2-6t+5=(t-3)^2-4$

이므로 $t=3$일 때 $\log_{\frac{1}{2}} y$는 최솟값 -4를 갖는다.

이때 $\log_{\frac{1}{2}} y$의 밑이 0보다 크고 1보다 작으므로 $\log_{\frac{1}{2}} y$가 최소일 때 y는 최댓값을 갖는다.

즉, $\log_{\frac{1}{2}} y=-4$에서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 16이다.

13

진수의 조건에서

$x+1>0,\ x-3>0 \qquad \therefore x>3$ .... ㉠

$\log_2 (x+1)-5=\log_{\frac{1}{2}} (x-3)$에서

$\log_2 (x+1)-5=-\log_2 (x-3)$

$\log_2 (x+1)+\log_2 (x-3)=5$

$\log_2 (x+1)(x-3)=\log_2 2^5$

$(x+1)(x-3)=32,\ x^2-2x-35=0$

$(x+5)(x-7)=0 \qquad \therefore x=-5$ 또는 $x=7$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=7$

답 7

14

$\log_5 x-\log_{25} x=\log_5 x\times\log_{25} x$에서

$\log_5 x-\log_{5^2} x=\log_5 x\times\log_{5^2} x$

$\log_5 x-\frac{1}{2}\log_5 x=\frac{1}{2}\log_5 x\times\log_5 x$

$(\log_5 x)^2-\log_5 x=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면

$t^2-t=0,\ t(t-1)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=1$

즉, $\log_5 x=0$ 또는 $\log_5 x=1$이므로 $x=1$ 또는 $x=5$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=5$ 또는 $\alpha=5$, $\beta=1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+5^2=26$

답 ⑤

15

$(\log_{\frac{1}{4}} x)^2-k\log_{\frac{1}{4}} x-4=0$에서 $\log_{\frac{1}{4}} x=t$로 놓으면

$t^2-kt-4=0$

주어진 방정식의 두 근을 α, β라고 하면 위 이차방정식의 두 근은 $\log_{\frac{1}{4}}\alpha$, $\log_{\frac{1}{4}}\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_{\frac{1}{4}}\alpha+\log_{\frac{1}{4}}\beta=k$, $\log_{\frac{1}{4}}\alpha\beta=k$

이때 $\alpha\beta=16$이므로

$\log_{\frac{1}{4}}16=k$, $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=k$ $\qquad\therefore k=-2$

답 ①

16

$a(\log_3 x)^2+b\log_3 x+c=0$에서 $\log_3 x=t$로 놓으면

$at^2+bt+c=0$ ········· ㉠

다영이는 a, c를 바르게 보았으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 ㉠의 두 근의 곱을 구할 수 있다.

다영이가 구한 ㉠의 두 근은 $\log_3 9=2$, $\log_3\frac{1}{81}=-4$이므로

$(\text{두 근의 곱})=2\times(-4)=-8=\frac{c}{a}$

$\therefore c=-8a$ ········· ㉡

현수는 a, b를 바르게 보았으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 ㉠의 두 근의 합을 구할 수 있다.

현수가 구한 ㉠의 두 근은 $\log_3\frac{1}{3}=-1$, $\log_3 27=3$이므로

$(\text{두 근의 합})=-1+3=2=-\frac{b}{a}$

$\therefore b=-2a$ ········· ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 $at^2-2at-8a=0$

$a\neq0$이므로

$t^2-2t-8=0$, $(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=4$

즉, $\log_3 x=-2$ 또는 $\log_3 x=4$이므로

$x=\frac{1}{9}$ 또는 $x=81$

따라서 $\alpha=\frac{1}{9}$, $\beta=81$ 또는 $\alpha=81$, $\beta=\frac{1}{9}$이므로

$\alpha\beta=\frac{1}{9}\times81=9$

답 9

17

$\log_3(x+y)=2$에서

$x+y=3^2=9$

$\log_2 x+\log_2 y=0$에서

$\log_2 xy=0$ $\qquad\therefore xy=1$

$\therefore (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=9^2-4\times1$

$=81-4=77$

답 ③

풍쌤 개념 CHECK

곱셈 공식의 변형_中 수학 3

(1) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(a+b)^2-2ab$

(2) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

18

문제 접근하기

$x>0$에서 $4x\neq5x$이고 $\log 4\neq\log 5$이므로 밑이나 지수를 비교하는 방법으로는 주어진 방정식의 해를 구할 수 없다. 이와 같은 문제는 양변에 로그를 취하여 지수를 아래로 내려 식을 정리하여 해결할 수 있다.

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 4\times\log 4x=\log 5\times\log 5x$

로 정리할 수 있다.

$(4x)^{\log 4}=(5x)^{\log 5}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 4\times\log 4x=\log 5\times\log 5x$

$\log 4\times(\log 4+\log x)=\log 5\times(\log 5+\log x)$

$(\log 4)^2+\log 4\times\log x=(\log 5)^2+\log 5\times\log x$

$\log 4\times\log x-\log 5\times\log x=(\log 5)^2-(\log 4)^2$

$(\log 4-\log 5)\log x=(\log 5)^2-(\log 4)^2$

$$\therefore \log x=\frac{(\log 5)^2-(\log 4)^2}{\log 4-\log 5}$$

$$=\frac{(\log 5+\log 4)(\log 5-\log 4)}{-(\log 5-\log 4)}$$

$$=-(\log 5+\log 4)$$

$$=-\log 20=\log\frac{1}{20}$$

$\therefore x=\frac{1}{20}$

답 $x=\frac{1}{20}$

19

(i) $\log_2(x+1)\le k$의 진수의 조건에서

$x+1>0$ $\qquad\therefore x>-1$ ········· ㉠

$\log_2(x+1)\le k$에서

$\log_2(x+1)\le\log_2 2^k$

이때 밑이 1보다 크므로

$x+1\le2^k$ $\qquad\therefore x\le2^k-1$ ········· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1<x\le2^k-1$

$\therefore A=\{x\,|\,-1<x\le2^k-1\}$

k는 자연수이므로 $2^k-1\ge1$이다.

(ii) $\log_2(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\ge2$의 진수의 조건에서

$x-2>0$, $x+1>0$ $\qquad\therefore x>2$ ········· ㉢

$\log_2(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\ge2$에서

$\log_2(x-2)+\log_2(x+1)\ge\log_2 2^2$

$\log_2(x-2)(x+1)\ge\log_2 4$

이때 밑이 1보다 크므로

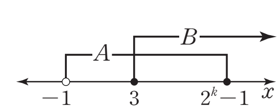
$(x-2)(x+1)\ge4$, $x^2-x-6\ge0$

$(x+2)(x-3)\ge0$ $\qquad\therefore x\le-2$ 또는 $x\ge3$ ········· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $x\ge3$

$\therefore B=\{x\,|\,x\ge3\}$

(i), (ii)에서 구한 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $n(A\cap B)=5$이므로

$A\cap B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$이어야 한다.

즉, $7\le2^k-1<8$ $\qquad\therefore 8\le2^k<9$

따라서 구하는 자연수 k의 값은 3이다.

답 ①

20

진수의 조건에서

$x>0,\ \frac{9}{x^3}>0 \qquad \therefore\ x>0$ ········· ㉠

$(\log_3 x)^2 \le \log_3 \frac{9}{x^3}+16$에서

$(\log_3 x)^2 \le \log_3 3^2-\log_3 x^3+16$

$(\log_3 x)^2 \le 2-3\log_3 x+16$

$(\log_3 x)^2+3\log_3 x-18 \le 0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2+3t-18\le 0,\ (t+6)(t-3)\le 0$

$\therefore\ -6\le t\le 3$

즉, $-6\le \log_3 x\le 3$이고 밑이 1보다 크므로

$3^{-6}\le x\le 3^3$ ········· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3^{-6}\le x\le 3^3$

따라서 $\alpha=3^{-6},\ \beta=3^3$이므로

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3^3}{3^{-6}}=3^9$

답 ③

21

진수의 조건에서

$x>0,\ \log_2 x-2>0 \qquad \therefore\ x>4$ ········· ㉠

$\log_2 x>\log_2 4$
밑이 1보다 크므로 $x>4$

$\log_4(\log_2 x-2)\le \frac{1}{2}$에서

$\log_4(\log_2 x-2)\le \log_4 4^{\frac{1}{2}}$

이때 밑이 1보다 크므로

$\log_2 x-2\le 4^{\frac{1}{2}},\ \log_2 x-2\le 2$

$\log_2 x\le 4,\ \log_2 x\le \log_2 2^4$

또, 밑이 1보다 크므로

$x\le 2^4 \qquad \therefore\ x\le 16$ ········· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$4<x\le 16$

따라서 구하는 정수 x는 5, 6, 7, ⋯, 16의 12개이다.

답 ④

22

(i) $32^{2-x}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-4}$에서

$2^{5(2-x)}\le 2^{-2(x^2-4)}$

이때 밑이 1보다 크므로

$5(2-x)\le -2(x^2-4),\ 10-5x\le -2x^2+8$

$2x^2-5x+2\le 0,\ (2x-1)(x-2)\le 0$

$\therefore\ \frac{1}{2}\le x\le 2$

(ii) $(\log_2 x)^2<\log_2 x^3$의 진수의 조건에서

$x>0,\ x^3>0 \qquad \therefore\ x>0$ ········· ㉠

$(\log_2 x)^2<\log_2 x^3$에서

$(\log_2 x)^2<3\log_2 x,\ (\log_2 x)^2-3\log_2 x<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-3t<0,\ t(t-3)<0$

$\therefore\ 0<t<3$

즉, $0<\log_2 x<3$이고 밑이 1보다 크므로

$1<x<8$ ········· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<x<8$

(i), (ii)에서 $1<x\le 2$

따라서 구하는 자연수 x의 값은 2이다.

답 2

23

$4^{\log x}=x^{\log 4}$이므로 주어진 부등식은

$4^{\log x}\times 4^{\log x}-\frac{9}{2}(4^{\log x}+4^{\log x})+8<0$

$(4^{\log x})^2-9\times 4^{\log x}+8<0$

$4^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-9t+8<0,\ (t-1)(t-8)<0$

$\therefore\ 1<t<8$

즉, $1<4^{\log x}<8$이므로 $4^0<4^{\log x}<4^{\frac{3}{2}}$

이때 밑이 1보다 크므로 $0<\log x<\frac{3}{2}$

또, 로그의 밑이 1보다 크므로 $1<x<10\sqrt{10}$

따라서 $\alpha=1,\ \beta=10\sqrt{10}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+(10\sqrt{10})^2=1+1000=1001$

답 ②

24

문제 접근하기

x에 대한 이차방정식이므로 판별식을 D라고 할 때 $D\ge 0$임을 이용한다. 이때 로그의 진수 a^2이 미지수이므로 진수의 조건에 의하여 $a^2>0$임에 주의한다.

진수의 조건에서

$a^2>0 \qquad \therefore\ a<0$ 또는 $a>0$ ········· ㉠

$x^2-(2-\log_2 a^2)x+4=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2-\log_2 a^2)^2-4\times 4\ge 0$

$(2-2\log_2 a)^2-16\ge 0,\ 4(1-\log_2 a)^2-16\ge 0$

$(1-\log_2 a)^2-4\ge 0,\ (\log_2 a)^2-2\log_2 a-3\ge 0$

$\log_2 a=t$로 놓으면

$t^2-2t-3\ge 0,\ (t+1)(t-3)\ge 0$

$\therefore\ t\le -1$ 또는 $t\ge 3$

즉, $\log_2 a\le -1$ 또는 $\log_2 a\ge 3$이고 밑이 1보다 크므로

$a\le \frac{1}{2}$ 또는 $a\ge 8$ ········· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$a<0$ 또는 $0<a\le \frac{1}{2}$ 또는 $a\ge 8$

답 ⑤

05 삼각함수

기본을 다지는 유형

본문 078쪽

001

(1) $350^\circ=360^\circ\times0+350^\circ$이므로
$360^\circ\times n+350^\circ$

(2) $600^\circ=360^\circ\times1+240^\circ$이므로
$360^\circ\times n+240^\circ$

(3) $-240^\circ=360^\circ\times(-1)+120^\circ$이므로
$360^\circ\times n+120^\circ$

(4) $-540^\circ=360^\circ\times(-2)+180^\circ$이므로
$360^\circ\times n+180^\circ$

답 (1) $360^\circ\times n+350^\circ$ (2) $360^\circ\times n+240^\circ$
(3) $360^\circ\times n+120^\circ$ (4) $360^\circ\times n+180^\circ$

002

① $390^\circ=360^\circ\times1+30^\circ$
② $750^\circ=360^\circ\times2+30^\circ$
③ $1100^\circ=360^\circ\times3+20^\circ$
④ $-330^\circ=360^\circ\times(-1)+30^\circ$
⑤ $-690^\circ=360^\circ\times(-2)+30^\circ$
따라서 동경 OP가 나타낼 수 없는 각은 ③이다.

답 ③

003

$\frac{\theta}{3}=\frac{1560^\circ}{3}=520^\circ=360^\circ\times1+160^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다.

답 ②

참고
정수 n에 대하여
(1) θ가 제1사분면의 각 ➡ $360^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n+90^\circ$
(2) θ가 제2사분면의 각 ➡ $360^\circ\times n+90^\circ<\theta<360^\circ\times n+180^\circ$
(3) θ가 제3사분면의 각 ➡ $360^\circ\times n+180^\circ<\theta<360^\circ\times n+270^\circ$
(4) θ가 제4사분면의 각 ➡ $360^\circ\times n+270^\circ<\theta<360^\circ\times n+360^\circ$

004

① $200^\circ=360^\circ\times0+200^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.
② $610^\circ=360^\circ\times1+250^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.
③ $1380^\circ=360^\circ\times3+300^\circ$이므로 제4사분면의 각이다.
④ $-160^\circ=360^\circ\times(-1)+200^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.
⑤ $-510^\circ=360^\circ\times(-2)+210^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.
따라서 동경이 위치하는 사분면이 나머지 넷과 다른 것은 ③이다.

답 ③

005

ㄱ. $120^\circ=360^\circ\times0+120^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.
ㄴ. 180°를 나타내는 동경은 x축 위에 있으므로 어느 사분면의 각도 아니다.
ㄷ. $815^\circ=360^\circ\times2+95^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.
ㄹ. $-230^\circ=360^\circ\times(-1)+130^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.
ㅁ. $-470^\circ=360^\circ\times(-2)+250^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.
ㅂ. $-780^\circ=360^\circ\times(-3)+300^\circ$이므로 제4사분면의 각이다.
따라서 제2사분면의 각은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ②

006

θ가 제2사분면의 각이므로
$360^\circ\times n+90^\circ<\theta<360^\circ\times n+180^\circ$ (단, n은 정수이다.)
$\therefore 180^\circ\times n+45^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times n+90^\circ$ ❶

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때
$180^\circ\times2k+45^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times2k+90^\circ$
$\therefore 360^\circ\times k+45^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+90^\circ$
따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다. ❷

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때
$180^\circ\times(2k+1)+45^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times(2k+1)+90^\circ$
$\therefore 360^\circ\times k+225^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+270^\circ$
따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다. ❸

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제1사분면, 제3사분면이다. ❹

답 **제1사분면, 제3사분면**

채점 기준	비율
❶ θ가 제2사분면의 각임을 이용하여 $\frac{\theta}{2}$의 범위를 n에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $n=2k$일 때, 각 $\frac{\theta}{2}$가 제몇 사분면의 각인지 구할 수 있다.	30 %
❸ $n=2k+1$일 때, 각 $\frac{\theta}{2}$가 제몇 사분면의 각인지 구할 수 있다.	30 %
❹ 각 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면을 모두 구할 수 있다.	10 %

007

3θ가 제4사분면의 각이므로
$360^\circ\times n+270^\circ<3\theta<360^\circ\times n+360^\circ$ (단, n은 정수이다.)
$\therefore 120^\circ\times n+90^\circ<\theta<120^\circ\times n+120^\circ$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때
$120^\circ\times3k+90^\circ<\theta<120^\circ\times3k+120^\circ$
$\therefore 360^\circ\times k+90^\circ<\theta<360^\circ\times k+120^\circ$
따라서 θ는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때
$120^\circ\times(3k+1)+90^\circ<\theta<120^\circ\times(3k+1)+120^\circ$
$\therefore 360^\circ\times k+210^\circ<\theta<360^\circ\times k+240^\circ$
따라서 θ는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때

$120^\circ\times(3k+2)+90^\circ<\theta<120^\circ\times(3k+2)+120^\circ$

$\therefore\ 360^\circ\times k+330^\circ<\theta<360^\circ\times k+360^\circ$

따라서 θ는 제4사분면의 각이다.

(i)~(iii)에서 각 θ를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제1사분면이다.

답 ①

008

각 θ를 나타내는 동경과 각 11θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+11\theta=360^\circ\times n$ (단, n은 정수이다.)

$12\theta=360^\circ\times n$　　$\therefore\ \theta=30^\circ\times n$ ······ ㉠

이때 $0^\circ<\theta\le 90^\circ$이므로

$0^\circ<30^\circ\times n\le 90^\circ$　　$\therefore\ 0<n\le 3$

n은 정수이므로 $n=1, 2, 3$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

따라서 구하는 합은

$30^\circ+60^\circ+90^\circ=180^\circ$

답 180°

009

각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$3\theta+\theta=360^\circ\times n+180^\circ$ (단, n은 정수이다.)

$4\theta=360^\circ\times n+180^\circ$　　$\therefore\ \theta=90^\circ\times n+45^\circ$ ······ ㉠

이때 $90^\circ<\theta<270^\circ$이므로

$90^\circ<90^\circ\times n+45^\circ<270^\circ$, $45^\circ<90^\circ\times n<225^\circ$

$\therefore\ \frac{1}{2}<n<\frac{5}{2}$

n은 정수이므로 $n=1, 2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=135^\circ, 225^\circ$

따라서 구하는 합은

$135^\circ+225^\circ=360^\circ$

답 ③

010

두 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로 두 동경은 원점에 대하여 대칭이다.

$6\theta-\theta=360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)이므로

$5\theta=360^\circ\times n+180^\circ$　　$\therefore\ \theta=72^\circ\times n+36^\circ$

$0^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$0^\circ<72^\circ\times n+36^\circ<180^\circ$, $-36^\circ<72^\circ\times n<144^\circ$

$\therefore\ -\frac{1}{2}<n<2$

이때 n은 정수이므로 $n=0, 1$

$\therefore\ \theta=36^\circ, 108^\circ$

답 $36^\circ, 108^\circ$

011

각 α를 나타내는 동경과 각 β를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\alpha+\beta=360^\circ\times n+90^\circ$ (단, n은 정수이다.)

① $150^\circ=360^\circ\times 0+150^\circ$

② $180^\circ=360^\circ\times 0+180^\circ$

③ $360^\circ=360^\circ\times 1$

④ $420^\circ=360^\circ\times 1+60^\circ$

⑤ $810^\circ=360^\circ\times 2+90^\circ$

따라서 $\alpha+\beta$의 크기가 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

012

각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$5\theta-\theta=360^\circ\times n+180^\circ$ (단, n은 정수이다.)

$4\theta=360^\circ\times n+180^\circ$　　$\therefore\ \theta=90^\circ\times n+45^\circ$

이때 $\theta\ge 0^\circ$이므로

$\theta=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, \cdots$ ······ ㉠

❶

또, 각 θ를 나타내는 동경과 각 9θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+9\theta=360^\circ\times n+90^\circ$ (단, n은 정수이다.)

$10\theta=360^\circ\times n+90^\circ$　　$\therefore\ \theta=36^\circ\times n+9^\circ$

이때 $\theta\ge 0^\circ$이므로

$\theta=9^\circ, 45^\circ, 81^\circ, \cdots$ ······ ㉡

❷

따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 각 θ의 크기의 최솟값은 45°이다.

❸

답 45°

채점 기준	비율
❶ 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이 되도록 하는 각 θ의 크기를 구할 수 있다.	40 %
❷ 각 θ를 나타내는 동경과 각 9θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이 되도록 하는 각 θ의 크기를 구할 수 있다.	40 %
❸ ❶, ❷를 만족시키는 각 θ의 크기의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

013

(1) $45^\circ=45\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{4}$

(2) $210^\circ=210\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{6}\pi$

(3) $-300^\circ=-300\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5}{3}\pi$

(4) $\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=120^\circ$

(5) $-\frac{5}{6}\pi=-\frac{5}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-150^\circ$

(6) $2=2\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{360^\circ}{\pi}$

단위 라디안이 생략된 것이므로

2라디안$=2\times\frac{180^\circ}{\pi}$

답 (1) $\frac{\pi}{4}$　(2) $\frac{7}{6}\pi$　(3) $-\frac{5}{3}\pi$　(4) 120°　(5) -150°　(6) $\frac{360^\circ}{\pi}$

014

(1) $\frac{\pi}{3}$의 동경이 나타내는 일반각은 $2n\pi+\frac{\pi}{3}$

(2) $\frac{12}{5}\pi=2\pi+\frac{2}{5}\pi$이므로 $\frac{12}{5}\pi$의 동경이 나타내는 일반각은

$2n\pi+\frac{2}{5}\pi$

(3) $-3\pi=2\pi\times(-2)+\pi$이므로 -3π의 동경이 나타내는 일반각은 $2n\pi+\pi$

(4) $-\frac{19}{6}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{5}{6}\pi$이므로 $-\frac{19}{6}\pi$의 동경이 나타내는 일반각은 $2n\pi+\frac{5}{6}\pi$

답 (1) $2n\pi+\frac{\pi}{3}$ (2) $2n\pi+\frac{2}{5}\pi$

(3) $2n\pi+\pi$ (4) $2n\pi+\frac{5}{6}\pi$

015

$$135^\circ+\frac{\pi}{3}-240^\circ=135\times\frac{\pi}{180}+\frac{\pi}{3}-240\times\frac{\pi}{180}$$
$$=\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{4}{3}\pi=-\frac{\pi}{4}$$

$\therefore a=-\frac{1}{4}$

답 ①

|다른 풀이|

$$135^\circ+\frac{\pi}{3}-240^\circ=135^\circ+\frac{\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}-240^\circ$$
$$=135^\circ+60^\circ-240^\circ=-45^\circ$$
$$=-45\times\frac{\pi}{180}=-\frac{\pi}{4}$$

$\therefore a=-\frac{1}{4}$

016

반지름의 길이가 r이고, 중심이 O인 원에서 호의 길이가 r인 부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 α°라고 하면 호 AB의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

r : $\boxed{(가)\ 2\pi r}=\alpha^\circ$: 360°, $2\pi r\alpha^\circ=360^\circ r$

$\therefore \alpha^\circ=\frac{360^\circ r}{2\pi r}=\boxed{(나)\ \frac{180^\circ}{\pi}}$

따라서 중심각의 크기 α°는 원의 반지름의 길이 r에 관계없이 항상 일정하다.

이 일정한 각의 크기 $\boxed{(나)\ \frac{180^\circ}{\pi}}$를 1라디안이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.

$\therefore$ (가): $2\pi r$, (나): $\frac{180^\circ}{\pi}$

답 ④

017

부채꼴의 반지름의 길이를 r라고 하면

$\frac{2}{3}\pi=r\times\frac{3}{4}\pi$ $\quad\therefore r=\frac{8}{9}$

답 ⑤

018

반지름의 길이가 6인 부채꼴의 호의 길이를 l이라고 하면 이 부채꼴의 넓이와 반지름의 길이가 2인 원의 넓이가 같으므로

$\frac{1}{2}\times6\times l=\pi\times2^2$ $\quad\therefore l=\frac{4}{3}\pi$ ❶

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$2\times6+\frac{4}{3}\pi=12+\frac{4}{3}\pi$

이므로 $a=12$, $b=\frac{4}{3}$ ❷

$\therefore a+3b=12+3\times\frac{4}{3}$

$=12+4=16$ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ 부채꼴의 호의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+3b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

019

부채꼴의 반지름의 길이를 r라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 $4+\pi$이므로

$2r+r\times\frac{\pi}{2}=4+\pi$

$\frac{4+\pi}{2}r=4+\pi$ $\quad\therefore r=2$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{2}=\pi$

답 ①

|다른 풀이|

중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴은 사분원과 같으므로 반지름의 길이가 2인 사분원의 넓이는

$\frac{1}{4}\times\pi\times2^2=\pi$

020

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 20이므로

$20=2r+l$ $\quad\therefore l=20-2r$

이때 $r>0$, $l>0$이므로

$r>0$, $20-2r>0$ $\quad\therefore 0<r<10$

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(20-2r)$

$=-r^2+10r$

$=-(r-5)^2+25$

따라서 S는 $r=5$일 때 최댓값 25를 가지므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 5이다.

답 ④

021

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라고 하면 부채꼴의

둘레의 길이가 12이므로

$2r+l=12 \qquad \therefore l=12-2r$

이때 $r>0$, $l>0$이므로

$r>0$, $12-2r>0 \qquad \therefore 0<r<6$

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(12-2r)$$
$$=-r^2+6r$$
$$=-(r-3)^2+9$$

따라서 S는 $r=3$일 때 최댓값 9를 갖는다.

$r=3$일 때 $l=12-2\times3=6$이므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라고 하면

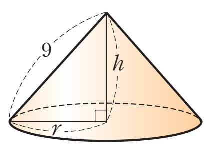
$6=3\theta \qquad \therefore \theta=2$

즉, 구하는 중심각의 크기는 2이다.

답 ②

022

주어진 부채꼴로 원뿔을 만들면 오른쪽 그림과 같다.



옆면인 부채꼴의 호의 길이는

$9\times\frac{4}{3}\pi=12\pi$

이때 옆면인 부채꼴의 호의 길이와 밑면인 원의 둘레의 길이가 같으므로 밑면인 원의 반지름의 길이를 r라고 하면

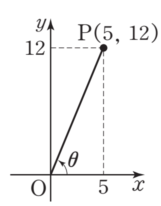
$2\pi r=12\pi \qquad \therefore r=6$

원뿔의 높이를 h라고 하면

$h=\sqrt{9^2-6^2}=3\sqrt{5}$

답 ①

023



$\overline{OP}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

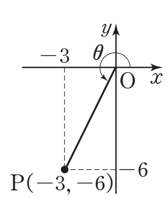
(1) $\sin\theta=\frac{12}{13}$

(2) $\cos\theta=\frac{5}{13}$

(3) $\tan\theta=\frac{12}{5}$

답 (1) $\frac{12}{13}$ (2) $\frac{5}{13}$ (3) $\frac{12}{5}$

024



$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$이므로

$\sin\theta=\frac{-6}{3\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\theta=\frac{-3}{3\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta=\frac{-6}{-3}=2$

$\therefore 5\cos\theta-25\sin\theta-\tan\theta$

$$=5\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)-25\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-2$$
$$=-\sqrt{5}+10\sqrt{5}-2$$
$$=9\sqrt{5}-2$$

답 ④

025

점 $P(-3, a)$에서 $\tan\theta=\frac{a}{-3}$이므로

$\frac{a}{-3}=-\frac{\sqrt{13}}{6} \qquad \therefore a=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$\therefore r=\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}=\frac{7}{2}$

$\therefore a^2+r^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2$

$$=\frac{13}{4}+\frac{49}{4}=\frac{31}{2}$$

답 $\frac{31}{2}$

026

점 D의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 $\overline{OD}=2$이므로

$\sin\theta=\frac{y_1}{2}$에서 $y_1=2\sin\theta$

$\cos\theta=\frac{x_1}{2}$에서 $x_1=2\cos\theta$

$\therefore D(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

이때 점 C는 점 D와 x축에 대하여 대칭이므로

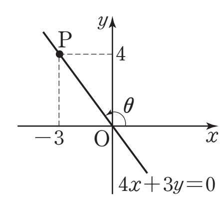
$C(2\cos\theta, -2\sin\theta)$

따라서 점 C의 y좌표는 $-2\sin\theta$이다.

답 ③

027

직선 $4x+3y=0$ 위의 한 점 $P(-3, 4)$를 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$ ······ ❶

이므로

$\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

······ ❷

$\therefore 25\sin\theta\cos\theta\tan\theta=25\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)$

$=16$ ······ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ 주어진 직선 위의 임의의 한 점 P를 잡고, $\overline{OP}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $25\sin\theta\cos\theta\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

| 다른 풀이 |

$4x+3y=0$에서 $y=-\frac{4}{3}x$

$\therefore \tan\theta=-\frac{4}{3}$

직선 $4x+3y=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이므로 (기울기)$=\tan\theta=-\frac{4}{3}$

이때 직선 $4x+3y=0$ 위의 한 점 $P(-3, 4)$를 잡으면

$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$

$\therefore 25\sin\theta\cos\theta\tan\theta=25\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)$

$=16$

028

$\sin\theta\tan\theta>0$에서 $\sin\theta$와 $\tan\theta$의 부호가 서로 같으므로 각 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

답 ③

029

(i) $\sin\theta\cos\theta>0$에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 부호가 서로 같으므로 각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\sin\theta\tan\theta<0$에서 $\sin\theta$와 $\tan\theta$의 부호가 서로 다르므로 각 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 θ는 제3사분면의 각이다.

답 ③

030

(i) $\sin\theta\tan\theta>0$에서 $\sin\theta$와 $\tan\theta$의 부호가 서로 같으므로 각 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta>0$에서 $\cos\theta$와 $\tan\theta$의 부호가 서로 같으므로 각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 θ는 제1사분면의 각이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 각 θ의 크기가 될 수 있는 것은 ①이다.

답 ①

031

$\sin\theta\cos\theta>0$에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 부호가 서로 같으므로 각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

ㄱ. θ가 제3사분면의 각이면

$|\sin\theta|=-\sin\theta$

$\therefore \sin\theta\neq|\sin\theta|$ (거짓)

ㄴ. θ가 제3사분면의 각이면

$\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|=-\cos\theta$

$\therefore \sqrt{\cos^2\theta}\neq\cos\theta$ (거짓)

ㄷ. 제1사분면 또는 제3사분면에서 $\tan\theta>0$이므로

$|\tan\theta|+\tan\theta=\tan\theta+\tan\theta=2\tan\theta$ (참)

따라서 항상 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

032

$\dfrac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\tan\theta}}=-\sqrt{\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}}$에서

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$

즉, θ는 제2사분면의 각이므로 ······ ❶

$\cos\theta<0$, $\sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore \sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}-|\cos\theta|+|\sin\theta|$

$=|\sin\theta-\cos\theta|-|\cos\theta|+|\sin\theta|$

$=(\sin\theta-\cos\theta)-(-\cos\theta)+\sin\theta$ ······ ❷

$=\sin\theta-\cos\theta+\cos\theta+\sin\theta$

$=2\sin\theta$ ······ ❸

답 $2\sin\theta$

채점 기준	비율
❶ θ가 제2사분면의 각임을 알 수 있다.	30 %
❷ 절댓값 기호를 풀 수 있다.	50 %
❸ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	20 %

풍쌤 개념 CHECK

음수의 제곱근의 성질_高 공통수학 1

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$

(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$

033

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$$\sin\theta+\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}=\sin\theta+\frac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}$$

$$=\sin\theta+\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$$

$$=\sin\theta+(1-\sin\theta)$$

$$=1$$

답 ③

034

$$\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\dfrac{1}{\tan\theta}}=\frac{\cos\theta}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{\sin\theta}{1-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{\sin\theta}{\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$=\sin\theta+\cos\theta$$

답 ⑤

035

θ가 제3사분면의 각이므로

$\cos\theta<0$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2=\frac{25}{169}$$

$$\therefore \cos\theta=-\frac{5}{13}\ (\because \cos\theta<0)$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\dfrac{12}{13}}{-\dfrac{5}{13}}=\frac{12}{5}$$

따라서 $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 차례대로 나열하면 $-\dfrac{5}{13}$, $\dfrac{12}{5}$이다.

답 $-\dfrac{5}{13}$, $\dfrac{12}{5}$

036

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 θ는 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because \sin\theta<0)$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ②

037

θ가 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\frac{1}{4}$에서 $1-\sin\theta=4(1+\sin\theta)$

$1-\sin\theta=4+4\sin\theta$, $5\sin\theta=-3$

$\therefore \sin\theta=-\frac{3}{5}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

$\therefore \cos\theta=\frac{4}{5}$ $(\because \cos\theta>0)$

답 $\frac{4}{5}$

038

θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$, $\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$

위의 식에 $\tan\theta=-\frac{1}{3}$을 대입하면

$\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$, $\cos^2\theta=\frac{9}{10}$

$\therefore \cos\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ $(\because \cos\theta<0)$

또, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$ $(\because \sin\theta>0)$

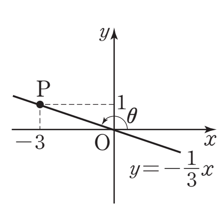
$\therefore 10(\sin\theta-\cos\theta)=10\times\left\{\frac{\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\right\}$

$=10\times\frac{4\sqrt{10}}{10}=4\sqrt{10}$

답 ④

| 다른 풀이 |

θ가 제2사분면의 각이고 $\tan\theta=-\frac{1}{3}$이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-\frac{1}{3}x$ 위의 한 점 $P(-3, 1)$을 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

이때

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\theta=\frac{-3}{\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

이므로

$10(\sin\theta-\cos\theta)=10\times\left\{\frac{\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\right\}$

$=10\times\frac{4\sqrt{10}}{10}=4\sqrt{10}$

039

θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$, $\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$

위의 식에 $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$를 대입하면

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$, $\cos^2\theta=\frac{2}{3}$

$\therefore \cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ $(\because \cos\theta<0)$ ❶

또, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because \sin\theta<0)$ ❷

$\therefore \frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{1+2\cos\theta\sin\theta}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{1+2\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$

$=\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{-1}{3+2\sqrt{2}}$

$=-3+2\sqrt{2}$ ❸

답 $-3+2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

| 다른 풀이 |

$\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{1+2\cos\theta\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$

$=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

$=\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$

θ가 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$
즉, $\cos\theta\neq0$이므로 분모, 분자를 $\cos\theta$로 나눈다.

$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}$

$=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}=-3+2\sqrt{2}$

040

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$, $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{8}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{4}{9}\right)$ ($\because$ (1))

$=1+\frac{8}{9}=\frac{17}{9}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{17}}{3}$

답 (1) $-\frac{4}{9}$ (2) $\pm\frac{\sqrt{17}}{3}$

041

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$, $2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

따라서

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$

이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore \sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

답 ①

042

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$, $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore (2\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta+2\cos\theta)$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+5\sin\theta\cos\theta$

$=2\times1+5\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{8}$

답 ①

043

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$\sin\theta\cos\theta-1=-\frac{2}{5}$, $\sin\theta-a=-\cos\theta$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{5}$, $a=\sin\theta+\cos\theta$

$\therefore a^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\frac{3}{5}=\frac{11}{5}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로

θ는 제1사분면의 각

$\sin\theta+\cos\theta>0$

즉, $a>0$이므로

$a=\sqrt{\frac{11}{5}}=\frac{\sqrt{55}}{5}$

답 ④

044

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{1}{5}\right)$

$=\frac{7}{5}$ ❶

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

즉, $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{7}{5}}=\frac{\sqrt{35}}{5}$ ❷

$\therefore \frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\frac{\sqrt{35}}{5}}{-\frac{1}{5}}=-\sqrt{35}$ ❸

답 $-\sqrt{35}$

채점 기준	비율
❶ $(\sin\theta-\cos\theta)^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

045

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$, $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

즉, $\sin\theta-\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{\frac{3}{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

답 ①

046

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=-3$에서

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=-3$, $\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-3$

$\therefore \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-3$

$$\therefore \frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)^2=(-3)^2=9$$

답 ②

실력을 높이는 연습 문제

본문 088쪽

01

$-100^\circ=360^\circ\times(-1)+260^\circ$이므로 주어진 각의 동경은 260°의 동경과 일치한다.
따라서 일반각은
$360^\circ\times n+260^\circ$ (단, n은 정수이다.)

답 ④

02

θ가 제3사분면의 각이므로
$360^\circ\times n+180^\circ<\theta<360^\circ\times n+270^\circ$ (단, n은 정수이다.)

$\therefore 120^\circ\times n+60^\circ<\dfrac{\theta}{3}<120^\circ\times n+90^\circ$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때

$120^\circ\times 3k+60^\circ<\dfrac{\theta}{3}<120^\circ\times 3k+90^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k+60^\circ<\dfrac{\theta}{3}<360^\circ\times k+90^\circ$

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때

$120^\circ\times(3k+1)+60^\circ<\dfrac{\theta}{3}<120^\circ\times(3k+1)+90^\circ$

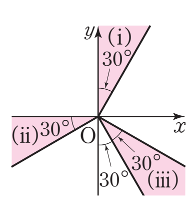
$\therefore 360^\circ\times k+180^\circ<\dfrac{\theta}{3}<360^\circ\times k+210^\circ$

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때

$120^\circ\times(3k+2)+60^\circ<\dfrac{\theta}{3}<120^\circ\times(3k+2)+90^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k+300^\circ<\dfrac{\theta}{3}<360^\circ\times k+330^\circ$

(i)~(iii)에서 각 $\dfrac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 속하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.
(단, 경계선은 제외한다.)



답 ⑤

03

각 2θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$2\theta+6\theta=2n\pi$ (단, n은 정수이다.)

$8\theta=2n\pi \qquad \therefore \theta=\dfrac{n}{4}\pi$

이때 $0<\theta<2\pi$이므로

$0<\dfrac{n}{4}\pi<2\pi \qquad \therefore 0<n<8$

따라서 조건을 만족시키는 정수 n은 1, 2, ⋯, 7이므로 θ는 $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2}$, ⋯, $\dfrac{7}{4}\pi$의 7개이다.

답 ③

04

문제 접근하기

각 α를 나타내는 동경과 각 β를 나타내는 동경이 일직선 위에 있는 경우는 다음의 두 경우로 나누어 생각한다.
(i) 두 동경이 일치하는 경우
(ii) 두 동경이 원점에 대하여 대칭인 경우
두 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대인 경우

(i) 두 동경이 일치하는 경우

$5\theta-3\theta=2n\pi$ (n은 정수)이므로

$2\theta=2n\pi \qquad \therefore \theta=n\pi$

$0<\theta<2\pi$이므로

$0<n\pi<2\pi \qquad \therefore 0<n<2$

이때 n은 정수이므로 $n=1$

$\therefore \theta=\pi$

(ii) 두 동경이 원점에 대하여 대칭인 경우

$5\theta-3\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)이므로

$2\theta=(2n+1)\pi \qquad \therefore \theta=\dfrac{2n+1}{2}\pi$

$0<\theta<2\pi$이므로

$0<\dfrac{2n+1}{2}\pi<2\pi$, $0<2n+1<4$

$-1<2n<3 \qquad \therefore -\dfrac{1}{2}<n<\dfrac{3}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=0$, 1

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

(i), (ii)에서 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\pi$ 또는 $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$이므로 그 합은

$\dfrac{\pi}{2}+\pi+\dfrac{3}{2}\pi=3\pi$

답 3π

05

① $30^\circ=30\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{6}$

② $150^\circ=150\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{5}{6}\pi$

③ $\dfrac{2}{5}\pi=\dfrac{2}{5}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=72^\circ$

④ $\dfrac{7}{4}\pi=\dfrac{7}{4}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=315^\circ$

⑤ $\dfrac{13}{6}\pi=\dfrac{13}{6}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=390^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

06

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이는

$2r+l=2r+r\times\frac{3}{5}=\frac{13}{5}r$

즉, $\frac{13}{5}r=26$이므로 $r=10$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{3}{5}=30$

답 ②

07

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}rl$

부채꼴의 둘레의 길이는

$2r+l$

이때 $r>0$, $l>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2r+l\geq2\sqrt{2rl}=2\sqrt{2\times2S}=4\sqrt{S}$

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $rl=2S$ (단, 등호는 $2r=l$일 때 성립한다.)

따라서 $2r=l$일 때 둘레의 길이가 최소가 되므로 $l=r\theta$에서

$2r=r\theta$ $\quad\therefore\ \theta=2$

답 2

풍쌤 개념 CHECK

산술평균과 기하평균의 관계_高 공통수학 2

두 양수 a, b에 대하여

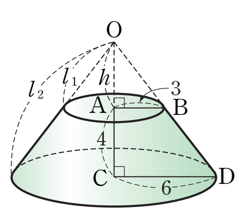
$a+b\geq2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

08

문제 접근하기

잘라 낸 부분은 원뿔이고 두 원뿔의 밑면인 원의 반지름의 길이의 비는 1 : 2이다. 즉, 모선의 길이의 비도 1 : 2이므로 반지름의 길이의 비가 1 : 2인 두 개의 부채꼴을 생각할 수 있다.

잘라 낸 부분은 밑면의 반지름의 길이가 3인 원뿔이므로 오른쪽 그림과 같이 잘라 낸 원뿔의 높이를 h라고 하자.



이때 $\triangle OAB\backsim\triangle OCD$이므로

$h:3=(h+4):6$

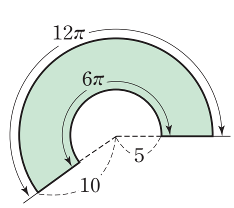
$3(h+4)=6h$

$h+4=2h$ $\quad\therefore\ h=4$

밑면인 원의 반지름의 길이가 3인 원뿔의 모선의 길이를 l_1, 밑면인 원의 반지름의 길이가 6인 원뿔의 모선의 길이를 l_2라고 하면

$l_1=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $l_2=2l_1=10$

따라서 두 원뿔의 옆면인 부채꼴을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉, 구하는 원뿔대의 옆면의 넓이는 큰 부채꼴의 넓이에서 작은 부채꼴의 넓이를 뺀 것과 같다.

이때 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

(큰 원뿔의 옆면인 부채꼴의 호의 길이)$=2\pi\times6=12\pi$

(작은 원뿔의 옆면인 부채꼴의 호의 길이)$=2\pi\times3=6\pi$

따라서 원뿔대의 옆면의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times10\times12\pi-\frac{1}{2}\times5\times6\pi=60\pi-15\pi$$
$$=45\pi$$

답 ④

09

부채꼴의 반지름의 길이를 r라고 하자.

점 P는 선분 OA를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{OP}=\frac{3}{4}r$

점 Q는 선분 OB를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\overline{OQ}=\frac{1}{3}r$

$\therefore\ \triangle OPQ=\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}r\times\frac{1}{3}r\times\sin\frac{\pi}{3}$ $\quad \sin\frac{\pi}{3}=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{16}r^2$

즉, $\frac{\sqrt{3}}{16}r^2=4\sqrt{3}$이므로

$r^2=4\sqrt{3}\times\frac{16}{\sqrt{3}}=64$ $\quad\therefore\ r=8$ ($\because r>0$)

따라서 호 AB의 길이는

$8\times\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$

답 ④

풍쌤 개념 CHECK

삼각형의 넓이_中 수학 3

삼각형 ABC에서 두 변 AB, BC의 길이와 그 끼인각 ∠B의 크기를 알 때, 삼각형 ABC의 넓이 S는 다음과 같다.

(1) ∠B가 예각일 때

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B$

(2) ∠B가 둔각일 때

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin(180^\circ-B)$

10

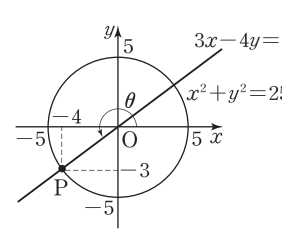
$3x-4y=0$에서 $y=\frac{3}{4}x$이므로 $x^2+y^2=25$에 대입하면

$x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2=25$, $\frac{25}{16}x^2=25$

$x^2=16$ $\quad\therefore\ x=\pm4$

$x=\pm4$를 $y=\frac{3}{4}x$에 대입하면

$y=\pm3$ (복호동순)



이때 점 P는 제3사분면의 점이므로 점 P의 좌표는 $(-4, -3)$이고,

$\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$이므로

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$

$\therefore 5(\sin\theta+\cos\theta)=5\left\{-\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)\right\}$

$=5\times\left(-\frac{7}{5}\right)=-7$

답 ①

11

$\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$을 만족시키는 각 θ는 제3사분면의 각이므로

$2n\pi+\pi<\theta<2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (단, n은 정수이다.)

$\therefore n\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<n\pi+\frac{3}{4}\pi$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{3}{4}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<(2k+1)\pi+\frac{3}{4}\pi$

$2k\pi+\frac{3}{2}\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{7}{4}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$의 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면, 제4사분면이다.

답 **제2사분면, 제4사분면**

12

$\sqrt{\tan\theta}\sqrt{\cos\theta}=-\sqrt{\tan\theta\cos\theta}$에서

$\tan\theta<0$, $\cos\theta<0$

즉, θ는 제2사분면의 각이므로

$2n\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2n\pi+\pi$ (단, n은 정수이다.)

따라서 $\alpha=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, $\beta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)이므로

$\beta-\alpha=(2n\pi+\pi)-\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

답 ③

13

$\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)\times\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta}\times\left(1-\frac{1}{\sin\theta}\right)\times\frac{\tan\theta}{1-\cos\theta}$

$=\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1-\frac{1}{\sin\theta}\right)\times\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta}\times\frac{\tan\theta}{1-\cos\theta}$

$=\left(1-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\times\frac{\tan^2\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\frac{\sin^2\theta-1}{\sin^2\theta}\times\frac{\tan^2\theta}{1-\cos^2\theta}$ → $\sin^2\theta-1=\sin^2\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=-\cos^2\theta$

$=\frac{-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\times\frac{\tan^2\theta}{\sin^2\theta}$

$=\frac{-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times\frac{1}{\sin^2\theta}=-\frac{1}{\sin^2\theta}$

답 ①

14

$\sin\theta+\cos\theta\tan\theta=-1$에서

$\sin\theta+\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-1$

$2\sin\theta=-1$ $\quad\therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

이때 $\cos\theta>0$이므로 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 ②

15

문제 접근하기

곱셈 공식의 변형과 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용하여 $f(4)$와 $f(8)$의 관계를 알아본다.

$f(n)=\sin^n\theta+\cos^n\theta$이므로

$f(4)=\sin^4\theta+\cos^4\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$\therefore \sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{2}\{1-f(4)\}$

따라서

$f(8)=\sin^8\theta+\cos^8\theta$

$=(\sin^4\theta+\cos^4\theta)^2-2\sin^4\theta\cos^4\theta$

$=(\sin^4\theta+\cos^4\theta)^2-2(\sin^2\theta\cos^2\theta)^2$

$=\{f(4)\}^2-2\times\left[\frac{1}{2}\{1-f(4)\}\right]^2$

$=\{f(4)\}^2-\frac{1}{2}[\{f(4)\}^2-2f(4)+1]$

$=\frac{1}{2}\{f(4)\}^2+f(4)-\frac{1}{2}$

이므로

$2f(8)+1=2\left[\frac{1}{2}\{f(4)\}^2+f(4)-\frac{1}{2}\right]+1$

$=\{f(4)\}^2+2f(4)$

답 ③

16

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{3}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$, $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{3}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}$

또,

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$

이고, θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

즉, $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$

$\therefore \tan^2\theta-\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$=\frac{\sin^4\theta-\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{3}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=3\sqrt{5}$

답 ③

17

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=\sqrt{3}$ ········ ㉠

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=a$ ········ ㉡

㉠에서 $2\sin\theta=\sqrt{3}$ $\quad\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

㉡에서

$a=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)$

$=2\sin^2\theta-1$

$=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1=\frac{1}{2}$

답 ⑤

풍쌤 개념 CHECK

이차방정식의 근과 계수의 관계_高 공통수학 1

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

(1) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ (2) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

06 삼각함수의 그래프

기본을 다지는 유형

본문 092쪽

001

함수 $y=\tan 2x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

주어진 함수의 주기를 구하면

① $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$ ② $\frac{2\pi}{2\pi}=1$ ③ $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

④ $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

따라서 구하는 함수는 ③이다.

답 ③

002

모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 최소의 양수 p는 주기이므로 주기가 π인 함수를 찾는다. 주어진 함수의 주기를 구하면

① $\frac{2\pi}{\pi}=2$ ② $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi$ ③ $\frac{2\pi}{2}=\pi$

④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

따라서 구하는 함수는 ③이다.

답 ③

003

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+1)$이므로 함수 $f(x)$는 주기함수이고 함수 $f(x)$의 주기를 p $(p>0)$라고 할 때, $pn=1$ (n은 자연수)이므로

$p=\frac{1}{n}$

즉, 함수 $f(x)$의 주기는 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ 중 하나이다.

주어진 함수의 주기를 구하면

① $\frac{2\pi}{1}=2\pi$ ② $\frac{2\pi}{\pi}=2$ ③ $\frac{2\pi}{\pi}=2$

④ $\frac{2\pi}{2\pi}=1$ ⑤ $\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ④이다.

답 ④

004

주어진 함수의 주기를 구하면 다음과 같다.

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{1}=\pi$ ③ $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

④ $\frac{\pi}{1}=\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

이때 $4<2\pi$이므로 주기가 가장 큰 것은 ⑤이다.
$\hookrightarrow 6.28\cdots$

답 ⑤

005

함수 $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배한 후, x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이다.

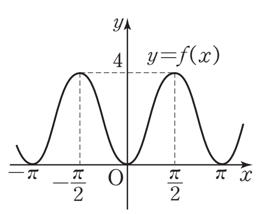
따라서 치역은 $\{y|-3\le y\le 3\}$이고, 주기는 2π이므로
$a=-3,\ b=3,\ c=2\pi$
$\therefore a+b+c=-3+3+2\pi=2\pi$

답 2π

006

함수 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+2=2\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동하고, y축의 방향으로 2배한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 0이므로
$0\le f(x)\le 4$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$의 주기는
$\frac{2\pi}{2}=\pi$
이므로 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+\pi)=f(x)$이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

| 다른 풀이 |

ㄱ. $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+2$에서

$-1\le\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\le 1$이므로

$-2\le 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\le 2$

x축의 방향으로 평행이동하거나 늘리는 것은 최댓값, 최솟값과 관계없다.

$0\le 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+2\le 4$

$\therefore 0\le f(x)\le 4$ (참)

ㄷ. $f(0)=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2=2\times(-1)+2=0$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지난다. (참)

007

함수 $y=\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{5}{2}$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$배하고 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배한 후, y축의 방향으로 $\frac{5}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

$1\times\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$

따라서 치역은 $\{y|2\le y\le 3\}$이고, 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이므로

$(-1)\times\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$

$a=2,\ b=3,\ c=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b+c=2+3+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

답 $\frac{11}{2}$

008

함수 $y=-2\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\pi$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하고 y축의 방향으로 2배한 후, x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼, y축으로 π만큼 평행이동한 것이다.

따라서 정의역은 $x+\frac{\pi}{3}\ne n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수), 즉 $x\ne n\pi+\frac{\pi}{6}$인 실수 전체의 집합이고, 주기는 π이므로

$a=\frac{\pi}{6},\ b=\pi$

$\therefore a+b=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7}{6}\pi$

답 $\frac{7}{6}\pi$

009

함수 $y=3\tan\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x-\frac{3}{4}\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수이다.)

$\therefore x=n\pi+\frac{5}{4}\pi$

즉, $\cdots,\ x=-\frac{7}{4}\pi,\ x=-\frac{3}{4}\pi,\ x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{5}{4}\pi,\ x=\frac{9}{4}\pi,\ \cdots$이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 아닌 것은 ①이다.

답 ①

참고

정수 n에 대하여 $x=n\pi+\frac{5}{4}\pi$는 $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$와 같이 나타낼 수도 있다.
$=n\pi+\pi+\frac{\pi}{4}=(n+1)\pi+\frac{\pi}{4}$

010

함수 $f(x)=\sin x$의 그래프의 대칭성에 의하여

$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}\qquad\therefore a+b=\pi$

$\frac{c+d}{2}=\frac{3}{2}\pi\qquad\therefore c+d=3\pi$

$\therefore a+b+c+d=\pi+3\pi=4\pi$

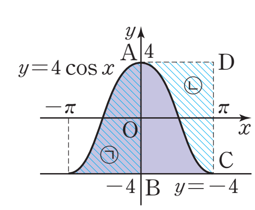
답 ①

참고

함수 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에 대하여 대칭이다.
즉, $f(x)=\sin x$ $(0\le x\le\pi)$에서 $f(a)=f(b)$ $(0\le a<b\le\pi)$이면
$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}\qquad\therefore a+b=\pi$

011

오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡의 넓이가 같다.
즉, 구하는 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같으므로
$\pi\times\{4-(-4)\}=8\pi$

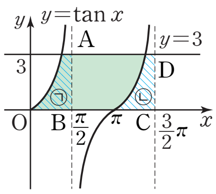


답 8π

012

오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡의 넓이가 같다.
즉, 구하는 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같으므로

$3\times\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=3\pi$



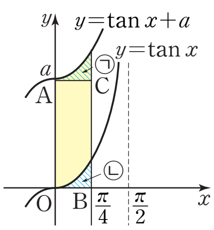
답 3π

013

함수 $y=\tan x+a$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡의 넓이가 같다.
따라서 주어진 부분의 넓이는 직사각형 AOBC의 넓이와 같으므로

$a\times\frac{\pi}{4}=\pi$

$\therefore a=4$



답 4

014

(1) $y=\sin 2x$에서 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.
(2) $y=-2\cos(x+\pi)+1$에서 최댓값은 $|-2|+1=3$, 최솟값은 $-|-2|+1=-1$이다.
(3) $y=4\tan\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}$에서 최댓값과 최솟값은 없다.

답 (1) **최댓값: 1, 최솟값: -1**
(2) **최댓값: 3, 최솟값: -1**
(3) **최댓값: 없다., 최솟값: 없다.**

015

함수 $f(x)=4\cos x+3$에서 최댓값은
$|4|+3=7$

답 ②

|다른 풀이|

$-1\le\cos x\le 1$이므로 $-4\le 4\cos x\le 4$
$\therefore -1\le 4\cos x+3\le 7$
따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 7이다.

016

함수 $f(x)$의 최솟값이 0이고 $a>0$이므로
$-a+2=0 \qquad \therefore a=2$
또, 주기가 4π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

답 ①

017

함수 $f(x)$의 최댓값이 4, 최솟값이 -3이고 $a<0$이므로
$-a+c=4,\ a+c=-3$
위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{7}{2},\ c=\frac{1}{2}$ ······ ❶

또, 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore b=4$ ······ ❷

$\therefore abc=-\frac{7}{2}\times4\times\frac{1}{2}=-7$ ······ ❸

답 -7

채점 기준	비율
❶ a, c의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	10 %

018

함수 $f(x)=a\sin b\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+c$의 그래프에서 최댓값이 4, 최솟값이 -2이므로
$|a|+c=4,\ -|a|+c=-2$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$|a|=3,\ c=1$
또, 주기가 π이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\pi \qquad \therefore |b|=2$

$\therefore a^2+b^2+c^2=|a|^2+|b|^2+c^2$
$=3^2+2^2+1^2=14$

답 14

019

함수 $y=a\cos(bx+c)$의 그래프에서 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로
$a=2$
또, 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=2\pi \qquad \therefore b=1$

$\therefore f(x)=2\cos(x+c)$
이때 주어진 그래프는 $y=2\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore c=-\frac{\pi}{2}\ (\because -\pi<c<0)$

$\therefore abc=2\times1\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi$

답 ③

020

함수 $y=\tan ax+b$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로
$b=2$
$0\le x<2\pi$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로
$a>0$

주기가 4π이므로 $\frac{\pi}{a}=4\pi$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

$\therefore ab=\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$

답 ②

021

(1) $\sin\frac{13}{6}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

(4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

| 다른 풀이 |

(4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

022

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{19}{6}\pi-\tan\frac{5}{6}\pi$

$=-\sin\frac{\pi}{3}+\underbrace{\cos\left(2\pi+\frac{7}{6}\pi\right)}_{\to\cos\frac{7}{6}\pi}-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\tan\frac{\pi}{6}$

$=-\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{6}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 ①

참고

$\cos\frac{19}{6}\pi=\cos\left(4\pi-\frac{5}{6}\pi\right)=\cos\frac{5}{6}\pi$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}$

와 같이 계산할 수도 있다.

023

① $\sin\frac{8}{3}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\frac{2}{3}\pi$

$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

② $\sin(-135^\circ)=-\sin135^\circ=-\sin(90^\circ+45^\circ)$

$=-\cos45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $\cos\frac{3}{4}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\cos390^\circ=\cos(360^\circ+30^\circ)=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑤ $\tan660^\circ=\tan(720^\circ-60^\circ)=\tan(-60^\circ)$

$=-\tan60^\circ=-\sqrt{3}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

024

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

② $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

③ $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

④ $-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

⑤ $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

따라서 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

답 ⑤

참고

여러 가지 각의 삼각함수의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

① 주어진 각을 $90^\circ\times n\pm\theta$ 또는 $\frac{\pi}{2}\times n\pm\theta$ (n은 정수)의 꼴로 나타낸다.

② 삼각함수를 결정한다.

(i) n이 짝수이면 그대로

➡ $\sin\theta\to\sin\theta$, $\cos\theta\to\cos\theta$, $\tan\theta\to\tan\theta$

(ii) n이 홀수이면 바뀐다.

➡ $\sin\theta\to\cos\theta$, $\cos\theta\to\sin\theta$, $\tan\theta\to\frac{1}{\tan\theta}$

③ 부호를 결정한다.

θ를 예각으로 생각하여 $90^\circ\times n\pm\theta$ 또는 $\frac{\pi}{2}\times n\pm\theta$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면에서 처음 주어진 삼각함수의 부호가 양이면 +, 음이면 −를 붙인다.

025

$\sin(-\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta-\sin\theta=-2\sin\theta$

즉, $-2\sin\theta=\frac{8}{5}$이므로 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$

이때 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

$\therefore\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$

답 ④

026

$\sin(-\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(-\theta)\tan(\pi+\theta)$

$=-\sin\theta\times(-\sin\theta)+\cos\theta\tan\theta$

$=\sin^2\theta+\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\sin^2\theta+\sin\theta$

이때 삼각함수 사이의 관계에 의하여

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$\therefore\sin\theta=\frac{2}{3}$ → θ는 제1사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$

$\therefore$ (주어진 식) $=\sqrt{\sin^2\theta+\sin\theta}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

답 ⑤

027

$$\frac{\sin(-\theta)}{\cos^2(2\pi-\theta)\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}+\frac{\sin(-\theta)\tan(\pi-\theta)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}$$

$$=\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta\times(-\sin\theta)}+\frac{-\sin\theta\times(-\tan\theta)}{-\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\tan\theta \quad \cdots\cdots ❶$$

$$=\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \quad \cdots\cdots ❷$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1 \quad \cdots\cdots ❸$$

답 1

채점 기준	비율
❶ 여러 가지 각의 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$를 이용하여 주어진 식을 간단히 나타낼 수 있다.	25 %
❸ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	25 %

028

$\sin 10^\circ=\sin(90^\circ-80^\circ)=\cos 80^\circ$

$\sin 30^\circ=\sin(90^\circ-60^\circ)=\cos 60^\circ$

이므로

$\sin^2 10^\circ+\sin^2 30^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 80^\circ$

$=\cos^2 80^\circ+\cos^2 60^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 80^\circ$

$=(\sin^2 80^\circ+\cos^2 80^\circ)+(\sin^2 60^\circ+\cos^2 60^\circ)$

$=1+1=2$

답 2

029

$y=\cos(x-\pi)-3\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1$

$=\cos(\pi-x)-3\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1$

$=-\cos x-3\cos x-1$

$=-4\cos x-1$

이때 $-1\le\cos x\le1$이므로

$-4\le-4\cos x\le4$

$\therefore -5\le-4\cos x-1\le3$

따라서 $M=3$, $m=-5$이므로

$M-m=3-(-5)=8$

답 ②

030

$y=\cos\left(\frac{3}{2}\pi+2x\right)-\sin(\pi+2x)+2$

$=\sin 2x-(-\sin 2x)+2$

$=2\sin 2x+2$

이때 $-1\le\sin 2x\le1$이므로

$-2\le2\sin 2x\le2$

$\therefore 0\le2\sin 2x+2\le4$

따라서 $M=4$, $m=0$이므로

$Mm=4\times0=0$

답 ③

031

$y=a\sin x+\cos\left(\underbrace{\frac{5}{2}\pi-x}_{2\pi+\frac{\pi}{2}-x}\right)+b$

$=a\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+b$

$=a\sin x+\sin x+b$

$=(a+1)\sin x+b$ $\cdots\cdots$ ❶

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로

$-(a+1)\le(a+1)\sin x\le a+1$ ($\because a+1>0$)

$\therefore -(a+1)+b\le(a+1)\sin x+b\le a+1+b$

주어진 함수의 최댓값이 6, 최솟값이 -2이므로

$a+1+b=6$, $-(a+1)+b=-2$

$\therefore a+b=5$, $-a+b=-1$ $\cdots\cdots$ ❷

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

$\therefore 2a+b=2\times3+2=8$ $\cdots\cdots$ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 $\sin x$를 포함한 식으로 정리할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $2a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

032

$0\le|\cos x|\le1$이므로

$-2\le-2|\cos x|\le0$

$\therefore -1\le-2|\cos x|+1\le1$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -1이므로 그 합은

$1+(-1)=0$

답 ③

033

$-1\le\sin 3x\le1$이므로

$-3\le\sin 3x-2\le-1$

즉, $1\le|\sin 3x-2|\le3$이므로

$a\le a|\sin 3x-2|\le3a$ ($\because a>0$)

$\therefore a+b\le a|\sin 3x-2|+b\le3a+b$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $3a+b$, 최솟값은 $a+b$이므로

$3a+b=4$, $a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$\therefore ab=1\times1=1$

답 ①

034

$y=-\sin^2 x+2\cos x$

$=-(1-\cos^2 x)+2\cos x$

$=\cos^2 x+2\cos x-1$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le\cos x\le1$이므로

$0\le t\le1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$

$0\le t\le1$에서 주어진 함수는 $t=1$일 때 최댓값 2, $t=0$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값을 차례대로 나열한 것은 ②이다.

답 ②

035

$y=\tan^2 x-2\tan(\pi+x)+2$

$\quad=\tan^2 x-2\tan x+2$

$\tan x=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $0\le\tan x\le1$이므로

$0\le t\le1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

$0\le t\le1$에서 주어진 함수는 $t=0$일 때 최댓값 2, $t=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

따라서 $M=2$, $m=1$이므로

$M-m=2-1=1$

답 ④

036

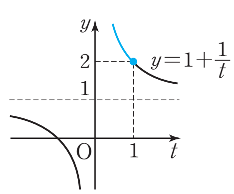
$\sin x=t$로 놓으면 $0<x\le\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin x\le1$이므로

$0<t\le1$

이때 주어진 함수는

$y=\frac{t+1}{t}=1+\frac{1}{t}$

$0<t\le1$에서 함수 $y=1+\frac{1}{t}$의 그래프는 오른쪽 그림의 색선과 같으므로 $t=1$일 때 최솟값 2를 갖는다.



답 2

037

$\cos x=t$로 놓으면 $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$에서 $-1\le\cos x\le0$이므로

$-1\le t\le0$

이때 주어진 함수는

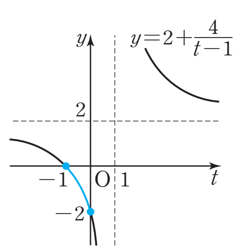
$y=\frac{2t+2}{t-1}=\frac{2(t-1)+4}{t-1}$

$\quad=2+\frac{4}{t-1}$

$-1\le t\le0$에서 함수 $y=2+\frac{4}{t-1}$의 그래프는 오른쪽 그림의 색선과 같으므로 주어진 함수는 $t=-1$일 때 최댓값 0, $t=0$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 $M=0$, $m=-2$이므로

$M+m=0+(-2)=-2$

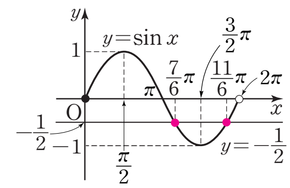


답 ②

038

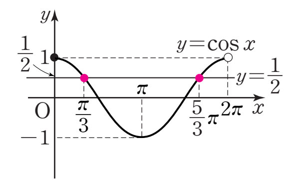
(1) 구하는 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같다.

따라서 $0\le x<2\pi$에서 구하는 해는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$



(2) 구하는 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같다.

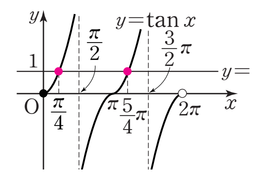
따라서 $0\le x<2\pi$에서 구하는 해는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$



(3) 구하는 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표와 같다.

따라서 $0\le x<2\pi$에서 구하는 해는

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$



답 (1) $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(3) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

039

$\sin(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x-\sin x=-2\sin x$

즉, 주어진 방정식은 $-2\sin x=\sqrt{3}$이므로

$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ❶

$0\le x<2\pi$에서 방정식 $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표와 같으므로

$x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ❷

따라서 $\alpha=\frac{4}{3}\pi$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{5}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$ ❸

답 $\frac{\pi}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ 방정식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\beta-\alpha$의 값을 구할 수 있다.	10 %

040

$\frac{1}{2}x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le\frac{1}{2}x<\pi$이므로

$0\le t<\pi$

이때 주어진 방정식은 $\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le t<\pi$에서 방정식 $\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 $t=\frac{3}{4}\pi$

즉, $\frac{1}{2}x=\frac{3}{4}\pi$이므로

$x=\frac{3}{2}\pi$

답 $x=\frac{3}{2}\pi$

041

$3x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le 3x<6\pi$이므로

$0\le t<6\pi$

이때 주어진 방정식은

$3\tan t=\sqrt{3}\qquad \therefore \tan t=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$0\le t<6\pi$에서 방정식 $\tan t=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는

$t=\frac{\pi}{6}$ 또는 $t=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{13}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{19}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{25}{6}\pi$

또는 $t=\frac{31}{6}\pi$

즉, $3x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $3x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $3x=\frac{13}{6}\pi$ 또는 $3x=\frac{19}{6}\pi$ 또는

$3x=\frac{25}{6}\pi$ 또는 $3x=\frac{31}{6}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{18}$ 또는 $x=\frac{7}{18}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{18}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{18}\pi$ 또는

$x=\frac{25}{18}\pi$ 또는 $x=\frac{31}{18}\pi$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

042

$x+\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{2}<\frac{5}{2}\pi$이므로

$\frac{\pi}{2}\le t<\frac{5}{2}\pi$

이때 주어진 방정식은

$2\sin t=\sqrt{2}\qquad \therefore \sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{2}\le t<\frac{5}{2}\pi$에서 $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는

$t=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $t=\frac{9}{4}\pi$

즉, $x+\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x+\frac{\pi}{2}=\frac{9}{4}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{7}{4}\pi=2\pi$

답 ④

| 다른 풀이 |

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$이므로 주어진 방정식을 정리하면

$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{7}{4}\pi=2\pi$

043

$\tan^2\theta+\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)\tan\theta$에서

$\tan^2\theta-(\sqrt{3}+1)\tan\theta+\sqrt{3}=0$

$(\tan\theta-\sqrt{3})(\tan\theta-1)=0$

$\therefore \tan\theta=\sqrt{3}$ 또는 $\tan\theta=1$

$0\le\theta<\pi$에서

$\tan\theta=\sqrt{3}$의 해는 $\theta=\frac{\pi}{3}$

$\tan\theta=1$의 해는 $\theta=\frac{\pi}{4}$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$이므로

$\beta-\alpha=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$

답 ⑤

044

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로 주어진 방정식은

$4\sin^2 x+4\sin x-3=0$

$(2\sin x-1)(2\sin x+3)=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ ($\because -1\le\sin x\le 1$)

$0\le x<4\pi$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{6}\pi$

따라서 모든 해의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{13}{6}\pi+\frac{17}{6}\pi=6\pi$

답 ②

045

$3\sin^2 x-4\cos x-4=0$에서

$3(1-\cos^2 x)-4\cos x-4=0$

$3\cos^2 x+4\cos x+1=0$

$(\cos x+1)(3\cos x+1)=0$

$\therefore \cos x=-1$ 또는 $\cos x=-\frac{1}{3}$ ❶

$0\le x<2\pi$에서 $\cos x=-1$의 해는 $x=\pi$ ❷

또, $\cos x=-\frac{1}{3}$의 해를 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$라고 하면 코사인함수의 그래프의 대칭성에 의하여

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi\qquad \therefore \alpha+\beta=2\pi$ ❸

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$\pi+\alpha+\beta=\pi+2\pi=3\pi$

$\therefore k=3$ ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 인수분해하여 $\cos x$의 값을 구할 수 있다.	25 %
❷ $\cos x=-1$의 근을 구할 수 있다.	25 %
❸ $\cos x=-\frac{1}{3}$의 근의 합을 구할 수 있다.	40 %
❹ k의 값을 구할 수 있다.	10 %

046

$2\cos\theta+\tan\theta=\dfrac{2}{\cos\theta}$에서

$2\cos\theta+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2}{\cos\theta}$

위의 식의 양변에 $\cos\theta$를 곱하면

$2\cos^2\theta+\sin\theta=2$

$2(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2=0$

$2\sin^2\theta-\sin\theta=0$, $\sin\theta(2\sin\theta-1)=0$

$\therefore \sin\theta=0$ 또는 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\le\theta<2\pi$에서

$\sin\theta=0$의 해는 $\theta=0$ 또는 $\theta=\pi$

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$의 해는 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

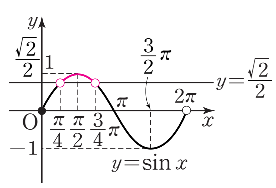
따라서 주어진 방정식의 해는

$\theta=0$ 또는 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $\theta=\pi$

답 $\theta=0$ 또는 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $\theta=\pi$

047

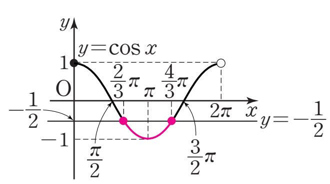
(1) 부등식 $\sin x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 $0\le x<2\pi$에서 구하는 해는

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$

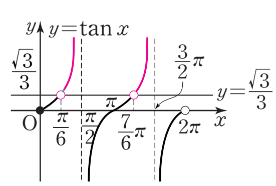
(2) 부등식 $\cos x\le-\dfrac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\dfrac{1}{2}$과 만나거나 그 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 $0\le x<2\pi$에서 구하는 해는

$\dfrac{2}{3}\pi\le x\le\dfrac{4}{3}\pi$

(3) 부등식 $\tan x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 $0\le x<2\pi$에서 구하는 해는

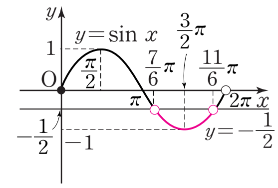
$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

답 (1) $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$ (2) $\dfrac{2}{3}\pi\le x\le\dfrac{4}{3}\pi$
(3) $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

048

$2\sin x+1<0$에서 $\sin x<-\dfrac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $\sin x<-\dfrac{1}{2}$의 해는



$\dfrac{7}{6}\pi<x<\dfrac{11}{6}\pi$

$\therefore \alpha=\dfrac{7}{6}\pi,\ \beta=\dfrac{11}{6}\pi$

따라서 $\beta-\alpha=\dfrac{11}{6}\pi-\dfrac{7}{6}\pi=\dfrac{2}{3}\pi$

이므로

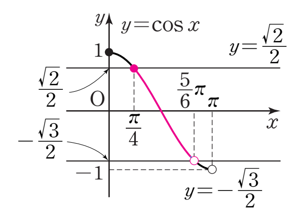
$\cos(\beta-\alpha)=\cos\dfrac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

답 ②

049

주어진 부등식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$보다 위쪽에 있고, 직선 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$와 만나거나 그 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 부등식 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\cos x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$의 해는

$\dfrac{\pi}{4}\le x<\dfrac{5}{6}\pi$

답 ④

050

$\theta+\dfrac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $0\le\theta\le\pi$에서 $\dfrac{\pi}{4}\le\theta+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{5}{4}\pi$이므로

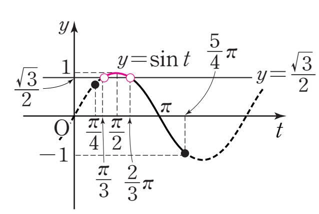
$\dfrac{\pi}{4}\le t\le\dfrac{5}{4}\pi$

이때 주어진 부등식은 $\sin t>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{\pi}{4}\le t\le\dfrac{5}{4}\pi$에서 부등식

$\sin t>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 $\dfrac{\pi}{3}<t<\dfrac{2}{3}\pi$

이므로



$\dfrac{\pi}{3}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{2}{3}\pi$

$\therefore \dfrac{\pi}{12}<\theta<\dfrac{5}{12}\pi$

따라서 $\alpha=\dfrac{\pi}{12}$, $\beta=\dfrac{5}{12}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\dfrac{5}{12}\pi-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}$

답 $\dfrac{\pi}{3}$

051

$2x+\dfrac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $\dfrac{\pi}{3}\le 2x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$이므로

$\dfrac{\pi}{3}\le t<\dfrac{7}{3}\pi$

이때 주어진 부등식은

$2\cos t>1$ $\quad\therefore \cos t>\dfrac{1}{2}$

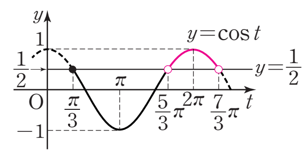
$\frac{\pi}{3} \le t < \frac{7}{3}\pi$에서 부등식

$\cos t > \frac{1}{2}$의 해는 $\frac{5}{3}\pi < t < \frac{7}{3}\pi$

이므로

$\frac{5}{3}\pi < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi < 2x < 2\pi$

$\therefore \frac{2}{3}\pi < x < \pi$



답 $\frac{2}{3}\pi < x < \pi$

052

$2\sin^2 x + \sqrt{3}(\cos x + 1) < 2(\cos x + 1)$에서

$2(1-\cos^2 x) + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} < 2\cos x + 2$

$2\cos^2 x + (2-\sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} > 0$

$(2\cos x - \sqrt{3})(\cos x + 1) > 0$

이때 $\cos x + 1 \ge 0$이므로

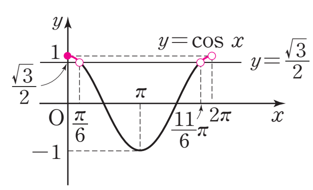
$2\cos x - \sqrt{3} > 0$ → $0 \le x < 2\pi$에서 $-1 \le \cos x \le 1$이므로 $0 \le \cos x + 1 \le 2$

$\therefore \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \le x < 2\pi$에서 부등식

$\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는

$0 \le x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$



답 $0 \le x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

참고

주어진 조건에서 $0 \le x < 2\pi$이므로 $x=0$은 포함되고, $x=2\pi$는 포함되지 않는다. 이와 같이 부등식을 풀 때에는 등호가 포함되는지 포함되지 않는지에 주의한다.

053

$2\cos x < 3\tan x$에서

$2\cos x < 3 \times \frac{\sin x}{\cos x}$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 $\cos x > 0$이므로 부등식의 양변에 $\cos x$를 곱하면

$2\cos^2 x < 3\sin x$, $2(1-\sin^2 x) < 3\sin x$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 > 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) > 0$

이때 $\sin x + 2 > 0$이므로

$2\sin x - 1 > 0$ → $0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 $0 < \sin x < 1$이므로 $2 < \sin x + 2 < 3$

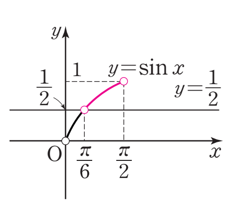
$\therefore \sin x > \frac{1}{2}$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 부등식 $\sin x > \frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

따라서 $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{2}$이므로

$a + b = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi$



답 ④

054

$\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(\pi + \theta) - 1 < 0$에서

$\sin^2\theta + \cos\theta - 1 < 0$

$(1-\cos^2\theta) + \cos\theta - 1 < 0$

$\cos^2\theta - \cos\theta > 0$

$\cos\theta(\cos\theta - 1) > 0$

이때 $\cos\theta - 1 \le 0$이므로

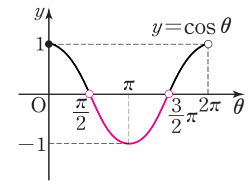
$\cos\theta < 0$ → $0 \le \theta < 2\pi$에서 $-1 \le \cos\theta \le 1$이므로 $-2 \le \cos\theta - 1 \le 0$

$0 \le \theta < 2\pi$에서 부등식 $\cos\theta < 0$의 해는

$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}\pi$이므로

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi$



답 2π

055

주어진 부등식의 양변을 $\cos^2 x$로 나누어 정리하면

$(\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) < 0$ → $\cos^2 x > 0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$\therefore 1 < \tan x < \sqrt{3}$

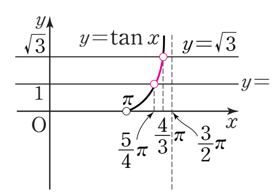
$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$에서 부등식

$1 < \tan x < \sqrt{3}$의 해는

$\frac{5}{4}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$

따라서 $a = \frac{5}{4}\pi$, $b = \frac{4}{3}\pi$이므로

$b - a = \frac{4}{3}\pi - \frac{5}{4}\pi = \frac{\pi}{12}$



답 $\frac{\pi}{12}$

056

$2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3\sin\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) \ge 0$에서

$x - \frac{\pi}{6} = t$로 놓으면 $0 \le x \le 2\pi$에서 $-\frac{\pi}{6} \le x - \frac{\pi}{6} \le \frac{11}{6}\pi$이므로

$-\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{11}{6}\pi$

이때 $x = t + \frac{\pi}{6}$이므로

$x + \frac{5}{6}\pi = t + \frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = t + \pi$

즉, 주어진 부등식은 $2\cos^2 t - 3\sin(t+\pi) \ge 0$이므로

$2\cos^2 t + 3\sin t \ge 0$ ······ ❶

$2(1-\sin^2 t) + 3\sin t \ge 0$

$2\sin^2 t - 3\sin t - 2 \le 0$

$(2\sin t + 1)(\sin t - 2) \le 0$

이때 $\sin t - 2 < 0$이므로 $2\sin t + 1 \ge 0$

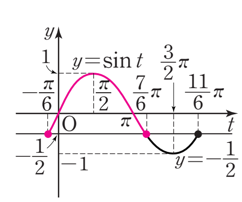
$\therefore \sin t \ge -\frac{1}{2}$ → $-\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{11}{6}\pi$에서 $-1 \le \sin t \le 1$이므로 $-3 \le \sin t - 2 \le -1$

$-\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{11}{6}\pi$에서 부등식

$\sin t \ge -\frac{1}{2}$의 해는

$-\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{7}{6}\pi$이므로 ······ ❷

$-\frac{\pi}{6} \le x - \frac{\pi}{6} \le \frac{7}{6}\pi$



$\therefore 0 \le x \le \frac{4}{3}\pi$ ……… ❸

답 $0 \le x \le \frac{4}{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ $x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓고 주어진 부등식을 각 t에 대한 삼각함수가 포함된 부등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ ❶의 부등식을 풀 수 있다.	50 %
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

실력을 높이는 연습 문제

본문 104쪽

01

주어진 함수의 주기를 구하면

① $\frac{2\pi}{\pi}=2$ ② $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ③ $\frac{2\pi}{2\pi}=1$

④ $\frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi}=\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

따라서 주기가 $\frac{1}{2}$인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

02

$a>0$이므로 $f(x)=\cos ax+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$

$y=\sin 3x$의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이므로 $g(x)=|\sin 3x|$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$

이때 두 함수의 주기가 서로 같으므로

$\frac{2\pi}{a}=\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore a=6$

답 ②

03

함수 $y=\sin 2x-1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sin 2x-1$

$\therefore y=-\sin 2x+1$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-3=-\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$

$\therefore y=-\sin(2x-\pi)+4$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=4$이므로

$a+b+c=-1+1+4=4$

답 ④

04

① 정의역은 실수 전체의 집합이다.

② $-1 \le \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le 1$이므로

$-1 \le -\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le 1$

$\therefore 4 \le -\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+5 \le 6$

즉, 치역은 $\{y \mid 4 \le y \le 6\}$이다.

③ 주기는 2π이다.

④ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 함수 $y=-\cos x$의 그래프는 y축(직선 $x=0$)에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=0$을 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 직선, 즉 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이다.

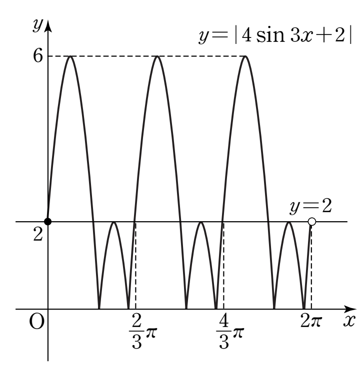
⑤ 함수 $y=-\cos x$의 그래프와 함수 $y=-\cos\frac{x}{2}$의 그래프는 겹치지 않으므로 함수 $y=-\cos\frac{x}{2}$의 그래프를 평행이동해도 함수 $y=f(x)$의 그래프와 겹치지 않는다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

05

함수 $y=4\sin 3x+2$는 주기가 $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값이 6, 최솟값이 -2이므로 $0 \le x < 2\pi$일 때 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$는 다음 그림과 같다.



따라서 $0 \le x < 2\pi$일 때 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$와 직선 $y=2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 9이다.

답 ③

06

함수 $f(x)$의 주기를 p $(p>0)$라고 하면 조건 (가)에 의하여 $pn=\pi$ (n은 자연수)이므로

$p=\frac{\pi}{n}$

즉, 함수 $f(x)$의 주기는 π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, ⋯ 중 하나이다.

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

이때 주어진 함수 중에서 그래프가 y축에 대하여 대칭인 것은 ③, ④이고

→ ①, ②, ⑤는 원점에 대하여 대칭이다.

③ 주기: $\frac{2\pi}{2}=\pi$, 최댓값: 2, 최솟값: -2

→ 최댓값과 최솟값의 차의 절댓값은 4이다.

④ 주기: $\frac{2\pi}{2\pi}=1$, 최댓값: 4, 최솟값: -4

→ 최댓값과 최솟값의 차의 절댓값은 8이다.

이므로 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수는 ③이다.

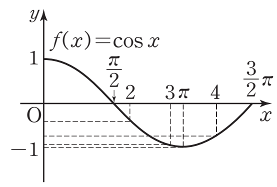
답 ③

07

$\frac{\pi}{2}=1.57\cdots,\ \frac{3}{2}\pi=4.7\cdots$

$\frac{\pi}{2}<2<4<\frac{3}{2}\pi$이므로

$0\le x\le\frac{3}{2}\pi$일 때 함수 $f(x)=\cos x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $f(x)$는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 x의 값이 π에서 멀어질수록 함숫값이 커진다.

즉, $|3-\pi|<|4-\pi|<|2-\pi|$이므로

$f(3)<f(4)<f(2)$

답 ④

08

함수 $y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$에서 최댓값은 $4-1=3$, 최솟값은 $-4-1=-5$이고 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로

$a=3,\ b=-5,\ c=\pi$

$$\therefore \cos\frac{bc}{a}=\cos\frac{-5\pi}{3}=\cos\frac{5}{3}\pi$$
$$=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

답 ③

09

문제 접근하기

$y=(f\circ g)(x)$를 식으로 나타내면 $y=2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin 2\pi x\right)+3$과 같이 복잡한 형태가 된다.
따라서 $g(x)=t$로 치환하여 t의 값의 범위에서 함수 $f(t)$의 최댓값과 최솟값을 구해 본다.

$g(x)=t$, 즉 $\frac{\pi}{2}\sin 2\pi x=t$로 놓으면 $-1\le\sin 2\pi x\le 1$이므로

$-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}\sin 2\pi x\le\frac{\pi}{2}\qquad\therefore -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

$$\therefore y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$$
$$=f(t)=2\cos t+3$$

$-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le\cos t\le 1$이므로

$0\le 2\cos t\le 2\qquad\therefore 3\le 2\cos t+3\le 5$

따라서 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 최댓값은 5, 최솟값은 3이므로 그 합은

$5+3=8$

답 8

10

함수 $f(x)=a|\sin bx|+c$의 주기가 4π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=4\pi\qquad\therefore b=\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=a\left|\sin\frac{1}{4}x\right|+c$

함수 $f(x)$의 최댓값이 4이고 $a>0$이므로

$a+c=4$ ......㉠

또, $f(-4\pi)=-2$이므로

$a|\sin(-\pi)|+c=c=-2$ ......㉡

$\sin(-\pi)=0$

㉡을 ㉠에 대입하면

$a-2=4\qquad\therefore a=6$

$\therefore a+\frac{c}{b}=6+\frac{-2}{\frac{1}{4}}=6-8=-2$

답 ①

11

함수 $y=a\sin(bx+c)+d$의 그래프에서 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로

$a+d=1,\ -a+d=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ d=-1$

또, 주기는

$\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi\qquad\therefore b=3$

따라서 주어진 함수의 식은

$y=2\sin(3x+c)-1$

이고, 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=2\sin(0+c)-1,\ \sin c=0$

$\therefore c=\pi\ (\because 0<c\le\pi)$

이때

$abcd=2\times3\times\pi\times(-1)=-6\pi$

이므로

$\cos(abcd)=\cos(-6\pi)=\cos 6\pi=1$

답 ⑤

12

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1-\sin(\pi+\theta)}-\frac{\cos(\pi-\theta)}{1+\sin(2\pi-\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta}{1-(-\sin\theta)}-\frac{-\cos\theta}{1-\sin\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$
$$=\frac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$$

답 ⑤

13

$A,\ B,\ C$가 삼각형의 세 내각이므로

$A+B+C=\pi\qquad\therefore B+C=\pi-A$

ㄱ. $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$ (참)

ㄴ. $\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$ (거짓)

ㄷ. $\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{B+C}{2}=\cos\frac{\pi-A}{2}$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

14

문제 접근하기

특수각이 아닌 각의 크기에 대한 탄젠트함수의 값의 곱이므로 삼각함수의 성질을 이용하여 식을 정리해야 한다.

즉, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$을 이용하여 식을 정리한다.

$\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\tan 4^\circ\times\cdots\times\tan 87^\circ\times\tan 88^\circ$

$=\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\tan 4^\circ\times\cdots\times\tan 44^\circ\times\tan 45^\circ$

$\quad\times\tan 46^\circ\times\tan 47^\circ\times\cdots\times\tan 87^\circ\times\tan 88^\circ$

이때 삼각함수의 성질에 의하여

$\tan 46^\circ=\tan(90^\circ-44^\circ)=\frac{1}{\tan 44^\circ}$

$\tan 47^\circ=\tan(90^\circ-43^\circ)=\frac{1}{\tan 43^\circ}$

$\vdots$

$\tan 87^\circ=\tan(90^\circ-3^\circ)=\frac{1}{\tan 3^\circ}$

$\tan 88^\circ=\tan(90^\circ-2^\circ)=\frac{1}{\tan 2^\circ}$

이므로

(주어진 식)$=\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\tan 4^\circ\times\cdots\times\tan 44^\circ\times\tan 45^\circ$

$\quad\times\frac{1}{\tan 44^\circ}\times\frac{1}{\tan 43^\circ}\times\cdots\times\frac{1}{\tan 3^\circ}\times\frac{1}{\tan 2^\circ}$

$=\tan 45^\circ=1$

답 ③

15

$f(x)+f(-x)=0$이면 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

또, $f(x+\pi)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 주기를 p $(p>0)$라고 하면

$pn=\pi$ (단, n은 자연수이다.) $\quad\therefore p=\frac{\pi}{n}$

즉, 함수 $f(x)$의 주기는 π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\cdots$ 중 하나이다.

ㄱ. $f(x)=2\pi\sin x$는 주기가 2π이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos 2x$이므로 주기가 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고, 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. $f(-x)=f(x)$

ㄷ. $f(x)=\cos 2x$는 ㄴ과 같은 함수이므로 주기가 π이고, 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄹ. $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\sin 2x$이므로 주기가 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㅁ. $f(x)=\tan(x+\pi)=\tan x$이므로 주기가 π이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㅂ. $f(x)=\tan\frac{\pi}{2}x$는 주기가 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수는 ㄹ, ㅁ의 2개이다.

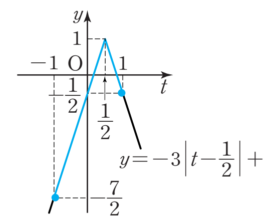
답 2

16

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=t$ $(-1\le t\le 1)$로 놓으면 주어진 함수는

$y=-3\left|t-\frac{1}{2}\right|+1$

이때 이 함수의 그래프는 점 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$에서 꺾이는 ∧자 모양이므로 $-1\le t\le 1$에서 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 함수는 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 1, $t=-1$일 때 최솟값 $-\frac{7}{2}$을 가지므로 그 합은

$1+\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{5}{2}$

답 ②

|다른 풀이|

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}=t$로 놓으면 $-1\le\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1$이므로

$-\frac{3}{2}\le\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\qquad\therefore -\frac{3}{2}\le t\le\frac{1}{2}$

이때 주어진 함수는 $y=-3|t|+1$

이 함수의 그래프는 점 $(0, 1)$에서 꺾이는 ∧자 모양의 그래프이므로 $-\frac{3}{2}\le t\le\frac{1}{2}$에서 $t=0$일 때 최댓값 1, $t=-\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{7}{2}$을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$1+\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{5}{2}$

17

$y=\sin^2(x-\pi)-2\cos^2(\pi-x)-\cos\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)$

$=\sin^2 x-2\cos^2 x+\sin x$

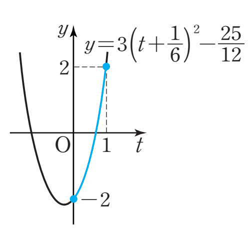
$=\sin^2 x-2(1-\sin^2 x)+\sin x$

$=3\sin^2 x+\sin x-2$ $0\le x<\pi$이므로 $0\le\sin x\le 1$

이때 $\sin x=t$ $(0\le t\le 1)$로 놓으면

$y=3t^2+t-2=3\left(t+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{12}$

$0\le t\le 1$에서 함수 $y=3\left(t+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{12}$의 그래프는 오른쪽 그림의 색선과 같으므로 주어진 함수는 $t=1$일 때 최댓값 2, $t=0$일 때 최솟값 -2를 갖는다.



따라서 $M=2$, $m=-2$이므로

$M+m=2+(-2)=0$

답 ①

18

$2x=t$로 놓으면 $0\le x\le\pi$에서 $0\le 2x\le 2\pi$이므로

$0\le t\le 2\pi$

이때 주어진 방정식은

$1+\sqrt{2}\sin t=0\qquad\therefore \sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0 \le t \le 2\pi$에서 $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는

$t = \frac{5}{4}\pi$ 또는 $t = \frac{7}{4}\pi$

즉, $2x = \frac{5}{4}\pi$ 또는 $2x = \frac{7}{4}\pi$이므로

$x = \frac{5}{8}\pi$ 또는 $x = \frac{7}{8}\pi$

따라서 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$\frac{5}{8}\pi + \frac{7}{8}\pi = \frac{3}{2}\pi$

답 ③

19

$\cos^2 x - 1 = -\sin x \cos x$에서

$(1 - \sin^2 x) - 1 = -\sin x \cos x$

$\sin^2 x - \sin x \cos x = 0$

$\sin x(\sin x - \cos x) = 0$

$\therefore \sin x = 0$ 또는 $\sin x = \cos x$

$0 \le x < \frac{\pi}{2}$에서

$\sin x = 0$의 해는 $x = 0$

$\sin x = \cos x$의 해는 $\tan x = 1$의 해와 같으므로 $x = \frac{\pi}{4}$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

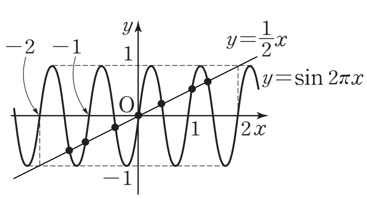
$0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

답 ③

20

방정식 $\sin 2\pi x = \frac{1}{2}x$의 실근의 개수는 함수 $y = \sin 2\pi x$의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x$의 교점의 개수와 같다.

이때 $y = \sin 2\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$이고, $y = \frac{1}{2}x$에서 $y = 1$일 때 $x = 2$, $y = -1$일 때 $x = -2$이므로 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 함수의 그래프의 교점은 7개이므로 방정식 $\sin 2\pi x = \frac{x}{2}$의 실근도 7개이다.

답 ②

21

이차방정식 $x^2 - 4x \cos\theta + 1 = 0$이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라고 할 때 $D = 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (-2\cos\theta)^2 - 1 = 0$

$4\cos^2\theta - 1 = 0$, $(2\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{2}$ 또는 $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$0 \le \theta < \pi$에서

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$의 해는 $\theta = \frac{2}{3}\pi$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$의 해는 $\theta = \frac{\pi}{3}$

따라서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi = \pi$

답 π

풍쌤 개념 CHECK

이차방정식의 근의 판별_高 공통수학 1

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 판별식을 D라고 할 때

(1) $D > 0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D = 0 \Longleftrightarrow$ 중근을 갖는다.

(3) $D < 0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다. 실근을 갖지 않는다.

22

$x + \frac{\pi}{6} = t$로 놓으면 $0 \le x < \pi$에서 $\frac{\pi}{6} \le x + \frac{\pi}{6} < \frac{7}{6}\pi$이므로

$\frac{\pi}{6} \le t < \frac{7}{6}\pi$

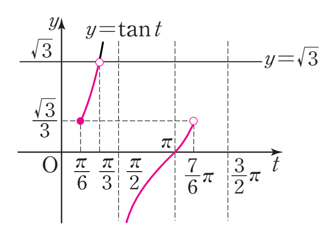
이때 주어진 부등식은 $\tan t < \sqrt{3}$

$\frac{\pi}{6} \le t < \frac{7}{6}\pi$에서 부등식

$\tan t < \sqrt{3}$의 해는

$\frac{\pi}{6} \le t < \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < t < \frac{7}{6}\pi$

이므로



$\frac{\pi}{6} \le x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$ 또는

$\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{7}{6}\pi$

$\therefore 0 \le x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{3} < x < \pi$

따라서 $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{3}$이므로

$b - a = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

답 ②

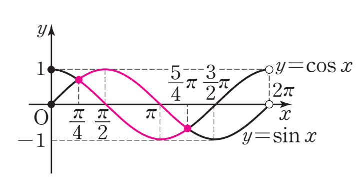
23

문제 접근하기

부등식 $\sin x \ge \cos x$와 부등식 $2\cos^2 x + 7\cos x + 3 \le 0$의 해를 각각 구한 후 그 공통부분을 구한다.

(i) $\sin x \ge \cos x$

부등식 $\sin x \ge \cos x$의 해는 함수 $y = \sin x$의 그래프가 함수 $y = \cos x$의 그래프와 만나거나 그 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



$0 \le x < 2\pi$에서 부등식 $\sin x \ge \cos x$의 해는

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5}{4}\pi$

(ii) $2\cos^2 x+7\cos x+3\le 0$에서

$(2\cos x+1)(\cos x+3)\le 0$

이때 $\cos x+3>0$이므로

$2\cos x+1\le 0$

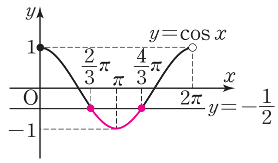
$0\le x<2\pi$에서 $-1\le \cos x\le 1$이므로 $2\le \cos x+3\le 4$

$\therefore \cos x\le -\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 부등식

$\cos x\le -\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{2}{3}\pi\le x\le \frac{4}{3}\pi$



(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는

$\frac{2}{3}\pi\le x\le \frac{5}{4}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{5}{4}\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi+\frac{5}{4}\pi=\frac{23}{12}\pi$

답 ④

24

이차방정식 $6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$이 실근을 갖지 않으려면 이 이차방정식의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(2\cos\theta)^2-6\sin\theta<0$

$4\cos^2\theta-6\sin\theta<0$

$4(1-\sin^2\theta)-6\sin\theta<0$

$-4\sin^2\theta-6\sin\theta+4<0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)>0$

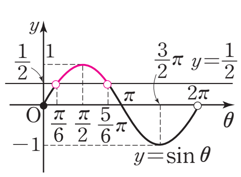
이때 $\sin\theta+2>0$이므로

$0\le\theta<2\pi$에서 $-1\le\sin\theta\le 1$이므로 $1\le\sin\theta+2\le 3$

$2\sin\theta-1>0$ $\qquad \therefore \sin\theta>\frac{1}{2}$

$0\le\theta<2\pi$에서 부등식 $\sin\theta>\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$3\alpha+\beta=3\times\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{4}{3}\pi$

답 ④

07 삼각함수의 활용

기본을 다지는 유형

본문 109쪽

001

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$이므로

$\frac{a}{\sin 45^\circ}=\frac{6}{\sin 60^\circ}$

$a\sin 60^\circ=6\sin 45^\circ$

$a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \therefore a=2\sqrt{6}$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$이므로

$\frac{8}{\sin B}=\frac{4\sqrt{6}}{\sin\frac{\pi}{3}}$

$8\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{6}\sin B$

$8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{6}\sin B$ $\qquad \therefore \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0<B<\pi$이므로 $B=\frac{\pi}{4}$ 또는 $B=\frac{3}{4}\pi$

그런데 $B+C<\pi$이어야 하므로 $B=\frac{\pi}{4}$

답 (1) $2\sqrt{6}$ (2) $\frac{\pi}{4}$

002

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=2R$이므로

$\frac{2}{\sin 45^\circ}=2R$, $2R=2\sqrt{2}$ $\qquad \therefore R=\sqrt{2}$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin B}=2R$이므로

$\frac{3}{\sin B}=2\times 3$ $\qquad \therefore \sin B=\frac{1}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=30^\circ$ 또는 $B=150^\circ$

(3) 사인법칙에 의하여 $\frac{c}{\sin C}=2R$이므로

$\frac{c}{\sin\frac{\pi}{2}}=2\times 4$ $\qquad \therefore c=8$

답 (1) $\sqrt{2}$ (2) 30° 또는 150° (3) 8

003

삼각형 ABC에서 $c=\overline{AB}=8$, $a=\overline{BC}$

또, $A=45^\circ$, $B=15^\circ$이므로

$C=180^\circ-(45^\circ+15^\circ)=120^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$이므로

$\frac{a}{\sin 45^\circ}=\frac{8}{\sin 120^\circ}$

$a\sin 120^\circ=8\sin 45^\circ$

$a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=8\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \therefore a=\frac{8\sqrt{6}}{3}$

따라서 선분 BC의 길이는 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$이다.

답 ③

004

외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이므로

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C&=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\\&=\frac{a+b+c}{2R}\\&=\frac{a+b+c}{2\times 6}=\frac{a+b+c}{12}\end{aligned}$$

즉, $\frac{a+b+c}{12}=2$이므로

$a+b+c=24$

답 ④

005

외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이므로

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C&=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\\&=\frac{a+b+c}{2R}\\&=\frac{10}{2R}\ (\because a+b+c=10)\\&=\frac{5}{R}\end{aligned}$$

즉, $\frac{5}{R}=\frac{5}{2}$이므로 $R=2$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 2이다.

답 ②

| 다른 풀이 |

사인법칙의 변형에 의하여

$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

$$\begin{aligned}\therefore a+b+c&=2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C\\&=2R(\sin A+\sin B+\sin C)\\&=2R\times\frac{5}{2}=5R\end{aligned}$$

이때 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 10이므로

$5R=10\qquad\therefore R=2$

006

$\overline{\mathrm{AC}}$가 원 O의 지름이므로 $\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$

즉, 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=4$인 직각이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}=45^\circ$

또, 호 BC에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin 30^\circ}=\frac{4}{\sin 45^\circ}$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}\sin 45^\circ=4\sin 30^\circ$

$\overline{\mathrm{CD}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4\times\frac{1}{2}\qquad\therefore \overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{2}$

답 ④

007

사인법칙의 변형에 의하여 $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$\frac{4}{5}=\frac{2\sqrt{2}}{2R}\qquad\therefore R=\frac{5\sqrt{2}}{4}$

또, 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$이므로

$\frac{2}{\sin A}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{4}{5}}$, $2\sqrt{2}\sin A=\frac{8}{5}$

$\therefore \sin A=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$이므로

$\cos A=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{5}$ ($\because$ A는 예각)

$\therefore 4R\cos A=4\times\frac{5\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{17}}{5}=\sqrt{34}$

답 ①

008

삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{ABC}=30^\circ$, $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$이므로

$\angle\mathrm{BAC}=180^\circ-(30^\circ+90^\circ)=60^\circ$ ❶

또, 삼각형 ADC는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AC}}=k$로 놓으면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 30^\circ}$, $\frac{10+k}{\sin 60^\circ}=\frac{k}{\sin 30^\circ}$ ❷

$(10+k)\sin 30^\circ=k\sin 60^\circ$

$(10+k)\times\frac{1}{2}=k\times\frac{\sqrt{3}}{2}$, $10+k=k\sqrt{3}$

$k(\sqrt{3}-1)=10$

$\therefore k=\frac{10}{\sqrt{3}-1}=\frac{10(\sqrt{3}+1)}{2}=5(\sqrt{3}+1)$

따라서 선분 AC의 길이는 $5(\sqrt{3}+1)$이다. ❸

답 $5(\sqrt{3}+1)$

채점 기준	비율
❶ ∠BAC의 크기를 구할 수 있다.	20 %
❷ 삼각형 ABC에서 사인법칙을 이용하여 식을 세울 수 있다.	50 %
❸ 선분 AC의 길이를 구할 수 있다.	30 %

009

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$이고 $A:B:C=4:1:1$이므로

$A=180^\circ\times\frac{4}{4+1+1}=120^\circ$

$B=180^\circ\times\frac{1}{4+1+1}=30^\circ$

$C=180^\circ\times\frac{1}{4+1+1}=30^\circ$

사인법칙의 변형에 의하여

$a:b:c=\sin 120^\circ:\sin 30^\circ:\sin 30^\circ$

$\qquad=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3}:1:1$

따라서 $a=\sqrt{3}k$, $b=k$, $c=k$ $(k>0)$로 놓으면

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}=\frac{(\sqrt{3}k)^2}{k^2+k^2}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

010

$(a+b):(b+c):(c+a)=8:7:9$이므로

$a+b=8t$ ········· ㉠

$b+c=7t$ ········· ㉡

$c+a=9t$ ········· ㉢

로 놓자. (단, $t>0$) ········· ❶

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(a+b+c)=24t$　　$\therefore a+b+c=12t$ ········· ㉣

㉣−㉡, ㉣−㉢, ㉣−㉠을 하면

$a=5t$, $b=3t$, $c=4t$ ········· ❷

따라서 사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned}\sin A:\sin B:\sin C&=a:b:c\\&=5t:3t:4t\\&=5:3:4\end{aligned}$$ ········· ❸

즉, $k=5$, $l=3$, $m=4$이므로

$k+l+m=5+3+4=12$ ········· ❹

답 12

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 비례상수를 이용하여 식으로 나타낼 수 있다.	25 %
❷ a, b, c를 비례상수를 이용한 식으로 나타낼 수 있다.	25 %
❸ $\sin A:\sin B:\sin C$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $k+l+m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

011

(1) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&=1^2+(\sqrt{2})^2-2\times1\times\sqrt{2}\times\cos 45^\circ\\&=1+2-2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1\end{aligned}$$

이때 $a>0$이므로 $a=1$

(2) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\&=(2\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times\cos 60^\circ\\&=8+18-24\times\frac{1}{2}=14\end{aligned}$$

이때 $c>0$이므로 $c=\sqrt{14}$

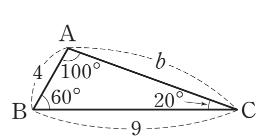
답 (1) 1　(2) $\sqrt{14}$

012

$B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(100^\circ+20^\circ)=60^\circ$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\&=4^2+9^2-2\times4\times9\times\cos 60^\circ\\&=16+81-72\times\frac{1}{2}=61\end{aligned}$$



이때 $b>0$이므로 $b=\sqrt{61}$

답 ②

013

평행사변형에서 이웃하는 두 각의 크기의 합은 180°이므로

$C=180^\circ-B=180^\circ-45^\circ=135^\circ$ ········· ❶

따라서 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2&=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\cos C\\&=(3\sqrt{2})^2+6^2-2\times3\sqrt{2}\times6\times\cos 135^\circ\\&=18+36-36\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=90\end{aligned}$$ ········· ❷

$\rightarrow \overline{CD}=\overline{AB}=6$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ ($\because \overline{BD}>0$) ········· ❸

답 $3\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ C의 크기를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\overline{BD}^2$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ 대각선 BD의 길이를 구할 수 있다.	10 %

풍쌤 개념 CHECK

평행사변형의 성질_中 수학 2

① 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.

② 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.

③ 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

014

원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합은 180°이므로

$D=180^\circ-B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

따라서 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

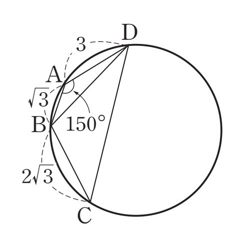
$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\cos D\\&=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos 120^\circ\\&=4+9-12\times\left(-\frac{1}{2}\right)=19\end{aligned}$$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{19}$ ($\because \overline{AC}>0$)

답 ④

015

선분 BD를 그으면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여



$$\begin{aligned}&\overline{BD}^2\\&=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos A\\&=(\sqrt{3})^2+3^2-2\times\sqrt{3}\times3\times\cos 150^\circ\\&=3+9-6\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=21\end{aligned}$$

한편, 원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합은 180°이므로

$C=180^\circ-A=180^\circ-150^\circ=30^\circ$

$\overline{CD}=x$라고 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\cos C$

$21=(2\sqrt{3})^2+x^2-2\times2\sqrt{3}\times x\times\cos 30^\circ$

$21=12+x^2-4\sqrt{3}x\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2-6x-9=0$　　$\therefore x=3+3\sqrt{2}$ ($\because x>0$)

따라서 선분 CD의 길이는 $3+3\sqrt{2}$이다.

답 ⑤

016

삼각형 ABC에서 $a=3$, $b=5$, $c=7$이므로 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}$$
$$=\frac{-15}{30}=-\frac{1}{2}$$

이때 $0<C<\pi$이므로 $C=\frac{2}{3}\pi$

답 ③

017

$a+3b-2c=0$ ······ ㉠

$5a-5b-2c=0$ ······ ㉡

㉡−㉠을 하면

$4a-8b=0 \qquad \therefore a=2b$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$2b+3b-2c=0 \qquad \therefore c=\frac{5}{2}b$

따라서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{\left(\frac{5}{2}b\right)^2+(2b)^2-b^2}{2\times\frac{5}{2}b\times2b}$$
$$=\frac{\frac{37}{4}b^2}{10b^2}=\frac{37}{40}$$

답 ④

018

삼각형 ABD에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos B=\frac{4^2+2^2-3^2}{2\times4\times2}=\frac{11}{16}$ ······ ❶

삼각형 ABC에서 $\cos B=\frac{11}{16}$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$$
$$=4^2+(2+3)^2-2\times4\times(2+3)\times\frac{11}{16}$$

$=16+25-\frac{55}{2}=\frac{27}{2}$ ······ ❷

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{\frac{27}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}\ (\because \overline{AC}>0)$ ······ ❸

답 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

채점 기준	비율
❶ 삼각형 ABD에서 $\cos B$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 삼각형 ABC에서 $\overline{AC}^2$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 선분 AC의 길이를 구할 수 있다.	10 %

019

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-(b^2+bc+c^2)}{2bc}$$
$$=-\frac{bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$$

이때 $0°<A<180°$이므로

$A=120°$

답 ⑤

020

삼각형 ABD에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=6$, $\overline{BD}=\sqrt{15}$이므로 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A=\frac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times6\times6}=\frac{57}{72}=\frac{19}{24}$$

삼각형 ABC에서 $\cos A=\frac{19}{24}$이므로 코사인법칙에 의하여

$$k^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$$
$$=6^2+10^2-2\times6\times10\times\frac{19}{24}$$
$$=36+100-95=41$$

답 41

021

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3^2+2^2-4^2}{2\times3\times2}$$
$$=\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4}$$

$0°<C<180°$에서 $\sin C>0$이므로 삼각함수 사이의 관계에 의하여

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{c}{\sin C}=2R,\ \frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=2R$$

$$\therefore R=\frac{8\sqrt{15}}{15}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{8\sqrt{15}}{15}$이다.

답 ②

022

코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$$
$$=4^2+(2\sqrt{2})^2-2\times4\times2\sqrt{2}\times\cos 135°$$
$$=16+8-16\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=40$$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}\ (\because \overline{AC}>0)$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{10}}{\sin 135°}=2R,\ \frac{2\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$$

$\therefore R=2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 둘레의 길이는

$2\pi R=2\pi\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}\pi$

답 ①

023

$\frac{3}{\sin A}=\frac{4}{\sin B}=\frac{6}{\sin C}=t\ (t>0)$로 놓으면

$\sin A=\frac{3}{t},\ \sin B=\frac{4}{t},\ \sin C=\frac{6}{t}$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=\frac{3}{t}:\frac{4}{t}:\frac{6}{t}=3:4:6$

사인법칙의 변형에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:4:6$

이므로 $a=3k,\ b=4k,\ c=6k\ (k>0)$로 놓으면 가장 작은 각의 크기는 변의 길이가 가장 짧은 a의 대각인 A이다.

따라서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\theta=\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{(4k)^2+(6k)^2-(3k)^2}{2\times4k\times6k}$$
$$=\frac{43k^2}{48k^2}=\frac{43}{48}$$

답 ⑤

024

$\sqrt{2}\sin A=\sqrt{2}\sin B=\sin C=t\ (t>0)$로 놓으면

$\sin A=\frac{t}{\sqrt{2}},\ \sin B=\frac{t}{\sqrt{2}},\ \sin C=t$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=\frac{t}{\sqrt{2}}:\frac{t}{\sqrt{2}}:t=1:1:\sqrt{2}$

사인법칙의 변형에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=1:1:\sqrt{2}$

이므로 $a=k,\ b=k,\ c=\sqrt{2}k\ (k>0)$로 놓으면 가장 큰 각의 크기는 변의 길이가 가장 긴 c의 대각인 C이다.

따라서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{k^2+k^2-(\sqrt{2}k)^2}{2\times k\times k}=0$$

이때 $0°<C<180°$이므로 $C=90°$

따라서 가장 큰 각의 크기는 $90°$이다.

답 ④

참고

$a:b:c=1:1:\sqrt{2}$이므로 코사인법칙의 변형을 이용하지 않고도 C의 크기를 구할 수 있다.

즉, 세 변의 길이의 비가 $1:1:\sqrt{2}$인 삼각형은 직각이등변삼각형이고, 이때 C는 길이가 가장 긴 c의 대각의 크기이므로 $C=90°$임을 알 수 있다.

025

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$

이므로

$(\sin A+\sin B):(\sin B+\sin C):(\sin C+\sin A)$

$=\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}\right):\left(\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right):\left(\frac{c}{2R}+\frac{a}{2R}\right)$

$=\frac{a+b}{2R}:\frac{b+c}{2R}:\frac{c+a}{2R}$

$=(a+b):(b+c):(c+a)$

즉, $(a+b):(b+c):(c+a)=5:8:5$이므로

$a+b=5k,\ b+c=8k,\ c+a=5k\ (k>0)$로 놓고 변끼리 더하면

$2(a+b+c)=18k \qquad \therefore a+b+c=9k$

$\therefore a=k,\ b=4k,\ c=4k$ $a+b+c=9k$에서 $b+c=8k, c+a=5k, a+b=5k$를 각각 빼서 구한다.

따라서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(4k)^2+k^2-(4k)^2}{2\times4k\times k}$$
$$=\frac{k^2}{8k^2}=\frac{1}{8}$$

답 ③

026

사인법칙의 변형에 의하여 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$이므로

$a:b:c=5:12:13$

$a=5k,\ b=12k,\ c=13k\ (k>0)$로 놓으면

$$a^2+b^2=(5k)^2+(12k)^2$$
$$=25k^2+144k^2$$
$$=169k^2=(13k)^2=c^2$$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.

답 ④

027

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$

이것을 $\frac{a}{\sin C}=\frac{c}{\sin A}$, 즉 $a\sin A=c\sin C$에 대입하면

$a\times\frac{a}{2R}=c\times\frac{c}{2R} \qquad \therefore a^2=c^2$

이때 $a>0,\ c>0$이므로 $a=c$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

답 ①

028

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙의 변형과 코사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \sin C=\frac{c}{2R}$

이것을 $\sin C=2\sin A\cos B$에 대입하면

$\frac{c}{2R}=2\times\frac{a}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\frac{c}{2R}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2Rc}$

$c^2=c^2+a^2-b^2 \qquad \therefore a^2=b^2$

이때 $a>0,\ b>0$이므로 $a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ②

029

$\sin(\pi-C)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\sin(\pi-B)$에서 삼각함수의 성질에 의하여

$\sin C=\cos A\sin B$ ······ ❶

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙의 변형과 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

이것을 $\sin C=\cos A\sin B$에 대입하면

$\dfrac{c}{2R}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\dfrac{b}{2R}$ ········· ❷

$\dfrac{c}{2R}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4Rc}$

$2c^2=b^2+c^2-a^2 \qquad \therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다. ········· ❸

답 $B=90^\circ$인 직각삼각형

채점 기준	비율
❶ 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 정리할 수 있다.	30 %
❷ 사인법칙과 코사인법칙의 변형을 이용하여 주어진 식을 변의 길이에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 삼각형 ABC가 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	30 %

030

(1) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times6\times\sin 60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9$

(2) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times10\times10\sqrt{3}\times\sin 135^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times10\times10\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=25\sqrt{6}$

답 (1) 9 (2) $25\sqrt{6}$

031

$\overline{BC}=a$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$이므로

$(2\sqrt{3})^2=2^2+a^2-2\times2\times a\times\cos 60^\circ$

$12=4+a^2-4a\times\dfrac{1}{2}$, $a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0 \qquad \therefore a=4\ (\because a>0)$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times2\times4\times\sin 60^\circ$

$=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

답 ①

032

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{7}\times\sin\theta=\sqrt{7}\sin\theta$

즉, $\sqrt{7}\sin\theta=\sqrt{6}$이므로

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$

이때 A는 예각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{42}}{7}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

답 ⑤

033

$a=5$, $b=6$, $c=7$이라고 하면 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{6^2+7^2-5^2}{2\times6\times7}$

$=\dfrac{60}{84}=\dfrac{5}{7}$

$0^\circ<A<180^\circ$이므로 $\sin A>0$

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{7}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times6\times7\times\dfrac{2\sqrt{6}}{7}=6\sqrt{6}$

답 ③

| 다른 풀이 |

$a=5$, $b=6$, $c=7$, $s=\dfrac{a+b+c}{2}=9$라고 하면

$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{9\times(9-5)\times(9-6)\times(9-7)}$

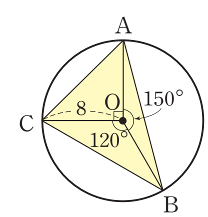
$=\sqrt{9\times4\times3\times2}=6\sqrt{6}$

034

한 원에서 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례한다.

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=5:4:3$이므로

$\angle AOB:\angle BOC:\angle COA=5:4:3$



즉,

$\angle AOB=360^\circ\times\dfrac{5}{5+4+3}=150^\circ$

$\angle BOC=360^\circ\times\dfrac{4}{5+4+3}=120^\circ$

$\angle COA=360^\circ\times\dfrac{3}{5+4+3}=90^\circ$

$\therefore \triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

$=\dfrac{1}{2}\times8\times8\times\sin 150^\circ+\dfrac{1}{2}\times8\times8\times\sin 120^\circ$

$+\dfrac{1}{2}\times8\times8\times\sin 90^\circ$

$=32\times\dfrac{1}{2}+32\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+32\times1$

$=16+16\sqrt{3}+32$

$=48+16\sqrt{3}$

답 ⑤

035

$a=3$, $b=5$, $c=5$라 하고, 삼각형 ABC의 넓이를 S, 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$S=\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{3\times5\times5}{4\times3}=\dfrac{25}{4}$

또, 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$S=\dfrac{a+b+c}{2}\times r$에서

$\dfrac{25}{4}=\dfrac{3+5+5}{2}\times r$, $25=26r$ $\quad\therefore r=\dfrac{25}{26}$

따라서 내접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{25}{26}$이다.

답 $\dfrac{25}{26}$

036

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

이것을 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{3}{4}$에 대입하면

$\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}+\dfrac{c}{2R}=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{a+b+c}{2R}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore a+b+c=\dfrac{3}{2}R$ ······ ❶

이때 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 6인 원에 내접하므로 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 6이다.

즉, $R=6$이므로 $a+b+c=9$ ······ ❷

따라서 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$\triangle ABC=\dfrac{a+b+c}{2}\times r=\dfrac{9}{2}\times 2=9$ ······ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 사인법칙을 이용하여 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 세 변의 길이의 합을 구할 수 있다.	30 %
❸ 삼각형 ABC의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

037

등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 서로 같으므로 한 대각선의 길이를 x라고 하면

$\dfrac{1}{2}\times x\times x\times\sin 120^{\circ}=4\sqrt{3}$

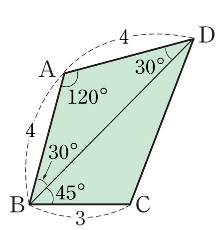
$\dfrac{1}{2}\times x\times x\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2=4\sqrt{3}$, $x^2=16$ $\quad\therefore x=4\ (\because x>0)$

즉, 등변사다리꼴의 한 대각선의 길이는 4이다.

답 ②

038



오른쪽 그림과 같이 대각선 BD를 그으면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=4^2+4^2-2\times4\times4\times\cos 120^{\circ}$

$\quad=16+16-32\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=48$

$\therefore \overline{BD}=4\sqrt{3}\ (\because \overline{BD}>0)$

이때 삼각형 ABD는 이등변삼각형이므로

$\angle ABD=\angle ADB=\dfrac{1}{2}(180^{\circ}-120^{\circ})=30^{\circ}$

$\therefore \angle DBC=75^{\circ}-30^{\circ}=45^{\circ}$

따라서

$\triangle ABD=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\sin 30^{\circ}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=4\sqrt{3}$

$\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{BC}\times\sin 45^{\circ}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{6}$

이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ABD+\triangle BCD=4\sqrt{3}+3\sqrt{6}$

답 $4\sqrt{3}+3\sqrt{6}$

실력을 높이는 연습 문제

본문 117쪽

01

삼각형 ABC에서

$C=180^{\circ}-(45^{\circ}+75^{\circ})=60^{\circ}$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로

$\dfrac{2}{\sin 45^{\circ}}=\dfrac{c}{\sin 60^{\circ}}$, $2\sin 60^{\circ}=c\sin 45^{\circ}$

$2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=c\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\therefore c=\sqrt{6}$

$\therefore \dfrac{c}{\cos C}=\dfrac{\sqrt{6}}{\cos 60^{\circ}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{6}$

답 ⑤

02

외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

$A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$

$\therefore \sin A+\sin B+\sin(A+B)=\sin A+\sin B+\sin C$

$=\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}+\dfrac{c}{2R}$

$=\dfrac{a+b+c}{2R}$

$=\dfrac{12}{2\times4}=\dfrac{3}{2}\ (\because R=4)$

답 ①

03

$A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B):\sin(B+C):\sin(C+A)$

$=\sin(\pi-C):\sin(\pi-A):\sin(\pi-B)$

$=\sin C:\sin A:\sin B$

$=c:a:b=4:3:6$

즉, $a:b:c=3:6:4$이므로 가장 긴 변의 길이는 b이다.

이때 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 39이므로

$b=39\times\dfrac{6}{3+6+4}=18$

따라서 가장 긴 변의 길이는 18이다.

답 18

04

$a=\sqrt{3}$, $b=1$, $c=\sqrt{7}$로 놓으면 세 내각 중에서 크기가 가장 큰 각은 가장 긴 변의 대각이므로 가장 큰 각의 크기는 c의 대각의 크기인 C이다.

코사인법칙의 변형에 의하여

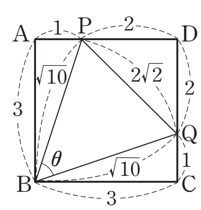
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(\sqrt{3})^2+1^2-(\sqrt{7})^2}{2\times\sqrt{3}\times1}$$
$$=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=150^\circ$

따라서 크기가 가장 큰 각의 크기는 150°이다.

답 ⑤

05



정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 3이라고 하면

$\overline{AP}=1$, $\overline{DP}=2$, $\overline{CQ}=1$, $\overline{DQ}=2$

이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BP}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\overline{BQ}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\overline{PQ}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

삼각형 PBQ에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

이때 θ는 예각이므로 $\sin\theta>0$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

참고

삼각비는 변의 길이의 비이므로 주어진 정사각형의 길이를 어떻게 정해도 결과는 같다.

06

문제 접근하기

변 BC의 대각인 ∠A가 특수각이 아니므로 코사인법칙이나 사인법칙을 적용하기 어렵다. 이와 같은 경우에는 특수각이 되는 다른 각의 크기를 찾아 코사인법칙을 적용한다.

$A=75^\circ$, $B=60^\circ$이므로

$C=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$

이때 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}=2$이므로

$\overline{AC}=2\sin 60^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{AB}=2\sin 45^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

이때 $\overline{BC}=x$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\overline{AB}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{AB}\times\cos B$

$(\sqrt{3})^2=x^2+(\sqrt{2})^2-2\times x\times\sqrt{2}\times\cos 60^\circ$

$3=x^2+2-2\sqrt{2}x\times\dfrac{1}{2}$, $x^2-\sqrt{2}x-1=0$

$$\therefore x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{(-\sqrt{2})^2-4\times1\times(-1)}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$$

이때 $x>0$이므로 $x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

따라서 변 BC의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$이다.

답 ③

07

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=\{-(\sin A+\sin B)\}^2-4\times\sin A\times\sin B=0$

$\sin^2 A-2\sin A\sin B+\sin^2 B=0$

$(\sin A-\sin B)^2=0 \qquad \therefore \sin A=\sin B$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$

이것을 $\sin A=\sin B$에 대입하면

$\dfrac{a}{2R}=\dfrac{b}{2R} \qquad \therefore a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ④

08

$\overline{CD}=x$로 놓으면 $\triangle ABC=\triangle ADC+\triangle BCD$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times x\times\sin 45^\circ+\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times x\times\sin 45^\circ$

$2=\sqrt{2}x\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$2=x+\dfrac{1}{2}x \qquad \therefore x=\dfrac{4}{3}$

따라서 선분 CD의 길이는 $\dfrac{4}{3}$이다.

답 ②

09

문제 접근하기

변의 길이가 모두 문자로 주어져 당황하기 쉽지만, $\cos A$의 값이 주어졌으므로 코사인법칙의 변형을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{(x+2)^2+(x+4)^2-x^2}{2(x+2)(x+4)}$$
$$=\frac{x^2+12x+20}{2(x+2)(x+4)}$$
$$=\frac{(x+2)(x+10)}{2(x+2)(x+4)}=\frac{x+10}{2(x+4)}$$

즉, $\frac{x+10}{2(x+4)}=\frac{13}{14}$이므로

$14(x+10)=26(x+4)$

$12x=36 \qquad \therefore x=3$

따라서 세 변의 길이는 $a=3$, $b=5$, $c=7$이고 $0^\circ<A<180^\circ$에서 $\sin A>0$이므로

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{27}{196}}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times5\times7\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

답 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

| 다른 풀이 |

$a=3$, $b=5$, $c=7$이므로 $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{15}{2}$라고 하면

$$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{\frac{15}{2}\times\left(\frac{15}{2}-3\right)\times\left(\frac{15}{2}-5\right)\times\left(\frac{15}{2}-7\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{15}{2}\times\frac{9}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

10

삼각형 ABC의 넓이를 S, 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$S=\frac{abc}{4R}$

외접원의 반지름의 길이가 10이므로

$S=\frac{abc}{4\times10}=\frac{abc}{40}$ ……… ㉠

또, 내접원의 반지름의 길이가 4이므로

$S=\frac{a+b+c}{2}\times4=2(a+b+c)$ ……… ㉡

이때 ㉠과 ㉡은 서로 같으므로

$\frac{abc}{40}=2(a+b+c) \qquad \therefore a+b+c=\frac{abc}{80}$

$$\therefore \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{c}{abc}+\frac{a}{abc}+\frac{b}{abc}$$

$$=\frac{a+b+c}{abc}$$

$$=\frac{\frac{abc}{80}}{abc}=\frac{1}{80}$$

답 ①

11

삼각형 CDP에서 $\angle CPD=\theta$라고 하면 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos\theta=\frac{3^2+5^2-4^2}{2\times3\times5}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$\overline{AC}=3+5=8$, $\overline{BD}=7+3=10$

사각형 ABCD의 두 대각선의 길이는 8, 10이고 그 끼인각의 크기는 θ이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times8\times10\times\frac{4}{5}=32$

답 32

12

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=2:2:3:5$이므로

$\angle AOB:\angle BOC:\angle COD:\angle DOA=2:2:3:5$

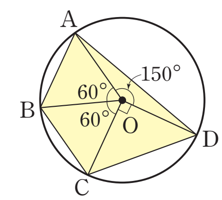
즉,

$\angle AOB=360^\circ\times\frac{2}{2+2+3+5}=60^\circ$

$\angle BOC=360^\circ\times\frac{2}{2+2+3+5}=60^\circ$

$\angle COD=360^\circ\times\frac{3}{2+2+3+5}=90^\circ$

$\angle DOA=360^\circ\times\frac{5}{2+2+3+5}=150^\circ$



이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCD+\triangle ODA$

$=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin60^\circ$

$\quad+\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin90^\circ+\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin150^\circ$

$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times1+2\times\frac{1}{2}$

$=2\sqrt{3}+3$

답 ④

08 등차수열과 등비수열

기본을 다지는 유형

본문 121쪽

001

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

(1) $a=1$, $d=4-1=3$이므로

$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

(2) $a=6$, $d=1-6=-5$이므로

$a_n=6+(n-1)\times(-5)=-5n+11$

답 (1) $a_n=3n-2$ (2) $a_n=-5n+11$

002

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2=a+d=5$, $a_4=a+3d=13$이므로

$a_4-a_2=(a+3d)-(a+d)=2d=8$

$\therefore d=4$

따라서 공차는 4이다.

답 ④

003

주어진 등차수열의 공차를 d라고 하면

$d=10-6=4$

$\therefore a=6-4=2$, $b=10+4=14$

$\therefore b-a=14-2=12$

답 ③

|다른 풀이|

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 공차를 d라고 하면

$d=10-6=4$

이때 $a=a_1$, $b=a_4=a+3d$이므로

$b-a=a_4-a_1=3d=3\times4=12$

004

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 a_1, b_1이라고 하면

$a_n=a_1+(n-1)\times(-3)$, $b_n=b_1+(n-1)\times9$

이때 수열 $\{a_n+b_n\}$의 일반항은 a_n+b_n이므로

$a_n+b_n=\{a_1+(n-1)\times(-3)\}+\{b_1+(n-1)\times9\}$

$=(a_1+b_1)+(n-1)\times6$

따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$의 공차는 6이다.

답 6

005

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라고 하면

$a_n=a+(n-1)\times2=2n+a-2$

ㄱ. $2a_n=2(2n+a-2)=4n+2a-4$

이므로 수열 $\{2a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이다. (참)

ㄴ. $a_{2n-1}=2(2n-1)+a-2=4n+a-4$

이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 4인 등차수열이다. (참)

ㄷ. $2a_{2n}=2(2\times2n+a-2)=8n+2a-4$

이므로 수열 $\{2a_{2n}\}$은 공차가 8인 등차수열이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

006

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_5-a_3=(1+4d)-(1+2d)=2d=8$

$\therefore d=4$

$\therefore a_2=1+1\times4=5$

답 ③

007

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2=a+d=18$ ⋯⋯ ㉠

$a_7=a+6d=-12$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=24$, $d=-6$

$\therefore a_6=24+5\times(-6)=-6$

답 ②

008

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_4=a+3d=1$ ⋯⋯ ㉠

$a_8=a+7d=-3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $d=-1$

$\therefore a_n=4+(n-1)\times(-1)=-n+5$

따라서 $-n+5=-12$에서 $n=17$

즉, -12는 제17항이다.

답 ④

009

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_2=34+d$, $a_{10}=34+9d$ ⋯⋯ ❶

이때 $a_2:a_{10}=2:1$이므로

$2a_{10}=a_2$, $2(34+9d)=34+d$

$68+18d=34+d$, $17d=-34$

$\therefore d=-2$ ⋯⋯ ❷

$\therefore a_5=34+4\times(-2)=26$ ⋯⋯ ❸

답 26

채점 기준	비율
❶ 첫째항과 공차를 이용하여 a_2, a_{10}을 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 주어진 비를 이용하여 공차를 구할 수 있다.	30 %
❸ a_5를 구할 수 있다.	30 %

010

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=\log_2 25$ ⋯⋯ ㉠

$a_5=a+4d=\log_2 100$ ⋯⋯⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면

$2d=\log_2 100-\log_2 25=\log_2 \frac{100}{25}=\log_2 4=2$

$\therefore d=1$

$d=1$을 ㉠에 대입하면

$a+2=\log_2 25$

$\therefore a=\log_2 25-2=\log_2 25-\log_2 4=\log_2 \frac{25}{4}$

$\therefore a_7=\log_2 \frac{25}{4}+6\times1=\log_2 \frac{25}{4}+\log_2 2^6$

$=\log_2\left(\frac{25}{4}\times 2^6\right)=\log_2 400$

답 ③

|다른 풀이|

$a_7=a_5+2d=\log_2 100+2\times1=\log_2 100+\log_2 2^2$

$=\log_2(100\times4)=\log_2 400$

011

3, a_1, a_2, a_3, 11은 첫째항이 3, 제5항이 11인 등차수열이다.

이 등차수열의 공차를 d라고 하면

$3+4d=11$, $4d=8$ $\therefore d=2$

a_3은 이 등차수열의 제4항이므로

$a_3=3+3d=3+3\times2=9$

답 ④

참고

$a_3=3+2d$로 착각하지 않도록 주의한다.

012

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

제3항이 36이므로 $a+2d=36$ ⋯⋯⋯ ㉠

제6항이 21이므로 $a+5d=21$ ⋯⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=46$, $d=-5$

$\therefore a_n=46+(n-1)\times(-5)=-5n+51$

$a_n<0$에서

$-5n+51<0$ $\therefore n>10.2$ n은 자연수이므로 $a_n<0$을 만족시키는 n의 최솟값은 11이다.

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제11항이다.

답 ②

013

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_1=a_3+8$에서

$a_1=(a_1+2d)+8$, $2d+8=0$ $\therefore d=-4$

또, $2a_4-3a_6=3$에서

$2(a_1+3d)-3(a_1+5d)=3$, $2a_1+6d-3a_1-15d=3$

$\therefore -a_1-9d=3$

위의 식에 $d=-4$를 대입하면

$-a_1-9\times(-4)=3$, $-a_1=-33$ $\therefore a_1=33$

$\therefore a_n=33+(n-1)\times(-4)=-4n+37$

$a_k<0$에서

$-4k+37<0$ $\therefore k>9.25$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 10이다.

답 ②

014

a_2는 a_1과 a_3의 등차중항이므로

$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{16}{2}=8$

답 ③

|다른 풀이|

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_1+a_3=a+(a+2d)=2a+2d=16$

$\therefore a+d=8$

$\therefore a_2=a+d=8$

015

세 수 4, a, 12가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a=4+12$, $2a=16$ $\therefore a=8$

세 수 a, 13, b, 즉 8, 13, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times13=8+b$, $26=8+b$ $\therefore b=18$

세 수 a, b, c, 즉 8, 18, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times18=8+c$, $36=8+c$ $\therefore c=28$

$\therefore a+b+c=8+18+28=54$

답 54

016

k가 $\log_3 5$와 $\log_9 16$의 등차중항이므로

$2k=\log_3 5+\log_9 16=\log_3 5+\log_{3^2} 4^2$

$=\log_3 5+\log_3 4=\log_3 20$

$\therefore k=\frac{1}{2}\log_3 20=\log_3\sqrt{20}$

$\therefore 3^k=3^{\log_3\sqrt{20}}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

답 ③

017

수열 -3, a, b, c, 7의 공차가 d이면 -3, b, 7은 공차가 $2d$인 등차수열이다.

세 수 -3, b, 7이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\frac{-3+7}{2}=2$

세 수 -3, a, b, 즉 -3, a, 2가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2}$

세 수 b, c, 7, 즉 2, c, 7이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$c=\frac{2+7}{2}=\frac{9}{2}$

$\therefore a+b+c=-\frac{1}{2}+2+\frac{9}{2}=6$

답 ①

|다른 풀이|

세 수 -3, b, 7이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\frac{-3+7}{2}=2$

b가 a와 c의 등차중항이므로

$2b=a+c$ $\therefore a+c=4$

$\therefore a+b+c=(a+c)+b=4+2=6$

018

세 수 a, 3, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times3=a+b \quad \therefore a+b=6$ .... ㉠

세 수 a^2, 13, b^2이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times13=a^2+b^2 \quad \therefore a^2+b^2=26$ .... ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$(a+b)^2=36$, $a^2+2ab+b^2=36$

$26+2ab=36$ ($\because$ ㉡), $2ab=10$

$\therefore ab=5$

답 ④

019

삼차방정식 $x^3-6x^2+kx-4=0$의 세 근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=6$, $3a=6$

$\therefore a=2$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 주어진 방정식에 $x=2$를 대입하면

$2^3-6\times2^2+2k-4=0$

$8-24+2k-4=0$

$2k=20 \quad \therefore k=10$

답 ①

풍쌤 개념 CHECK

삼차방정식의 근과 계수의 관계_高 공통수학 1

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

020

$a+d$는 빗변의 길이가 된다.

직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d$, a, $a+d$ $(a>d>0)$로 놓으면 이 직각삼각형의 넓이가 24이므로

$\frac{1}{2}\times(a-d)\times a=24$, $\frac{1}{2}(a^2-ad)=24$

$\therefore a^2-ad=48$ .... ㉠

피타고라스 정리에 의하여

$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2$

$a^2=4ad$

$\therefore a=4d$ ($\because a\neq0$) .... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(4d)^2-4d\times d=48$, $12d^2=48$

$d^2=4 \quad \therefore d=2$ ($\because d>0$)

㉡에 $d=2$를 대입하면

$a=8$

따라서 세 변의 길이는 6, 8, 10이므로 직각삼각형의 빗변의 길이는 10이다.

답 ①

021

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

(1) $S_{10}=\frac{10(2+24)}{2}=130$

(2) $S_8=\frac{8\{2\times(-30)+(8-1)\times3\}}{2}=-156$

답 (1) 130 (2) -156

022

(1) 첫째항이 -6, 공차가 $-4-(-6)=2$이므로 끝항 12를 제n항이라고 하면

$-6+(n-1)\times2=12$, $2n-8=12 \quad \therefore n=10$

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{10(-6+12)}{2}=30$

(2) 첫째항이 21, 공차가 $17-21=-4$이므로 끝항 -19를 제n항이라고 하면

$21+(n-1)\times(-4)=-19$, $-4n+25=-19$

$\therefore n=11$

따라서 첫째항부터 제11항까지의 합은

$\frac{11\{21+(-19)\}}{2}=11$

답 (1) 30 (2) 11

023

첫째항이 -8, 공차가 $-5-(-8)=3$인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 36이므로

$\frac{n\{2\times(-8)+(n-1)\times3\}}{2}=36$ .... ❶

$n(3n-19)=72$, $3n^2-19n-72=0$

$(3n+8)(n-9)=0$ .... ❷

이때 n은 자연수이므로 $n=9$ .... ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 등차수열의 합을 n에 대하여 나타낼 수 있다.	60 %
❷ n에 대한 식을 정리하여 인수분해할 수 있다.	30 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	10 %

024

등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라고 하면

$a_1+b_1=12$, $d+d'=2+(-5)=-3$이므로

$(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(b_1+b_2+\cdots+b_{10})$

$=\frac{10(2a_1+9d)}{2}+\frac{10(2b_1+9d')}{2}$

$=\frac{10\{2(a_1+b_1)+9(d+d')\}}{2}$

$=\frac{10\{2\times12+9\times(-3)\}}{2}=-15$

답 ②

025

$S_7-S_4=0$이므로

$(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(a_1+a_2+a_3+a_4)=0$

$\therefore a_5+a_6+a_7=0$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_5=a_6-d$, $a_7=a_6+d$이므로

$(a_6-d)+a_6+(a_6+d)=0$, $3a_6=0$

$\therefore a_6=0$

$S_6=30$이므로

$\dfrac{6(a_1+a_6)}{2}=30$, $3a_1=30$

$\therefore a_1=10$

$a_6=10+5d=0$이므로 $d=-2$

$\therefore a_2=a_1+d=10-2=8$

답 ②

026

두 자리 자연수 중에서 4로 나누었을 때 나머지가 2인 자연수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

10, 14, 18, 22, ⋯, 98

이것은 첫째항이 10, 공차가 4인 등차수열이므로 끝항 98을 제n항이라고 하면

$10+(n-1)\times 4=98$, $4n+6=98$

$\therefore n=23$

따라서 구하는 자연수의 합은 첫째항이 10, 제23항이 98인 등차수열의 첫째항부터 제23항까지의 합이므로

$\dfrac{23(10+98)}{2}=1242$

답 ③

027

27, a_1, a_2, a_3, ⋯, a_{10}, 3은 첫째항이 27, 끝항이 3, 항수가 12인 등차수열이므로 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{12}=\dfrac{12(27+3)}{2}=180$

이때 $S_{12}=27+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}+3$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=S_{12}-(27+3)$

$=180-30=150$

답 ⑤

028

-10과 38 사이에 넣은 n개의 수를 a_1, a_2, a_3, ⋯, a_n이라고 하면 -10, a_1, a_2, a_3, ⋯, a_n, 38은 첫째항이 -10, 끝항이 38, 항수가 $n+2$인 등차수열이다. ······ ❶

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{n+2}=-10+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+38$

$=-10+448+38=476$

즉, $\dfrac{(n+2)(-10+38)}{2}=476$이므로 ······ ❷

$14(n+2)=476$, $n+2=34$

$\therefore n=32$ ······ ❸

답 32

채점 기준	비율
❶ $(n+2)$개의 수로 만든 등차수열의 첫째항, 끝항, 항수를 파악할 수 있다.	30 %
❷ $(n+2)$개의 수로 만든 등차수열의 합을 구할 수 있다.	40 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	30 %

029

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$S_5=35$에서 $\dfrac{5(2a+4d)}{2}=35$

$\therefore a+2d=7$ ······ ㉠

$S_{10}=145$에서 $\dfrac{10(2a+9d)}{2}=145$

$\therefore 2a+9d=29$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $d=3$

$\therefore a_8=1+7\times 3=22$

답 22

030

등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

첫째항부터 제10항까지의 합이 510이므로

$S_{10}=\dfrac{10(2a+9d)}{2}=510$

$\therefore 2a+9d=102$ ······ ㉠

제11항부터 제20항까지의 합이 310이므로

$S_{20}-S_{10}=\dfrac{20(2a+19d)}{2}-510=310$

$10(2a+19d)-510=310$

$\therefore 2a+19d=82$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=60$, $d=-2$

따라서 제21항부터 제30항까지의 합은

$S_{30}-S_{20}=\dfrac{30\{2\times 60+29\times(-2)\}}{2}-(510+310)$

$=930-820=110$

답 ②

031

주어진 등차수열을 $\{a_n\}$이라고 하면

$a_n=-14+(n-1)\times 3=3n-17$

이때 $a_n>0$에서 $3n-17>0$

$\therefore n>5.\cdots$

따라서 제6항부터 양수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최소가 된다.

즉, 구하는 S_n의 최솟값은

$S_5=\dfrac{5\{2\times(-14)+4\times 3\}}{2}=-40$

답 ④

032

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=26$에서 $a+2d=26$ ······ ㉠

$a_9=8$에서 $a+8d=8$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=32$, $d=-3$

$\therefore a_n=32+(n-1)\times(-3)=-3n+35$

이때 $a_n<0$에서 $-3n+35<0$

$\therefore n>11.\cdots$

따라서 제12항부터는 음수이므로 첫째항부터 제n항까지의 합이 최

대가 되도록 하는 자연수 n의 값은 11이다.

답 ①

033

주어진 등차수열을 $\{a_n\}$이라고 하면 첫째항이 -42, 공차가 $-38-(-42)=4$이므로

$a_n=-42+(n-1)\times4=4n-46$ ❶

이때 $a_n>0$에서 $4n-46>0$

$\therefore n>11.5$

따라서 제12항부터는 양수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최소가 된다.

$\therefore a=11$ ❷

S_n의 최솟값은

$b=S_{11}=\dfrac{11\{2\times(-42)+10\times4\}}{2}=-242$ ❸

$\therefore a-b=11-(-242)=253$ ❹

답 253

채점 기준	비율
❶ 주어진 등차수열의 일반항을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

| 다른 풀이 |

공차가 $-38-(-42)=4$이므로

$S_n=\dfrac{n\{2\times(-42)+(n-1)\times4\}}{2}$

$=2n^2-44n=2(n^2-22n)$

$=2(n-11)^2-242$

따라서 $n=11$일 때 최솟값 -242를 가지므로

$a=11,\ b=-242$

$\therefore a-b=11-(-242)=253$

034

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_n=120+(n-1)d$

S_n이 $n=14$일 때 최댓값을 가지므로 제15항부터 음수가 된다.

즉, $a_{14}\ge0,\ a_{15}\le0$에서

$120+13d\ge0,\ 120+14d\le0$

$\therefore -\dfrac{120}{13}\le d\le-\dfrac{60}{7}$

즉, $-9.\cdots\le d\le-8.\cdots$이고 d는 정수이므로

$d=-9$

$\therefore a_{10}=120+9\times(-9)=39$

답 ①

035

(1) 첫째항이 2, 공비가 $\dfrac{4}{2}=2$이므로

$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$

(2) 첫째항이 216, 공비가 $\dfrac{72}{216}=\dfrac{1}{3}$이므로

$a_n=216\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

답 (1) $a_n=2^n$ (2) $a_n=216\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

036

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면

$a_2a_4=36$에서 $2r\times2r^3=36$ $\quad\therefore r^4=9$

$\therefore \dfrac{a_7}{a_3}=\dfrac{2r^6}{2r^2}=r^4=9$

답 ⑤

037

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=6$에서 $ar^2=6$ ······ ㉠

$a_9=162$에서 $ar^8=162$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\dfrac{ar^8}{ar^2}=\dfrac{162}{6},\ r^6=27$

$(r^2)^3=3^3$ $\quad\therefore r^2=3$

이때 수열의 각 항이 양수이므로 공비도 양수이다.

$\therefore r=\sqrt{3}$

답 ②

038

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a=a_1=12\times3^{1-2}=\dfrac{12}{3}=4$

또, $a_2=12\times3^{1-4}=\dfrac{12}{27}=\dfrac{4}{9}$이므로

$r=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{\frac{4}{9}}{4}=\dfrac{1}{9}$

따라서 첫째항은 4, 공비는 $\dfrac{1}{9}$이다.

답 ④

| 다른 풀이 |

$a_n=12\times3^{1-2n}=12\times3\times3^{-2n}$

$=36\times\left(\dfrac{1}{9}\right)^n=4\times\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$

이므로 첫째항은 4, 공비는 $\dfrac{1}{9}$이다.

039

주어진 등비수열의 공비를 r라고 하면

$r=\dfrac{\log4}{\log2}=\dfrac{\log2^2}{\log2}=\dfrac{2\log2}{\log2}=2$

따라서 주어진 등비수열의 공비는 2이다.

답 2

040

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$라고 하면

$a_3=a_2+12$에서 $r^2=r+12$

$r^2-r-12=0,\ (r+3)(r-4)=0$

$\therefore r=4\ (\because r>0)$

$\therefore a_5=r^4=4^4=256$

답 ⑤

041

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_1+a_3=6$에서 $a+ar^2=6$ ⋯⋯ ㉠

$a_1a_2+a_2a_3=12\sqrt{2}$에서 $a\times ar+ar\times ar^2=12\sqrt{2}$

$a^2r+a^2r^3=12\sqrt{2}$ $\quad\therefore ar(a+ar^2)=12\sqrt{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\dfrac{ar(a+ar^2)}{a+ar^2}=\dfrac{12\sqrt{2}}{6}$ $\quad\therefore ar=2\sqrt{2}$

$\therefore a_2=ar=2\sqrt{2}$

답 ④

042

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_8=16a_6$에서 $ar^7=16ar^5$

$\therefore r^2=16$ ⋯⋯ ❶

$a_3+a_5=544$에서

$ar^2+ar^4=544$, $ar^2(1+r^2)=544$

이때 $r^2=16$이므로

$a\times16\times17=544$

$\therefore a=2$ ⋯⋯ ❷

따라서

$a_9=ar^8=a\times(r^2)^4=2\times16^4=2\times2^{16}=2^{17}$

이므로 $k=17$ ⋯⋯ ❸

답 17

채점 기준	비율
❶ $a_8=16a_6$에서 공비의 제곱의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a_3+a_5=544$에서 첫째항을 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고

공비의 부호에 대한 조건이 주어지지 않았으므로 $r=4$인지 $r=-4$인지는 알 수 없다.

043

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면

$a_3=10r^2$, $a_6=10r^5$

$a_3:a_6=1:5$에서

$10r^2:10r^5=1:5$, $1:r^3=1:5$

$\therefore r^3=5$

$\therefore a_7=10r^6=10\times(r^3)^2=10\times5^2=250$

답 ③

044

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면

$\dfrac{a_3}{a_2}-\dfrac{a_6}{a_4}=\dfrac{1}{4}$에서 $\dfrac{3r^2}{3r}-\dfrac{3r^5}{3r^3}=\dfrac{1}{4}$, $r-r^2=\dfrac{1}{4}$

$4r-4r^2=1$, $4r^2-4r+1=0$

$(2r-1)^2=0$ $\quad\therefore r=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a_n=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

즉, $a_5=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{3}{16}$이므로 $p=16$, $q=3$

$\therefore p+q=16+3=19$

답 19

045

96, a_1, a_2, a_3, 6은 첫째항이 96, 제5항이 6인 등비수열이다.

이 등비수열의 공비를 r $(r>0)$라고 하면

$96r^4=6$, $r^4=\dfrac{1}{16}$ $\quad\therefore r=\dfrac{1}{2}$ $(\because r>0)$

따라서 $a_1=96\times\dfrac{1}{2}=48$, $a_2=48\times\dfrac{1}{2}=24$, $a_3=24\times\dfrac{1}{2}=12$이므로

$a_1+a_2+a_3=48+24+12=84$

답 ④

046

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공비가 3이므로

$a_n=2\times3^{n-1}$

$2\times3^{n-1}>2000$에서 $3^{n-1}>1000$

이때 $3^6=729$, $3^7=2187$이므로

$n-1\geq7$ $\quad\therefore n\geq8$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

답 ①

047

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2+a_4=10$에서 $ar+ar^3=10$

$\therefore ar(1+r^2)=10$ ⋯⋯ ㉠

$a_5+a_7=80$에서 $ar^4+ar^6=80$

$\therefore ar^4(1+r^2)=80$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\dfrac{ar^4(1+r^2)}{ar(1+r^2)}=\dfrac{80}{10}$

$r^3=8$ $\quad\therefore r=2$ → 모든 항이 실수이므로 공비도 실수이다.

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$a\times2\times5=10$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$

제n항이 처음으로 1000보다 크다고 하면

$2^{n-1}>1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n-1\geq10$ $\quad\therefore n\geq11$

따라서 처음으로 1000보다 큰 항은 제11항이다.

답 ⑤

048

a는 $\sqrt{2}$와 $8\sqrt{2}$의 등비중항이므로

$a^2=\sqrt{2}\times8\sqrt{2}=16$

$\therefore a=4$ $(\because a>0)$

답 ③

049

3은 a^2과 b^2의 등비중항이므로

$3^2=a^2\times b^2=(ab)^2$

이때 a, b는 양수이므로 $ab>0$

$\therefore ab=3$

답 ①

050

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$a_n=a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

이때 2는 a_3과 a_7의 등비중항이므로

$2^2=a_3\times a_7$, $2^2=\left\{a\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\left\{a\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}$

$2^2=\frac{a^2}{2^8}$, $a^2=2^{10}$

$\therefore a=2^5=32$ ($\because a>0$)

답 ⑤

051

$\frac{\sqrt{2}}{4}$는 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 등비중항이므로

$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\sin\theta\times\cos\theta$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$ ······ ❶

$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$ ······ ❷

이때 $0\le\theta<\frac{\pi}{4}$이면 $\sin\theta<\cos\theta$이므로 $\sin\theta-\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ······ ❸

답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $(\sin\theta-\cos\theta)^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

052

세 수 -1, a, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a=-1+b$ $\quad\therefore b=2a+1$ ······ ㉠

세 수 $a-1$, $\sqrt{5}$, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(\sqrt{5})^2=(a-1)b$ ······ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$5=(a-1)(2a+1)$, $5=2a^2-a-1$

$2a^2-a-6=0$, $(2a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=2$

이때 a는 정수이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=5$

$\therefore a+b=2+5=7$

답 ②

053

삼차방정식 $x^3-kx^2+6x+27=0$의 세 근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=k$이므로

$a(1+r+r^2)=k$ ······ ㉠

$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=6$이므로

$a^2r(1+r+r^2)=6$ ······ ㉡

$a\times ar\times ar^2=-27$이므로 $(ar)^3=-27$

$\therefore ar=-3$ ······ ㉢

㉡÷㉠을 하면

$\frac{a^2r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)}=\frac{6}{k}$, $ar=\frac{6}{k}$ ······ ㉣

이때 ㉢=㉣이므로

$-3=\frac{6}{k}$ $\quad\therefore k=-2$

답 -2

054

함수 $y=x^3-2x^2-k$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 세 점에서 만나므로 $x^3-2x^2-k=x$, 즉 $x^3-2x^2-x-k=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

삼차방정식 $x^3-2x^2-x-k=0$의 세 근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=2$이므로

$a(1+r+r^2)=2$ ······ ㉠

$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=-1$이므로

$a^2r(1+r+r^2)=-1$ ······ ㉡

$a\times ar\times ar^2=k$이므로

$(ar)^3=k$ ······ ㉢

㉡÷㉠을 하면

$\frac{a^2r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)}=\frac{-1}{2}$

$\therefore ar=-\frac{1}{2}$ ······ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$k=(ar)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$

답 $-\frac{1}{8}$

055

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

(1) $S_{10}=\frac{2^{10}-1}{2-1}=2^{10}-1=1023$

(2) $S_4=\frac{27\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^4\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{81}{4}\left(1-\frac{1}{81}\right)=20$

(3) $S_7=\underbrace{3\times7}_{3+3+3+3+3+3+3}=21$

답 (1) 1023 (2) 20 (3) 21

056

(1) 첫째항이 2, 공비가 $\frac{6}{2}=3$이므로 486을 제n항이라고 하면

$2\times3^{n-1}=486$에서 $3^{n-1}=243=3^5$

$n-1=5$ $\quad\therefore n=6$

따라서 항수가 6이므로 첫째항부터 제6항까지의 합은

$\frac{2(3^6-1)}{3-1}=3^6-1=728$

(2) 첫째항이 8, 공비가 $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{16}$을 제n항이라고 하면

$8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{16}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$n-4=4 \qquad \therefore n=8$

따라서 항수가 8이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=16\left(1-\frac{1}{256}\right)=\frac{255}{16}$

답 (1) 728 (2) $\frac{255}{16}$

057

$S_4-S_2=3a_4$이므로

$(a_1+a_2+a_3+a_4)-(a_1+a_2)=3a_4$

$a_4+a_3=3a_4,\ a_3=2a_4 \qquad \therefore \frac{a_4}{a_3}=\frac{1}{2}$

즉, 등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 $\frac{1}{2}$이므로 $a_5=\frac{3}{4}$에서

$a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{4}$

$\therefore a_1=\frac{3}{4}\times 2^4=12$

이때 $a_2=a_1\times\frac{1}{2}=12\times\frac{1}{2}=6$이므로

$a_1+a_2=12+6=18$

답 ④

058

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_5=3$에서 $ar^4=3$ ······ ㉠

$a_7=9$에서 $ar^6=9$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{ar^6}{ar^4}=\frac{9}{3} \qquad \therefore r^2=3$

㉠에서 $a\times(r^2)^2=3$이므로

$a\times 3^2=3,\ 9a=3$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2$은 첫째항이 $a^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$, 공비가 $r^2=3$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같으므로

$\frac{\frac{1}{9}(3^{10}-1)}{3-1}=\frac{1}{18}(3^{10}-1)$

답 ④

059

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공비가 4이므로

$a_n=2\times 4^{n-1}$

등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$b_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$의 일반항은

$a_nb_n=(2\times 4^{n-1})\times\left\{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$=6\times\left(4\times\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=6\times 2^{n-1}$

즉, 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 6, 공비가 2인 등비수열이므로 첫째항부터 제7항까지의 합은

$\frac{6(2^7-1)}{2-1}=6(128-1)=762$

답 ③

060

등비수열 1, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, 256의 공비를 r라고 하면 첫째항이 1이고 제$(n+2)$항이 256이므로

$1\times r^{n+1}=256 \qquad \therefore r^{n+1}=256$ ······ ㉠

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=-86$이므로

$1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+256=1-86+256=171$

주어진 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{n+2}=1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+256$

$=\frac{r^{n+2}-1}{r-1}=\frac{256r-1}{r-1}$ ($\because$ ㉠)

이때 $S_{n+2}=171$이므로

$\frac{256r-1}{r-1}=171,\ 256r-1=171(r-1)$

$85r=-170 \qquad \therefore r=-2$

$r=-2$를 ㉠에 대입하면

$(-2)^{n+1}=256,\ (-2)^{n+1}=(-2)^8$

$n+1=8 \qquad \therefore n=7$

답 ③

061

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=10$에서 $ar^2=10$ ······ ㉠

$a_6=80$에서 $ar^5=80$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{ar^5}{ar^2}=\frac{80}{10},\ r^3=8$

$\therefore r=2$ ($\because r$는 실수) ······ ❶

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$4a=10 \qquad \therefore a=\frac{5}{2}$

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\frac{\frac{5}{2}(2^n-1)}{2-1}=\frac{5}{2}(2^n-1)$ ······ ❷

$S_k>900$에서

$\frac{5}{2}(2^k-1)>900$

$2^k-1>360 \qquad \therefore 2^k>361$

이때 $2^8=256,\ 2^9=512$이므로

$k\geq 9$

따라서 수열의 합이 처음으로 900보다 커지는 자연수 k의 값은 9이다. ······ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 등비수열의 공비를 구할 수 있다.	30 %
❷ 첫째항부터 제n항까지의 합을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

062

주어진 등비수열의 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$S_n>0.98$에서

$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n>0.98$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n<0.02$

$\therefore 2^n>50$

이때 $2^5=32$, $2^6=64$이므로

$n\geq 6$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

답 ②

063

주어진 등비수열의 첫째항은 x, 공비는 x이다.

이때 $x>1$에서 $x\neq 1$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{x(x^n-1)}{x-1}=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$$

답 ④

064

주어진 식은 첫째항이 x, 공비가 $x+1$인 등비수열의 첫째항부터 제$(n+1)$항까지의 합이다.

이때 $x>0$에서 $x\neq 0$이므로 → $x+1\neq 1$

$x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots+x(x+1)^n$

$=\frac{x\{(x+1)^{n+1}-1\}}{(x+1)-1}$

$=(x+1)^{n+1}-1$

답 ②

065

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라고 하면

$a_n=a\times(-2)^{n-1}$

$a_1+a_3+a_5=84$에서

$a+a\times(-2)^2+a\times(-2)^4=84$

$a+4a+16a=84$, $21a=84$

$\therefore a=4$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 4, 공비가 -2이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{4\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=\frac{4}{3}\times(1-1024)=-1364$$

답 ①

066

주어진 등비수열의 첫째항을 a라고 하면 첫째항부터 제5항까지의 합이 62이므로

$\frac{a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}=62$, $\frac{\frac{31}{32}a}{\frac{1}{2}}=62$

$\frac{31}{16}a=62\qquad\therefore a=32$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{32\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=64\left(1-\frac{1}{1024}\right)=\frac{1023}{16}$$

답 ①

067

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\ (r>0)$라고 하면

$a_1+a_2+\cdots+a_8=5$에서 $\frac{a(r^8-1)}{r-1}=5$ ········ ㉠

한편, $a_9+a_{10}+\cdots+a_{16}=80$이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_{16}=(a_1+a_2+\cdots+a_8)+(a_9+a_{10}+\cdots+a_{16})$

$=5+80=85$

또,

$a_1+a_2+\cdots+a_{16}=\frac{a(r^{16}-1)}{r-1}=\frac{a(r^8+1)(r^8-1)}{r-1}$

이므로

$\frac{a(r^8+1)(r^8-1)}{r-1}=85$ ········ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^8+1=17$, $r^8=16\qquad\therefore r=\sqrt{2}\ (\because r>0)$

답 ②

068

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_{12}=8S_6$에서 $\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}=8\times\frac{a(r^6-1)}{r-1}$

$\frac{a(r^6+1)(r^6-1)}{r-1}=8\times\frac{a(r^6-1)}{r-1}$

$r^6+1=8\qquad\therefore r^6=7$

$\therefore S_{24}=\frac{a(r^{24}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{12}+1)(r^{12}-1)}{r-1}$

$=\frac{a(r^{12}+1)(r^6+1)(r^6-1)}{r-1}$

$=\frac{a(r^6-1)}{r-1}\times(r^{12}+1)(r^6+1)$ → $(r^6)^2$

$=S_6\times(7^2+1)\times(7+1)=400S_6$

따라서 구하는 k의 값은 400이다.

답 ③

069

$S_n=n^2-n$에서 수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$a_7+a_8+a_9=S_9-S_6=(9^2-9)-(6^2-6)$

$=72-30=42$

답 ⑤

|다른 풀이|

$n\ge 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-n)-\{(n-1)^2-(n-1)\}$

$=(n^2-n)-(n^2-3n+2)$

$=2n-2$ ⋯⋯ ㉠

$n=1$일 때

$a_1=S_1=0$

이때 $a_1=0$은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=2n-2$ → 첫째항이 0, 공차가 2인 등차수열

$\therefore a_7+a_8+a_9$

$=(2\times7-2)+(2\times8-2)+(2\times9-2)$

$=12+14+16=42$

070

$S_n=2^{n+1}-2$에서

$a_3+a_4=S_4-S_2$ ⋯⋯ ❶

$=(2^5-2)-(2^3-2)$

$=30-6=24$ ⋯⋯ ❷

답 24

채점 기준	비율
❶ a_3+a_4를 S_n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ a_3+a_4의 값을 구할 수 있다.	30 %

|다른 풀이|

$n\ge 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)$

$=2^{n+1}-2^n$

$=2^n(2-1)=2^n$ ⋯⋯ ㉠

$n=1$일 때

$a_1=S_1=2^{1+1}-2=2$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=2^n$ → 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열

$\therefore a_3+a_4=2^3+2^4=8+16=24$

071

$S_n=3n^2-5n+k-1$에서

$n\ge 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3n^2-5n+k-1)-\{3(n-1)^2-5(n-1)+k-1\}$

$=(3n^2-5n+k-1)-(3n^2-11n+k+7)$

$=6n-8$ ⋯⋯ ㉠

$n=1$일 때

$a_1=S_1=3-5+k-1=k-3$ ⋯⋯ ㉡

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 ㉡이 같아야 하므로

$-2=k-3$ $\quad\therefore k=1$

답 ①

|다른 풀이|

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등차수열을 이루려면

$S_n=An^2+Bn+C$의 꼴일 때, $C=0$이어야 한다.

즉, $k-1=0$이어야 하므로

$k=1$

072

$S_n=4^n+k$에서

$n\ge 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(4^n+k)-(4^{n-1}+k)$

$=4\times4^{n-1}-4^{n-1}$

$=3\times4^{n-1}$ ⋯⋯ ㉠

$n=1$일 때

$a_1=S_1=4+k$ ⋯⋯ ㉡

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 ㉡이 같아야 하므로

$3=4+k$ $\quad\therefore k=-1$

답 -1

|다른 풀이|

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면

$S_n=Ar^n+B$의 꼴일 때, $A+B=0$이어야 한다.

즉, $S_n=1\times4^n+k$에서 $1+k=0$이어야 하므로

$k=-1$

073

$S_n=2n^2-3n$에서

$n\ge 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2-3n)-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}$

$=(2n^2-3n)-(2n^2-7n+5)$

$=4n-5$ ⋯⋯ ㉠

$n=1$일 때

$a_1=S_1=2-3=-1$

이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=4n-5$

$a_n>100$에서 $4n-5>100$

$4n>105$ $\quad\therefore n>26.25$

따라서 $a_n>100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 27이다.

답 ②

실력을 높이는 연습 문제

본문 136쪽

01

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 -5이므로

$a_2-a_1=-5$

$a_4-a_3=-5$

$a_6-a_5=-5$

$\vdots$

$a_{100}-a_{99}=-5$

$\therefore a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-\cdots+a_{99}-a_{100}$
$=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)+\cdots+(a_{99}-a_{100})$
$=-(a_2-a_1)-(a_4-a_3)-(a_6-a_5)-\cdots-(a_{100}-a_{99})$
$=-(-5)-(-5)-(-5)-\cdots-(-5)$
$=\underbrace{5+5+5+\cdots+5}_{50\text{개}}$
$=5\times50=250$

답 ⑤

02

$a_7-a_3=4\times(-3)=-12$이므로
$a_7=a_3-12$ → 공차를 d라고 하면 $a_7-a_3=4d$
위의 식을 $a_3a_7=64$에 대입하면
$a_3(a_3-12)=64$
$a_3{}^2-12a_3-64=0$
$(a_3+4)(a_3-16)=0$
$\therefore a_3=-4$ 또는 $a_3=16$
(i) $a_3=-4$일 때
$a_8-a_3=5\times(-3)=-15$에서
$a_8=a_3-15=-4-15=-19$
이것은 $a_8>0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a_3=16$일 때
$a_8-a_3=5\times(-3)=-15$에서
$a_8=a_3-15=16-15=1$
(i), (ii)에서 $a_3=16$
이때 $a_3-a_2=-3$이므로
$a_2=a_3+3=16+3=19$

답 ③

03

-11과 2 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등차수열은 첫째항이 -11, 제$(n+2)$항이 2이므로
$-11+\{(n+2)-1\}\times\frac{1}{3}=2$
$\frac{1}{3}(n+1)=13,\ n+1=39$
$\therefore n=38$

답 38

04

다항식 $p(x)$를 $x-1,\ x,\ x+2$로 각각 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 $p(1),\ p(0),\ p(-2)$이다.
이때 세 수가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2p(0)=p(1)+p(-2)$
$2b=(1+a+b)+(4-2a+b)$
$2b=-a+2b+5$
$\therefore a=5$
또, $p(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여
$p(2)=4+2a+b=0$
$\therefore b=-2a-4=-2\times5-4=-14$
$\therefore a+b=5+(-14)=-9$

답 ①

풍쌤 개념 CHECK

나머지 정리와 인수 정리_高 공통수학1
(1) 나머지 정리
다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $P(\alpha)$이다.
(2) 인수 정리
① $P(\alpha)=0$이면 다항식 $P(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
② 다항식 $P(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$이다.

05

문제 접근하기
등차중항과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세운다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=2$
이때 $\frac{1}{\alpha^3},\ k,\ \frac{1}{\beta^3}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2k=\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}$
$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}$
$=\frac{4^3-3\times2\times4}{2^3}$
$=\frac{40}{8}=5$
$\therefore k=\frac{5}{2}$

답 ①

풍쌤 개념 CHECK

곱셈 공식의 변형_高 공통수학1
(1) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
(2) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

06

네 수를 $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$로 놓자. → 공차는 $2d$
네 수의 합이 8이므로
$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=8$
$4a=8 \qquad \therefore a=2$
또, 가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱이 -221이므로
$(a-3d)(a+3d)=-221,\ a^2-9d^2=-221$
이때 $a=2$이므로
$4-9d^2=-221,\ 9d^2=225$
$d^2=25 \qquad \therefore d=-5$ 또는 $d=5$
따라서 네 수를 작은 수부터 차례대로 나열하면 $-13,\ -3,\ 7,\ 17$이므로 가장 큰 수는 17이다.

답 17

07

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면
$S_n=\frac{n\{2\times36+(n-1)\times(-4)\}}{2}=-2n^2+38n$
$S_n<0$에서 $-2n^2+38n<0,\ 2n(n-19)>0$

이때 n은 자연수이므로 $n>0$

즉, $n-19>0$이므로 $n>19$

따라서 S_n이 처음으로 음수가 되는 자연수 n의 값은 20이다.

답 ②

08

주어진 수열은 첫째항이 -7, 끝항이 31, 항수가 $n+2$인 등차수열이므로 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_{n+2}=\frac{(n+2)(-7+31)}{2}=264$$

$12(n+2)=264$, $n+2=22$ $\quad\therefore n=20$

답 ③

09

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

첫째항부터 제5항까지의 합이 60이므로

$$S_5=\frac{5(2a+4d)}{2}=60 \qquad \therefore a+2d=12 \quad \cdots\cdots ㉠$$

제6항부터 제10항까지의 합이 185이므로

$$S_{10}-S_5=\frac{10(2a+9d)}{2}-60=185$$

$\therefore 2a+9d=49$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=5$

따라서 제11항부터 제15항까지의 합은

$$S_{15}-S_{10}=\frac{15(2\times2+14\times5)}{2}-(60+185)$$
$$=555-245=310$$

답 ⑤

10

모든 자연수 n에 대하여 $S_n\le k$이어야 하므로 이를 만족시키는 k의 최솟값은 S_n의 최댓값이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 45, 공차가 -4이므로

$a_n=45+(n-1)\times(-4)=-4n+49$

이때 $a_n<0$에서 $-4n+49<0$

$\therefore n>12.25$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제13항부터 음수이므로 첫째항부터 제12항까지의 합이 최대가 된다.

따라서 S_n의 최댓값은

$$S_{12}=\frac{12\{2\times45+11\times(-4)\}}{2}=276$$

따라서 k의 최솟값은 276이다.

답 ①

11

문제 접근하기

9로 나누어떨어지는 수는 9의 배수이므로 나열하면 공차가 9인 등차수열이다. 또, 15로 나누어떨어지는 수는 15의 배수이므로 나열하면 공차가 15인 등차수열이다. 이때 20과 200 사이의 자연수로 만들어지는 등차수열의 항수가 몇인지 파악하는 데에 주의해야 한다.

20과 200 사이의 자연수 중에서 9로 나누어떨어지는 수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

9의 배수

27, 36, 45, ⋯, 198

이때 $27=9\times3$, $198=9\times22$이므로 항수는 $22-3+1=20$이다.

따라서 그 합은 첫째항이 27, 끝항이 198, 항수가 20인 등차수열의 합과 같으므로

$$\frac{20(27+198)}{2}=2250 \quad\cdots\cdots ㉠$$

또, 20과 200 사이의 자연수 중에서 15로 나누어떨어지는 수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

15의 배수

30, 45, 60, ⋯, 195

이때 $30=15\times2$, $195=15\times13$이므로 항수는 $13-2+1=12$이다.

따라서 그 합은 첫째항이 30, 끝항이 195, 항수가 12인 등차수열의 합과 같으므로

$$\frac{12(30+195)}{2}=1350 \quad\cdots\cdots ㉡$$

한편, 20과 200 사이의 자연수 중에서 45로 나누어떨어지는 수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

9와 15의 최소공배수

45, 90, 135, 180

이므로 그 합은

$45+90+135+180=450$ $\quad\cdots\cdots ㉢$

따라서 구하는 수의 총합은

㉠$+$㉡$-$㉢$=2250+1350-450=3150$

답 3150

12

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면 $a_4=6$이므로

$\sqrt[4]{6}\times r^3=6$, $r^3=\sqrt[4]{6^3}$ $\quad\therefore r=\sqrt[4]{6}$ ($\because$ r는 실수)

$\therefore a_n=\sqrt[4]{6}\times(\sqrt[4]{6})^{n-1}=(\sqrt[4]{6})^n$

즉, 등비수열 $\{a_n\}$의 항은 n이 4의 배수일 때 정수가 된다.

따라서 제4항 이후 처음으로 정수가 되는 항은 제8항이다.

답 ③

13

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a\ne0)$라고 하면 공비가 $\sqrt{2}$이므로

$$\frac{a_9+a_{11}+a_{13}+a_{15}+a_{17}}{a_1+a_3+a_5+a_7+a_9}$$
$$=\frac{a\times(\sqrt{2})^8+a\times(\sqrt{2})^{10}+a\times(\sqrt{2})^{12}+a\times(\sqrt{2})^{14}+a\times(\sqrt{2})^{16}}{a+a\times(\sqrt{2})^2+a\times(\sqrt{2})^4+a\times(\sqrt{2})^6+a\times(\sqrt{2})^8}$$
$$=\frac{(\sqrt{2})^8\{a+a\times(\sqrt{2})^2+a\times(\sqrt{2})^4+a\times(\sqrt{2})^6+a\times(\sqrt{2})^8\}}{a+a\times(\sqrt{2})^2+a\times(\sqrt{2})^4+a\times(\sqrt{2})^6+a\times(\sqrt{2})^8}$$
$$=(\sqrt{2})^8=2^4=16$$

답 ④

14

$a_2=b_2$에서 $a_1+3=b_1\times2$

$\therefore a_1-2b_1=-3$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$a_4=b_4$에서 $a_1+3\times3=b_1\times2^3$

$\therefore a_1-8b_1=-9$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=-1$, $b_1=1$

$\therefore a_1+b_1=-1+1=0$

답 ③

15

$7,\ a,\ b,\ c,\ d,\ 224$는 첫째항이 7, 제6항이 224인 등비수열이다.
이 등비수열의 공비를 r라고 하면
$7r^5=224,\ r^5=32 \qquad \therefore r=2\ (\because r$는 실수$)$
따라서 $a=7\times2,\ d=7\times2^4$이므로
$d-a=7\times2^4-7\times2=112-14=98$

답 ②

16

세 수 $5,\ a,\ b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$a^2=5b$ ……… ㉠
또, $\log_a 5b+5^{\log_5 b}=47$이므로
$\log_a a^2+b^{\log_5 5}=47,\ 2+b=47$
$\therefore b=45$
$b=45$를 ㉠에 대입하면
$a^2=5b=5\times45=225$
$\therefore a=-15$ 또는 $a=15$
이때 a는 로그의 밑이므로 $a>0,\ a\neq1$
$\therefore a=15$
$\therefore a+b=15+45=60$

답 ④

17

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=k,\ \alpha\beta=20$
$\beta-\alpha$가 α와 β의 등비중항이므로
$(\beta-\alpha)^2=\alpha\beta$
이때 $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$이므로
$\alpha\beta=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta,\ (\beta+\alpha)^2=5\alpha\beta$
$\therefore k^2=5\times20=100$
$\therefore k=10\ (\because k>0)$

답 10

18

세 수 $a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r라고 하면
$a+b+c=14$에서
$a+ar+ar^2=14 \qquad \therefore a(1+r+r^2)=14$ ……… ㉠
$ab+bc+ca=-84$에서
$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=-84$
$a^2r+a^2r^3+a^2r^2=-84 \qquad \therefore a^2r(1+r+r^2)=-84$ ……… ㉡
㉡÷㉠을 하면 $\dfrac{a^2r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)}=\dfrac{-84}{14}$
$\therefore ar=-6$
$\therefore abc=a\times ar\times ar^2=(ar)^3$
$=(-6)^3=-216$

답 ①

19

수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로
$a_n=2+(n-1)\times2=2n$
$\therefore 2^{a_n}=2^{2n}=4^n$
즉, 수열 $\{2^{a_n}\}$은 첫째항이 4, 공비가 4인 등비수열이다.
따라서 수열 $\{2^{a_n}\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합은
$\dfrac{4(4^5-1)}{4-1}=\dfrac{4\times1023}{3}=1364$

답 ⑤

20

주어진 등비수열의 첫째항은 $x+3$, 공비는 $(x+2)^2$이다.
이때 $x>-1$에서 $x\neq-1$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합은
$$\frac{(x+3)[\{(x+2)^2\}^n-1]}{(x+2)^2-1}=\frac{(x+3)\{(x+2)^{2n}-1\}}{x^2+4x+3}$$
$$=\frac{(x+3)\{(x+2)^{2n}-1\}}{(x+1)(x+3)}$$
$$=\frac{(x+2)^{2n}-1}{x+1}$$

답 ①

21

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면
$$S_3=\frac{a(r^3-1)}{r-1}=\frac{a(r-1)(r^2+r+1)}{r-1}$$
$$=a(r^2+r+1)$$
$$S_6=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3+1)(r^3-1)}{r-1}$$
$$=\frac{a(r^3+1)(r-1)(r^2+r+1)}{r-1}$$
$$=a(r^3+1)(r^2+r+1)$$
$\dfrac{S_6}{S_3}=8$이므로
$\dfrac{a(r^3+1)(r^2+r+1)}{a(r^2+r+1)}=8$
$r^3+1=8 \qquad \therefore r^3=7$
$\therefore \dfrac{a_6}{a_3}=\dfrac{ar^5}{ar^2}=r^3=7$

답 ③

22

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면
$S_{10}=2$에서 $\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=2$ ……… ㉠
$S_{30}=86$에서 $\dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}=86$
$\dfrac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}=86$
$\therefore \dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}\times(r^{20}+r^{10}+1)=86$ ……… ㉡
㉡÷㉠을 하면 $r^{20}+r^{10}+1=43$
$r^{20}+r^{10}-42=0,\ (r^{10}-6)(r^{10}+7)=0$
$\therefore r^{10}=6\ (\because r^{10}>0)$ → 모든 항이 실수이므로 r도 실수이다. r가 실수이므로 $r^{10}>0$
$$\therefore S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}+1)(r^{10}-1)}{r-1}$$
$$=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}\times(r^{10}+1)$$
$$=S_{10}\times(r^{10}+1)$$
$$=2\times(6+1)=14$$

답 ④

23

문제 접근하기

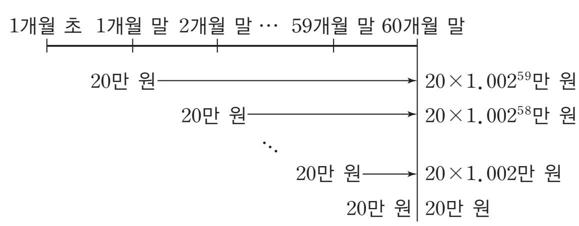
매월 말 a원씩 월이율 r인 복리로 n개월 동안 적립했을 때, n개월 말의 원리합계는

$a+a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots+a(1+r)^{n-1}$

$=\dfrac{a\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}=\dfrac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}$(원)

이다. 이때 월초에 적립했는지, 월말에 적립했는지에 따라 이자가 붙는 기간이 다르므로 이 점에 유의한다.

5년은 60개월이므로 60개월 후의 적립금의 원리합계를 S라고 하면



$S=20\times1.002^{59}+20\times1.002^{58}+20\times1.002^{57}$

$+\cdots+20\times1.002+20$ ← 첫째항이 20, 공비가 1.002, 항수가 60인 등비수열의 합

$=\dfrac{20(1.002^{60}-1)}{1.002-1}=10000(1.002^{60}-1)$

$=10000(1.13-1)=10000\times0.13$

$=1300$(만 원)

답 ④

참고

매월 초 a원씩 월이율 r인 복리로 n개월 동안 적립했을 때, n개월 말의 원리합계는

$a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$

$=\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}=\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$(원)

24

$S_{10}=990$이므로

$100k-10=990$, $100k=1000$

$\therefore k=10$

따라서 $S_n=10n^2-n$에서

$n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(10n^2-n)-\{10(n-1)^2-(n-1)\}$

$=(10n^2-n)-(10n^2-21n+11)$

$=20n-11$ ········· ㉠

$n=1$일 때

$a_1=S_1=10\times1^2-1=9$

이때 $a_1=9$는 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=20n-11$

$\therefore a_4=20\times4-11=80-11=69$

답 69

| 다른 풀이 |

$S_n=10n^2-n$이므로

$a_4=S_4-S_3=(10\times4^2-4)-(10\times3^2-3)$

$=156-87=69$

09 여러 가지 수열의 합

기본을 다지는 유형

본문 141쪽

001

(1) $k-1$의 k에 1부터 5까지의 수를 대입하여 더한 것이므로

$\sum_{k=1}^{5}(k-1)=0+1+2+3+4$

(2) i^2의 i에 1부터 8까지의 수를 대입하여 더한 것이므로

$\sum_{i=1}^{8}i^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2$

(3) 6을 3개 더한 것이므로

$\sum_{j=1}^{3}6=6+6+6$

답 (1) $0+1+2+3+4$
(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2$
(3) $6+6+6$

002

$\sum_{k=1}^{5}2^{k+1}=2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=4+8+16+32+64$이므로

$a=8$, $b=32$ ($\because b>a$)

$\therefore a+b=8+32=40$

답 40

003

③ $1+3+3^2+\cdots+3^n=\sum_{k=1}^{n+1}3^{k-1}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

004

$\sum_{k=1}^{15}(2^{k+1}\times3^k)=2^2\times3+2^3\times3^2+2^4\times3^3+\cdots+2^{16}\times3^{15}$

따라서 주어진 식은 첫째항이 $2^2\times3=12$, 공비가 $2\times3=6$인 등비수열의 첫째항부터 제15항까지의 합이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{12(6^{15}-1)}{6-1}=\dfrac{12}{5}(6^{15}-1)$

답 ②

005

(1) $\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=-2+4=2$

(2) $\sum_{k=1}^{5}(a_k-2b_k)=\sum_{k=1}^{5}a_k-2\sum_{k=1}^{5}b_k=-2-2\times4=-10$

답 (1) 2 (2) -10

006

$\sum_{k=1}^{9}(a_k+1)=(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_9+1)$

$=a_1+a_2+\cdots+a_9+9$

이므로 $\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{9}(a_k+1)$에서

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_9+9$

$\therefore a_{10}=9$

답 ④

007

$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55$에서 $3\sum_{k=1}^{5}a_k+5\times5=55$

$3\sum_{k=1}^{5}a_k=30 \qquad \therefore \sum_{k=1}^{5}a_k=10$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$에서 $\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=32$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}b_k=32-\sum_{k=1}^{5}a_k=32-10=22$

답 22

008

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^{10}(a_k{}^2+2a_kb_k+b_k{}^2)\\&=\sum_{k=1}^{10}(a_k{}^2+b_k{}^2)+2\sum_{k=1}^{10}a_kb_k\\&=10+2\times2=14\end{aligned}$$

답 14

009

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(a_k-p)^2&=\sum_{k=1}^{5}(a_k{}^2-2pa_k+p^2)\\&=\sum_{k=1}^{5}a_k{}^2-2p\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}p^2\\&=15-2p\times5+5p^2\\&=5p^2-10p+15\end{aligned}$$

즉, $5p^2-10p+15=90$이므로

$5p^2-10p-75=0$, $p^2-2p-15=0$

$(p+3)(p-5)=0$

$\therefore p=-3$ 또는 $p=5$

따라서 구하는 모든 실수 p의 값의 합은

$-3+5=2$

답 ②

010

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+3)^2&=\sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2+6a_k+9)\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2+6\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}9 \quad \cdots\cdots ❶\\&=5+6\times3+9n\\&=9n+23\end{aligned}$$

즉, $9n+23=59$이므로

$9n=36 \qquad \therefore n=4$ ······ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ Σ의 성질을 이용하여 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+3)^2$을 전개하여 나타낼 수 있다.	50 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	50 %

011

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-2)&=\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}1\right)-\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}2\right)\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)+\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n-1}2\\&=n^2+n+2(n-1)\\&=n^2+3n-2\end{aligned}$$

즉, $n^2+3n-2=26$이므로

$n^2+3n-28=0$, $(n+7)(n-4)=0$

$\therefore n=-7$ 또는 $n=4$

이때 n은 자연수이므로

$n=4$

답 ②

012

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{50}\frac{5^k-2^k}{4^k}&=\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{5}{4}\right)^k-\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{2}{4}\right)^k\\&=\underbrace{\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{5}{4}\right)^k}_{\text{첫째항이 }\frac{5}{4}\text{, 공비가 }\frac{5}{4}\text{인 등비수열의 첫째항부터 제50항까지의 합}}-\underbrace{\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\text{첫째항이 }\frac{1}{2}\text{, 공비가 }\frac{1}{2}\text{인 등비수열의 첫째항부터 제50항까지의 합}}\\&=\frac{\frac{5}{4}\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{50}-1\right\}}{\frac{5}{4}-1}-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\right\}}{1-\frac{1}{2}}\\&=5\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{50}-1\right\}-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\right\}\\&=5\times\left(\frac{5}{4}\right)^{50}+\left(\frac{1}{2}\right)^{50}-6\end{aligned}$$

따라서 $a=5$, $b=1$, $c=-6$이므로

$a+b+c=5+1+(-6)=0$

답 ③

013

(1) $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}k(k-1)&=\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)\\&=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k\\&=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}\\&=385-55=330\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(k-1)(k+3)&=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k-3)\\&=\sum_{k=1}^{10}k^2+2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}3\\&=\frac{10\times11\times21}{6}+2\times\frac{10\times11}{2}-3\times10\\&=385+110-30=465\end{aligned}$$

답 (1) 330 (2) 465

014

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}(4k+a)&=4\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}a\\&=4\times\frac{8\times9}{2}+8a\\&=144+8a\end{aligned}$$

즉, $144+8a=168$이므로

$8a=24 \qquad \therefore a=3$

답 ①

015

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2-k+1)+\sum_{i=1}^{10}(i^2+i-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-k+1)+\sum_{k=1}^{10}(k^2+k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2-k+1)+(k^2+k-1)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}2k^2$$
$$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}$$
$$=770$$

답 ①

016

$$\sum_{n=1}^{4}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{1+2+3+\cdots+n}=\sum_{n=1}^{4}\frac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\sum_{n=1}^{4}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{4}(n^2+n)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{4}n^2+\sum_{n=1}^{4}n\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4\times5\times9}{6}+\frac{4\times5}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(30+10)=20$$

답 ②

017

$f(x)=\frac{1}{3}x+2$이므로

$f(3k)=\frac{1}{3}\times3k+2=k+2$

$f(6k)=\frac{1}{3}\times6k+2=2k+2$ ❶

$$\therefore \sum_{k=1}^{9}\{f(3k)f(6k)\}=\sum_{k=1}^{9}(k+2)(2k+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{9}(2k^2+6k+4)$$
$$=2\sum_{k=1}^{9}k^2+6\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}4 \quad ❷$$
$$=2\times\frac{9\times10\times19}{6}+6\times\frac{9\times10}{2}+4\times9$$
$$=570+270+36$$
$$=876 \quad ❸$$

답 876

채점 기준	비율
❶ $f(3k)$, $f(6k)$를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\sum$의 성질을 이용하여 주어진 식을 정리할 수 있다.	40 %
❸ 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

018

$$\sum_{k=5}^{10}k^2=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{4}k^2$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{4\times5\times9}{6}$$
$$=385-30=355$$

답 ③

019

$$\sum_{k=1}^{6}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{5}(k-1)^2$$
$$=\left\{\sum_{k=1}^{5}(k+1)^2+\underbrace{(6+1)^2}_{k=6\text{일 때의 }(k+1)^2\text{의 값}}\right\}-\sum_{k=1}^{5}(k-1)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\{(k+1)^2-(k-1)^2\}+(6+1)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{5}4k+7^2$$
$$=4\sum_{k=1}^{5}k+49$$
$$=4\times\frac{5\times6}{2}+49$$
$$=60+49=109$$

답 109

|다른 풀이|

$$\sum_{k=1}^{6}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{5}(k-1)^2$$
$$=(2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2)-(0^2+1^2+2^2+3^2+4^2)$$
$$=5^2+6^2+7^2-1^2$$
$$=25+36+49-1=109$$

020

$$\sum_{k=2}^{m}a_{k+1}=\sum_{k=2}^{m}\{(k+1)-1\}$$
$$=\sum_{k=2}^{m}k=\sum_{k=1}^{m}k-\underbrace{1}_{k=1\text{일 때 }k\text{의 값}}$$
$$=\frac{m(m+1)}{2}-1$$

즉, $\frac{m(m+1)}{2}-1=20$이므로

$\frac{m(m+1)}{2}=21$, $m(m+1)=42$

이때 m은 자연수이고 $6\times7=42$이므로

$m=6$

답 ①

021

$$\sum_{i=1}^{6}\left(\sum_{k=1}^{6}\underbrace{ki}_{k\text{는 변수, }i\text{는 상수}}\right)=\sum_{i=1}^{6}\left(i\sum_{k=1}^{6}k\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{6}\left(i\times\frac{6\times7}{2}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{6}21i=21\sum_{i=1}^{6}i$$
$$=21\times\frac{6\times7}{2}=21^2$$

답 ②

022

$$\sum_{i=1}^{4}\left\{\sum_{j=1}^{i}\left(\sum_{k=1}^{j}3\right)\right\}=\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{i}3j\right)=\sum_{i=1}^{4}\left\{3\times\frac{i(i+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{4}(i^2+i)=\frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{4}i^2+\sum_{i=1}^{4}i\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{4\times5\times9}{6}+\frac{4\times5}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}(30+10)=\frac{3}{2}\times40=60$$

답 ③

023

$$\sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{l}(k-l)\right\}=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}k-\sum_{k=1}^{l}l\right)=\sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{l(l+1)}{2}-l^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(-l^2+l)=\frac{1}{2}\left(-\sum_{l=1}^{n}l^2+\sum_{l=1}^{n}l\right) \cdots\cdots ❶$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$
$$=-\frac{n(n+1)(n-1)}{6} \cdots\cdots ❷$$

즉, $-\frac{n(n+1)(n-1)}{6}=-20$이므로

$(n-1)n(n+1)=120$

이때 n은 자연수이고 $120=4\times5\times6$이므로

$n=5$ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 주어진 식에서 변수와 상수를 구분하여 정리할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 식을 n에 대한 식으로 정리할 수 있다.	50 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20 %

024

$$\sum_{i=1}^{5}\left\{\sum_{j=1}^{i}(i+j+1)\right\}=\sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{i}i+\sum_{j=1}^{i}j+\sum_{j=1}^{i}1\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{5}\left\{i^2+\frac{i(i+1)}{2}+i\right\}$$
$$=\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{5}(i^2+i)$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}(55+15)=\frac{3}{2}\times70=105$$

답 ④

025

(1) 수열 1×3, 3×5, 5×7, $\cdots$, 15×17의 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=(2k-1)(2k+1)=4k^2-1$

구하는 합은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$a_n=(2n-1)(2n+1)=15\times17$에서 $2n-1=15$ $\therefore n=8$

$1\times3+3\times5+5\times7+\cdots+15\times17$

$$=\sum_{k=1}^{8}(4k^2-1)=4\sum_{k=1}^{8}k^2-\sum_{k=1}^{8}1$$
$$=4\times\frac{8\times9\times17}{6}-1\times8$$
$$=816-8=808$$

(2) 수열 $1+2$, $2+2^2$, $3+2^3$, $\cdots$, $6+2^6$의 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=k+2^k$

$a_n=n+2^n=6+2^6$에서 $n=6$

구하는 합은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$(1+2)+(2+2^2)+(3+2^3)+\cdots+(6+2^6)$

$$=\sum_{k=1}^{6}(k+2^k)=\sum_{k=1}^{6}k+\sum_{k=1}^{6}2^k$$
$$=\frac{6\times7}{2}+\frac{2(2^6-1)}{2-1}$$
$$=21+126=147$$

답 (1) 808 (2) 147

026

$11=10+1$

$101=100+1=10^2+1$

$1001=1000+1=10^3+1$

⋮

이므로 주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=10^k+1$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(10^k+1)=\sum_{k=1}^{10}10^k+\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=\frac{10(10^{10}-1)}{10-1}+1\times10$$
$$=\frac{1}{9}(10^{11}-10)+10$$
$$=\frac{1}{9}(10^{11}-10)+90\times\frac{1}{9}=\frac{1}{9}(10^{11}+80)$$

답 ④

027

수열 $\frac{1^2}{2}$, $\frac{1^2+2^2}{3}$, $\frac{1^2+2^2+3^2}{4}$, $\cdots$의 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}{k+1}$$
$$=\frac{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}{k+1}$$
$$=\frac{k(2k+1)}{6}$$

구하는 합은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합이므로

$$(\text{주어진 식})=\sum_{k=1}^{5}\frac{k(2k+1)}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{5}(2k^2+k)$$
$$=\frac{1}{6}\left(2\sum_{k=1}^{5}k^2+\sum_{k=1}^{5}k\right)=\frac{1}{6}\left(2\times\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{6}(110+15)=\frac{125}{6}$$

답 ④

028

주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=2\times1+2\times2+2\times3+\cdots+2k$

$$=\sum_{i=1}^{k}2i=2\sum_{i=1}^{k}i=2\times\frac{k(k+1)}{2}=k^2+k$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}$$
$$=385+55=440$$

답 ①

029

수열 1, $\frac{1}{2}(1+2)$, $\frac{1}{3}(1+2+3)$, $\cdots$의 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=\frac{1}{k}(1+2+3+\cdots+k)$$
$$=\frac{1}{k}\times\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k+1}{2}$$

주어진 수열의 합은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제100항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{100} a_k=\sum_{k=1}^{100} \frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{100}(k+1)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{100}k+\sum_{k=1}^{100}1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{100\times 101}{2}+100\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times 5150=515\times 5$$

$\therefore A=5$

답 5

030

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=2n^2-n$으로 놓으면

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(2n^2-n)-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$
$=(2n^2-n)-(2n^2-5n+3)$
$=4n-3$ ······ ㉠

$n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times 1^2-1=1$

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=4n-3$

$\therefore a_7=4\times 7-3=28-3=25$

답 ③

|다른 풀이|

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=2n^2-n$으로 놓으면

$a_7=S_7-S_6=(2\times 7^2-7)-(2\times 6^2-6)$
$=91-66=25$

031

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=n(n+2)$로 놓으면

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n(n+2)-(n-1)(n+1)$
$=n^2+2n-(n^2-1)$
$=2n+1$ ······ ㉠

$n=1$일 때

$a_1=S_1=1\times 3=3$

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=2n+1$

따라서 $a_n{}^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$이므로

$$\sum_{k=1}^{5} a_k{}^2=\sum_{k=1}^{5}(4k^2+4k+1)=4\sum_{k=1}^{5}k^2+4\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}1$$
$$=4\times\frac{5\times 6\times 11}{6}+4\times\frac{5\times 6}{2}+1\times 5$$
$$=220+60+5=285$$

답 ②

032

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=n^2+3n$으로 놓으면

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$
$=(n^2+3n)-(n^2+n-2)$
$=2n+2$ ······ ㉠

$n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2+3\times 1=4$

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=2n+2$ ······ ❶

$$\therefore \sum_{k=1}^{6} ka_{3k+1}=\sum_{k=1}^{6} k\{2(3k+1)+2\}$$
$$=\sum_{k=1}^{6}(6k^2+4k) \quad \text{······ ❷}$$
$$=6\sum_{k=1}^{6}k^2+4\sum_{k=1}^{6}k$$
$$=6\times\frac{6\times 7\times 13}{6}+4\times\frac{6\times 7}{2}$$
$$=546+84=630 \quad \text{······ ❸}$$

답 630

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{k=1}^{6} ka_{3k+1}$을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

033

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=2^n-1$로 놓으면

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)$
$=2^n-2^{n-1}$
$=(2-1)\times 2^{n-1}$
$=2^{n-1}$ ······ ㉠

$n=1$일 때

$a_1=S_1=2^1-1=1$

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=2^{n-1}$

따라서 $a_{2k}{}^2=(2^{2k-1})^2=2^{4k-2}=\frac{1}{4}\times 16^k$이므로

$$\sum_{k=1}^{4} a_{2k}{}^2=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}16^k=\frac{1}{4}\times\frac{16(16^4-1)}{16-1}$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{16^5-16}{15}=\frac{1}{60}(2^{20}-16)$$

답 ③

034

$S_n=\sum_{k=1}^{n} ka_k=n(n+1)$로 놓으면

$n\geq 2$일 때

$na_n=S_n-S_{n-1}$
$=n(n+1)-(n-1)n$
$=n^2+n-(n^2-n)$
$=2n$ ······ ㉠

$n=1$일 때

$a_1=1\times2=2$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$na_n=2n \qquad \therefore a_n=2$

$\therefore \sum_{k=1}^{8} a_k=\sum_{k=1}^{8} 2=2\times8=16$

답 16

035

주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제50항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{50} a_k&=\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)\\&=1-\frac{1}{51}=\frac{50}{51}\end{aligned}$$

답 $\frac{50}{51}$

036

주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=\frac{4}{(2k)^2-1}=\frac{4}{(2k-1)(2k+1)}=2\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15} a_k&=2\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=2\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{31}\right)\right\}\\&=2\left(1-\frac{1}{31}\right)\\&=2\times\frac{30}{31}=\frac{60}{31}\end{aligned}$$

답 ⑤

037

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\\&=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

즉, $\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}=\frac{58}{45}$이므로

$\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}=\frac{19}{90}$

$90(2n+3)=19(n+1)(n+2)$

$180n+270=19n^2+57n+38$

$19n^2-123n-232=0,\ (19n+29)(n-8)=0$

이때 n은 자연수이므로

$n=8$

답 8

038

$S_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} S_k&=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\\&=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{10} a_k=S_{10}=\frac{1}{10\times11}=\frac{1}{110}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)&=\sum_{k=1}^{10}S_k-\sum_{k=1}^{10}a_k\\&=\frac{10}{11}-\frac{1}{110}=\frac{9}{10}\end{aligned}$$

답 ⑤

| 다른 풀이 |

$k=1$이면

$S_k-a_k=S_1-a_1=0$

$S_1=a_1$

$k\geq2$이면

$S_k-a_k=S_{k-1}=\frac{1}{(k-1)k}$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)&=(S_1-a_1)+\sum_{k=2}^{10}(S_k-a_k)\\&=0+\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{(k-1)k}\\&=\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\\&=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}\end{aligned}$$

039

수열 $1,\ \frac{1}{1+2},\ \frac{1}{1+2+3},\ \cdots$의 제$k$항을 a_k라고 하면

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{1+2+\cdots+k}\\&=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}\\&=\frac{2}{k(k+1)}\\&=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\end{aligned}$$ ❶

주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제99항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=2\sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)\right\}\\&=2\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{99}{50}\end{aligned}$$ ❷

답 $\frac{99}{50}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 수열의 제k항을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

040

주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$
$$=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제99항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{99}a_k=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$
$$=\sqrt{100}-1$$
$$=10-1=9$$

답 ④

041

$a_k=\sqrt{k}$에서

$a_{2k+1}=\sqrt{2k+1}$, $a_{2k-1}=\sqrt{2k-1}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{40}\frac{1}{a_{2k-1}+a_{2k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{40}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{79})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{81}-1)$$
$$=\frac{1}{2}(9-1)=4$$

답 4

042

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{\sqrt{3k-1}+\sqrt{3k+2}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{3(\sqrt{3k+2}-\sqrt{3k-1})}{(\sqrt{3k+2}+\sqrt{3k-1})(\sqrt{3k+2}-\sqrt{3k-1})}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{3k+2}-\sqrt{3k-1})$$
$$=(\sqrt{5}-\sqrt{2})+(\sqrt{8}-\sqrt{5})+(\sqrt{11}-\sqrt{8})$$
$$+\cdots+(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1})$$
$$=\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}$$

즉, $\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{3n+2}=5\sqrt{2}$, $3n+2=50$

$\therefore n=16$

답 16

043

주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$$
$$=\frac{2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}$$
$$=\sqrt{k+2}-\sqrt{k}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제47항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{47}a_k=\sum_{k=1}^{47}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})$$
$$+\cdots+(\sqrt{48}-\sqrt{46})+(\sqrt{49}-\sqrt{47})$$
$$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{48}+\sqrt{49}$$
$$=4\sqrt{3}-\sqrt{2}+6$$

즉, $p=4$, $q=-1$, $r=6$이므로

$p+q+r=4+(-1)+6=9$

답 ②

044

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로 첫째항과 공차를 a라고 하면

$a_n=a+(n-1)\times a=an$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$
$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{ak}+\sqrt{a(k+1)}}$$
$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}}{\{\sqrt{a(k+1)}+\sqrt{ak}\}\{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}\}}$$
$$=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{15}\{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}\}$$
$$=\frac{1}{a}\{(\sqrt{2a}-\sqrt{a})+(\sqrt{3a}-\sqrt{2a})+(\sqrt{4a}-\sqrt{3a})$$
$$+\cdots+(\sqrt{16a}-\sqrt{15a})\}$$
$$=\frac{1}{a}(4\sqrt{a}-\sqrt{a})=\frac{3\sqrt{a}}{a}=\frac{3}{\sqrt{a}}$$

즉, $\frac{3}{\sqrt{a}}=2$이므로

$\sqrt{a}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore a=\frac{9}{4}$

$\therefore a_4=4a=4\times\frac{9}{4}=9$

답 ④

045

$$\sum_{n=2}^{25}(\log_{n+1}3-\log_{n+2}3)$$
$$=\sum_{n=2}^{25}\left\{\frac{1}{\log_3(n+1)}-\frac{1}{\log_3(n+2)}\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{\log_3 3}-\frac{1}{\log_3 4}\right)+\left(\frac{1}{\log_3 4}-\frac{1}{\log_3 5}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{\log_3 26}-\frac{1}{\log_3 27}\right)$$
$$=\frac{1}{\log_3 3}-\frac{1}{\log_3 27}$$
$$=1-\frac{1}{\log_3 3^3}$$
$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ②

046

$$a_n=\log_4\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log_4\frac{n+1}{n}$$
$$=\log_4(n+1)-\log_4 n$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} \{\log_4 (k+1)-\log_4 k\}$$
$$=(\log_4 2-\log_4 1)+(\log_4 3-\log_4 2)+\cdots+\{\log_4 (n+1)-\log_4 n\}$$
$$=\log_4 (n+1)-\log_4 1=\log_4 (n+1)$$

즉, $\log_4 (n+1)=4$이므로

$n+1=4^4=256 \qquad \therefore n=255$

답 255

| 다른 풀이 |

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} \log_4 \left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n} \log_4 \frac{k+1}{k}$$
$$=\log_4 \frac{2}{1}+\log_4 \frac{3}{2}+\cdots+\log_4 \frac{n+1}{n}$$
$$=\log_4 \left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)=\log_4 (n+1)$$

즉, $\log_4 (n+1)=4$이므로

$n+1=4^4=256 \qquad \therefore n=255$

047

$$\sum_{k=1}^{n} \log_3 \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n} (\log_3 \sqrt{k+1}-\log_3 \sqrt{k})$$
$$=(\log_3 \sqrt{2}-\log_3 1)+(\log_3 \sqrt{3}-\log_3 \sqrt{2})+\cdots+(\log_3 \sqrt{n+1}-\log_3 \sqrt{n})$$
$$=\log_3 \sqrt{n+1}-\log_3 1=\log_3 \sqrt{n+1}$$

즉, $\log_3 \sqrt{n+1}=2$이므로 $\sqrt{n+1}=3^2$

$n+1=3^4 \qquad \therefore n=80$

답 ④

048

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=2^{n-1}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \log_{16} a_k=\sum_{k=1}^{n} \log_{16} 2^{k-1}=\sum_{k=1}^{n} \log_{2^4} 2^{k-1}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} (k-1)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{8}$$

즉, $\dfrac{n(n-1)}{8}=7$이므로

$n(n-1)=7\times 8 \qquad \therefore n=8$

답 ③

049

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\log_2 (n^2+n)$으로 놓으면

$n\ge 2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\log_2 (n^2+n)-\log_2 \{(n-1)^2+(n-1)\}$$
$$=\log_2 (n^2+n)-\log_2 (n^2-n)$$
$$=\log_2 \frac{n^2+n}{n^2-n}=\log_2 \frac{n+1}{n-1}$$

즉, $a_{2n+1}=\log_2 \dfrac{(2n+1)+1}{(2n+1)-1}=\log_2 \dfrac{n+1}{n}\ (n\ge 1)$이므로

$$\sum_{n=1}^{15} a_{2n+1}=\sum_{n=1}^{15} \log_2 \frac{n+1}{n}$$
$$=\sum_{n=1}^{15} \{\log_2 (n+1)-\log_2 n\}$$
$$=(\log_2 2-\log_2 1)+(\log_2 3-\log_2 2)+\cdots+(\log_2 16-\log_2 15)$$
$$=\log_2 16-\log_2 1$$
$$=\log_2 2^4=4$$

답 4

참고

$a_n=\log_2 \dfrac{n+1}{n-1}\ (n\ge 2)$은 $n=1$일 때 정의되지 않는다.
하지만 문제에서 a_{2n+1}에 관련된 값을 묻고 있으므로 a_1의 값을 고려하지 않아도 된다.

실력을 높이는 연습 문제

본문 151쪽

01

ㄱ. [반례] 일반항이 $a_n=n$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $n=3$이라고 하면

$$\sum_{k=1}^{3} a_k^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2=1^2+2^2+3^2=14$$
$$\sum_{k=1}^{3} a_3^2=a_3^2\times 3=3^2\times 3=27$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{3} a_k^2\neq\sum_{k=1}^{3} a_3^2$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k^2\neq\sum_{k=1}^{n} a_n^2 \text{ (거짓)}$$

ㄴ. [반례] 일반항이 $a_n=n$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $n=3$이라고 하면

$$\sum_{k=1}^{3} a_k^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2=1^2+2^2+3^2=14$$
$$\left(\sum_{k=1}^{3} a_k\right)^2=(1+2+3)^2=6^2=36$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{3} a_k^2\neq\left(\sum_{k=1}^{3} a_k\right)^2$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k^2\neq\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $\sum$의 정의에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{i=1}^{n} a_i \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ②

02

$$\sum_{k=2}^{7} a_k-\sum_{k=1}^{6} a_k=(a_2+a_3+\cdots+a_7)-(a_1+a_2+\cdots+a_6)$$
$$=a_7-a_1$$

이때 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 공차를 d라고 하면

$a_7-a_1=(a_1+6d)-a_1=6d$

즉, $6d=24$이므로 $d=4$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 공차는 4이다.

답 ③

03

$$\sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} b_k=\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 3, 제10항이 18인 등차수열이고, ㉠은 등차수열 $\{a_n+b_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} b_k=\frac{10\{(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})\}}{2}$$
$$=\frac{10(3+18)}{2}$$
$$=105$$

답 105

| 다른 풀이 |

$$\sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} b_k$$
$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10})$$

첫째항이 a_1, 끝항이 a_{10}, 항수가 10인 등차수열의 합

$$=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}+\frac{10(b_1+b_{10})}{2}$$

첫째항이 b_1, 끝항이 b_{10}, 항수가 10인 등차수열의 합

$$=5(a_1+a_{10})+5(b_1+b_{10})$$
$$=5\{(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})\}$$
$$=5(3+18)$$
$$=5\times21=105$$

04

$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(2b_k-1)$에서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=2\sum_{k=1}^{10} b_k-10$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k-2\sum_{k=1}^{10} b_k=-10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$에서

$$3\sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} b_k=33 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$3\times$㉠$-$㉡을 하면

$$-7\sum_{k=1}^{10} b_k=-63 \qquad \therefore \sum_{k=1}^{10} b_k=9$$

답 9

참고

㉠$+2\times$㉡을 하면

$$7\sum_{k=1}^{10} a_k=56 \qquad \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k=8$$

05

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k-4)=2\sum_{k=1}^{n-1} k-\sum_{k=1}^{n-1} 4$$
$$=2\times\frac{n(n-1)}{2}-4(n-1)$$
$$=n(n-1)-4(n-1)$$
$$=n^2-n-4n+4$$
$$=n^2-5n+4$$

즉, $n^2-5n+4=-2$이므로

$n^2-5n+6=0$, $(n-2)(n-3)=0$

$\therefore n=2$ 또는 $n=3$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+3=5$

답 ④

06

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{(k+1)^3}{2k}+\sum_{n=2}^{5}\frac{(n-1)^3}{2n}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{(k+1)^3}{2k}+\sum_{k=2}^{5}\frac{(k-1)^3}{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{(k+1)^3}{2k}+\sum_{k=1}^{5}\frac{(k-1)^3}{2k}$$

$k=1$일 때 $\frac{(k-1)^3}{2k}$의 값은 0이므로 $\sum_{k=1}^{5}\frac{(k-1)^3}{2k}=\sum_{k=2}^{5}\frac{(k-1)^3}{2k}$

$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{(k+1)^3+(k-1)^3}{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{2k^3+6k}{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}(k^2+3)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}k^2+\sum_{k=1}^{5}3$$
$$=\frac{5\times6\times11}{6}+3\times5$$
$$=55+15=70$$

답 ⑤

07

수열 5×3, 7×6, 9×9, $\cdots$의 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=(2k+3)\times3k=6k^2+9k$

구하는 합은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$a_n=(2n+3)\times3n=17\times21$에서 $3n=21$ $\quad \therefore n=7$

$$\sum_{k=1}^{7} a_k=\sum_{k=1}^{7}(6k^2+9k)=6\sum_{k=1}^{7}k^2+9\sum_{k=1}^{7}k$$
$$=6\times\frac{7\times8\times15}{6}+9\times\frac{7\times8}{2}$$
$$=840+252=1092$$

답 1092

08

주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=k+2k+3k+\cdots+k^2=\sum_{i=1}^{k}ki$$
$$=k\times\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^2(k+1)}{2}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제6항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{k^2(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{6}k^3+\sum_{k=1}^{6}k^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2+\frac{6\times7\times13}{6}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(441+91)=266$$

답 266

09

문제 접근하기

$4^n=2^{2n}$이므로 4^n의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, \cdots, 2^{2n}$이고, 4^n의 모든 양의 약수의 합은

$1+2+2^2+\cdots+2^{2n}$

이다.

4^n, 즉 2^{2n}의 모든 양의 약수의 합이 a_n이므로

$$a_n=1+2+2^2+\cdots+2^{2n}$$
$$=\frac{2^{2n+1}-1}{2-1}=2^{2n+1}-1$$

첫째항이 1, 공비가 2, 항수가 $2n+1$인 등비수열의 합

$\therefore \sum_{n=1}^{3} a_n = \sum_{n=1}^{3} (2^{2n+1}-1)$

$= 2\sum_{n=1}^{3} 4^n - \sum_{n=1}^{3} 1$

$= 2\times\dfrac{4(4^3-1)}{4-1} - 3$

$= 168 - 3 = 165$

답 ②

참고

$a_n = 1+4+4^2+\cdots+4^n$과 같이 생각하지 않도록 주의한다.

10

문제 접근하기

$\sum_{k=1}^{n} a_k = 3n^2+5n+1$에서 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하면

$a_1=9,\ a_n=6n+2\ (n\ge 2)$

이다. 따라서 주어진 수열의 합을 구할 때, $n=1$인 경우는 따로 떼어서 생각해야 한다.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 3n^2+5n+1$로 놓으면

$n\ge 2$일 때

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (3n^2+5n+1) - \{3(n-1)^2+5(n-1)+1\}$

$= 3n^2+5n+1-(3n^2-n-1)$

$= 6n+2$ ......㉠

$n=1$일 때

$a_1 = S_1 = 3+5+1 = 9$

이때 $a_1=9$는 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같지 않으므로

$a_1=9,\ a_n=6n+2\ (n\ge 2)$

$\therefore \sum_{k=1}^{4} k a_{2k-1} = 9 + \sum_{k=2}^{4} k\{6(2k-1)+2\}$

$= 9 + \sum_{k=2}^{4} (12k^2-4k)$

$= 9 + 12\left(\sum_{k=1}^{4} k^2 - \underbrace{1}_{k^2\text{에 } k=1\text{을 대입한 값}}\right) - 4\left(\sum_{k=1}^{4} k - \underbrace{1}_{k\text{에 } k=1\text{을 대입한 값}}\right)$

$= 9 + 12\times\dfrac{4\times5\times9}{6} - 12 - 4\times\dfrac{4\times5}{2} + 4$

$= 9+360-12-40+4 = 321$

답 ①

11

$\sum_{i=1}^{5}\left\{\sum_{j=1}^{5}(a_i+b_j)\right\} = \sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{5}a_i + \sum_{j=1}^{5}b_j\right)$

$= \sum_{i=1}^{5}\left\{5a_i + \sum_{j=1}^{5}(-2j)\right\}$

$= \sum_{i=1}^{5}\left(5a_i - 2\sum_{j=1}^{5} j\right)$

$= \sum_{i=1}^{5}\left(5a_i - 2\times\dfrac{5\times6}{2}\right)$

$= \sum_{i=1}^{5}(5a_i-30) = 5\sum_{i=1}^{5}2^i - \sum_{i=1}^{5}30$

$= 5\times\dfrac{2(2^5-1)}{2-1} - 30\times5$

$= 5\times62 - 150$

$= 310 - 150 = 160$

답 ④

12

문제 접근하기

주어진 수열의 제k항을 k에 대한 식으로 나타내어 본다. 제k항은 두 수의 곱으로 나타내어지므로, 각 수를 k를 이용하여 어떻게 나타낼 수 있는지 확인한다.

수열 $1\times(n+1),\ 2\times n,\ 3\times(n-1),\ \cdots$의 제$k$항을 a_k라고 하면

$a_k = k\{(n+2)-k\} = -k^2+(n+2)k$

주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+2)k\}$

$= -\sum_{k=1}^{n}k^2 + (n+2)\sum_{k=1}^{n}k$

$= -\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+2)\times\dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+2)\}}{6}$

$= \dfrac{n(n+1)(n+5)}{6}$

답 $\dfrac{n(n+1)(n+5)}{6}$

13

$P(x) = x^3+(1-n)x^2+n$이라고 하면 다항식 $P(x)$를 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지는

$P(n) = n^3+(1-n)n^2+n = n^2+n = n(n+1)$

즉, $a_n = n(n+1)$이므로

$\sum_{n=1}^{10}\dfrac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{10}\dfrac{1}{n(n+1)}$

$= \sum_{n=1}^{10}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$= \left(1-\dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{11} = \dfrac{10}{11}$

답 ④

14

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n = 2,\ \alpha_n\beta_n = n^2-1 = (n-1)(n+1)$

$\therefore \sum_{n=2}^{10}\left(\dfrac{1}{\alpha_n}+\dfrac{1}{\beta_n}\right) = \sum_{n=2}^{10}\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$

$= \sum_{n=2}^{10}\dfrac{2}{(n-1)(n+1)}$

$= \sum_{n=2}^{10}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$= \left(1-\dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$

$+ \cdots + \left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{10}\right) + \left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}\right)$

$= 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{11} = \dfrac{72}{55}$

답 ③

15

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = (n+1)^2$으로 놓으면

$n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n+1)^2-n^2$

$=2n+1$ ⋯⋯⋯ ㉠

$n=1$일 때

$a_1=S_1=2^2=4$

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같지 않으므로

$a_1=4$, $a_n=2n+1$ $(n\ge2)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{11}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$

$$=\frac{1}{a_1a_2}+\sum_{k=2}^{11}\frac{1}{(2k+1)\{2(k+1)+1\}}$$

$$=\frac{1}{a_1a_2}+\sum_{k=2}^{11}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{11}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{25}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{20}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{25}\right)$$

$$=\frac{1}{20}+\frac{2}{25}=\frac{13}{100}$$

답 $\frac{13}{100}$

16

수열 $\{a_n\}$은 첫째항과 공차가 모두 1인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times1=n$

$$\therefore \sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{24}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$=\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$$

$$=\sqrt{25}-1$$

$$=5-1=4$$

답 ③

17

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$$

$$=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{\{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}\}\{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}\}}$$

$$=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)}$$

$(k+1)^2k-k^2(k+1)$
$=k^3+2k^2+k-(k^3+k^2)=k^2+k$

$$=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{k}}{k}-\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{63}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{63}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{63}}-\frac{1}{\sqrt{64}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{64}}$$

$$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

답 ⑤

18

$$\sum_{k=2}^{99}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{99}\log\frac{k^2-1}{k^2}$$

$$=\sum_{k=2}^{99}\log\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$=\sum_{k=2}^{99}\left(\log\frac{k-1}{k}+\log\frac{k+1}{k}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{99}\left(\log\frac{k-1}{k}-\log\frac{k}{k+1}\right)$$

$$=\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{2}{3}\right)+\left(\log\frac{2}{3}-\log\frac{3}{4}\right)$$

$$+\cdots+\left(\log\frac{98}{99}-\log\frac{99}{100}\right)$$

$$=\log\frac{1}{2}-\log\frac{99}{100}$$

$$=\log\frac{1}{2}+\log\frac{100}{99}$$

$$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{100}{99}\right)=\log\frac{50}{99}$$

답 ②

10 수학적 귀납법

기본을 다지는 유형

본문 155쪽

001

$a_{n+1}-2=\dfrac{n}{a_n+2}$에서

$n=1$일 때

$a_2-2=\dfrac{1}{a_1+2}=\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore a_2=\dfrac{7}{3}$

$n=2$일 때

$a_3-2=\dfrac{2}{a_2+2}=\dfrac{2}{\frac{7}{3}+2}=\dfrac{6}{13}$ $\quad\therefore a_3=\dfrac{32}{13}$

답 $\dfrac{32}{13}$

002

$a_na_{n+1}=\dfrac{n}{2}$에서

$n=2$일 때

$a_2a_3=\dfrac{2}{2}$, $2a_2=1$ $\quad\therefore a_2=\dfrac{1}{2}$

$n=1$일 때

$a_1a_2=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore a_1=1$

$n=3$일 때

$a_3a_4=\dfrac{3}{2}$, $2a_4=\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore a_4=\dfrac{3}{4}$

$n=4$일 때

$a_4a_5=\dfrac{4}{2}$, $\dfrac{3}{4}a_5=2$ $\quad\therefore a_5=\dfrac{8}{3}$

$\therefore a_1+a_4+a_5=1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{53}{12}$

답 ④

003

$n=1$일 때, $a_1=4$는 짝수이므로

$a_2=\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{2}\times4=2$

$n=2$일 때, $a_2=2$는 짝수이므로

$a_3=\dfrac{1}{2}a_2=\dfrac{1}{2}\times2=1$

$n=3$일 때, $a_3=1$은 홀수이므로

$a_4=a_3+1=1+1=2$

$n=4$일 때, $a_4=2$는 짝수이므로

$a_5=\dfrac{1}{2}a_4=\dfrac{1}{2}\times2=1$

$\vdots$

따라서 주어진 수열은 제2항부터 2, 1이 이 순서대로 반복되므로

$a_n=\begin{cases}2 & (n\text{이 짝수})\\ 1 & (n\text{이 홀수})\end{cases}$ $(n\ge2)$

이 성립한다.

50은 짝수이므로 $a_{50}=2$

답 ②

004

$n=1$일 때, $a_1=6>5$이므로

$a_2=a_1-2=6-2=4$

$n=2$일 때, $a_2=4<5$이므로

$a_3=2a_2=2\times4=8$

$n=3$일 때, $a_3=8>5$이므로

$a_4=a_3-2=8-2=6$

$n=4$일 때, $a_4=6>5$이므로

$a_5=a_4-2=6-2=4$

$\vdots$ ❶

따라서 주어진 수열은 6, 4, 8이 이 순서대로 반복되므로

$a_n=a_{n+3}$ (n은 자연수)

이 성립한다. ❷

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

$=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9)+a_{10}$

$=(6+4+8)+(6+4+8)+(6+4+8)+6$

$=3\times18+6=60$ ❸

답 60

채점 기준	비율
❶ 주어진 식에 n 대신 1, 2, 3, …을 대입하여 수열의 항을 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 수열의 규칙성을 찾을 수 있다.	40 %
❸ 규칙성을 이용하여 $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %

005

$a_1=20$

$a_2=|a_1|-2=20-2=18$ $\quad -2$

$a_3=|a_2|-2=18-2=16$ $\quad -2$

$\vdots$

$a_{10}=2$

$a_{11}=|a_{10}|-2=2-2=0$

$a_{12}=|a_{11}|-2=0-2=-2$

$a_{13}=|a_{12}|-2=|-2|-2=0$

$a_{14}=|a_{13}|-2=0-2=-2$

$\vdots$

이므로

$1\le n\le10$일 때

$a_n=\underline{20+(n-1)\times(-2)}=-2n+22$ → 첫째항이 20, 공차가 -2인 등차수열

$n\ge11$일 때

$a_n=\begin{cases}0 & (n\text{이 홀수})\\ -2 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{30}a_n=\sum_{n=1}^{10}a_n+\sum_{n=11}^{30}a_n$

$=\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(-2n+22)+(-2)\times10$

$=-2\times\dfrac{10\times11}{2}+220-20=90$

답 ②

006

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 30, 공차가 -3인 등차수열이므로

$a_n=30+(n-1)\times(-3)$

$\quad=-3n+33$

$\therefore a_{10}=-3\times10+33=3$

답 ③

007

$a_1=2$이고 $a_n=a_{n+1}-4$에서

$a_{n+1}=a_n+4$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이다. ❶

$\therefore a_n=2+(n-1)\times4=4n-2$ ❷

$a_k=82$에서

$4k-2=82,\ 4k=84$

$\therefore k=21$ ❸

답 21

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열임을 알 수 있다.	40 %
❷ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

008

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$에서

$2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 첫째항이 -4, 공차가 $a_2-a_1=4-(-4)=8$이므로

$a_n=-4+(n-1)\times8=8n-12$

$\therefore a_{12}=8\times12-12=84$

답 ②

009

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=2+(n-1)\times2=2n$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2k\times2(k+1)}\\&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}\\&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{11}\right)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{10}{11}=\frac{5}{22}\end{aligned}$$

답 ④

010

$a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 첫째항이 -1, 공차가 $a_2-a_1=2-(-1)=3$이므로

$a_n=-1+(n-1)\times3=3n-4$

$\therefore a_4+a_6+a_8+a_{10}$

$\quad=(3\times4-4)+(3\times6-4)+(3\times8-4)+(3\times10-4)$

$\quad=8+14+20+26=68$

답 ⑤

|다른 풀이|

$a_4+a_6+a_8+a_{10}$은 첫째항이 $a_4=8$, 끝항이 $a_{10}=26$, 항수가 4인 등차수열의 합과 같으므로

$\dfrac{4(8+26)}{2}=68$

011

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$에서

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 8, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

$\therefore a_n=8\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-4}$

답 ①

012

$3a_{n+1}=a_n$에서

$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이다.

$\therefore a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \dfrac{a_{12}}{a_6a_8}=\dfrac{\dfrac{1}{3^{11}}}{\dfrac{1}{3^5}\times\dfrac{1}{3^7}}=\dfrac{\dfrac{1}{3^{11}}}{\dfrac{1}{3^{12}}}=3$

답 3

013

${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다. ❶

이때 첫째항은 16, 공비는 $\dfrac{64}{16}=4$이므로

$a_n=16\times4^{n-1}=4^{n+1}$ ❷

$a_k=256$이므로

$4^{k+1}=256,\ 2^{2(k+1)}=2^8$

$2(k+1)=8 \qquad \therefore k=3$ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 알 수 있다.	20 %
❷ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 k의 값을 구할 수 있다.	40 %

014

${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 공비를 r라고 하면

$\dfrac{a_{11}}{a_1}=\dfrac{a_{12}}{a_2}=\dfrac{a_{13}}{a_3}=r^{10}$

즉, $\frac{a_{11}}{a_1}+\frac{a_{12}}{a_2}+\frac{a_{13}}{a_3}=15$에서

$r^{10}+r^{10}+r^{10}=15$, $3r^{10}=15$

$\therefore r^{10}=5$

$\therefore \frac{a_{20}}{a_{10}}=r^{10}=5$

답 ③

015

$2\log a_{n+1}=\log a_n+\log a_{n+2}$에서

$\log a_{n+1}{}^2=\log a_n a_{n+2}$

$\therefore a_{n+1}{}^2=a_n a_{n+2}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$이므로

$a_n=\frac{1}{4}\times 2^{n-1}=2^{-2}\times 2^{n-1}=2^{n-3}$

$\therefore a_{10}=2^{10-3}=2^7=128$

답 ④

016

$a_{n+1}=a_n+2n$에서 $a_{n+1}-a_n=2n$이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=2\times 1 \\ & a_3-a_2=2\times 2 \\ & a_4-a_3=2\times 3 \\ & \quad\vdots \\ +) & \underline{a_n-a_{n-1}=2(n-1)} \\ & a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}2k \end{array}$$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k$

이때 $a_1=1$이므로

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=1+2\times\frac{n(n-1)}{2}$

$=n^2-n+1$

$\therefore a_8=8^2-8+1=57$

답 ⑤

| 다른 풀이 |

$a_{n+1}=a_n+2n$에서 $a_{n+1}-a_n=2n$이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, 7을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=2\times 1 \\ & a_3-a_2=2\times 2 \\ & a_4-a_3=2\times 3 \\ & \quad\vdots \\ +) & \underline{a_8-a_7=2\times 7} \\ & a_8-a_1=2+4+6+\cdots+14 \end{array}$$

$\therefore a_8=a_1+(2+4+6+\cdots+14)$

이때 $a_1=1$이므로

$a_8=1+(\underline{2+4+6+\cdots+14})$

$=1+\frac{7(2+14)}{2}$ 첫째항이 2, 끝항이 14, 항수가 7인 등차수열의 합

$=1+56=57$

017

$a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$에서 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=2^0 \\ & a_3-a_2=2^1 \\ & a_4-a_3=2^2 \\ & \quad\vdots \\ +) & \underline{a_n-a_{n-1}=2^{n-2}} \\ & a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1} \end{array}$$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}$

이때 $a_1=1$이므로

$a_n=1+\underline{\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}}=1+\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^{n-1}$

첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제$(n-1)$항까지의 합

$a_k=1024$이므로

$2^{k-1}=1024=2^{10}$, $k-1=10$

$\therefore k=11$

답 ④

018

$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$이므로 양변에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

$=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}$

$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

위의 식의 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=\sqrt{3}-\sqrt{2} \\ & a_3-a_2=\sqrt{4}-\sqrt{3} \\ & a_4-a_3=\sqrt{5}-\sqrt{4} \\ & \quad\vdots \\ +) & \underline{a_n-a_{n-1}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\ & a_n-a_1=\sqrt{n+1}-\sqrt{2} \end{array}$$

$\therefore a_n=a_1+\sqrt{n+1}-\sqrt{2}$

이때 $a_1=\sqrt{2}$이므로

$a_n=\sqrt{n+1}$

$\therefore a_{15}=\sqrt{15+1}=\sqrt{16}=4$

답 ④

019

$a_{n+1}-a_n=(-1)^n\times n$의 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=-1 \\ & a_3-a_2=2 \\ & a_4-a_3=-3 \\ & \quad\vdots \\ +) & \underline{a_n-a_{n-1}=(-1)^{n-1}\times(n-1)} \\ & a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\times k \end{array}$$

$\therefore\ a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\times k$

이때 $a_1=10$이므로

$a_n=10+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\times k$

$\therefore\ a_{101}=10+\sum_{k=1}^{100}(-1)^k\times k$

$=10+(\underbrace{-1+2}_{=1}\overbrace{-3+4}^{=1}-\cdots\underbrace{-99+100}_{=1})$

$=10+1\times 50=60$

답 ⑤

020

$a_n=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$의 양변에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1}=\frac{n+2}{n}a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

위의 식의 양변에 n 대신 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{3}{1}a_1$$
$$a_3=\frac{4}{2}a_2$$
$$a_4=\frac{5}{3}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1}$$

$$a_n=\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}\times a_1$$
$$=\frac{n(n+1)}{1\times 2}a_1$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}a_1$$

이때 $a_1=1$이므로 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore\ a_{10}=\frac{10\times 11}{2}=55$

답 ①

021

$a_{n+1}=4^na_n$의 양변에 n 대신 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=4^1a_1$$
$$a_3=4^2a_2$$
$$a_4=4^3a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=4^{n-1}a_{n-1}$$

$$a_n=4^1\times 4^2\times 4^3\times\cdots\times 4^{n-1}\times a_1$$
$$=4^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\times 1\ (\because\ a_1=1)$$
$$=4^{\frac{n(n-1)}{2}}$$
$$=2^{n(n-1)}$$

$a_k=2^{12}$이므로 $2^{k(k-1)}=2^{12}$

$k(k-1)=12,\ k^2-k-12=0$

$(k+3)(k-4)=0$

$\therefore\ k=4$ $(\because\ k$는 자연수)

답 ②

022

$a_{n+1}=a_n\log_{n+1}(n+2)$에서

$a_{n+1}=a_n\times\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}$ ······ ❶

위의 식의 양변에 n 대신 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{\log 3}{\log 2}a_1$$
$$a_3=\frac{\log 4}{\log 3}a_2$$
$$a_4=\frac{\log 5}{\log 4}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\frac{\log(n+1)}{\log n}a_{n-1}$$

$$a_n=\frac{\log 3}{\log 2}\times\frac{\log 4}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 4}\times\cdots\times\frac{\log(n+1)}{\log n}\times a_1$$
$$=\frac{\log(n+1)}{\log 2}a_1$$

이때 $a_1=1$이므로 $a_n=\frac{\log(n+1)}{\log 2}$ ······ ❷

$\therefore\ a_{63}=\frac{\log 64}{\log 2}=\log_2 64$

$=\log_2 2^6=6$ ······ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 정리할 수 있다.	30 %
❷ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	50 %
❸ a_{63}을 구할 수 있다.	20 %

023

$a_n=\frac{n^2-1}{n^2}a_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$의 양변에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}a_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

위의 식의 양변에 n 대신 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{1\times 3}{2^2}a_1$$
$$a_3=\frac{2\times 4}{3^2}a_2$$
$$a_4=\frac{3\times 5}{4^2}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}a_{n-1}$$

$$a_n=\frac{1\times 3}{2^2}\times\frac{2\times 4}{3^2}\times\frac{3\times 5}{4^2}$$
$$\times\cdots\times\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\times\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\times a_1$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\times a_1$$

이때 $a_1=1$이므로 $a_n=\frac{n+1}{2n}$

$\therefore\ a_9=\frac{10}{2\times 9}=\frac{5}{9}$

답 ②

024

$S_n=4a_n-81$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)의 양변에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$S_{n+1}=4a_{n+1}-81$

또, 수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로

$a_{n+1}=(4a_{n+1}-81)-(4a_n-81)$

$a_{n+1}=4a_{n+1}-4a_n$

$3a_{n+1}=4a_n$

$\therefore a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{4}{3}$인 등비수열이다.

이때 $a_1=27$이므로 $a_n=27\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_4=27\times\left(\frac{4}{3}\right)^3=64$

답 ④

025

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로 $S_n=2a_{n+1}$에서

$S_n=2(S_{n+1}-S_n)$

$\therefore S_{n+1}=\frac{3}{2}S_n$ ······ ❶

따라서 수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이다.

이때 $S_1=a_1=2$이므로

$S_n=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ ······ ❷

$S_k=\frac{81}{8}=2\times\frac{81}{16}=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^4$이므로

$2\times\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^4$, $k-1=4$

$\therefore k=5$ ······ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 S_{n+1}과 S_n 사이의 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 수열 $\{S_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 k의 값을 구할 수 있다.	20 %

026

ㄱ. $p(1)$이 참이면 주어진 조건에 의하여
$p(1+2)$, $p(1+2\times2)$, $\cdots$, $p(1+2l)$
이 참이다. (단, l은 자연수이다.)
따라서 $p(1)$이 참이면 홀수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다. (참)

ㄴ. $p(2)$가 참이면 주어진 조건에 의하여
$p(2+2)$, $p(2+2\times2)$, $\cdots$, $p(2+2m)$
이 참이다. (단, m은 자연수이다.)
따라서 $p(2)$가 참이면 짝수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다. (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에 의하여 $p(1)$이 참이면 모든 홀수에 대하여 주어진 명제가 참이고, $p(2)$가 참이면 모든 짝수에 대하여 주어진 명제가 참이다.
따라서 $p(1)$, $p(2)$가 모두 참이면 모든 자연수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

027

(i) $n=1$일 때
(좌변)$=2\times1-1=1$, (우변)$=1^2=1$
따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
위의 식의 양변에 $2(k+1)-1$, 즉 $\boxed{(가)\ 2k+1}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{(가)\ 2k+1}=k^2+(2k+1)$
$=\boxed{(나)\ (k+1)^2}$
즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore$ (가): $2k+1$, (나): $(k+1)^2$

따라서 $f(k)=2k+1$, $g(k)=(k+1)^2$이므로

$f(2)g(1)=(2\times2+1)\times(1+1)^2$
$=5\times4=20$

답 20

028

(i) $n=1$일 때
(좌변)$=2^0=1$, (우변)$=2^1-1=1$
따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$
위의 식의 양변에 $\boxed{(가)\ 2^k}$을 더하면
$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+\boxed{(가)\ 2^k}=2^k-1+2^k$
$=2\times2^k-1$
$=\boxed{(나)\ 2^{k+1}-1}$
즉, 주어진 등식은 $n=k+1$일 때에도 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore$ (가): 2^k, (나): $2^{k+1}-1$

따라서 $f(k)=2^k$, $g(k)=2^{k+1}-1$이므로

$f(1)+g(1)=2+(2^2-1)=5$

답 5

029

(i) $n=1$일 때
(좌변)$=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$
따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$
위의 식의 양변에 $\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$을 더하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$

$$=\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\boxed{(나)\ \frac{k+1}{k+2}}$$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore$ (가): $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$, (나): $\frac{k+1}{k+2}$

따라서 (가), (나)에 알맞은 식을 차례대로 나열한 것은 ④이다.

답 ④

030

(i) $n=4$일 때

(좌변)$=2^4=16$, (우변)$=4^2=16$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq4)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 하면

$2^k\geq k^2$

위의 식의 양변에 $\boxed{(가)\ 2}$를 곱하면

$\boxed{(가)\ 2}\times2^k\geq\boxed{(가)\ 2}\times k^2$

이때

$\boxed{(가)\ 2}\times k^2-(k+1)^2=2k^2-(k^2+2k+1)=\boxed{(나)\ k^2-2k-1}$

이고, $k^2-2k-1=(k-1)^2-2$는 $k\geq4$일 때 $k=4$에서 최솟값 7을 갖는다.

$\therefore \boxed{(나)\ k^2-2k-1}\geq0$

따라서 $\boxed{(가)\ 2}\times2^k\geq(k+1)^2$이므로

$2^{k+1}\geq(k+1)^2$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식은 $n\geq4$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore$ (가): 2, (나): k^2-2k-1

따라서 $a=2$, $f(k)=k^2-2k-1$이므로

$f(a)=f(2)=2^2-2\times2-1=-1$

답 ③

실력을 높이는 연습 문제

본문 163쪽

01

$a_{3n+1}=a_n+1$에서 $n=1$일 때

$a_4=a_1+1=1+1=2$

$a_{3n-1}=2a_n+1$에서 $n=4$일 때

$a_{11}=2a_4+1=2\times2+1=5$

$a_{3n}=-a_n+2$에서 $n=4$일 때

$a_{12}=-a_4+2=-2+2=0$

$a_{3n+1}=a_n+1$에서 $n=4$일 때

$a_{13}=a_4+1=2+1=3$

$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}=5+0+3=8$

답 ③

02

$a_{n+1}-3=a_n$에서 $a_{n+1}=a_n+3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -32, 공차가 3인 등차수열이다.

$\therefore a_n=-32+(n-1)\times3=3n-35$

$a_n>0$에서

$3n-35>0$, $3n>35$

$\therefore n>11.\cdots$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제12항이다.

답 ⑤

03

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 첫째항이 -4, 공차가 $-2-(-4)=2$이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10\{2\times(-4)+9\times2\}}{2}=\frac{10\times10}{2}=50$$

답 50

|다른 풀이|

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -4, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=-4+(n-1)\times2=2n-6$

$\therefore a_{10}=14$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10(-4+14)}{2}=50$$

04

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{3}$인 등비수열이므로

$a_n=(\sqrt{3})^{n-1}$

$a_n\geq250$에서 $(\sqrt{3})^{n-1}\geq250$

이때 $(\sqrt{3})^{10}=3^5=243$, $\underbrace{(\sqrt{3})^{11}=243\sqrt{3}}_{=420.\cdots}$이므로

$n-1\geq11 \qquad \therefore n\geq12$

따라서 처음으로 250 이상이 되는 항은 제12항이다.

답 ②

참고

$(\sqrt{3})^{10}=243$, $(\sqrt{3})^{12}=729$로 생각해 $n-1\geq12$라고 생각하지 않도록 주의한다.

05

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

→ 이웃하는 두 항의 비가 일정하므로 등비수열이다.

공비를 $r\ (r>0)$라고 하면

$a_3=a_1r^2=4r^2=100$

$r^2=25 \qquad \therefore r=5 \ (\because r>0)$

$\therefore a_n=4\times 5^{n-1}$

이때

$\dfrac{a_{17}}{a_{12}}=\dfrac{4\times 5^{16}}{4\times 5^{11}}=5^5=k^k$

이므로

$k=5$

답 ④

06

$a_{n+1}=a_n+1-n$에서 $a_{n+1}-a_n=-n+1$이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=-1+1 \\ & a_3-a_2=-2+1 \\ & a_4-a_3=-3+1 \\ & \quad \vdots \\ +) & a_n-a_{n-1}=-(n-1)+1 \\ \hline & a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}(-k+1) \end{array}$$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-k+1)$

이때 $a_1=5$이므로

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-k+1)$

$=5-\dfrac{n(n-1)}{2}+(n-1)$

$=\dfrac{-n^2+3n+8}{2}$

$\therefore a_{10}=\dfrac{-10^2+3\times 10+8}{2}=-31$

답 ①

07

$a_{n+1}=a_n+f(n)$에서 $f(n)=a_{n+1}-a_n$이므로

$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$=a_{n+1}-a_1$

즉, $a_{n+1}-a_1=2^n-1$이고 $a_1=1$이므로

$a_{n+1}-1=2^n-1$

$\therefore a_{n+1}=2^n$

따라서 $n=5$일 때

$a_6=2^5=32$

답 ④

참고

$a_{n+1}=2^n$의 양변에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$a_n=2^{n-1}$

08

$(2n-1)a_{n+1}=(2n+1)a_n$에서 $a_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n-1}a_n$이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=\frac{3}{1}a_1 \\ & a_3=\frac{5}{3}a_2 \\ & a_4=\frac{7}{5}a_3 \\ & \quad \vdots \\ \times) & a_n=\frac{2n-1}{2n-3}a_{n-1} \\ \hline & a_n=\frac{3}{1}\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-3}a_1 \end{array}$$

$=(2n-1)a_1$

이때 $a_1=1$이므로 $a_n=2n-1$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{5}k-1\times 5$

$=2\times\dfrac{5\times 6}{2}-5=25$

답 ③

09

$a_{n+1}=3^na_n$의 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=3^1a_1 \\ & a_3=3^2a_2 \\ & a_4=3^3a_3 \\ & \quad \vdots \\ \times) & a_n=3^{n-1}a_{n-1} \\ \hline & a_n=3^1\times 3^2\times 3^3\times\cdots\times 3^{n-1}\times a_1 \end{array}$$

$=3^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\times 3$

$=3^{\frac{n(n-1)}{2}}\times 3$

$=3^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$

$=3^{\frac{n^2-n+2}{2}}$

$a_k=3^7$이므로

$3^{\frac{k^2-k+2}{2}}=3^7, \ \dfrac{k^2-k+2}{2}=7$

$k^2-k+2=14, \ k^2-k-12=0$

$(k+3)(k-4)=0 \qquad \therefore k=4 \ (\because k$는 자연수$)$

답 ①

10

문제 접근하기

관계식으로부터 수열 $\{a_n\}$의 특징을 파악하기 어려운 경우에는 주어진 식의 양변에 n 대신 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 항을 구한다.

$a_{n+1}=2a_n-2$의 양변에 n 대신 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1-2=2\times 3-2=4$

$a_3=2a_2-2=2\times 4-2=6$

$a_4=2a_3-2=2\times 6-2=10$

$a_5=2a_4-2=2\times 10-2=18$

$a_6=2a_5-2=2\times 18-2=34$

$a_7=2a_6-2=2\times 34-2=66$

따라서 $a_7=66$이다.

답 66

11

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로 $S_n=a_{n+1}+1$에서

$S_n=S_{n+1}-S_n+1 \qquad \therefore S_{n+1}=2S_n-1$

$S_{n+1}=2S_n-1$의 양변에 n 대신 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$S_2=2S_1-1=2\times2-1=3$ ($\because S_1=a_1=2$)

$S_3=2S_2-1=2\times3-1=5$

$S_4=2S_3-1=2\times5-1=9$

$S_5=2S_4-1=2\times9-1=17$

따라서 $S_5=17$이다.

답 ②

12

$(n+1)$일 후에는 n일 후 살아 있는 미생물의 $\frac{40}{100}$, 즉 $\frac{2}{5}$가 죽고

나머지 $\frac{3}{5}$이 각각 2마리로 분열하므로

$a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n\times2=\frac{6}{5}a_n$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{6}{5}$인 등비수열이다.

이때 $a_1=12500\times\frac{6}{5}=15000$이므로

$a_n=15000\times\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$

따라서 5일 후 살아 있는 미생물의 수는

$a_5=15000\times\left(\frac{6}{5}\right)^4=31104$

답 ⑤

13

조건 ㈎에 의하여 $p(1)$이 참이므로 조건 ㈏에 의하여 $p(3)$과 $p(6)$이 참이다.

$p(3)$이 참이므로 조건 ㈏에 의하여 $p(5)$와 $p(8)$이 참이다.

$p(5)$가 참이므로 조건 ㈏에 의하여 $p(7)$과 $p(10)$이 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ①이다.

답 ①

14

(i) $n=1$일 때, $3^2-1=8$이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 명제가 참이라고 가정하면

$3^{2k}-1=8m$ (단, m은 자연수이다.)

$\therefore 3^{2k}=\boxed{㈎\,8m+1}$

$n=k+1$일 때

$$\begin{aligned}3^{2(k+1)}-1&=9\times3^{2k}-1\\&=9\times(\boxed{㈎\,8m+1})-1\\&=72m+8\\&=8\times(\boxed{㈏\,9m+1})\end{aligned}$$

즉, 주어진 명제는 $n=k+1$일 때에도 참이다.

(i), (ii)에서 주어진 명제는 모든 자연수 n에 대하여 참이다.

$\therefore$ ㈎: $8m+1$, ㈏: $9m+1$

따라서 ㈎, ㈏에 알맞은 식을 차례대로 나열한 것은 ①이다.

답 ①

15

문제 접근하기

2^m과 2^{-m}에 관련된 항을 분류하여 묶어 $n=m+1$일 때 (*)인 형태가 나오도록 정리한다.

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=a_1=3$, (우변)$=3$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

이다.

$n=m+1$일 때

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}a_k&=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}\\&=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}\\&\quad+\{2^{2(m+1)}-1\}\times2^{(m+1)m}+m\times2^{-(m+1)}\\&=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}\\&\quad+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{㈎\,2^{m(m+1)}}+m\times2^{-m-1}\\&=\{2^{m(m+1)}+(2^{2m+2}-1)\times2^{m(m+1)}\}\\&\quad+\{-(m+1)\times2^{-m}+m\times2^{-m-1}\}\\&=2^{m(m+1)}\{1+(2^{2m+2}-1)\}+2^{-m}\left\{-(m+1)+\frac{m}{2}\right\}\\&=\boxed{㈎\,2^{m(m+1)}}\times\boxed{㈏\,2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times2^{-m}\\&=2^{m(m+1)+2(m+1)}-(m+2)\times2^{-1}\times2^{-m}\\&=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times2^{-(m+1)}\end{aligned}$$

이다.

따라서 $n=m+1$일 때에도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times2^{-n}$

이다.

$\therefore$ ㈎: $2^{m(m+1)}$, ㈏: 2^{2m+2}

따라서 $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{2\times7+2}}{2^{3\times4}}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$

답 ④